

UULA.COM



UULA

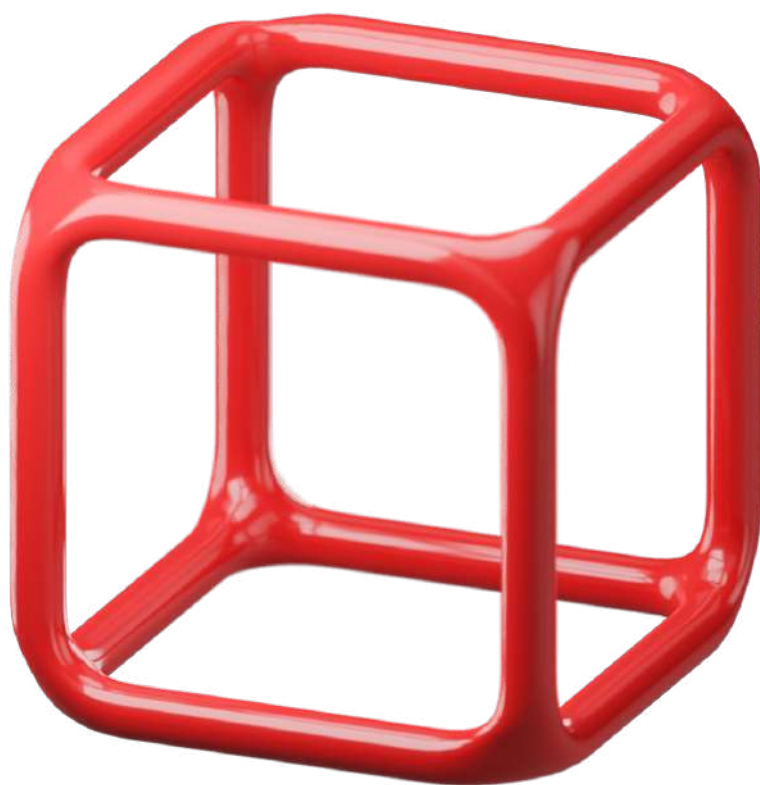
الرياضيات



الكورس الأول ✦ 2026 – 2027

10

UULA.COM



صَفْوَةُ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ

الرياضيات

الكورس الأول ✦ 2026 – 2027

10

حقق هدفك الدراسي

ريح بالك وارفع مستوى دراستك مع المذكرة الشاملة والفيديوهات التي تشرحها والاختبارات التي تدربك في منصة علا



نخبة المعلمين يجابونك
بأسرع وقت

ما فهمت؟ تواصل مع أقوى
المعلمين واحصل على شرح
لسؤالك

دروس يشرحها أقوى
معلمي الكويت

فيديوهات مبسطة قصيرة تشرح
لك كل شيء خطوة بخطوة

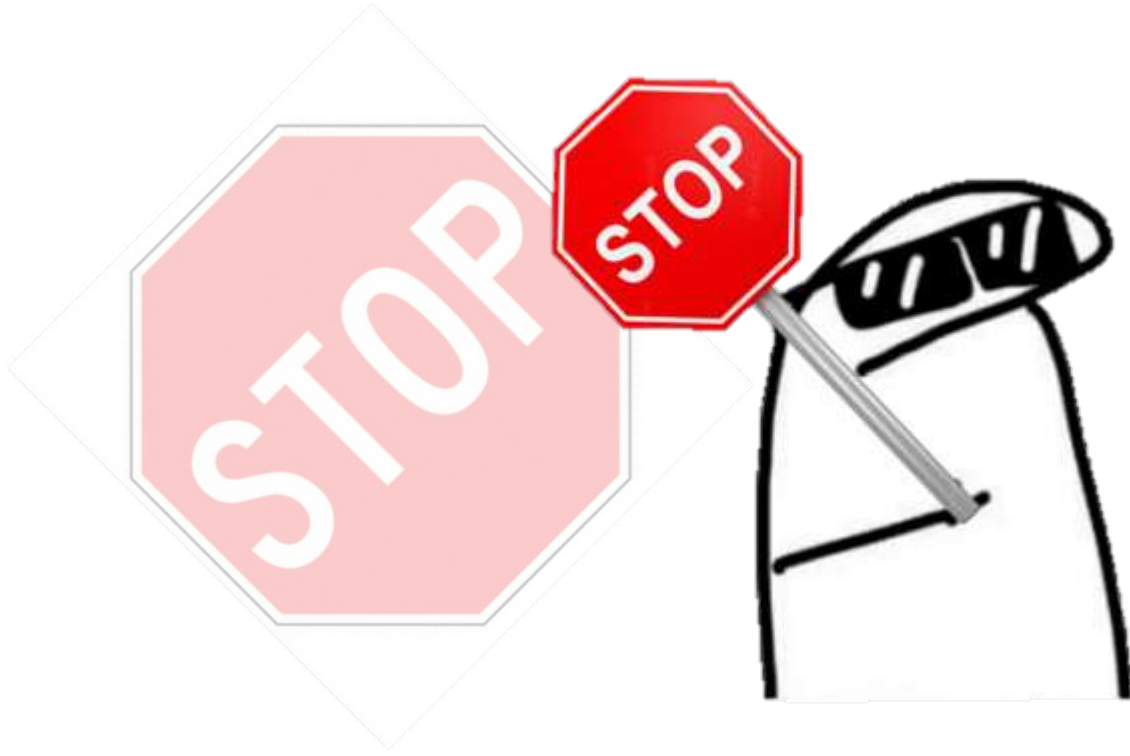
تفوق في القصير والفايل
مع نماذج اختبارات سابقة

نماذج اختبارات سابقة مشروحة
بالكامل تجهزك لاختبارك



اكتشف عالم التفوق مع منصة علا

لتشارك بالمادة وتستمتع بالشرح المميز صور
أو اضغط على رمز QR



قبل لا تكمل تأكد من هذه الروابط المهمة



التمارين
الموضوعية



المعلق والتغييرات

هذه المذكرة تغطي المادة كاملة. في حال وجود أي تغيير للمنهج أو تعليق جزء منه يمكنك تصوير الQR للتأكد من المقرر.

قائمة المحتوى

01

الوحدة 1 / الجبر وحل المعادلات

- 1 (1 - 1) دالة القيمة المطلقة
- 17 (1 - 2) حل معادلة القيمة المطلقة
- 27 (1 - 3) حل معادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد
- 38 (1 - 4) مجموع وناتج ضرب جذري معادلة تربيعية
- 48 (1 - 5) حل متباينة من الدرجة الثانية

02

الوحدة 2 / الهندسة المستوية

- 60 (2 - 1) التناسب
- 71 (2 - 2) تشابه المضلعات
- 78 (2 - 3) تشابه المثلثات
- 89 (2 - 4) التشابه في المثلثات القائمة الزاوية
- 95 (2 - 5) التناسبات والمثلثات المتشابهة

03

الوحدة 3 / حساب المثلثات

- 103 (3 - 1) النسب المثلثية الأساسية ومقلوباتها
- 115 (3 - 2) حل المثلث القائم
- 121 (3 - 3) زاوية الارتفاع - زاوية الانخفاض
- 128 (3 - 4) الدوال المثلثية "الدوال الدائرية"
- 145 (3 - 5) العلاقات بين الدوال المثلثية
- 153 (3 - 6) حل المعادلات المثلثية

04

الوحدة 4 / المنطق والإحصاء

- 161 (4 - 1) المنطق والتقارير
- 166 (4 - 2) أدوات الربط "العمليات المنطقية"
- 178 (4 - 3) رمز المجموع Σ
- 185 (4 - 4) مقاييس التشتت - الانحراف المعياري

الآلة الحاسبة

احرص على امتلاك الآلة الحاسبة العلمية المناسبة
يمكنك استخدام أحد هذه الإصدارات

الآلة الحاسبة الإنكليزية

Casio fx-991-EX



الآلة الحاسبة العربية

Casio fx-991-ARX



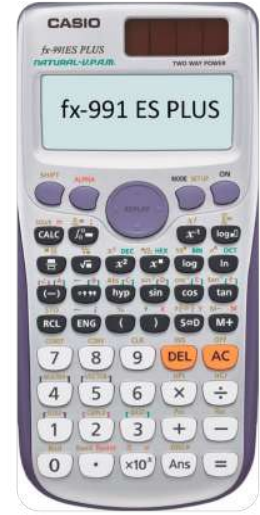
الآلة الحاسبة القديمة
بإصدارها الثاني

Casio fx-991ES PLUS
2nd edition



الآلة الحاسبة القديمة

Casio fx-991ES PLUS



تعليمات أساسية

MENU 922 MENU - 22	حل المعادلة من الدرجة الثانية: الآلة العربية: الآلة الإنكليزية:
MENU 923 MENU - 23	حل المعادلة من الدرجة الثالثة: الآلة العربية: الآلة الإنكليزية:
MENU 912 MENU - 12	حل نظام معادلتين خطيتين: الآلة العربية: الآلة الإنكليزية:
SHIFT MENU 21	التحويل لنظام الدرجات
SHIFT MENU 22	التحويل لنظام الراديان
SHIFT (	رمز القيمة المطلقة
MENU 2	التحويل لنظام الأعداد المركبة
ENG	كتابة الوحدة التخيلية i
ALPHA) أو	كتابة الرمز x (يوجد له زر خاص)
SHIFT 93 = AC	إعادة ضبط المصنع

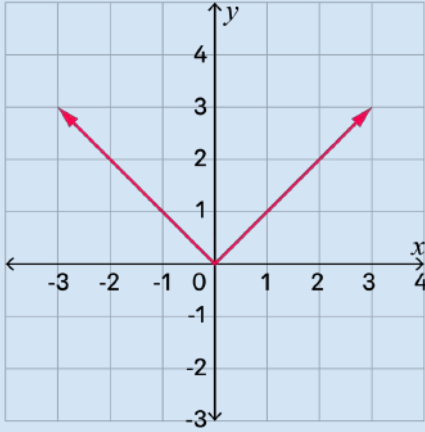
تعليمات أساسية

MODE 53	حل المعادلة من الدرجة الثانية
MODE 54	حل المعادلة من الدرجة الثالثة
MODE 51	حل نظام معادلتين خطيتين
SHIFT MODE 3	التحويل لنظام الدرجات
SHIFT MODE 4	التحويل لنظام الراديان
SHIFT hyp	رمز القيمة المطلقة
MODE 2	التحويل لنظام الأعداد المركبة
ENG	كتابة الوحدة التخيلية i
ALPHA)	كتابة الرمز x
SHIFT 93 = AC	إعادة ضبط المصنع



(1 - 1) دالة القيمة المطلقة

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	1	2	3



دالة القيمة المطلقة $f(x) = |x|$

الصورة الأساسية لدالة القيمة المطلقة:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|$$

مجالها $\mathbb{R}$ "مجموعة الأعداد الحقيقية"

مجالها المقابل $\mathbb{R}$

المدى $[0, \infty)$

قاعدة اقترانها $f(x) = |x|$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

رأس منحنى الدالة هو نقطة الأصل $(0,0)$

المنحنى متماثل حول محور الصادات $x = 0$ (دالة زوجية)

خواص القيمة المطلقة

- $|a| \geq 0$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$
- $|a|^2 = a^2$
- $\sqrt{x^2} = |x|$

الصورة القياسية لدالة القيمة المطلقة

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |ax + b| + c$$

مجالها $\mathbb{R}$ "مجموعة الأعداد الحقيقية"

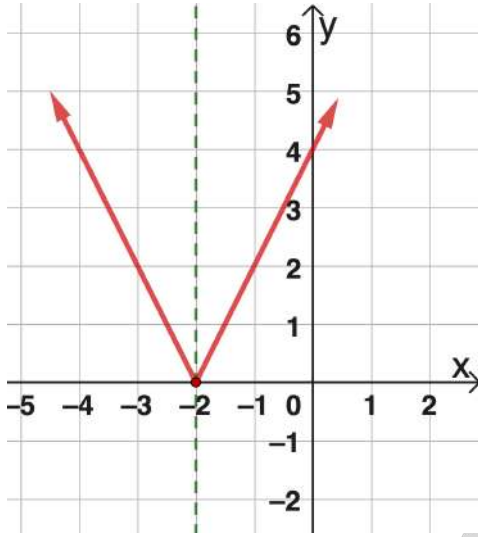
مجالها المقابل $\mathbb{R}$

رأس منحنى الدالة $(-\frac{b}{a}, c)$

معادلة محور التماثل $x = -\frac{b}{a}$

المدى $[c, \infty)$

لو كانت الدالة $f(x) = -|ax + b| + c$, يصبح المدى $(-\infty, c]$ والمنحنى مفتوح للأسفل



Q مثال 1: ارسم بيان الدالة $f(x) = |2x + 4|$

$$2x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4}{2} = -2$$

x	-3	-2	-1
y	2	0	2

$$a = 2, b = 4, c = 0$$

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$

$$\left(-\frac{b}{a}, c\right) = (-2, 0) \text{ رأس المنحنى}$$

$$x = -\frac{b}{a} = -2 \text{ محور التماثل}$$

$$[c, \infty) = [0, \infty) \text{ مدى الدالة}$$

Q تحقق من فهمك 1: ارسم بيان الدالة $f(x) = |3x + 6|$

$$3x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-6}{3} = -2$$

x	-3	-2	-1
y	3	0	3

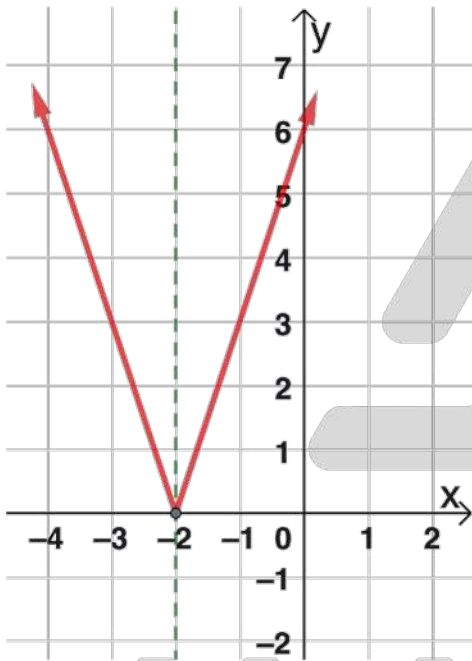
$$a = 3, b = 6, c = 0$$

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$

$$\left(-\frac{b}{a}, c\right) = (-2, 0) \text{ رأس المنحنى}$$

$$x = -\frac{b}{a} = -2 \text{ محور التماثل}$$

$$[c, \infty) = [0, \infty) \text{ مدى الدالة}$$



مثال 2: أوجد رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل ومدى كل من الدوال التالية ثم ارسم بيان كل منها:

Q $y = |x - 2| + 1$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

x	1	2	3
y	2	1	2

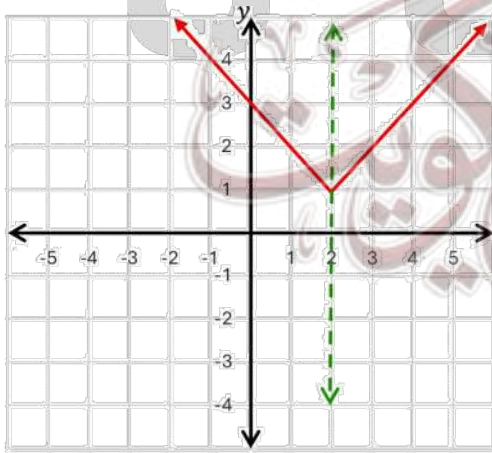
$$a = 1, b = -2, c = 1$$

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$

$$\left(-\frac{b}{a}, c\right) = (2, 1) \text{ رأس المنحنى}$$

$$x = -\frac{b}{a} = 2 \text{ محور التماثل}$$

$$[c, \infty) = [1, \infty) \text{ مدى الدالة}$$



$$y = -|2x + 3|$$

$$2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3}{2} = -1.5$$

x	-2	-1.5	-1
y	-1	0	-1

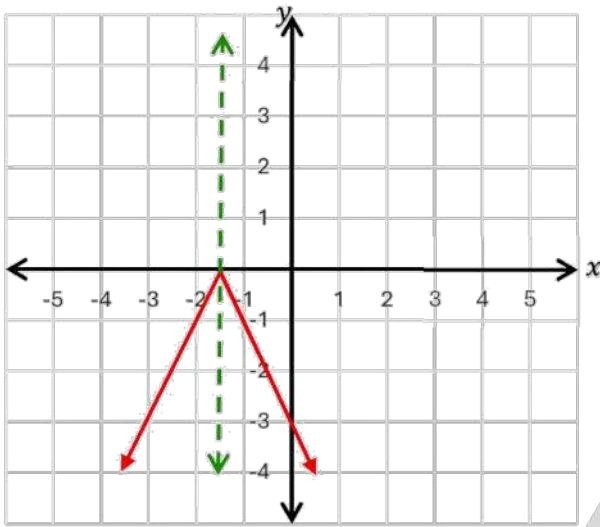
$$a = 2, b = 3, c = 0$$

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$

$$\left(-\frac{b}{a}, c\right) = (-1.5, 0) \text{ رأس المنحنى}$$

$$x = -\frac{b}{a} = -1.5 \text{ محور التماثل}$$

$$(-\infty, c] = (-\infty, 0] \text{ مدى الدالة}$$



تحقق من فهمك 2: أوجد رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل ومدى كل من الدوال التالية ثم ارسم :

$$f(x) = |x + 1| + 3$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	-2	-1	0
y	4	3	4

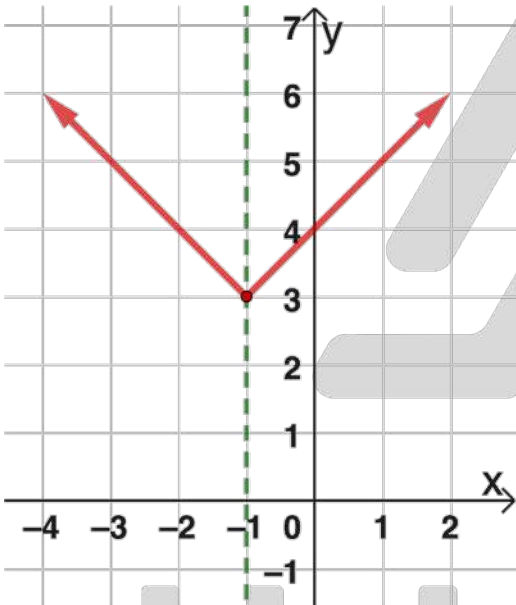
$$a = 1, b = 1, c = 3$$

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$

$$\left(-\frac{b}{a}, c\right) = (-1, 3) \text{ رأس المنحنى}$$

$$x = -\frac{b}{a} = -1 \text{ محور التماثل}$$

$$[c, \infty) = [3, \infty) \text{ مدى الدالة}$$



$$y = -|x + 1|$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	-2	-1	0
y	-1	0	-1

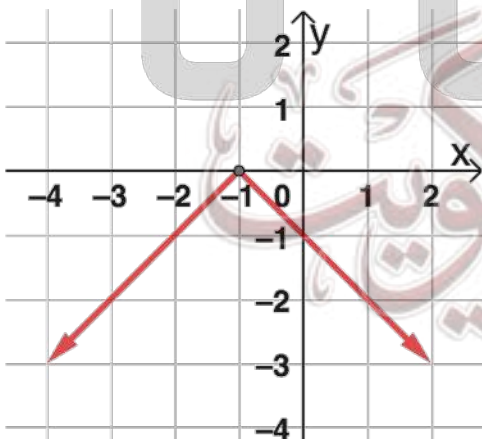
$$a = 1, b = 1, c = 0$$

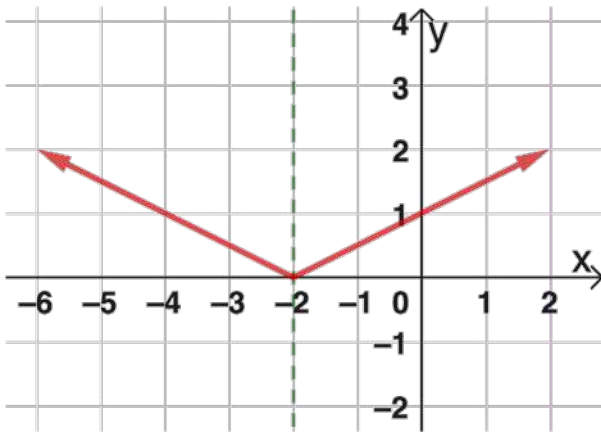
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$

$$\left(-\frac{b}{a}, c\right) = (-1, 0) \text{ رأس المنحنى}$$

$$x = -\frac{b}{a} = -1 \text{ محور التماثل}$$

$$(-\infty, c] = (-\infty, 0] \text{ مدى الدالة}$$





$$g(x) = \left| \frac{1}{2}x + 1 \right|$$

$$0.5x + 1 = 0 \Rightarrow x = -2$$

x	-3	-2	-1
y	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

$$a = \frac{1}{2} = 0.5, b = 1, c = 0$$

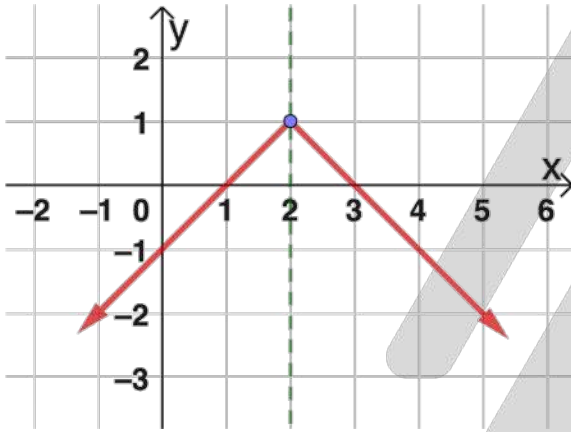
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$

رأس المنحنى $(-\frac{b}{a}, c) = (-2, 0)$

محور التماثل $x = -\frac{b}{a} = -2$

مدى الدالة $[c, \infty) = [0, \infty)$

$$y = 1 - |x - 2|$$



$$y = -|x - 2| + 1$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

x	1	2	3
y	0	1	0

$$a = 1, b = -2, c = 1$$

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$

رأس المنحنى $(-\frac{b}{a}, c) = (-\frac{-2}{1}, 1) = (2, 1)$

محور التماثل $x = -\frac{b}{a} = 2$

مدى الدالة $(-\infty, c] = (-\infty, 1]$

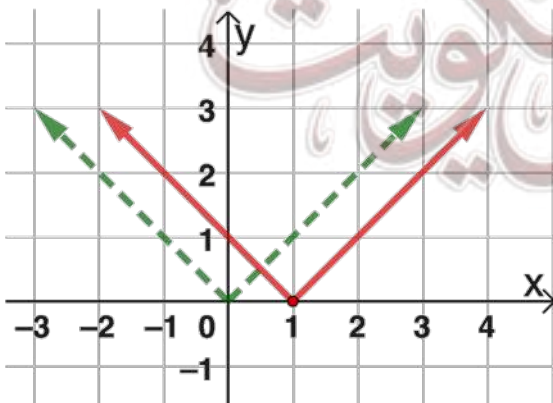
التحويلات الهندسية لمنحنى الدالة الأساسية $f(x) = |x|$



الإزاحة الأفقية:

يكون منحنى الدالة $f(x) = |x + a|$ هو نفس منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ بإزاحة أفقية مقدارها $|a|$ وحدة جهة اليمين إذا كانت $a < 0$ جهة اليسار إذا كانت $a > 0$

مثال 3: ارسم بيان الدالة $f(x) = |x - 1|$ باستخدام التحويلات الهندسية



دالة المرجع $g(x) = x $			
x	-1	0	1
y	1	0	1

إزاحة وحدة إلى اليمين

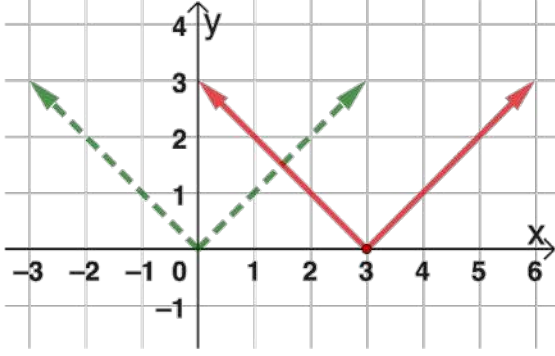
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$

رأس المنحنى $(1, 0)$

محور التماثل $x = 1$

تحقق من فهمك 3: ارسم بيان كل من الدوال التالية مستخدماً التحويلات الهندسية

$$f(x) = |x - 3|$$

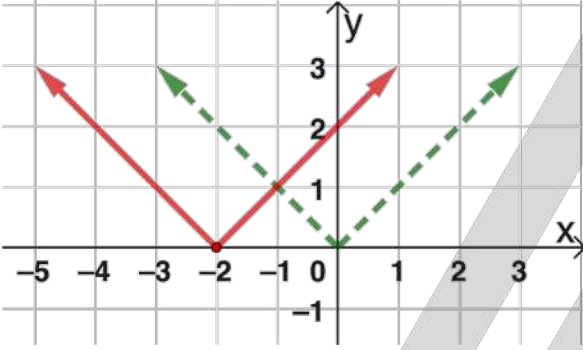


دالة المرجع $g(x) = |x|$

x	-1	0	1
y	1	0	1

إزاحة 3 وحدات إلى اليمين
 مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
 رأس المنحنى (3, 0)
 محور التماثل $x = 3$

$$y = |x + 2|$$

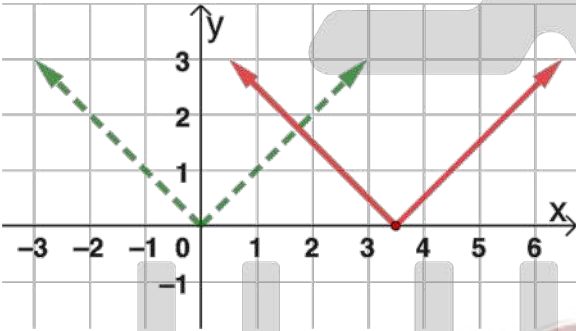


دالة المرجع $g(x) = |x|$

x	-1	0	1
y	1	0	1

إزاحة وحدتان إلى اليسار
 مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
 رأس المنحنى (-2, 0)
 محور التماثل $x = -2$

$$f(x) = |x - 3.5|$$

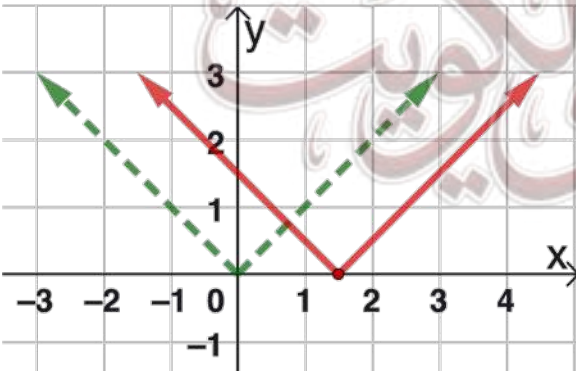


دالة المرجع $g(x) = |x|$

x	-1	0	1
y	1	0	1

إزاحة 3 وحدات ونصف إلى اليمين
 مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
 رأس المنحنى (3.5, 0)
 محور التماثل $x = 3.5$

$$f(x) = |x - 1.5|$$



دالة المرجع $g(x) = |x|$

x	-1	0	1
y	1	0	1

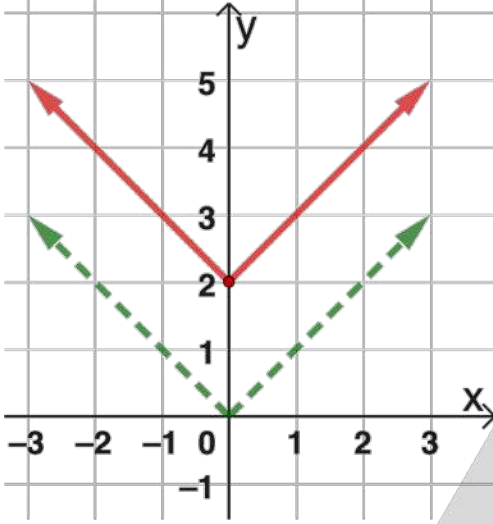
إزاحة وحدة ونصف إلى اليمين
 مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
 رأس المنحنى (1.5, 0)
 محور التماثل $x = 1.5$



الإزاحة الرأسية:

يكون منحنى الدالة $f(x) = |x| + b$ هو نفس منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ بإزاحة رأسية مقدارها $|b|$ وحدة جهة الأسفل إذا كانت $b < 0$ وجهة الأعلى إذا كانت $b > 0$

مثال 4: ارسم بيان الدالة $f(x) = |x| + 2$ باستخدام التحويلات الهندسية

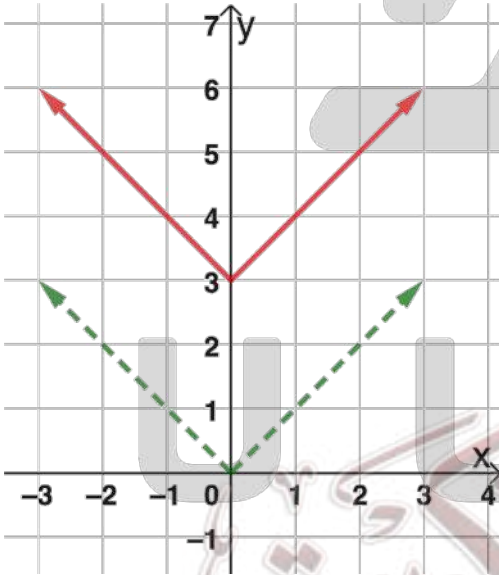


دالة المرجع $g(x) = x $			
x	-1	0	1
y	1	0	1

إزاحة وحدتان إلى الأعلى
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
رأس المنحنى (0, 2)
محور التماثل $x = 0$

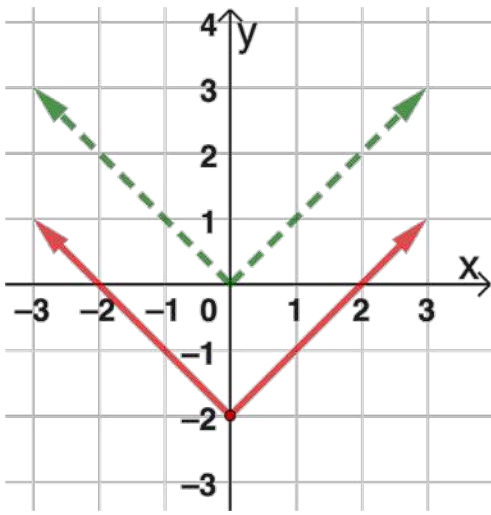
تحقق من فهمك 4: ارسم بيان كل من الدوال التالية مستخدماً التحويلات الهندسية

مثال 4: ارسم بيان كل من الدوال التالية مستخدماً التحويلات الهندسية



دالة المرجع $g(x) = x $			
x	-1	0	1
y	1	0	1

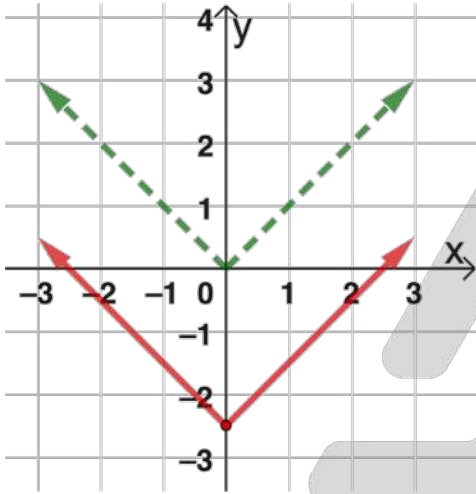
إزاحة 3 وحدات إلى الأعلى
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
رأس المنحنى (0, 3)
محور التماثل $x = 0$



$$f(x) = |x| - 2$$

دالة المرجع $g(x) = x $			
x	-1	0	1
y	1	0	1

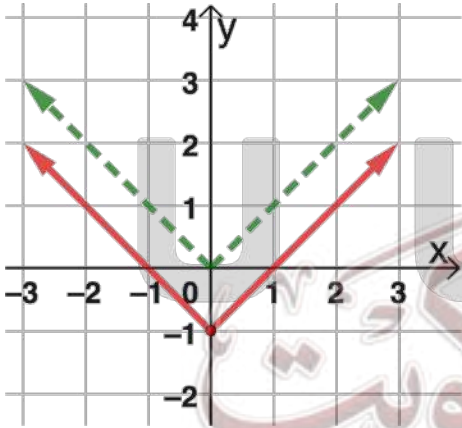
إزاحة وحدتان إلى الأسفل
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
رأس المنحنى $(0, -2)$
محور التماثل $x = 0$



$$f(x) = |x| - 2.5$$

دالة المرجع $g(x) = x $			
x	-1	0	1
y	1	0	1

إزاحة وحدتان ونصف إلى الأسفل
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
رأس المنحنى $(0, -2.5)$
محور التماثل $x = 0$



$$f(x) = |x| - 1$$

دالة المرجع $g(x) = x $			
x	-1	0	1
y	1	0	1

إزاحة وحدة واحدة إلى الأسفل
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
رأس المنحنى $(0, -1)$
محور التماثل $x = 0$

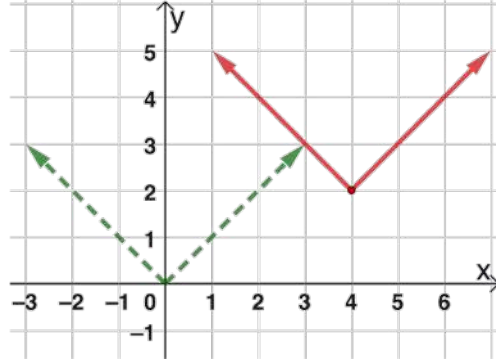


الإزاحة المركبة (أفقية ثم رأسية):

يكون منحنى الدالة $f(x) = |x + a| + b$ هو نفس منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ بإزاحة أفقية مقدارها $|a|$ وحدة (مع مراعاة الاتجاه لليمين أو اليسار) وإزاحة رأسية مقدارها $|b|$ وحدة (مع مراعاة الاتجاه للأعلى أو للأسفل)

مثال 5: ارسم بيان كل دالة باستخدام دالة المرجع و التحويلات الهندسية

$$f(x) = |x - 4| + 2$$

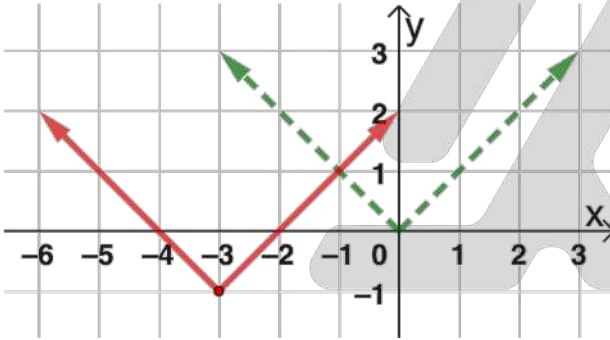


دالة المرجع $g(x) = |x|$

x	-1	0	1
y	1	0	1

إزاحة 4 وحدات لليمين و وحدتان للأعلى
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
رأس المنحنى (4, 2)
محور التماثل $x = 4$

$$f(x) = |x + 3| - 1$$



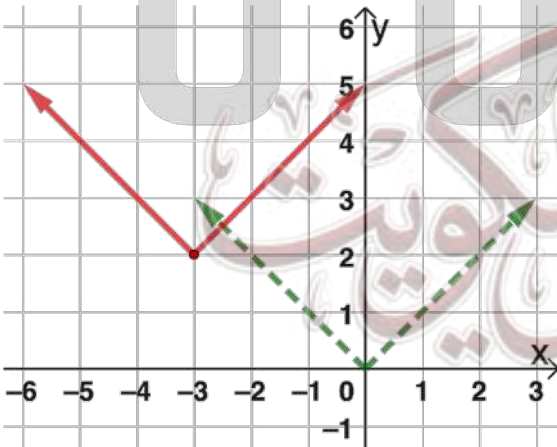
دالة المرجع $g(x) = |x|$

x	-1	0	1
y	1	0	1

إزاحة 3 وحدات لليسار و وحدة واحدة للأسفل
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
رأس المنحنى (-3, -1)
محور التماثل $x = -3$

تحقق من فهمك 5: ارسم بيان كل دالة باستخدام دالة المرجع و التحويلات الهندسية

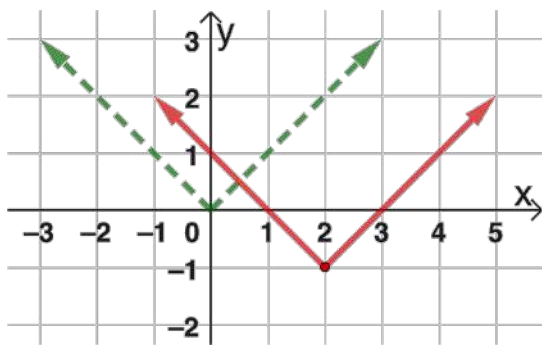
$$f(x) = |x + 3| + 2$$



دالة المرجع $g(x) = |x|$

x	-1	0	1
y	1	0	1

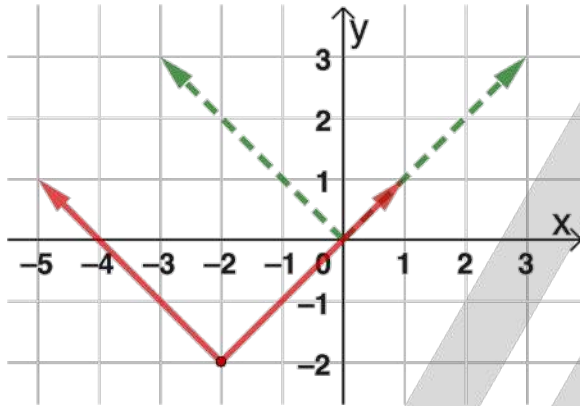
إزاحة 3 وحدات لليسار و وحدتان للأعلى
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
رأس المنحنى (-3, 2)
محور التماثل $x = -3$



$$f(x) = |x - 2| - 1$$

دالة المرجع $g(x) = x $			
x	-1	0	1
y	1	0	1

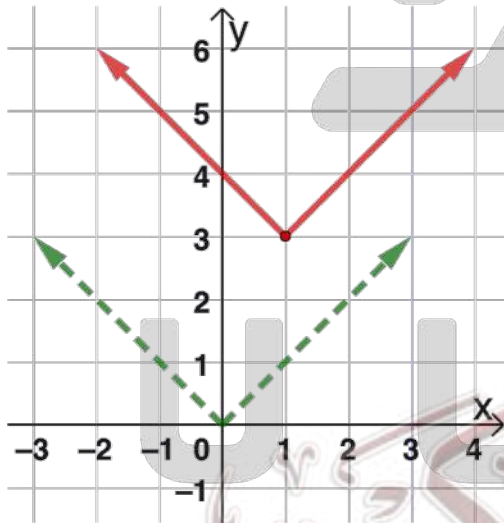
إزاحة وحدتان إلى اليمين ووحدة واحدة إلى الأسفل
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
رأس المنحنى $(2, -1)$
محور التماثل $x = 2$



$$f(x) = |x + 2| - 2$$

دالة المرجع $g(x) = x $			
x	-1	0	1
y	1	0	1

إزاحة وحدتان إلى اليسار ووحدة واحدة إلى الأسفل
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
رأس المنحنى $(-2, -2)$
محور التماثل $x = -2$



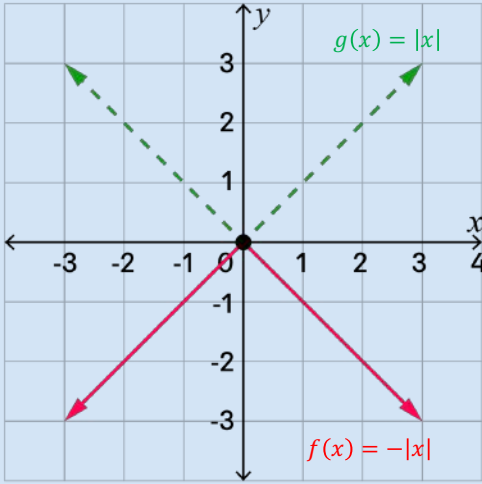
$$f(x) = |x - 1| + 3$$

دالة المرجع $g(x) = x $			
x	-1	0	1
y	1	0	1

إزاحة وحدة لليمين و3 وحدات للأعلى
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
رأس المنحنى $(1, 3)$
محور التماثل $x = 1$

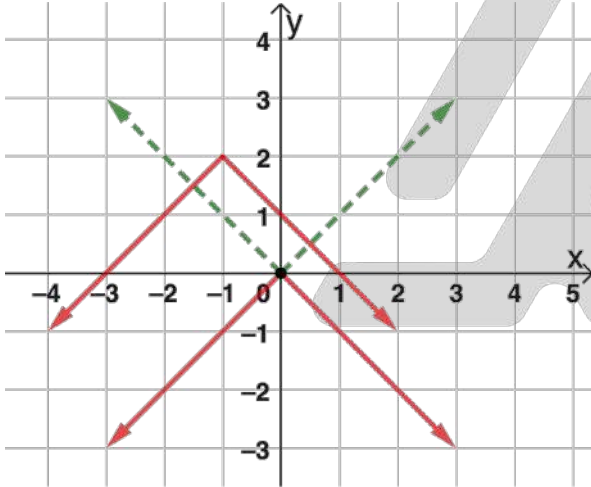


الانعكاس في محور السينات للدالة الأساسية $g(x) = |x|$



بيان الدالة $f(x) = -|x|$
هو انعكاس في محور السينات
لبيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$

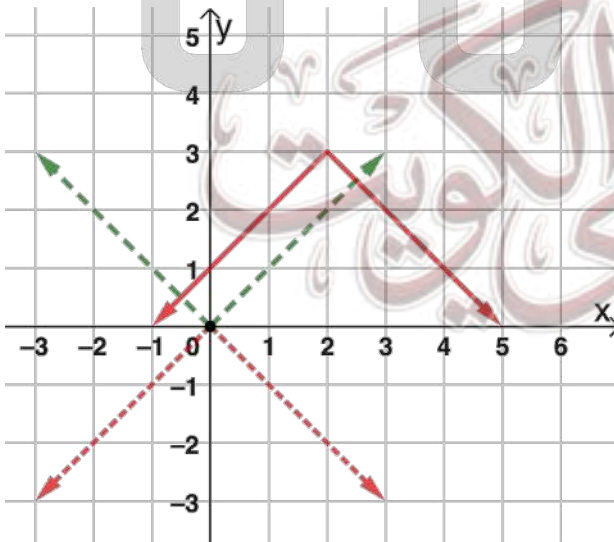
مثال 5: ارسم بيان الدالة $f(x) = -|x + 1| + 2$ باستخدام منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$



دالة المرجع $g(x) = x $			
x	-1	0	1
y	1	0	1

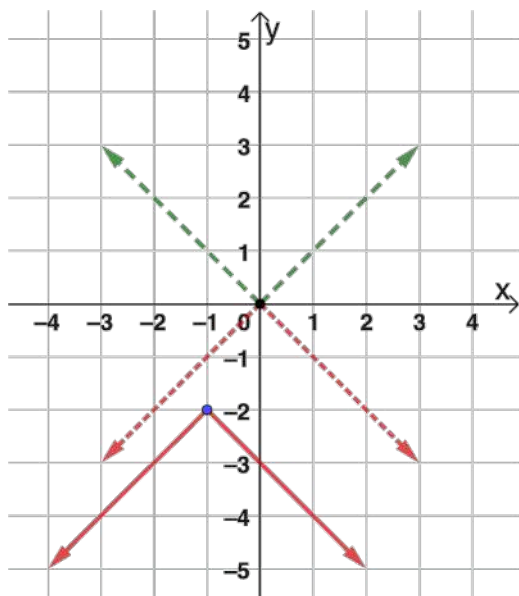
انعكاس بيان الدالة الأساسية حول محور السينات
إزاحة أفقية وحدة واحدة لليسار ووحدة واحدة للأعلى
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
رأس المنحنى $(-1, 2)$
محور التماثل $x = -1$

تحقق من فهمك 6: ارسم بيان كل دالة باستخدام منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$



دالة المرجع $g(x) = x $			
x	-1	0	1
y	1	0	1

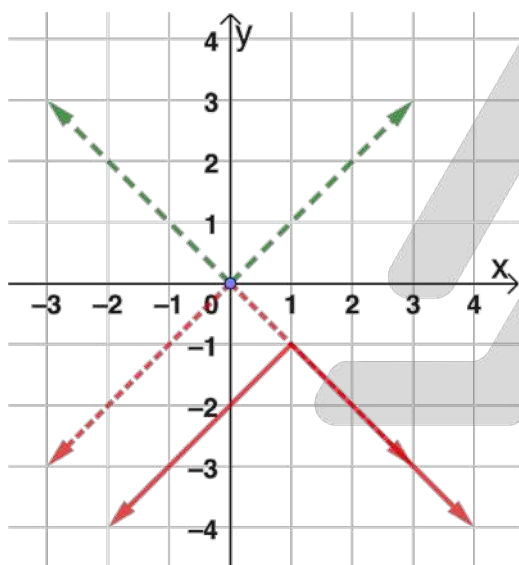
انعكاس بيان الدالة الأساسية حول محور السينات
إزاحة وحدتان لليمين
و 3 وحدات للأعلى
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
رأس المنحنى $(2, 3)$
محور التماثل $x = 2$



$$f(x) = -|x + 1| - 2$$

دالة المرجع $g(x) = x $			
x	-1	0	1
y	1	0	1

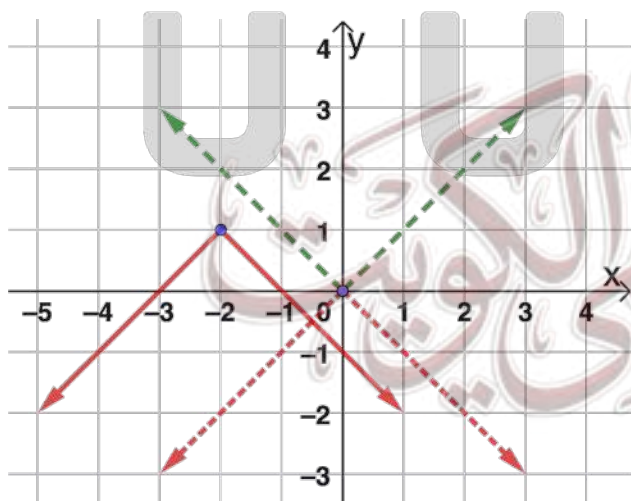
انعكاس بيان الدالة الأساسية حول محور السينات
إزاحة وحدة لليساو ووحدة للأسفل
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
رأس المنحنى $(-1, -2)$
محور التماثل $x = -1$



$$f(x) = -|x - 1| - 1$$

دالة المرجع $g(x) = x $			
x	-1	0	1
y	1	0	1

انعكاس بيان الدالة الأساسية حول محور السينات
إزاحة وحدة لليمين ووحدة للأسفل
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
رأس المنحنى $(1, -1)$
محور التماثل $x = 1$



$$f(x) = -|x + 2| + 1$$

دالة المرجع $g(x) = x $			
x	-1	0	1
y	1	0	1

انعكاس بيان الدالة الأساسية حول محور السينات
إزاحة وحدتان لليساو ووحدة للأعلى
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
رأس المنحنى $(-2, 1)$
محور التماثل $x = -2$

تدرب وحل المسائل:

تمارين موضوعية:



ظل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. بيان الدالة $f(x) = |x|$ ينطبق على بيان الدالة $g(x) = x$

(a) (b)
2. بيان الدالة $f(x) = |x|$ هو انعكاس لبيان الدالة $g(x) = -|x|$ حول محور السينات

(a) (b)
3. بيان الدالة $f(x) = |x - 4| + 2$ يمكن الحصول عليه بانسحاب بيان الدالة $g(x) = |x|$ في الاتجاه المحدد 4 وحدات جهة اليمين ووحدة واحدة للأعلى

(a) (b)
4. محور التماثل للدالة $f(x) = |x - 3|$ هو $x = 3$

(a) (b)
5. مدى الدالة $f(x) = |x + 3| - 3$ هو $[-, 3\infty)$

(a) (b)

اختر الإجابة الصحيحة:

6. أي من الدوال التالية رأس منحنائها: $(-3, 2)$

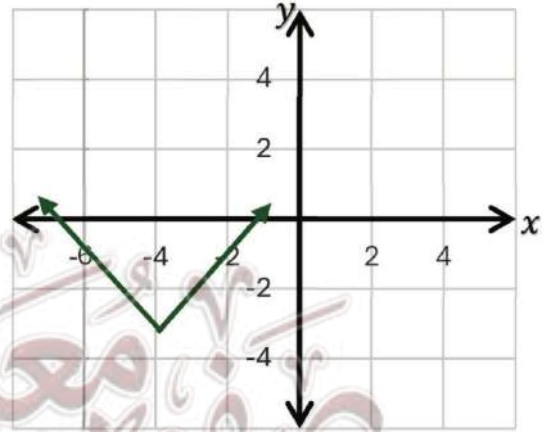
(a) $y = |x + 3| + 2$

(b) $y = |x - 3| + 2$

(c) $y = |x + 3| - 2$

(d) $y = |x - 3| - 2$
7. أي من قواعد الدوال التالية تمثل منحنى الدالة المرسوم:

- (a) $y = |x - 4| - 3$
- (b) $y = |x - 4| + 3$
- (c) $y = |x + 4| + 3$
- (d) $y = |x + 4| - 3$





أسئلة المقال:

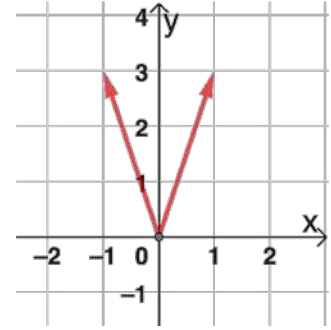
Q مثل بياناً كل مما يلي ثم حدد المجال والمدى

a) $g(x) = |-3x|$

محور التماثل $-3x = 0 \Rightarrow x = 0$

x	-1	0	1
y	3	0	3

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
مدى الدالة $[0, \infty)$

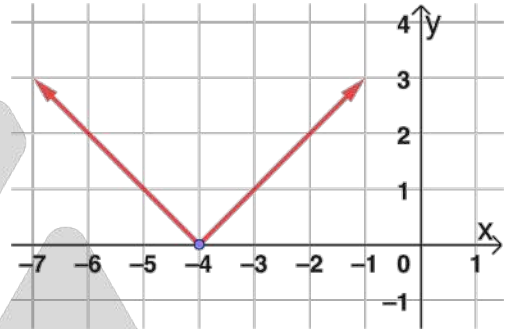


b) $h(x) = |x + 4|$

محور التماثل $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$

x	-5	-4	-3
y	1	0	1

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
مدى الدالة $[0, \infty)$

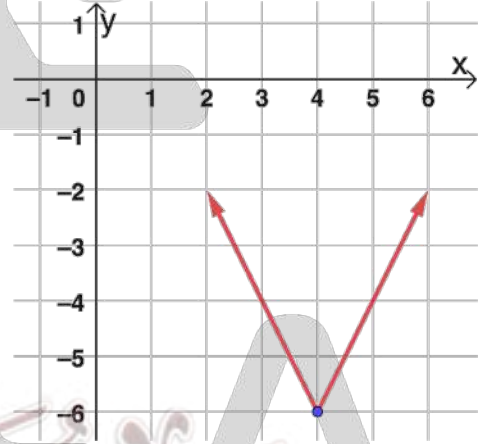


c) $f(x) = 2|x - 4| - 6$

محور التماثل $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

x	3	4	5
y	-4	-6	-4

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
مدى الدالة $[-6, \infty)$

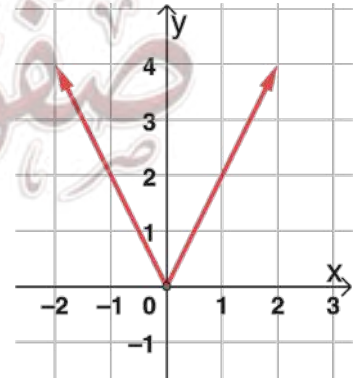


d) $g(x) = 2|x|$

محور التماثل $x = 0$

x	-1	0	1
y	2	0	2

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
مدى الدالة $[0, \infty)$

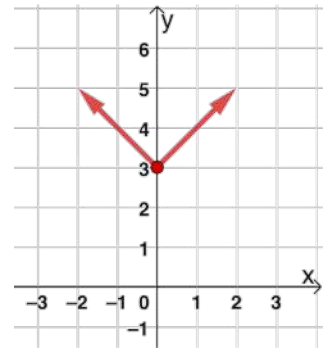


e) $g(x) = |x| + 3$

محور التماثل $x = 0$

x	-1	0	1
y	4	3	4

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
مدى الدالة $[0, \infty)$

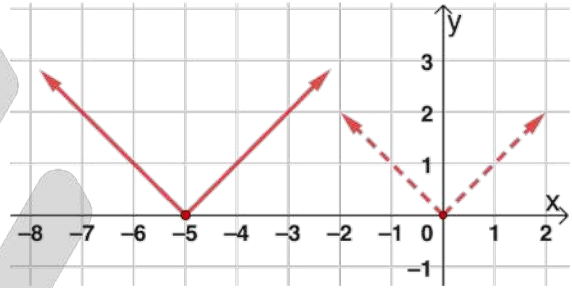


Q مثل بياناً كل مما يلي مستخدماً التحويلات الهندسية للدالة الأساسية $g(x) = |x|$

a) $g(x) = |x + 5|$

دالة المرجع $f(x) = x $			
x	-1	0	1
y	1	0	1

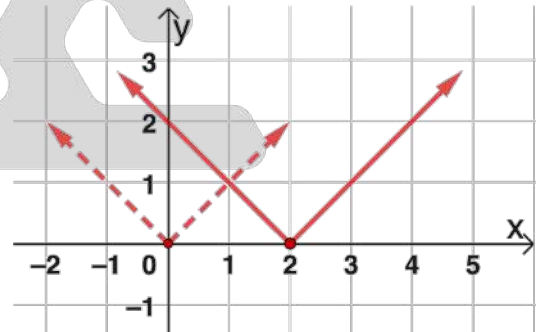
إزاحة 5 وحدات إلى اليسار
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
رأس المنحنى $(-5, 0)$
محور التماثل $x = -5$



b) $h(x) = |x - 2|$

دالة المرجع $g(x) = x $			
x	-1	0	1
y	1	0	1

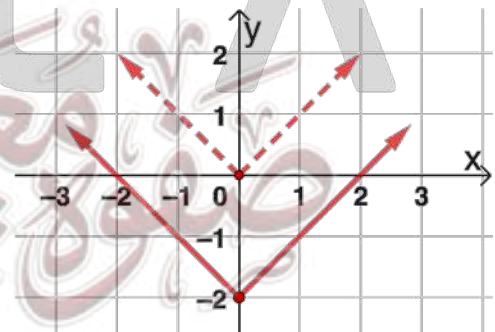
إزاحة وحدتان إلى اليمين
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
رأس المنحنى $(2, 0)$
محور التماثل $x = 2$



c) $f(x) = |x| - 2$

دالة المرجع $g(x) = x $			
x	-1	0	1
y	1	0	1

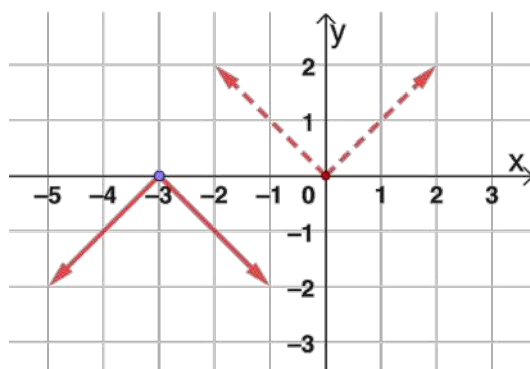
إزاحة وحدتان إلى الأسفل
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
رأس المنحنى $(0, -2)$
محور التماثل $x = 0$



d) $g(x) = -|x + 3|$

دالة المرجع $f(x) = x $			
x	-1	0	1
y	1	0	1

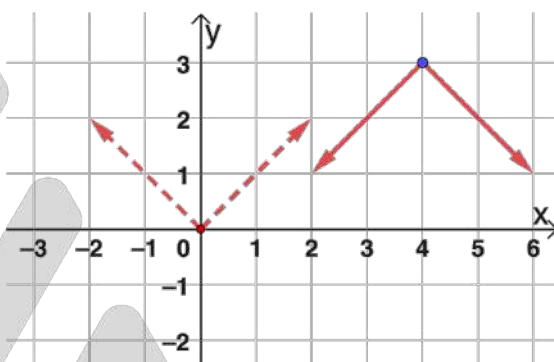
انعكاس في محور السينات
ثم إزاحة 3 وحدات لليسار
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
رأس المنحنى $(-3, 0)$
محور التماثل $x = -3$



e) $g(x) = -|x - 4| + 3$

دالة المرجع $f(x) = x $			
x	-1	0	1
y	1	0	1

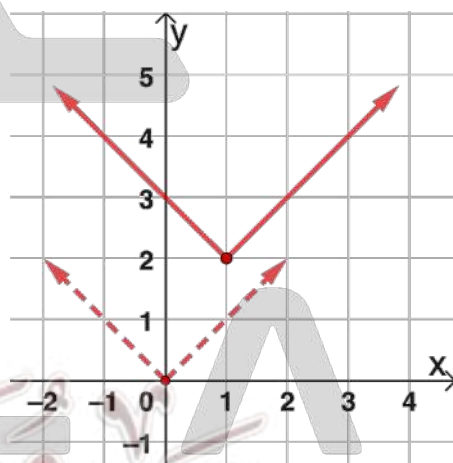
انعكاس بيان دالة المرجع حول محور السينات
ثم إزاحة 4 وحدات لليمين
ثم 3 وحدات للأعلى
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
رأس المنحنى $(4, 3)$
محور التماثل $x = 4$



f) $g(x) = |1 - x| + 2$

دالة المرجع $f(x) = x $			
x	-1	0	1
y	1	0	1

$g(x) = |x - 1| + 2$
إزاحة وحدة لليمين
ثم وحدتان للأعلى
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$
رأس المنحنى $(1, 2)$
محور التماثل $x = 1$





ارسم بيانياً كل من الدالتين على نفس المستوى الإحداثي، ثم أوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطعهم

a) $f(x) = |x - 2|$, $g(x) = -|x - 1| + 3$

الدالة $f(x)$:

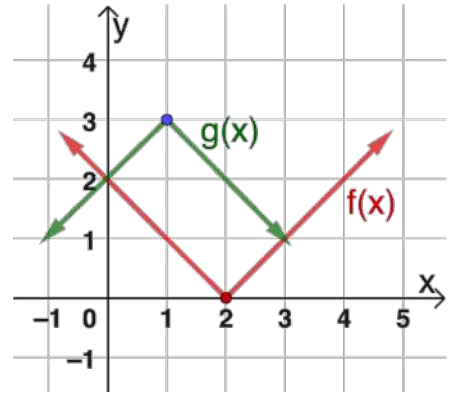
إزاحة لبيان دالة المرجع $h(x) = |x|$ وحدتان إلى اليمين

الدالة $g(x)$:

انعكاس لبيان دالة المرجع حول محور السينات
ثم إزاحة وحدة لليمين و3 وحدات إلى الأعلى

الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع

$$x = 0 , \quad x = 3$$



b) $f(x) = |x - 3|$, $g(x) = 3 - |x|$

$$g(x) = -|x| + 3$$

الدالة $f(x)$:

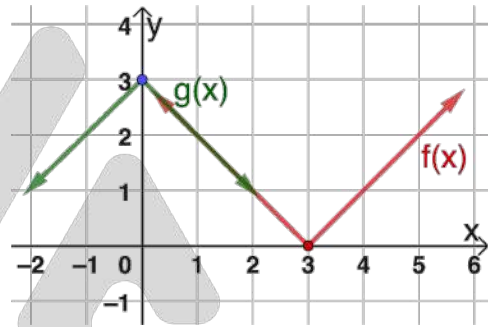
إزاحة لبيان دالة المرجع $h(x) = |x|$ 3 وحدات إلى اليمين

الدالة $g(x)$:

انعكاس لبيان دالة المرجع حول محور السينات
ثم إزاحة 3 وحدات إلى الأعلى

الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع

$$[0, 3]$$



c) $f(x) = |x - 2| - 3$, $g(x) = 4 - |x - 2|$

$$g(x) = -|x - 2| + 4$$

الدالة $f(x)$:

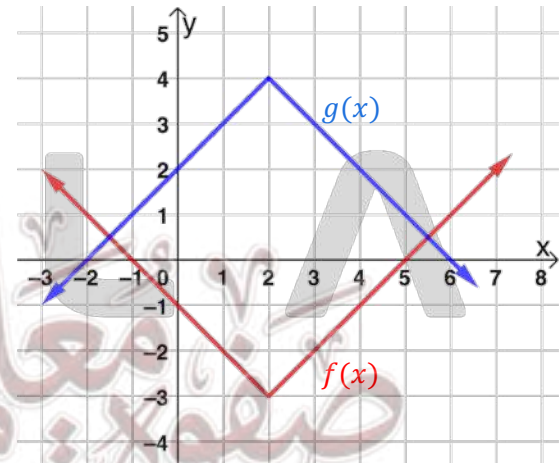
إزاحة لبيان دالة المرجع وحدتان إلى اليمين
و3 وحدات إلى الأسفل

الدالة $g(x)$:

انعكاس لبيان دالة المرجع حول محور السينات
ثم إزاحة وحدتان إلى اليمين و4 وحدات للأعلى

الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع

$$x = -1.5 , \quad x = 5.5$$



(2 - 1) حل معادلة القيمة المطلقة



خواص القيمة المطلقة

لكل $a, b \in R$ فإن

- $|a| \geq 0$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $|x - a| = |a - x|$
- $\frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right|, b \neq 0$
- $|x| = |-x|$
- $|n|^2 = n^2$
- $\sqrt{x^2} = |x|$ لأي عدد حقيقي x

💡 تذكر حل المعادلة $|ax + b| = c, c \geq 0$
 $ax + b = c$ or $ax + b = -c$

أوجد مجموعة حل لكل من المعادلات التالية:

Q $|x - 3| = 2$

$$\begin{aligned} x - 3 &= 2 \text{ or } x - 3 = -2 \\ x &= 5, \quad x = 1 \\ \therefore S.S &= \{1, 5\} \end{aligned}$$

Q $|3x + 2| = 0$

$$\begin{aligned} 3x + 2 &= 0 \\ 3x &= -2 \\ x &= -\frac{2}{3} \\ \therefore S.S &= \left\{ -\frac{2}{3} \right\} \end{aligned}$$

Q $|5x + 2| = -4$

$$\begin{aligned} \because -4 &< 0 \\ \therefore S.S &= \emptyset \end{aligned}$$



أولاً: حل المعادلة $|ax + b| = |cx + d|$

مثال 1: أوجد مجموعة حل المعادلة $|x - 2| = |2x - 1|$

طريقة القيمة المطلقة:

$$\begin{aligned} x - 2 &= 2x - 1 \\ x - 2x &= 2 - 1 \\ -x &= 1 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} x - 2 &= -2x + 1 \\ x + 2x &= 2 + 1 \\ 3x &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore S.S = \{-1, 1\}$$

طريقة تربيع الطرفين:

$$\begin{aligned} \therefore |x - 2| &= |2x - 1| \\ \therefore (|x - 2|)^2 &= (|2x - 1|)^2 \\ x^2 - 4x + 4 &= 4x^2 - 4x + 1 \\ 4x^2 - 4x + 1 - x^2 + 4x - 4 &= 0 \\ 3x^2 - 3 &= 0 \\ x &= 1, x = -1 \\ \therefore S.S &= \{-1, 1\} \end{aligned}$$

تحقق من فهمك 1: أوجد مجموعة حل المعادلة $|x - 1| = |2x + 2|$

طريقة القيمة المطلقة:

$$\begin{aligned} x - 1 &= 2x + 2 \\ x - 2x &= 1 + 2 \\ -x &= 3 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} x - 1 &= -2x - 2 \\ x + 2x &= 1 - 2 \\ 3x &= -1 \\ x &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore S.S = \left\{-3, -\frac{1}{3}\right\}$$

طريقة تربيع الطرفين:

$$\begin{aligned} \therefore |x - 1| &= |2x + 2| \\ \therefore (|x - 1|)^2 &= (|2x + 2|)^2 \\ x^2 - 2x + 1 &= 4x^2 + 8x + 4 \\ x^2 - 2x + 1 - 4x^2 - 8x - 4 &= 0 \\ -3x^2 - 10x - 3 &= 0 \\ x &= -3, x = -\frac{1}{3} \\ \therefore S.S &= \left\{-3, -\frac{1}{3}\right\} \end{aligned}$$



مثال 2: أوجد مجموعة حل لكل من المعادلات التالية:

Q $|x + 4| = |x - 3|$

$$\begin{aligned} x + 4 &= x - 3 \\ x - x &= -4 - 3 \\ 0 &= -7 \end{aligned}$$

عبارة خاطئة لا يوجد حل

or

$$\begin{aligned} x + 4 &= -x + 3 \\ x + x &= -4 + 3 \\ 2x &= -1 \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore S.S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Q $|2y + 1| = |3y + 4|$

$$\begin{aligned} 2y + 1 &= 3y + 4 \\ 2y - 3y &= -1 + 4 \\ -y &= 3 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} 2y + 1 &= -3y - 4 \\ 2y + 3y &= -1 - 4 \\ 5y &= -5 \\ y &= -\frac{5}{5} = -1 \end{aligned}$$

$$\therefore S.S = \{-1, -3\}$$

تحقق من فهمك 2: أوجد مجموعة حل لكل من المعادلات التالية:

Q $|y - 4| = |2y - 5|$

طريقة القيمة المطلقة:

$$\begin{aligned} y - 4 &= 2y - 5 \\ y - 2y &= 4 - 5 \\ -y &= -1 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} y - 4 &= -2y + 5 \\ y + 2y &= 5 + 4 \\ 3y &= 9 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

$$\therefore S.S = \{1, 3\}$$

Q $|2x - 3| = |x + 1|$

طريقة القيمة المطلقة:

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= x + 1 \\ 2x - x &= 3 + 1 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= -x - 1 \\ 2x + x &= 3 - 1 \\ 3x &= 2 \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore S.S = \left\{4, \frac{2}{3}\right\}$$

Q $|3y + 1| = |y - 2|$

طريقة القيمة المطلقة:

$$\begin{aligned} 3y + 1 &= y - 2 \\ 3y - y &= -1 - 2 \\ 2y &= -3 \\ y &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} 3y + 1 &= -y + 2 \\ 3y + y &= -1 + 2 \\ 4y &= 1 \\ y &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore S.S. = \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{1}{4} \right\}$$

Q $|x - 4| = |2x - 5|$

طريقة القيمة المطلقة:

$$\begin{aligned} \therefore x - 4 &= 2x - 5 \\ x - 2x &= 4 - 5 \\ -x &= -1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} x - 4 &= -2x + 5 \\ x + 2x &= 4 + 5 \\ 3x &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$\therefore S.S. = \{1, 3\}$$



ثانياً: حل المعادلة $|ax + b| = cx + d$

مثال 3: أوجد مجموعة حل المعادلة $|x - 3| = 3x - 1$

شرط الحل: $3x - 1 \geq 0$

$$3x \geq 1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{3}$$

$$\therefore x \in \left[\frac{1}{3}, \infty \right)$$

$$\begin{aligned} x - 3 &= 3x - 1 \\ x - 3x &= 3 - 1 \\ -2x &= 2 \\ x &= -1 \notin \left[\frac{1}{3}, \infty \right) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} x - 3 &= -3x + 1 \\ x + 3x &= 3 + 1 \\ 4x &= 4 \\ x &= 1 \in \left[\frac{1}{3}, \infty \right) \end{aligned}$$

$$\therefore S.S. = \{1\}$$

تحقق من فهمك 3: أوجد مجموعة حل لكل من المعادلات التالية:

Q $|2x - 1| = x + 2$

شرط الحل: $x + 2 \geq 0$

$$x \geq -2$$

$$\therefore x \in [-2, \infty)$$

$$2x - 1 = x + 2$$

or

$$2x - 1 = -x - 2$$

$$2x - x = 1 + 2$$

$$2x + x = -2 + 1$$

$$x = 3 \in [-2, \infty)$$

$$3x = -1$$

$$x = -\frac{1}{3} \in [-2, \infty)$$

$$\therefore S.S. = \left\{3, -\frac{1}{3}\right\}$$

Q $|2x + 5| = x + 5$

شرط الحل: $x + 5 \geq 0$

$$x \geq -5$$

$$\therefore x \in [-5, \infty)$$

$$2x + 5 = x + 5$$

or

$$2x + 5 = -x - 5$$

$$2x - x = 5 - 5$$

$$2x + x = -5 - 5$$

$$x = 0 \in [-5, \infty)$$

$$3x = -10$$

$$x = -\frac{10}{3} \in [-5, \infty)$$

$$\therefore S.S. = \left\{-\frac{10}{3}, 0\right\}$$



مثال 4: أوجد مجموعة حل لكل من المعادلات التالية:

Q $|4x + 2| = 1 - 2x$

شرط الحل: $1 - 2x \geq 0$

$$-2x \geq -1$$

$$x \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$$

$$4x + 2 = 1 - 2x$$

or

$$4x + 2 = -1 + 2x$$

$$4x + 2x = 1 - 2$$

$$4x - 2x = -1 - 2$$

$$6x = -1$$

$$2x = -3$$

$$x = -\frac{1}{6} \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$$

$$x = -\frac{3}{2} \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$$

$$\therefore S.S. = \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{6}\right\}$$

Q $|x + 4| + 2x + 3 = 0$

$$\begin{aligned} |x + 4| &= -2x - 3 \\ -2x - 3 &\geq 0: \text{شرط الحل:} \\ -2x &\geq 3 \\ x &\leq -\frac{3}{2} \\ \therefore x &\in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 4 &= -2x - 3 \\ x + 2x &= -4 - 3 \\ 3x &= -7 \\ x &= -\frac{7}{3} \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} x + 4 &= 2x + 3 \\ x - 2x &= -4 + 3 \\ -x &= -1 \\ x &= 1 \notin \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \end{aligned}$$

$$\therefore S.S = \left\{-\frac{7}{3}\right\}$$



Q $|2l - 3| = 4l - 1$

$$\begin{aligned} 4l - 1 &\geq 0: \text{شرط الحل:} \\ 4l &\geq 1 \Rightarrow l \geq \frac{1}{4} \\ \therefore l &\in \left[\frac{1}{4}, \infty\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2l - 3 &= 4l - 1 \\ 2l - 4l &= 3 - 1 \\ -2l &= 2 \\ l &= -1 \notin \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} 2l - 3 &= -4l + 1 \\ 2l + 4l &= 3 + 1 \\ 6l &= 4 \\ l &= \frac{2}{3} \in \left[\frac{1}{4}, \infty\right) \end{aligned}$$

$$\therefore S.S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

Q $|3x - 1| + 4x - 13 = 0$

$$\begin{aligned} |3x - 1| &= -4x + 13 \\ -4x + 13 &\geq 0: \text{شرط الحل:} \\ -4x &\geq -13 \\ x &\leq \frac{13}{4} \\ \therefore x &\in \left(-\infty, \frac{13}{4}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= 13 - 4x \\ 3x + 4x &= 13 + 1 \\ 7x &= 14 \\ x &= 2 \in \left(-\infty, \frac{13}{4}\right] \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= -13 + 4x \\ 3x - 4x &= -13 + 1 \\ -x &= -12 \\ x &= 12 \notin \left(-\infty, \frac{13}{4}\right] \end{aligned}$$

$$\therefore S.S = \{2\}$$

1. أحد حلول المعادلة $|2x - 1| = x + 3$ هو:

- (a) $x = 1$ (b) $x = 2$ (c) $x = -1$ (d) $x = -\frac{2}{3}$

2. حل المعادلة $|x + 2| = x + 2$ هو:

- (a) $x = -2$ (b) $x \in (-2, \infty)$ (c) $x \in [-2, \infty)$ (d) $\emptyset$

3. حل المعادلة $|x - 3| = |x + 1|$ هو:

- (a) $x = \pm 1$ (b) $x = -1$ (c) $x = 1$ (d) $x = 2$

4. مجموعة حل المعادلة $|x - 3| = |3 - x|$ هي:

- (a) $\{3\}$ (b) $\{-3, 3\}$ (c) $\mathbb{R}$ (d) $\emptyset$

5. حل المعادلة $|x - 4| = |4 - x|$ هو:

- (a) $x = -4$ (b) $x = 4$ (c) $\mathbb{R}$ (d) لا يوجد حل

6. حل المعادلة $|2x - 3| = |x + 3|$ هو:

- (a) $x = 0, x = 6$ (b) $x = -5, x = 0$ (c) $x = 5, x = 6$ (d) $x = \pm 6$

7. مجموعة حل المعادلة $|x - 2| + x = 2$ هي:

- (a) $\emptyset$ (b) $(-\infty, 2)$ (c) $(-\infty, 2]$ (d) $\{2\}$





أسئلة المقال:

أوجد مجموعة حل كل من للمعادلات التالية:

Q $|x - 2| = |x + 4|$

$$x - 2 = x + 4$$

$$x - x = 2 + 4$$

$$0 = 6$$

عبارة خاطئة

لا يوجد حل

or

$$x - 2 = -x - 4$$

$$x + x = 2 - 4$$

$$2x = -2$$

$$x = -1$$

$$\therefore S.S. = \{-1\}$$

Q $|x - 4| = |x + 2|$

$$x - 4 = x + 2$$

$$x - x = 4 + 2$$

$$0x = 6$$

عبارة خاطئة

لا يوجد حل

or

$$x - 4 = -x - 2$$

$$x + x = 4 - 2$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

$$\therefore S.S. = \{1\}$$

Q $|4 - 5x| + |3x + 1| = 0$

$$4 - 5x = 0$$

$$-5x = -4$$

$$x = \frac{4}{5}$$

and

$$3x + 1 = 0$$

$$3x = -1$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{5} \neq -\frac{1}{3} \Rightarrow S.S. = \emptyset$$

Q $|x - 3| = 2x - 1$

شرط الحل: $2x - 1 \geq 0$

$$2x \geq 1$$

$$x \geq \frac{1}{2}$$

$$\therefore x \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$$

$$x - 3 = 2x - 1$$

$$x - 2x = 3 - 1$$

$$-x = 2$$

$$x = -2 \notin \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$$

or

$$x - 3 = -2x + 1$$

$$x + 2x = 3 + 1$$

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3} \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$$

$$\therefore S.S. = \left\{\frac{4}{3}\right\}$$

Q | $|2y + 3| = 3y - 2$

شرط الحل: $3y - 2 \geq 0$

$$3y \geq 2$$

$$y \geq \frac{2}{3}$$

$$\therefore y \in \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$$

$$\begin{aligned} 2y + 3 &= 3y - 2 \\ 2y - 3y &= -3 - 2 \\ -y &= -5 \\ y &= 5 \in \left[\frac{2}{3}, \infty\right) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} 2y + 3 &= -3y + 2 \\ 2y + 3y &= -3 + 2 \\ 5y &= -1 \\ y &= -\frac{1}{5} \notin \left[\frac{2}{3}, \infty\right) \end{aligned}$$

$$\therefore S.S = \{5\}$$

Q | $|x - 1| = 5x + 10$

شرط الحل: $5x + 10 \geq 0$

$$5x \geq -10$$

$$x \geq -2$$

$$\therefore x \in [-2, \infty)$$

$$\begin{aligned} x - 1 &= 5x + 10 \\ x - 5x &= 1 + 10 \\ -4x &= 11 \\ x &= -\frac{11}{4} \notin [-2, \infty) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} x - 1 &= -5x - 10 \\ x + 5x &= 1 - 10 \\ 6x &= -9 \\ x &= -\frac{3}{2} \in [-2, \infty) \end{aligned}$$

$$\therefore S.S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

Q | $|2i - 3| = 4i - 1$

شرط الحل: $4i - 1 \geq 0$

$$4i \geq 1$$

$$i \geq \frac{1}{4}$$

$$\therefore i \in \left[\frac{1}{4}, \infty\right)$$

$$\begin{aligned} 2i - 3 &= 4i - 1 \\ 2i - 4i &= 3 - 1 \\ -2i &= 2 \\ i &= -1 \notin \left[\frac{1}{4}, \infty\right) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} 2i - 3 &= -4i + 1 \\ 2i + 4i &= 3 + 1 \\ 6i &= 4 \\ i &= \frac{2}{3} \in \left[\frac{1}{4}, \infty\right) \end{aligned}$$

$$\therefore S.S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$$



Q | $3y - 7 = 2y - 5$

شرط الحل: $2y - 5 \geq 0$

$2y \geq 5$

$y \geq \frac{5}{2}$

$\therefore y \in \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$

$3y - 7 = 2y - 5$

$3y - 2y = 7 - 5$

$y = 2 \notin \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$

or

$3y - 7 = -2y + 5$

$3y + 2y = 7 + 5$

$5y = 12$

$y = \frac{12}{5} \notin \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$

$\therefore S.S = \emptyset$

Q | $|x + 4| + 23 = 17$

$|x + 4| + 23 = 17$

$|x + 4| = 17 - 23$

$|x + 4| = -6$

وبما أن

$\therefore -6 < 0$

$\therefore S.S = \emptyset$

Q | $|2x + 6| = x - 3$

شرط الحل: $x - 3 \geq 0$

$x \geq 3$

$\therefore x \in [3, \infty)$

$2x + 6 = x - 3$

$2x - x = -6 - 3$

$x = -9 \notin [3, \infty)$

or

$2x + 6 = -x + 3$

$2x + x = -6 + 3$

$3x = -3$

$x = -1 \notin [3, \infty)$

$\therefore S.S = \emptyset$

Q | $\frac{1}{2} |8x - 2| = x + 2$

$\Rightarrow |8x - 2| = 2x + 4$

شرط الحل: $2x + 4 \geq 0$

$x \geq -2$

$\therefore x \in [-2, \infty)$

$8x - 2 = 2x + 4$

or

$8x - 2 = -2x - 4$

$8x - 2x = 2 + 4$

$8x + 2x = 2 - 4$

$6x = 6$

$10x = -2$

$x = \frac{6}{6} = 1 \in [-2, \infty)$

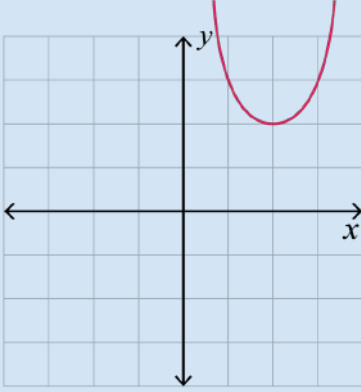
$x = -\frac{1}{5} \in [-2, \infty)$

$\therefore S.S = \left\{-\frac{1}{5}, 1\right\}$

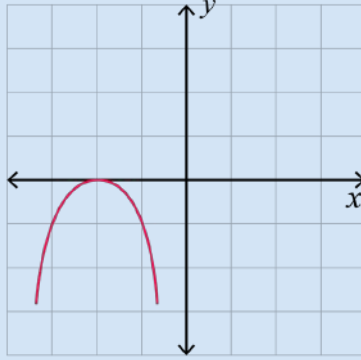
(3 - 1) حل معادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد

حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد بيانياً

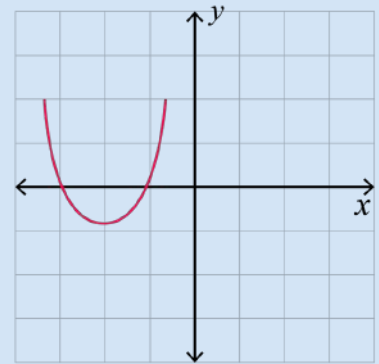
$$ax^2 + bx + c = 0 : a \neq 0$$



عدد الحلول = 0



عدد الحلول = 1



عدد الحلول = 2

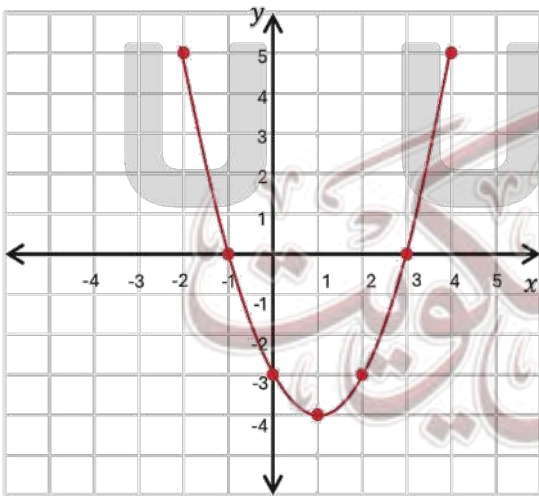


مثال 1: أوجد بيانياً مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في $\mathbb{R}$ مستعيناً بالفترة الموضحة:

Q $x^2 - 2x - 3 = 0$, $[-2, 4]$

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	5	0	-3	-4	-3	0	5

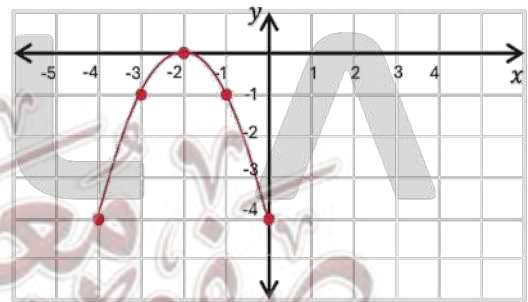


$$S.S = \{-1, 3\}$$

Q $-x^2 - 4x - 4 = 0$, $[-4, 0]$

$$f(x) = -x^2 - 4x - 4$$

x	-4	-3	-2	-1	0
f(x)	-4	-1	0	-1	-4

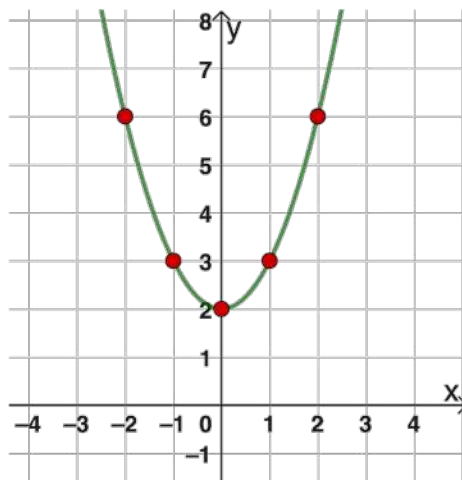


$$S.S = \{-2\}$$

Q $x^2 + 2 = 0$, $[-2, 2]$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	6	3	2	3	6

$S.S = \emptyset$

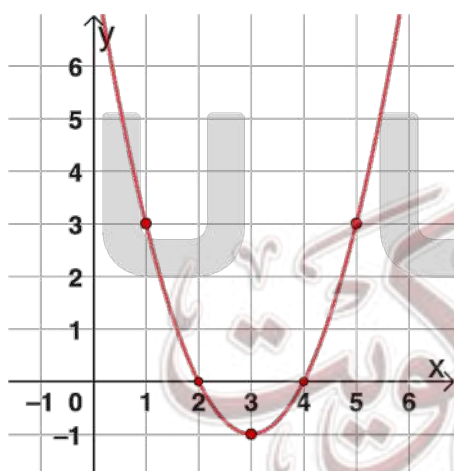


تحقق من فهمك 1: أوجد بياناً مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في $\mathbb{R}$ مستعيناً بالفترة الموضحة:

Q $x^2 - 6x + 8 = 0$, $[1, 5]$

$f(x) = x^2 - 6x + 8$

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	0	-1	0	3

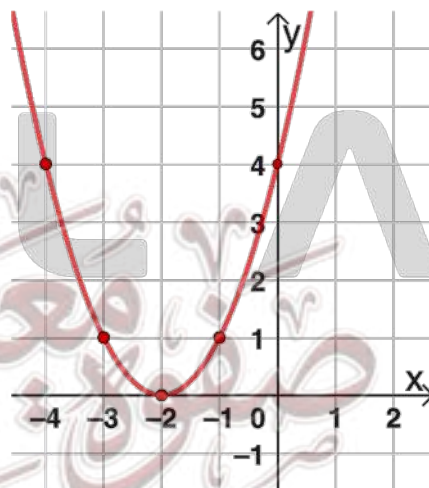


$S.S = \{2, 4\}$

Q $x^2 + 4x + 4 = 0$, $[-4, 0]$

$f(x) = x^2 + 4x + 4$

x	-4	-3	-2	-1	0
$f(x)$	4	1	0	1	4

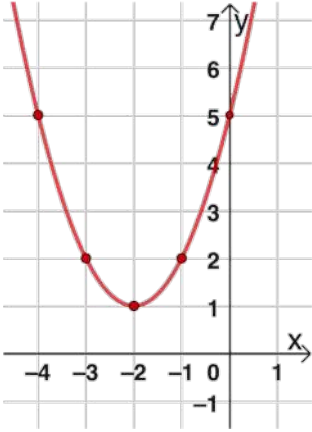


$S.S = \{-2\}$

Q $x^2 + 4x + 5 = 0, [-4, 0]$

$f(x) = x^2 + 4x + 5$

x	-4	-3	-2	-1	0
f(x)	5	2	1	2	5



$S.S = \emptyset$



حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد جبرياً

$ax^2 + bx + c = 0 : a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$

نوجد المميز $\Delta = b^2 - 4ac$, إذا كان

- $\Delta < 0$ لا يوجد للمعادلة جذور حقيقية $\leftarrow$ (عدد الطول = 0)
- $\Delta = 0$ يوجد للمعادلة جذران (حلان) حقيقيان متساويان $\leftarrow$ (عدد الطول = 1 مكرر)
- $\Delta > 0$ يوجد للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان $\leftarrow$ (عدد الطول = 2)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

القانون العام: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

مثال 2: حدد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة مما يلي

Q $4x^2 - 4x - 3 = 0$

$a = 4, b = -4, c = -3$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-4)^2 - 4(4)(-3)$

$= 64 > 0$

$\Rightarrow$ عدد الحلول = 2

Q $2x^2 - 4x + 2 = 0$

$a = 2, b = -4, c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-4)^2 - 4(2)(2) = 0$

$\Rightarrow$ عدد الحلول = 1 (مكرر)

Q $x^2 + 2x + 3 = 0$

$a = 1, b = 2, c = 3$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (2)^2 - 4(1)(3)$

$= -8 < 0$

$\Rightarrow$ عدد الحلول = 0

تحقق من فهمك 2: حدد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة مما يلي

Q $2x^2 - 7x - 4 = 0$

$$a = 2, b = -7, c = -4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-7)^2 - 4(2)(-4) = 81 > 0$$

$$\Rightarrow \text{عدد الحلول} = 2$$

Q $3x^2 - 2x + 2 = 0$

$$a = 3, b = -2, c = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-2)^2 - 4(3)(2) = -20 < 0$$

$$\Rightarrow \text{عدد الحلول} = 0$$

Q $x^2 - x = 0$

$$a = 1, b = -1, c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-1)^2 - 4(1)(0) = 1 > 0$$

$$\Rightarrow \text{عدد الحلول} = 2$$

Q $x^2 - 10x + 25 = 0$

$$a = 1, b = -10, c = 25$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-10)^2 - 4(1)(25) = 0$$

$$\Rightarrow \text{عدد الحلول} = 1 \text{ (مكرر)}$$

Q $x^2 = 15$

$$x^2 - 15 = 0$$

$$a = 1, b = 0, c = -15$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (0)^2 - 4(1)(-15) = 60 > 0$$

$$\Rightarrow \text{عدد الحلول} = 2$$

Q $2x^2 - 8x + 8 = 0$

$$a = 2, b = -8, c = 8$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-8)^2 - 4(2)(8) = 0$$

$$\Rightarrow \text{عدد الحلول} = 1 \text{ (مكرر)}$$



مثال 3: أوجد مجموعة حل المعادلات التالية باستخدام القانون:

Q $x^2 - x - 5 = 0$

$$a = 1, b = -1, c = -5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-1)^2 - 4(1)(-5) = 21 > 0$$

للمعادلة حلان "جذران" حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{21}}{2(1)}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \text{ or } x = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$$

$$\therefore S.S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{21}}{2}, \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \right\}$$

Q $x^2 - 8 = 0$

$$a = 1, b = 0, c = -8$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (0)^2 - 4(1)(-8) = 32 > 0$$

للمعادلة حلان "جذران" حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(0) \pm \sqrt{32}}{2(1)}$$

$$x = 2\sqrt{2} \text{ or } x = -2\sqrt{2}$$

$$\therefore S.S = \{2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\}$$

$$Q \quad x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$a = 1, b = -1, c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5 > 0$$

للمعادلة ثلاث "جذور" حقيقيين مختلفين

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2(1)}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ or } x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore S.S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}$$



$$Q \quad x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$a = 1, b = -4, c = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-4)^2 - 4(1)(2) = 8 > 0$$

للمعادلة ثلاث "جذور" حقيقيين مختلفين

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{8}}{2(1)}$$

$$x = 2 + \sqrt{2} \text{ or } x = 2 - \sqrt{2}$$

$$\therefore S.S = \{2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}\}$$

$$Q \quad x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$a = 1, b = -2, c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(1) = 0$$

للمعادلة حل حقيقي واحد مكرر

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2(1)}$$

$$x = 1$$

$$\therefore S.S = \{1\}$$

$$Q \quad x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$a = 1, b = -6, c = 9$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(9) = 0$$

للمعادلة حل حقيقي واحد مكرر

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2(1)}$$

$$x = 3$$

$$\therefore S.S = \{3\}$$

تحقق من فهمك 3: أوجد مجموعة حل المعادلات التالية باستخدام القانون:

$$Q \quad 4x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$a = 4, b = -5, c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-5)^2 - 4(4)(1) = 9 > 0$$

للمعادلة ثلاث "جذور" حقيقيين مختلفين

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2(4)}$$

$$x = 1 \text{ or } x = \frac{1}{4}$$

$$\therefore S.S = \left\{ 1, \frac{1}{4} \right\}$$

$$Q \quad x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$a = 1, b = -6, c = 8$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-6)^2 - 4(1)(8) = 4 > 0$$

للمعادلة ثلاث "جذور" حقيقيين مختلفين

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2(1)}$$

$$x = 4 \text{ or } x = 2$$

$$\therefore S.S = \{4, 2\}$$



مثال 4: أوجد مجموعة حل المعادلة $x^2 - 3x = 0$ باستخدام القانون:

$$a = 1, b = -3, c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(0) = 9 > 0$$

للمعادلة حلان "جذران" حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{9}}{2(1)}$$

$$x = 3, x = 0$$

$$\therefore S.S = \{3, 0\}$$

تحقق من فهمك 4: أوجد مجموعة حل المعادلات التالية باستخدام القانون:

$$Q \quad x^2 + 7x + 10 = 0$$

$$a = 1, b = 7, c = 10$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (7)^2 - 4(1)(10) = 9 > 0$$

للمعادلة حلان "جذران" حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(7) \pm \sqrt{9}}{2(1)}$$

$$x = -2 \text{ or } x = -5$$

$$\therefore S.S = \{-2, -5\}$$

$$Q \quad 2x^2 - 5x - 52 = 0$$

$$a = 2, b = -5, c = -52$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-5)^2 - 4(2)(-52) = 441 > 0$$

للمعادلة حلان "جذران" حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{441}}{2(2)}$$

$$x = \frac{13}{2} \text{ or } x = -4$$

$$\therefore S.S = \left\{\frac{13}{2}, -4\right\}$$



مثال 5: عدنان فرديان متتاليان مجموع مربعيهما 34 فما العدنان؟

الحل: بفرض العدد الفردي الأول هو x بالتالي العدد الفردي الثاني هو $(x + 2)$

$$(x)^2 + (x + 2)^2 = 34$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 - 34 = 0$$

$$2x^2 + 4x - 30 = 0$$

$$a = 2, b = 4, c = -30$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(2)(-30) = 256$$

للمعادلة حلان "جذران" حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(4) \pm \sqrt{256}}{2(2)}$$

$$\therefore x = 3 \text{ or } x = -5$$

العدد الفردي الأول

العدد الفردي الثاني

أو

العدد الفردي الأول -5

العدد الفردي الثاني -3

أوجد عددين زوجيين متتاليين مجموع مربعيهما 100

ليكن العدد الزوجي الأول x بالتالي العدد الزوجي الثاني $x + 2$

$$x^2 + (x + 2)^2 = 100$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 100$$

$$2x^2 + 4x - 96 = 0$$

$$a = 2, b = 4, c = -96$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(2)(-96) = 784 > 0$$

للمعادلة حلان "جذران" حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(4) \pm \sqrt{784}}{2(2)}$$

$$x = -8, x = 6$$

العدد الزوجي الأول 6

العدد الزوجي الثاني 8

أو

العدد الزوجي الأول -8

العدد الزوجي الثاني -6

مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار 3cm ومساحته $40cm^2$ أوجد بعدي المستطيل.

ليكن عرض المستطيل x سم، بالتالي طوله $x + 3$ سم.

المساحة = الطول × العرض $40cm^2$

$$x(x + 3) = 40$$

$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

$$a = 1, b = 3, c = -40$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(1)(-40) = 169 > 0$$

للمعادلة حلان "جذران" حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(3) \pm \sqrt{169}}{2(1)}$$

$$x = -8 \text{ (مرفوض)}, x = 5$$

∴ عرض المستطيل = 5 سم

وطوله = 3 + 5 = 8 سم

تدرب وحل المسائل: تمارين موضوعية:



ظل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

(a) (b)

1. جذرا المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$ هما جذران حقيقيان متساويان

(a) (b)

2. المعادلة $x^2 - 4x + 4 = 0$ لها جذران حقيقيان متساويان

(a) (b)

3. جذرا المعادلة $x^2 + 9 = 0$ هما $3, -3$

اختر الإجابة الصحيحة:

4. المعادلة $x^2 - 6x + 9 = 0$

(a) لها جذران حقيقيان مختلفان

(b) لها جذران حقيقيان متساويان

(c) ليس لها جذور حقيقية

(d) ليس أيًا مما سبق

5. المعادلة $x^2 + 4x + 5 = 0$

(a) لها جذران حقيقيان مختلفان

(b) لها جذران حقيقيان متساويان

(c) ليس لها جذور حقيقية

(d) ليس أيًا مما سبق

6. جذرا المعادلة $x^2 - 3x - 4 = 0$ هما:

(a) $-1, 4$

(b) $1, 4$

(c) $-2, 2$

(d) $-1, 3$

7. حل المعادلة $x^2 = 9$ هو:

(a) 3

(b) -3

(c) ± 3

(d) لا يوجد حل

8. جذرا المعادلة $2x^2 - 7x + 3 = 0$ هما:

(a) $\frac{1}{2}, 3$

(b) $1, 3$

(c) $2, 3$

(d) $1, \frac{3}{2}$

9. حل المعادلة $x^2 - 25 = 0$ هو:

(a) 5

(b) -5

(c) ± 5

(d) لا يوجد حل

10. المعادلة التي مجموع جذريها يساوي 5 فيما يلي:

(a) $(x + 1)(x + 4) = 0$

(b) $x(x - 5) = 0$

(c) $(x - 1)(x + 6) = 0$

(d) $(x - 5)(x + 1) = 0$



1- أوجد حل كل معادلة باستخدام القانون العام

Q $x^2 - 3x - 10 = 0$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$a = 1, b = -3, c = -10$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-3)^2 - 4(1)(-10) = 49 > 0$$

للمعادلة حلان "جذران" حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2(1)}$$

$$x = 5 \text{ or } x = -2$$

$$S.S = \{-2, 5\}$$

Q $2x^2 - 5x - 3 = 0$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$a = 2, b = -5, c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-5)^2 - 4(2)(-3) = 25 + 24$$

$$= 49 > 0$$

للمعادلة حلان "جذران" حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2(2)}$$

$$x = 3 \text{ or } x = -\frac{1}{2}$$

$$S.S = \left\{-\frac{1}{2}, 3\right\}$$

Q $\frac{1}{2}x^2 - 3 = 0$

نضرب بـ 2

$$x^2 - 6 = 0$$

$$a = 1, b = 0, c = -6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (0)^2 - 4(1)(-6) = 24 > 0$$

للمعادلة حلان "جذران" حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{24}}{2(1)}$$

$$x = \pm\sqrt{6}$$

$$S.S = \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$$

Q $3x^2 + x - 2 = 0$

$$3x^2 + x - 2 = 0$$

$$a = 3, b = 1, c = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (1)^2 - 4(3)(-2) = 1 + 24 = 25 > 0$$

للمعادلة حلان "جذران" حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2(3)}$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ or } x = -1$$

$$S.S = \left\{-1, \frac{2}{3}\right\}$$

2- أوجد نوع الجذرين للمعادلتين التاليتين ثم تحقق باستخدام القانون



$$\text{Q } x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$a = 1, b = -4, c = -5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-4)^2 - 4(1)(-5) = 36 > 0$$

للمعادلة حلان "جذران" حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2(1)}$$

$$x = 5 \text{ or } x = -1$$

$$\therefore S.S = \{5, -1\}$$

$$\text{Q } 2x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$a = 2, b = -4, c = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-4)^2 - 4(2)(2) = 0$$

للمعادلة حل حقيقي واحد مكرر

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2(2)}$$

$$x = 1$$

$$\therefore S.S = \{1\}$$



$$\text{Q } \frac{1}{2}x(x + 6) = 8$$

نضرب بـ 2

$$x(x + 6) = 16$$

$$x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$a = 1, b = 6, c = -16$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (6)^2 - 4(1)(-16) = 100 > 0$$

للمعادلة حلان "جذران" حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(6) \pm \sqrt{100}}{2(1)}$$

$$x = 2 \text{ or } x = -8$$

$$\therefore S.S = \{2, -8\}$$

3- أوجد حل كل معادلة من المعادلات التالية:

$$\text{Q } 2x(x + 1) = 2$$

$$2x^2 + 2x = 2$$

$$2x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$a = 2, b = 2, c = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (2)^2 - 4(2)(-2) = 20 > 0$$

للمعادلة حلان "جذران" حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(2) \pm \sqrt{20}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ or } x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore S.S = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right\}$$



4- ثلاثة أعداد موجبة متتالية مربع أكبرهم يساوي مجموع مربعي الآخرين، أوجد هذه الأعداد

لتكن الأعداد الموجبة المتتالية $x, x + 1, x + 2$
مربع أكبر عدد يساوي مجموع مربعي الآخرين

$$x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$a = 1, b = -2, c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 16 > 0$$

للمعادلة حلان "جذران" حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2(1)}$$

$$x = 3, x = -1$$

وبما أن الأعداد **موجبة** نأخذ فقط $x = 3$ إذاً الأعداد الثلاثة هي **3, 4, 5**

5- عدنان زوجيان مجموع مربعيهما يزيد على حاصل ضربيهما بمقدار 28، ما العدنان؟

لتكن العدنان الزوجيان المتتاليان $x, x + 2$
مجموع مربعيهما يزيد عن حاصل ضربيهما بمقدار 28 بالتالي:

$$x^2 + (x + 2)^2 = x(x + 2) + 28$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2x + 28$$

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$a = 1, b = 2, c = -24$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(1)(-24) = 100 > 0$$

للمعادلة حلان "جذران" حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(2) \pm \sqrt{100}}{2(1)}$$

$$x = 4, x = -6$$

العدد الزوجي الأول -6

العدد الزوجي الثاني -4

العدد الزوجي الأول 4

العدد الزوجي الثاني 6

(1 - 4) مجموع وناتج ضرب جذري معادلة تربيعية



أولاً: إيجاد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين للمعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ بدون حلها
إذا كان جذرا المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ هما: ℓ, m فإن

- $\ell + m = \frac{-b}{a}$
- $\ell \cdot m = \frac{c}{a}$
- $\ell - m = \frac{|\sqrt{\Delta}|}{a} : \Delta = b^2 - 4ac$

مثال (1) إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة $2x^2 - 3x + c = 0$ يساوي -1 أوجد قيمة c

$$a = 2, b = -3, c = c$$

$$\ell \cdot m = \frac{c}{a}$$

$$-1 = \frac{c}{2} \Rightarrow c = -2$$

بفرض أن ℓ, m هما جذرا المعادلة فإن:

تحقق من فهمك 1: إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة $3x^2 + 10x - c = 0$ يساوي $-\frac{8}{3}$ أوجد قيمة c

$$a = 3, b = 10, c = -c$$

$$\ell \cdot m = \frac{c}{a}$$

$$-\frac{8}{3} = \frac{-c}{3} \Rightarrow \therefore c = 8$$

بفرض أن ℓ و m هما جذرا المعادلة فإن:



مثال (2) إذا كان مجموع جذري المعادلة $2x^2 + bx - 5 = 0$ هو $\frac{3}{2}$ فأوجد قيمة b

$$a = 2, b = b, c = -5$$

$$\ell + m = \frac{3}{2}$$

$$\frac{-b}{a} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{-b}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow -b = 3 \Rightarrow b = -3$$

بفرض أن ℓ و m هما جذرا المعادلة فإن:

تحقق من فهمك (2)

إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة $ax^2 - 5x + 2 = 0$ يساوي $\frac{3}{2}$ أوجد قيمة a ثم حل المعادلة.

$$a = ? , b = -5 , c = 2$$

بفرض أن ℓ و m هما جذرا المعادلة فإن:

$$\ell \cdot m = \frac{c}{a} = \frac{2}{-5} \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

نعوّض في المعادلة:

$$\frac{4}{3}x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\left(\frac{4}{3}\right)(2) = \frac{43}{3} > 0$$

للمعادلة حلان "جذران" حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{\frac{43}{3}}}{2\left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{15 \pm \sqrt{129}}{8}$$



مثال 3: إذا كان ℓ, m هما جذري المعادلة $2x^2 - 8x + 5 = 0$ فأوجد القيم العددية لكل مما يلي:

a) $\ell^2 + m^2$, b) $\frac{1}{\ell} + \frac{1}{m}$, c) $\ell - m$

$$a = 2, b = -8, c = 5$$

$$\ell + m = \frac{-b}{a} = \frac{8}{2} = 4 , \quad \ell \cdot m = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$$

$$a) \ell^2 + m^2 = (\ell + m)^2 - 2\ell \cdot m = (4)^2 - 2\left(\frac{5}{2}\right) = 11$$

$$b) \frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} = \frac{m + \ell}{\ell \cdot m} = \frac{4}{\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{8}{5}$$

$$c) \ell - m = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right| = \left| \frac{\sqrt{24}}{2} \right| = \sqrt{6}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(2)(5) = 24$$

تحقق من فهمك 3: إذا علمت أن جذري المعادلة $x^2 - 7x + 9 = 0$ هما ℓ, m فأوجد قيمة كل من

a) $\ell + m$, b) $\ell \cdot m$, c) $\ell^2 + m^2$

$$a = 1, b = -7, c = 9$$

$$a) \ell + m = \frac{-b}{a} = -\frac{-7}{1} = 7$$

$$b) \ell \cdot m = \frac{c}{a} = \frac{9}{1} = 9$$

$$c) \ell^2 + m^2 = (\ell + m)^2 - 2\ell \cdot m = (7)^2 - 2(9) = 31$$

إذا كان m, ℓ هما جذرا المعادلة التربيعية فإن المعادلة التربيعية تكون علي الصورة:
 $x^2 - (\ell + m)x + (\ell \cdot m) = 0$



$$\begin{aligned} \ell &= 4, m = -3 \\ \ell + m &= 4 + (-3) = 1 \\ \ell \cdot m &= 4 \cdot (-3) = -12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - (\ell + m)x + (\ell \cdot m) &= 0 \\ x^2 - (1)x + (-12) &= 0 \\ x^2 - x - 12 &= 0 \end{aligned}$$

المعادلة التربيعية:

مثال (4) كَوْن معادلة تربيعية في متغير واحد والتي جذراها 4, - 3

تحقق من فهمك 4: أوجد المعادلة التربيعية التي جذراها معلومان في الحالات التالية:

a) 3, 5

$$\begin{aligned} \ell &= 3, m = 5 \\ \ell + m &= 3 + 5 = 8 \\ \ell \cdot m &= (3)(5) = 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - (\ell + m)x + (\ell \cdot m) &= 0 \\ x^2 - (8)x + (15) &= 0 \\ x^2 - 8x + 15 &= 0 \end{aligned}$$

المعادلة التربيعية:

b) 4, $-\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \ell &= 4, m = -\frac{1}{3} \\ \ell + m &= 4 + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{3} \\ \ell \cdot m &= (4)\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - (\ell + m)x + (\ell \cdot m) &= 0 \\ x^2 - \left(\frac{11}{3}\right)x - \frac{4}{3} &= 0 \\ x^2 - \frac{11}{3}x - \frac{4}{3} &= 0 \quad (\times 3) \Rightarrow \\ 3x^2 - 11x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

المعادلة التربيعية:

c) 2, - 2

$$\begin{aligned} \ell &= 2, m = -2 \\ \ell + m &= 2 + (-2) = 0 \\ \ell \cdot m &= (2)(-2) = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - (\ell + m)x + (\ell \cdot m) &= 0 \\ x^2 - (0)x + (-4) &= 0 \\ x^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

المعادلة التربيعية:



مثال (5) كَوْن المعادلة التربيعية التي جذراها:

a) $\frac{4}{3}, \frac{3}{4}$

$$l = \frac{4}{3}, m = \frac{3}{4}$$

$$\ell + m = \frac{4}{3} + \frac{3}{4} = \frac{25}{12}$$

$$\ell \cdot m = \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = 1$$

$$x^2 - (\ell + m)x + (\ell \cdot m) = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{25}{12}\right)x + 1 = 0 \quad (\times 12) \Rightarrow$$

$$12x^2 - 25x + 12 = 0$$

المعادلة التربيعية هي:

b) $5\sqrt{3}, -5\sqrt{3}$

$$l = 5\sqrt{3}, m = -5\sqrt{3}$$

$$\ell + m = 5\sqrt{3} + (-5\sqrt{3}) = 0$$

$$\ell \cdot m = (5\sqrt{3}) \cdot (-5\sqrt{3}) = -75$$

$$x^2 - (\ell + m)x + (\ell \cdot m) = 0$$

$$x^2 - 0x + (-75) = 0$$

$$x^2 - 75 = 0$$

المعادلة التربيعية هي:

تحقق من فهمك (5) كَوْن المعادلة التربيعية التي جذراها $3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

$$l = 3\sqrt{2}, m = -3\sqrt{2}$$

$$\ell + m = 3\sqrt{2} + (-3\sqrt{2}) = 0$$

$$\ell \cdot m = (3\sqrt{2})(-3\sqrt{2}) = -18$$

$$x^2 - (\ell + m)x + (\ell \cdot m) = 0$$

$$x^2 - (0)x + (-18) = 0$$

$$x^2 - 18 = 0$$

المعادلة التربيعية هي:



ثالثاً: تكوين معادلة تربيعية بمعلومية معادلة أخرى

مثال (6)

إذا كان ℓ, m هما جذرا المعادلة التربيعية $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، كَوّن المعادلة التربيعية التي جذراها $2\ell, 2m$.

$$a = 2, b = -3, c = -1$$

$$\ell + m = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2}, \ell \cdot m = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$$

جذرا المعادلة المطلوبة: $2\ell, 2m$

$$2\ell + 2m = 2(\ell + m) = 2\left(\frac{3}{2}\right) = 3$$

$$2\ell \cdot 2m = 4(\ell \cdot m) = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

المعادلة التربيعية هي:

$$x^2 - (2\ell + 2m)x + (2\ell \cdot 2m) = 0$$

$$x^2 - 3x - 2 = 0$$

تحقق من فهمك (6)

إذا كان ℓ, m هما جذرا المعادلة التربيعية $2x^2 + 15x - 8 = 0$ ، كَوّن المعادلة التربيعية التي جذراها $2\ell, 2m$:

$$a = 2, b = 15, c = -8$$

$$\ell + m = \frac{-b}{a} = \frac{-15}{2}$$

$$\ell \cdot m = \frac{c}{a} = \frac{-8}{2} = -4$$

جذرا المعادلة المطلوبة: $2\ell, 2m$

$$2\ell + 2m = 2(\ell + m) = 2\left(-\frac{15}{2}\right) = -15$$

$$2\ell \cdot 2m = 4(\ell \cdot m) = 4(-4) = -16$$

المعادلة التربيعية هي:

$$x^2 - (2\ell + 2m)x + (2\ell \cdot 2m) = 0$$

$$x^2 - (-15)x + (-16) = 0$$

$$x^2 + 15x - 16 = 0$$



تدرب وحل المسائل: تمارين موضوعية:

اختر الإجابة الصحيحة:

1. إذا كان ناتج ضرب جذري المعادلة التربيعية $x^2 - 3x + c = 0$ يساوي 2 فإن c يساوي:

- (a) -4 (b) -2 (c) 4 (d) 2

2. إذا كان مجموع جذري المعادلة $x^2 - ax + 6 = 0$ يساوي 5 فإن a يساوي:

- (a) -6 (b) -5 (c) 5 (d) 6

3. إذا كان أحد جذري المعادلة $x^2 - (m + 2)x + 3 = 0$ هو معكوس جمعي للآخر فإن m تساوي:

- (a) 3 (b) 2 (c) -2 (d) -3

4. عدداً حقيقياً مجموعهما 2 وحاصل ضربهما -35 هما:

- (a) 5, 7 (b) -5, -7 (c) -7, 5 (d) 7, -5

5. حاصل ضرب جذري المعادلة $x(2x - 3) = 7$ يساوي:

- (a) $-\frac{3}{2}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) $-\frac{7}{2}$ (d) $\frac{7}{2}$





أسئلة المقال:

1. كَوْنُ كلاً من المعادلات التربيعية التالية والتي جذراها:

a) 2, 3

$$l = 2, m = 3$$

$$\ell + m = 2 + 3 = 5$$

$$\ell \cdot m = (2)(3) = 6$$

$$x^2 - (\ell + m)x + (\ell \cdot m) = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

المعادلة التربيعية هي:

b) -5, -7

$$l = -5, m = -7$$

$$\ell + m = -5 + (-7) = -12$$

$$\ell \cdot m = (-5)(-7) = 35$$

$$x^2 - (\ell + m)x + (\ell \cdot m) = 0$$

$$x^2 - (-12)x + 35 = 0$$

$$x^2 + 12x + 35 = 0$$

المعادلة التربيعية هي:

c) $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}$

$$l = \frac{3}{4}, m = \frac{5}{8}$$

$$\ell + m = \frac{3}{4} + \frac{5}{8} = \frac{11}{8}$$

$$\ell \cdot m = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{15}{32}$$

$$x^2 - \left(\frac{11}{8}\right)x + \frac{15}{32} = 0 \quad (\times 32) \Rightarrow$$

$$32x^2 - 44x + 15 = 0$$

المعادلة التربيعية هي:

d) $2a, -\frac{1}{2}a$

$$l = 2a, \quad m = -\frac{1}{2}a$$

$$\ell + m = 2a + \left(-\frac{1}{2}a\right) = \frac{3}{2}a$$

$$\ell \cdot m = (2a)\left(-\frac{1}{2}a\right) = -a^2$$

$$x^2 - (\ell + m)x + (\ell \cdot m) = 0$$

$$x^2 - \frac{3}{2}ax - a^2 = 0 \quad (\times 2) \Rightarrow$$

$$2x^2 - 3ax - 2a^2 = 0$$

المعادلة التربيعية هي:

2. كَوْن معادلة الدرجة الثانية التي جذراها متساويان وكل منهما يساوي $-1\frac{1}{2}$

$$l = m = -\frac{3}{2}$$

$$l + m = -\frac{3}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right) = -3$$

$$l \cdot m = \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

المعادلة التربيعية هي:

$$x^2 - (l + m)x + (l \cdot m) = 0$$

$$x^2 - (-3)x + \frac{9}{4} = 0$$

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 0 \quad (\times 4) \Rightarrow$$

$$4x^2 + 12x + 9 = 0$$



3. إذا كان مجموع جذري المعادلة $x^2 - 5lx + m = 0$ هو 10 وحاصل ضربهما يساوي 6 فما قيمة كل من l, m ؟ ثم أوجد قيمة الجذرين.

$$x^2 - 5lx + m = 0$$

$$a = 1, b = -5l, c = m$$

$$l + m = \frac{-b}{a}$$

$$10 = \frac{-(-5l)}{1} \Rightarrow 5l = 10 \Rightarrow l = 2$$

$$l \cdot m = \frac{c}{a}$$

$$6 = \frac{m}{1} \Rightarrow m = 6$$

$$\boxed{l = 2, m = 6}$$

المعادلة:

$$x^2 - 5(2)x + 6 = 0$$

$$x^2 - 10x + 6 = 0$$

$$a = 1, b = -10, c = 6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(1)(6) = 76 > 0$$

للمعادلة حلان "جذران" حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{76}}{2(1)}$$

$$\boxed{x = 5 + \sqrt{19}, x = 5 - \sqrt{19}}$$

4. إذا كان ℓ, m هما جذرا المعادلة $x^2 - 5x - 4 = 0$ فأوجد المعادلة التي جذراها ℓ^2, m^2

$$a = 1, b = -5, c = -4$$

$$\ell + m = \frac{-b}{a} = 5$$

$$\ell \cdot m = \frac{c}{a} = -4$$

جذرا المعادلة المطلوبة ℓ^2, m^2

$$\ell^2 + m^2 = (\ell + m)^2 - 2\ell m = (5)^2 - 2(-4) = 33$$

$$\ell^2 \cdot m^2 = (\ell m)^2 = (-4)^2 = 16$$

المعادلة التربيعية المطلوبة هي:

$$x^2 - (\ell^2 + m^2)x + (\ell^2 m^2) = 0$$

$$x^2 - 33x + 16 = 0$$



5. إذا كان ℓ, m هما جذري المعادلة $x^2 - 3x + 1 = 0$ فأوجد المعادلة التي جذراها $\ell + m, \ell \cdot m$

$$a = 1, b = -3, c = 1$$

$$\ell + m = \frac{-b}{a} = 3$$

$$\ell \cdot m = \frac{c}{a} = 1$$

جذرا المعادلة المطلوبة: $\ell + m = 3, \ell \cdot m = 1$

$$\text{مجموع الجذرين} = 3 + 1 = 4$$

$$\text{ناتج ضرب الجذرين} = (3)(1) = 3$$

المعادلة التربيعية هي:

$$x^2 - (4)x + 3 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

مَعْلَمَاتُ الْكُويْتِ
صَفْوَةُ مِي الْكُويْتِ

6. إذا كان ℓ, m هما جذرا المعادلة $x^2 - 7x + 5 = 0$ فأوجد المعادلة التي جذراها $\frac{1}{\ell}, \frac{1}{m}$

$$a = 1, b = -7, c = 5$$

$$\ell + m = \frac{-b}{a} = 7$$

$$\ell \cdot m = \frac{c}{a} = 5$$

جذرا المعادلة المطلوبة $\frac{1}{\ell}, \frac{1}{m}$

$$\frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} = \frac{\ell + m}{\ell m} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{1}{\ell} \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{\ell m} = \frac{1}{5}$$

المعادلة التربيعية هي:

$$x^2 - \left(\frac{7}{5}\right)x + \frac{1}{5} = 0$$

وبضرب المعادلة في 5:

$$5x^2 - 7x + 1 = 0$$

7. إذا كان ℓ, m هما جذرا المعادلة $x^2 - 4x + 1 = 0$ فما قيمة؟

a) $\frac{4}{\ell}, \frac{4}{m}$, b) $\ell - m$

$$a = 1, b = -4, c = 1$$

$$\ell + m = \frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{1} = 4$$

$$\ell \cdot m = \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1$$

$$a) \frac{4}{\ell} + \frac{4}{m} = \frac{4(\ell+m)}{\ell m} = \frac{4(4)}{1} = 16$$

$$b) \ell - m = \frac{|\sqrt{\Delta}|}{|a|} = \frac{|\sqrt{12}|}{1} = 2\sqrt{3} : \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 12$$



(5 - 1) حل متباينة من الدرجة الثانية

أولاً: حل المتباينات بالتحليل

خواص المتباينات

$$a \cdot b > 0 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} a > 0 \\ b > 0 \end{array} \quad \text{or} \quad \begin{array}{l} a < 0 \\ b < 0 \end{array}$$

$$a \cdot b < 0 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} a > 0 \\ b < 0 \end{array} \quad \text{or} \quad \begin{array}{l} a < 0 \\ b > 0 \end{array}$$



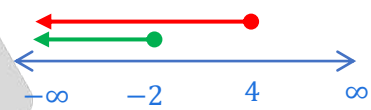
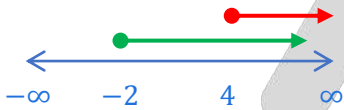
مثال 1: حل كلا المتباينتين التالية جبرياً ومثل الحل على خط الأعداد

a) $x^2 - 2x - 8 \geq 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) \geq 0$

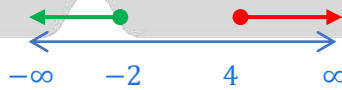
$$\begin{array}{l} x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \\ x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ S_1 = [4, \infty) \end{array}$$

or

$$\begin{array}{l} x - 4 \leq 0 \Rightarrow x \leq 4 \\ x + 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq -2 \\ S_2 = (-\infty, -2] \end{array}$$



$$S = S_1 \cup S_2 = [4, \infty) \cup (-\infty, -2] = \mathbb{R} - (-2, 4)$$



b) $x^2 - 2x - 8 \leq 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) \leq 0$

$$\begin{array}{l} x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \\ x + 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq -2 \\ S_1 = \emptyset \end{array}$$

or

$$\begin{array}{l} x - 4 \leq 0 \Rightarrow x \leq 4 \\ x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ S_2 = [-2, 4] \end{array}$$



$$\therefore S = S_1 \cup S_2 = \emptyset \cup [-2, 4] = [-2, 4]$$





a) $x^2 + x - 12 \leq 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 4) \leq 0$

$$x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$$

$$x + 4 \leq 0 \Rightarrow x \leq -4$$

$$S_1 = \emptyset$$



or

$$x - 3 \leq 0 \Rightarrow x \leq 3$$

$$x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$$

$$S_2 = [-4, 3]$$



$$\therefore S = S_1 \cup S_2 = \emptyset \cup [-4, 3] = [-4, 3]$$



b) $x^2 + 4x - 5 \geq 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 5) \geq 0$

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5$$

$$S_1 = [1, \infty)$$

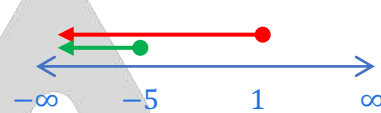


or

$$x - 1 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1$$

$$x + 5 \leq 0 \Rightarrow x \leq -5$$

$$S_2 = (-\infty, -5]$$



$$S = S_1 \cup S_2 = [1, \infty) \cup (-\infty, -5] = \mathbb{R} - (-5, 1)$$



c) $x^2 - x - 6 < 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) < 0$

$$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$$

$$x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2$$

$$S_1 = \emptyset$$



or

$$x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$$

$$x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$$

$$S_2 = (-2, 3)$$



$$\therefore S = S_1 \cup S_2 = \emptyset \cup (-2, 3) = (-2, 3)$$

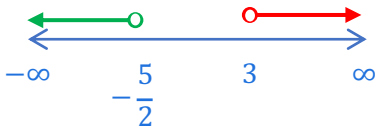


$$d) (x - 3)(2x + 5) < 0$$

$$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$$

$$2x + 5 < 0 \Rightarrow x < -\frac{5}{2}$$

$$S_1 = \emptyset$$

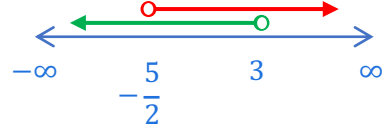


or

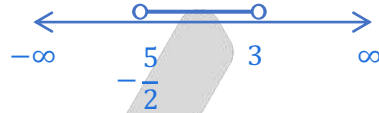
$$x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$$

$$2x + 5 > 0 \Rightarrow x > -\frac{5}{2}$$

$$S_2 = \left(-\frac{5}{2}, 3\right)$$



$$\therefore S = S_1 \cup S_2 = \emptyset \cup \left(-\frac{5}{2}, 3\right) = \left(-\frac{5}{2}, 3\right)$$



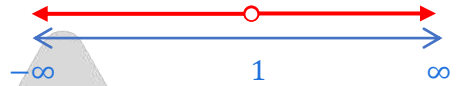
$$e) x^2 - 2x + 1 > 0$$

$$(x - 1)^2 > 0$$

يكون المقدار موجب عندما يكون

$$x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

$$S = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$$



$$f) x^2 + 6x + 9 < 0$$

$$(x + 3)^2 < 0$$

$$S = \emptyset$$

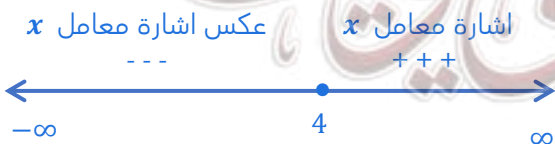


ثانياً: حل المتباينات بدراسة الإشارة

دراسة إشارة مقدار من الدرجة الأولى
مثال (2) ادرس إشارة كل من

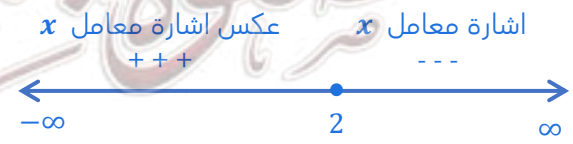
$$a) f(x) = 2x - 8$$

$$2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4$$



$$b) g(x) = -3x + 6$$

$$-3x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$$





a) $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

$f(x) = x^2 - 2x - 8 = 0$

$a = 1, b = -2, c = -8$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-8) = 36 > 0 \rightarrow$ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2(1)}$

$x = 4, x = -2$

$\therefore S = [-2, 4]$



b) $x^2 - x - 5 \leq 0$

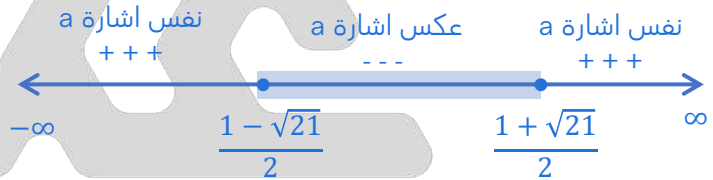
$f(x) = x^2 - x - 5 = 0$

$a = 1, b = -1, c = -5$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-5) = 21 > 0 \rightarrow$ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{21}}{2(1)}$

$\therefore S = \left[\frac{1 - \sqrt{21}}{2}, \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \right]$



c) $x^2 - 10x + 25 > 0$

$f(x) = x^2 - 10x + 25 = 0$

$a = 1, b = -10, c = 25$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(1)(25) = 0 \rightarrow$ للمعادلة حل واحد مكرر

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = 5$

$\therefore S = \mathbb{R} - \{5\}$

$= (-\infty, 5) \cup (5, \infty)$



d) $-3x^2 + 4x - 2 \geq 0$

$f(x) = -3x^2 + 4x - 2 = 0$

$a = -3, b = 4, c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(-3)(-2) = -8 < 0$

لا يوجد جذور حقيقية

$S = \emptyset$

نفس إشارة a



تحقق من فهمك 3: حل كل من المتباينات التالية جبريًا ومثل الحل على خط الأعداد

a) $2x^2 + 3x - 2 < 0$

$f(x) = 2x^2 + 3x - 2 = 0$

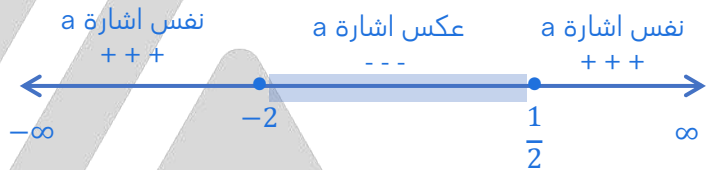
$a = 2, b = 3, c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(2)(-2) = 25 > 0 \rightarrow$ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(2)}$

$x = \frac{1}{2}, x = -2$

$S = \left(-2, \frac{1}{2}\right)$



b) $-x^2 - x + 6 > 0$

$f(x) = -x^2 - x + 6 = 0$

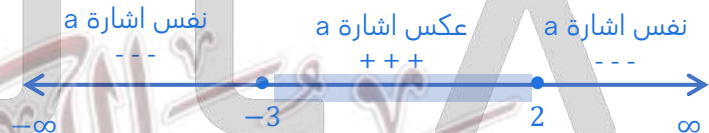
$a = -1, b = -1, c = 6$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(-1)(6) = 25 > 0 \rightarrow$ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2(-1)}$

$x = -3, x = 2$

$S = (-3, 2)$



c) $x^2 - 6x + 9 \geq 0$

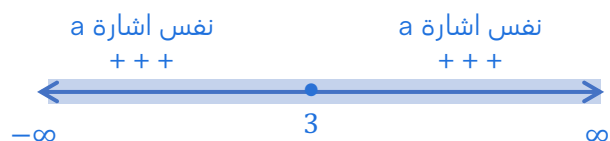
$f(x) = x^2 - 6x + 9 = 0$

$a = 1, b = -6, c = 9$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(9) = 0 \rightarrow$ للمعادلة جذر حقيقي واحد مكرر

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = 3$

$S = \mathbb{R}$



حالة خاصة: حل متباينات الدرجة الثانية بالقيمة المطلقة



المتباينة	مجموعة الحل
$x^2 < 0$	$\emptyset$
$x^2 \leq 0$	$\{0\}$
$x^2 \geq 0$	$\mathbb{R}$
$x^2 > 0$	$\mathbb{R} - \{0\}$

تذكّر!

- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $|x| \leq a, a > 0 \Rightarrow -a \leq x \leq a$
- $|x| \geq a, a > 0 \Rightarrow x \geq a \text{ or } x \leq -a$

مثال (4) أوجد مجموعة حل المتباينة ومثل الحل على خط الأعداد

a) $2x^2 + 5 \geq 23$

$$2x^2 \geq 18$$

$$x^2 \geq 9$$

$$\sqrt{x^2} \geq \sqrt{9}$$

$$|x| \geq 3$$

$$x \geq 3 \text{ or } x \leq -3$$

$$\therefore S.S = (-\infty, -3] \cup [3, \infty) = \mathbb{R} - (-3, 3)$$



b) $(5x + 7)^2 + 3 < 2$

$$(5x + 7)^2 + 3 < 2$$

$$(5x + 7)^2 < 2 - 3$$

$$(5x + 7)^2 < -1$$

$$\therefore S.S = \emptyset$$

تحقق من فهمك (4) أوجد مجموعة حل المتباينة ومثل الحل على خط الأعداد

a) $3x^2 - 4 \leq 8$

$$3x^2 \leq 12$$

$$x^2 \leq 4$$

$$\sqrt{x^2} \leq \sqrt{4}$$

$$|x| \leq 2$$

$$-2 \leq x \leq 2$$

$$S = [-2, 2]$$



b) $(4x - 3)^2 + 2 > -3$

$$(4x - 3)^2 > -3 - 2$$

$$(4x - 3)^2 > -5$$

$$S = \mathbb{R}$$



c) $(2 - 3x)^2 < 1$

$$\sqrt{(2 - 3x)^2} < \sqrt{1}$$

$$|2 - 3x| < 1$$

$$|3x - 2| < 1$$

$$-1 < 3x - 2 < 1$$

$$-1 + 2 < 3x < 1 + 2$$

$$1 < 3x < 3$$

$$\frac{1}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{3}{3}$$

$$\frac{1}{3} < x < 1$$

$$S = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$



d) $(2x + 1)^2 - 3 \geq 1$

$$(2x + 1)^2 \geq 3 + 1$$

$$(2x + 1)^2 \geq 4$$

$$\sqrt{(2x + 1)^2} \geq \sqrt{4}$$

$$|2x + 1| \geq 2$$

$$2x + 1 \geq 2 \quad \text{or} \quad 2x + 1 \leq -2$$

$$2x \geq 2 - 1 \quad 2x \leq -2 - 1$$

$$2x \geq 1 \quad 2x \leq -3$$

$$x \geq \frac{1}{2} \quad x \leq -\frac{3}{2}$$

$$S_1 = \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \quad S_2 = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$$



$$S = S_1 \cup S_2 = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right) = \mathbb{R} - \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$



تدرب وحل المسائل: تمارين موضوعية:

اختر الإجابة الصحيحة:

1. مجموعة حل المتباينة $(x + 2)(x - 5) > 0$ هي:

- (a) $(-2, 5)$ (b) $[-2, 5]$
(c) $(-\infty, -2) \cup (5, \infty)$ (d) $\mathbb{R}$

2. مجموعة حل المتباينة $x^2 - 2x < 0$ هي:

- (a) $(0, 2)$ (b) $(-\infty, 0]$ (c) $(2, \infty)$ (d) $[0, 2]$

3. مجموعة حل المتباينة $x^2 + 6x + 9 \leq 0$ هي:

- (a) $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$ (b) $\{-3\}$
(c) $[-3, 3]$ (d) $\mathbb{R}$

4. أي مما يلي ليس حلًا للمتباينة $4x^2 - 4x - 5 > 0$ ؟

- (a) 60 (b) -20 (c) 2 (d) 0

5. أي من المتباينات التالية حلها نفس حل المتباينة $-2x^2 + 5x - 3 > 0$ ؟

- (a) $x^2 - 5 > 2x^2$ (b) $-x^2 - x > x^2 - 4x$
(c) $2x^2 + 3 < 5x$ (d) $x^2 - 3x > 2x - x^2$



أسئلة المقال:

أوجد مجموعة حل كلٍّ من المتباينات التالية:

a) $x^2 - 25 > 0$

$$x^2 > 25$$

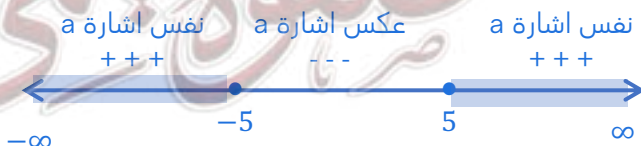
$$\sqrt{x^2} > \sqrt{25}$$

$$|x| > 5$$

$$x > 5 \text{ أو } x < -5$$

$$S = (-\infty, -5) \cup (5, \infty)$$

$$= \mathbb{R} - [-5, 5]$$



b) $x^2 - 5x + 6 < 0$

$$x^2 - 5x + 6 < 0$$

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$a = 1, b = -5, c = 6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(6) = 1 > 0 \rightarrow \text{للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2(1)}$$

$$x = 2, x = 3$$

$$S = (2, 3)$$



c) $x^2 - 6x + 9 > 0$

$$x^2 - 6x + 9 > 0$$

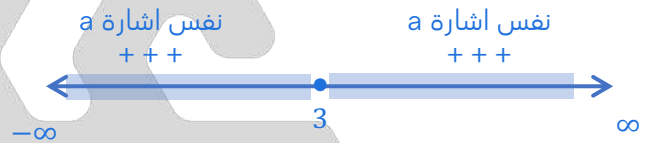
$$f(x) = x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$a = 1, b = -6, c = 9$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(9) = 0 \rightarrow \text{للمعادلة جذر حقيقي واحد}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = 3$$

$$S = (-\infty, 3) \cup (3, \infty) = \mathbb{R} - \{3\}$$



d) $3x^2 - 6x - 10 < -10$

$$3x^2 - 6x - 10 < -10$$

$$3x^2 - 6x < 0$$

$$f(x) = 3x^2 - 6x = 0$$

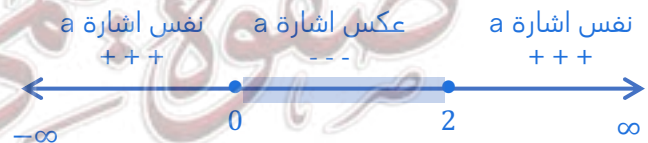
$$a = 3, b = -6, c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(3)(0) = 36 > 0 \rightarrow \text{للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{36}}{2(3)}$$

$$\Rightarrow x = 0, x = 2$$

$$S = (0, 2)$$



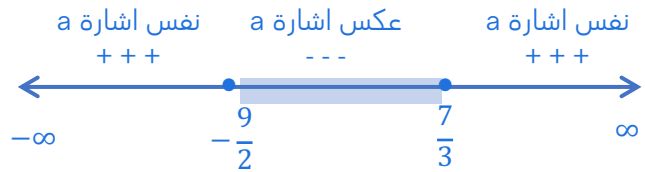
e) $(3x - 7)(2x + 9) \leq 0$

$$3x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{3}$$

$$2x + 9 = 0 \Rightarrow x = -\frac{9}{2}$$

$$a = 3 \times 2 = 6 > 0$$

$$S = \left[-\frac{9}{2}, \frac{7}{3}\right]$$



f) $2x^2 + 5x - 3 < -10$

$$2x^2 + 5x + 7 < 0$$

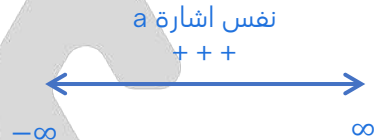
$$2x^2 + 5x + 7 < 0$$

$$f(x) = 2x^2 + 5x + 7 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(2)(7) = -31 < 0$$

لا توجد جذور حقيقية

$$S = \emptyset$$



g) $-2x^2 + x + 21 < 0$

$$f(x) = -2x^2 + x + 21 = 0$$

$$a = -2, b = 1, c = 21$$

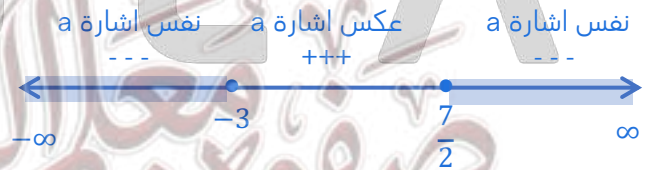
$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(-2)(21) = 169 > 0$$

للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{169}}{2(-2)}$$

$$x = -3, x = \frac{7}{2}$$

$$S = (-\infty, -3) \cup \left(\frac{7}{2}, \infty\right) = \mathbb{R} - \left[-3, \frac{7}{2}\right]$$



$$h) 3x^2 + x + 7 < 0$$

$$f(x) = 3x^2 + x + 7 = 0$$

$$a = 3, b = 1, c = 7$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(3)(7) = -83 < 0$$

لا توجد جذور حقيقية

$$S = \emptyset$$



$$k) x^2 - 6x + 8 < 0$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$a = 1, b = -6, c = 8$$

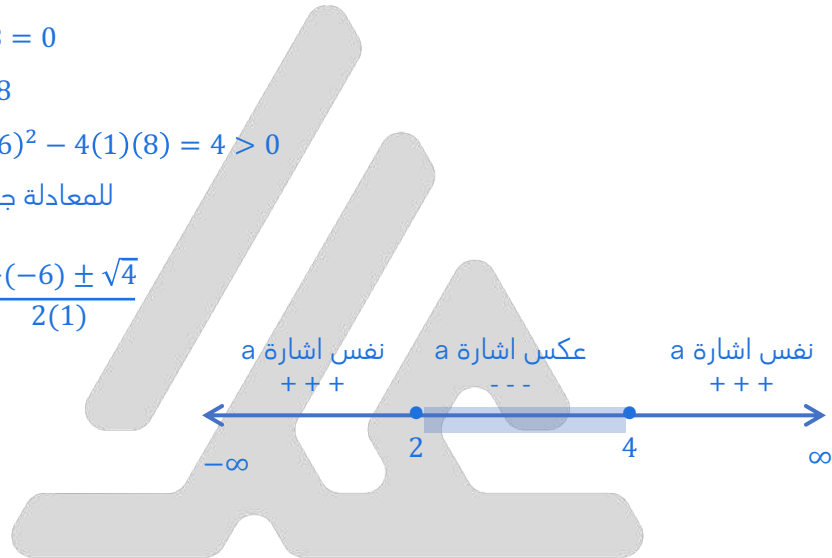
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(8) = 4 > 0$$

للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2(1)}$$

$$x_1 = 2, x_2 = 4$$

$$S = (2, 4)$$



$$l) -2x^2 + 6x + 8 \geq 0$$

$$f(x) = -2x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$a = -2, b = 6, c = 8$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4(-2)(8) = 100 > 0$$

للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2(-1)}$$

$$x_1 = -1, x_2 = 4$$

$$S = [-1, 4]$$



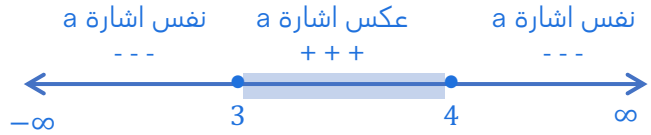
$$m) (x - 4)(3 - x) > 0$$

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$a = (1)(-1) = -1 < 0$$

$$S = (3, 4)$$



$$n) x^2 + 2x - 8 \leq 0$$

$$f(x) = x^2 + 2x - 8 = 0$$

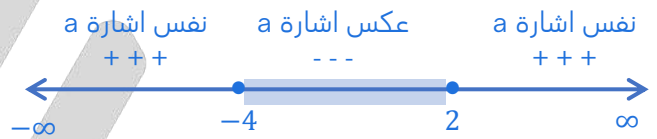
$$a = 1, b = 2, c = -8$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(1)(-8) = 4 + 32 = 36 > 0 \rightarrow \text{للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2(1)}$$

$$x_1 = -4, x_2 = 2$$

$$S = [-4, 2]$$



$$o) 9x^2 + 1 \geq 0$$

$$9x^2 \geq -1$$

$$x^2 \geq -\frac{1}{9}$$

محقة لكل x تنتمي إلى $\mathbb{R}$

$$S = \mathbb{R}$$

$$p) -16x^2 + 24x - 7 > 0$$

$$f(x) = -16x^2 + 24x - 7 = 0$$

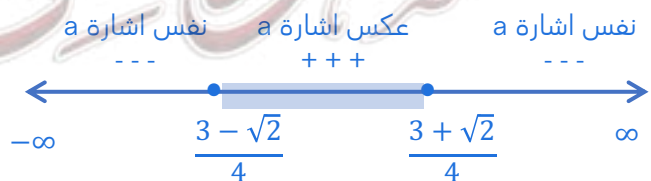
$$a = -16, b = 24, c = -7$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (24)^2 - 4(-16)(-7) = 128 > 0 \rightarrow \text{للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-24 \pm \sqrt{128}}{2(-16)}$$

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{2}}{4}, x_2 = \frac{3 + \sqrt{2}}{4}$$

$$S = \left(\frac{3 - \sqrt{2}}{4}, \frac{3 + \sqrt{2}}{4} \right)$$



(1 – 2) التناسب



النسبة: هي مقارنة بين كميتين من النوع نفسه ولهما نفس وحدة القياس

ويمكن التعبير عن النسبة بصورة a إلى b وتكتب $a:b$ أو $\frac{a}{b}$

التناسب: هو تساوي نسبتي أو أكثر، إذا كان $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$

وكانت $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ أو $a:b = c:d$ فإن a, b, c, d تسمى أعداداً متناسبة.

ويسمى:

a الأول المتناسب، b الثاني المتناسب، c الثالث المتناسب، d الرابع المتناسب

a, d طرفي التناسب، b, c وسطي التناسب

خواص التناسب :

خاصية (1): الضرب التقاطعي

إذا كان $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فإن $a \cdot d = c \cdot b$

مثال (1):

إذا كانت $x, 4, 6, 2$ أعداداً متناسبة أوجد قيمة x

∴ $2, x, 4, 6$ أعداد متناسبة بالتالي:

$$\frac{2}{x} = \frac{4}{6}$$

$$4x = 2 \times 6 \Rightarrow x = \frac{2 \times 6}{4} = 3$$

تحقق من فهمك (1) :

إذا كانت $x, 6, 5, 3$ أعداداً متناسبة أوجد قيمة x

∴ $x, 6, 5, 3$ أعداد متناسبة بالتالي:

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{x}$$

$$3x = 6 \times 5 \Rightarrow x = \frac{6 \times 5}{3} = 10$$

مثال (2):

أوجد الرابع المتناسب للأعداد $1, 3, 9, \square$

نفرض أن الرابع المتناسب هو x

$$\frac{1}{3} = \frac{9}{x}$$

$$x = 3 \times 9$$

$$x = 27$$

تحقق من فهمك (2)

أوجد الثالث المتناسب للأعداد $4, 7, \square, 35$

نفرض أن الثالث المتناسب هو x

$$\frac{4}{7} = \frac{x}{35}$$

$$7x = 4 \times 35$$

$$x = \frac{4 \times 35}{7}$$

$$x = 20$$

مثال (3)

أوجد العدد الذي إذا طرح من حدي النسبة $\frac{7}{9}$ أصبحت $\frac{4}{5}$

نفرض أن العدد x

$$\frac{7-x}{9-x} = \frac{4}{5}$$

$$4(9-x) = 5(7-x)$$

$$36 - 4x = 35 - 5x$$

$$5x - 4x = 35 - 36$$

$$x = -1$$

تحقق من فهمك (3)

أوجد العدد الذي إذا طرح من حدي النسبة $\frac{5}{6}$ أصبحت $\frac{9}{4}$

نفرض أن العدد x

$$\frac{5-x}{6-x} = \frac{9}{4}$$

$$9(6-x) = 4(5-x)$$

$$54 - 9x = 20 - 4x$$

$$4x - 9x = 20 - 54$$

$$-5x = -34$$

$$x = \frac{34}{5}$$

مثال (4)

إذا كان $(5x - 1) : (x + 4) = 4 : 5$ أوجد قيمة x

تحقق من فهمك (4)

أوجد قيمة x إذا كان $(2x + 3) : (3x - 5) = 3 : 4$

$$\frac{2x+3}{3x-5} = \frac{3}{4}$$

$$4(2x+3) = 3(3x-5)$$

$$8x + 12 = 9x - 15$$

$$8x - 9x = -12 - 15$$

$$-x = -27 \Rightarrow x = 27$$

$$\frac{5x-1}{x+4} = \frac{4}{5}$$

$$5(5x-1) = 4(x+4)$$

$$25x - 5 = 4x + 16$$

$$25x - 4x = 5 + 16$$

$$21x = 21 \Rightarrow x = 1$$

خاصية (2): "عكس الخاصية 1"

إذا كان $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكان $a \cdot d = b \cdot c$ فإن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

مثال (5)

إذا كان $5a = 4b$ فأوجد $\frac{a}{b}$ حيث $a, b \in \mathbb{R}^*$

تحقق من فهمك (5)

إذا كان $2a = 7b$ فأوجد $\frac{a}{b}$ حيث $a, b \in \mathbb{R}^*$

$$2a = 7b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{7}{2}$$

$$5a = 4b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{5}$$





خاصية (3):

إذا كان $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فإن

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

مثال (6) أوجد $\frac{x}{y}$ في كل مما يلي حيث $x \neq 0, y \neq 0$

Q $3x = 4y$

$$3x = 4y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{4}{3}$$

Q $\frac{2x+y}{5x-3y} = \frac{1}{2}$

$$1(5x - 3y) = 2(2x + y)$$

$$5x - 3y = 4x + 2y$$

$$5x - 4x = 3y + 2y$$

$$x = 5y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{1}$$

تحقق من فهمك (6) أوجد $\frac{x}{y}$ في كل مما يلي حيث $x \neq 0, y \neq 0$

Q $5x = 7y$

$$5x = 7y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{7}{5}$$

Q $\frac{5x-2y}{5x+2y} = \frac{1}{4}$

$$4(5x - 2y) = 1(5x + 2y)$$

$$20x - 8y = 5x + 2y$$

$$20x - 5x = 8y + 2y$$

$$15x = 10y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$



خاصية (4):

إذا كان $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ فإن $a = bk, c = dk$ $k \in \mathbb{R}^*$

مثال (7) إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ أوجد $\frac{2a+5b}{3b+2a}$

نفرض أن

$$a = 3k, b = 4k \quad : k \neq 0$$

$$\frac{2a+5b}{3b+2a} = \frac{2(3k)+5(4k)}{3(4k)+2(3k)} = \frac{6k+20k}{12k+6k} = \frac{26k}{18k} = \frac{13}{9}$$

حل آخر

$$\frac{2a+5b}{3b+2a}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على b

$$= \frac{\frac{2a}{b} + \frac{5b}{b}}{\frac{3b}{b} + \frac{2a}{b}}$$

بالتعويض بقيمة: $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$

$$= \frac{2\left(\frac{3}{4}\right) + 5}{3 + 2\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{13}{9}$$

تحقق من فهمك (7) إذا كان $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ فأوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{2x+3y}{5x+2y}$

نفرض أن

$$x = 2k, y = 3k \quad : k \neq 0$$

$$\frac{2x+3y}{5x+2y} = \frac{2(2k)+3(3k)}{5(2k)+2(3k)} = \frac{4k+9k}{10k+6k} = \frac{13k}{16k} = \frac{13}{16}$$

حل آخر

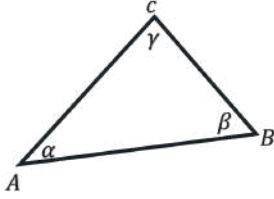
$$\frac{2x+3y}{5x+2y}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على y

$$= \frac{\frac{2x}{y} + \frac{3y}{y}}{\frac{5x}{y} + \frac{2y}{y}}$$

بالتعويض بقيمة: $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$

$$= \frac{2\left(\frac{2}{3}\right) + 3}{5\left(\frac{2}{3}\right) + 2} = \frac{13}{16}$$



إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا المثلث هي: 4: 5: 6 أحسب قياس كل زاوية من زوايا المثلث.

نفرض أن قياسات زوايا المثلث تمثلها α, β, γ وتكون:

$$\alpha : \beta : \gamma = 4 : 5 : 6 \Rightarrow \frac{\alpha}{4} = \frac{\beta}{5} = \frac{\gamma}{6} = k, k \neq 0$$

$$\alpha = 4k, \beta = 5k, \gamma = 6k$$

مجموع قياسات زوايا المثلث 180° بالتالي:

$$4k + 5k + 6k = 180^\circ$$

$$15k = 180^\circ \Rightarrow k = \frac{180}{15} = 12^\circ$$

$$m(\hat{A}) = (4)(12^\circ) = 48^\circ$$

$$m(\hat{B}) = (5)(12^\circ) = 60^\circ$$

$$m(\hat{C}) = (6)(12^\circ) = 72^\circ$$



خاصية (5):

إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$ وكانت $k_1, k_2, k_3, \dots \in \mathbb{R}^*$ فإن إحدى النسب $\frac{ak_1 + ck_2 + \dots}{bk_1 + dk_2 + \dots} =$

مثال (8) إذا كانت الأعداد 5, 6, 3 متناسبة مع a, b, c أوجد قيمة المقدار $\frac{a+2b+c}{3a+b+c}$

∴ الأعداد 5, 6, 3 متناسبة مع a, b, c بالتالي:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{3} = k, k \neq 0 \Rightarrow a = 5k, b = 6k, c = 3k$$

$$\frac{a+2b+c}{3a+b+c} = \frac{5k+2(6k)+3k}{3(5k)+6k+3k} = \frac{5k+12k+3k}{15k+6k+3k} = \frac{20k}{24k} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$

حل آخر

∴ الأعداد 5, 6, 3 متناسبة مع a, b, c

$$\therefore \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{3}$$

بضرب حدي النسبة الثانية في 2

$$\frac{a+2b+c}{5+12+3} = \text{إحدى النسب}$$

$$\frac{a+2b+c}{20} = \text{إحدى النسب} \Rightarrow (1)$$

بضرب حدي النسبة الأولى في 3

$$\frac{3a+b+c}{15+6+3} = \text{إحدى النسب}$$

$$\frac{3a+b+c}{24} = \text{إحدى النسب} \Rightarrow (2)$$

$$\therefore \frac{a+2b+c}{20} = \frac{3a+b+c}{24} = \text{إحدى النسب}$$

$$\frac{a+2b+c}{3a+b+c} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$

تحقق من فهمك (8) إذا كان $\frac{a}{2} = \frac{b}{7} = \frac{c}{5}$ أوجد $\frac{a+2b}{3b+c}$

نفرض أن

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{7} = \frac{c}{5} = k, k \neq 0 \Rightarrow a = 2k, b = 7k, c = 5k$$

$$\frac{a+2b}{3b+c} = \frac{2k+2(7k)}{3(7k)+5k} = \frac{2k+14k}{21k+5k} = \frac{16k}{26k} = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}$$

حل آخر

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{7} = \frac{c}{5}$$

بضرب حدي النسبة الثانية في 2

$$\frac{a+2b}{2+14} = \text{إحدى النسب}$$

$$\frac{a+2b}{16} = \text{إحدى النسب} \Rightarrow (1)$$

بضرب حدي النسبة الثانية في 3

$$\frac{3b+c}{21+5} = \text{إحدى النسب}$$

$$\frac{3b+c}{26} = \text{إحدى النسب} \Rightarrow (2)$$

$$\therefore \frac{16}{a+2b} = \frac{26}{3b+c} = \text{إحدى النسب}$$

$$\frac{a+2b}{3b+c} = \frac{16}{26} = \frac{8}{13} = \frac{16k}{26k} = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}$$

التناسب المتسلسل الهندسي:

الكميات a, b, c في تناسب متسلسل إذا وفقط إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ أو $b^2 = ac$ ويسمى a الأول المتناسب، b الوسط المتناسب، c الثالث المتناسب. حيث $b = \pm\sqrt{ac}$



مثال (9)

أوجد الوسط المتناسب بين العددين 9, 16

$$b = \pm\sqrt{(9)(16)} = \pm\sqrt{144} = \pm 12$$

تحقق من فهمك (9)

أوجد الوسط المتناسب بين العددين -3, -27

$$b = \pm\sqrt{(-27)(-3)} = \pm\sqrt{81} = \pm 9$$

مثال (10) إذا كان a, b, c في تناسب متسلسل أثبت أن $\frac{2a+3b}{2b+3c} = \frac{a}{b}$

∴ a, b, c في تناسب متسلسل فإن

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k : k \neq 0$$

$$b = ck, a = ck^2$$

$$L.H.S = \frac{2a + 3b}{2b + 3c} = \frac{2ck^2 + 3ck}{2ck + 3c} = \frac{ck(2k + 3)}{c(2k + 3)} = k \rightarrow (1)$$

$$R.H.S = \frac{a}{b} = \frac{ck^2}{ck} = k \rightarrow (2)$$

من (1), (2) ينتج أن

$$\frac{2a + 3b}{2b + 3c} = \frac{a}{b}$$

تحقق من فهمك (10) إذا كان a, b, c في تناسب متسلسل أثبت أن $\frac{a+3b}{b+3c} = \frac{a-2b}{b-2c}$

∴ a, b, c في تناسب متسلسل فإن

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k : k \neq 0$$

$$\therefore b = ck, a = ck^2$$

$$L.H.S = \frac{a + 3b}{b + 3c} = \frac{ck^2 + 3ck}{ck + 3c} = \frac{ck(k + 3)}{c(k + 3)} = k \rightarrow (1)$$

$$R.H.S = \frac{a - 2b}{b - 2c} = \frac{ck^2 - 2ck}{ck - 2c} = \frac{ck(k - 2)}{c(k - 2)} = k \rightarrow (2)$$

من (1), (2) ينتج أن

$$\frac{a + 3b}{b + 3c} = \frac{a - 2b}{b - 2c}$$

مثال (11): إذا كان $\frac{2a+3b}{2b+3c} = \frac{a+2b}{b+2c}$ أثبت أن b وسط متناسب بين a, c

$$\frac{2a+3b}{2b+3c} = \frac{a+2b}{b+2c}$$

$$(2a+3b)(b+2c) = (a+2b)(2b+3c)$$

$$2ab+4ac+3b^2+6bc = 2ab+3ac+4b^2+6bc$$

$$4ac-3ac = 4b^2-3b^2$$

$$ac = b^2$$

b وسط متناسب بين a, c

تحقق من فهمك (11): إذا كان $\frac{a+b}{b+c} = \frac{a}{b}$ أثبت أن b وسط متناسب بين a, c

$$\frac{a+b}{b+c} = \frac{a}{b}$$

$$b(a+b) = a(b+c)$$

$$ab+b^2 = ab+ac$$

$$b^2 = ac$$

b وسط متناسب بين a, c

تعميم: الكميات $a, b, c, d, \dots$ في تناسب متسلسل إذا وفقط إذا كان

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \dots$$





تدرب وحل المسائل تمارين موضوعية:

ظل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

(a) (b)

1. إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ فإن $ab = 3 \times 4$

(a) (b)

2. إذا كان $\frac{x}{3} = \frac{14}{23}$ فإن $x = \frac{23}{42}$

(a) (b)

3. إذا كان $\frac{x-7}{7} = \frac{1}{8}$ فإن $x = \frac{63}{8}$

(a) (b)

4. زوج النسب التالي: $\frac{9}{12} = \frac{4}{5}$ لا يكون تناسبًا

اختر الإجابة الصحيحة:

5. إذا كانت $4x, 2b, 3x, a$ في تناسب فإن $\frac{a}{b}$ تساوي:

(a) $\frac{3}{2}$

(b) $\frac{2}{3}$

(c) $\frac{4}{3}$

(d) $\frac{3}{4}$

6. إذا كان $\frac{x}{y} = 7$ فإن $x + 7y$ تساوي:

(a) $7x$

(b) $8x$

(c) $2x$

(d) $10x$

7. إذا كان $2x - 5y = 0$ فإن $\frac{x}{y}$ تساوي:

(a) $\frac{5}{2}$

(b) $\frac{2}{5}$

(c) $\frac{3}{2}$

(d) $\frac{2}{3}$

8. إذا كان $\frac{x}{2y} = \frac{3}{5}$ فإن $\frac{x+2y}{2x-y}$ تساوي:

(a) $\frac{15}{9}$

(b) $\frac{16}{7}$

(c) $\frac{7}{16}$

(d) $\frac{9}{15}$

9. إذا كان $20, x, 32$ في تناسب متسلسل فإن x تساوي:

(a) $\pm 2\sqrt{10}$

(b) $\pm 4\sqrt{10}$

(c) $\pm 8\sqrt{10}$

(d) $\pm \frac{1}{8\sqrt{10}}$

أسئلة المقال:

1. أوجد الرابع متناسب للأعداد 5, 7, 10, □
ليكن العدد المطلوب x

$$\frac{5}{7} = \frac{10}{x}$$
$$5x = 7 \times 10 \Rightarrow x = \frac{7 \times 10}{5} = 14$$

2. أوجد الثالث متناسب للأعداد 4, 6 □, 9
ليكن العدد المطلوب x

$$\frac{4}{6} = \frac{x}{9}$$
$$6x = 4 \times 9 \Rightarrow x = \frac{4 \times 9}{6} = 6$$

3. أوجد قيمة x إذا كانت الأعداد 5, 20, 25, x متناسبة.
بما أن الأعداد متناسبة:

$$\frac{x}{5} = \frac{20}{25}$$
$$25x = 5 \times 20 \Rightarrow x = \frac{5 \times 20}{25} = 4$$

4. أوجد العدد الحقيقي الذي إذا أضيف إلى حدي النسبة $\frac{4}{5}$ أصبحت $\frac{2}{3}$
نفترض أن العدد x

$$\frac{4+x}{5+x} = \frac{2}{3}$$
$$3(4+x) = 2(5+x)$$
$$12+3x = 10+2x$$
$$-2x+3x = 10-12$$
$$x = -2$$

5. أوجد العدد الذي إذا طرح من كل الأعداد 16, 10, 11, 7 بالترتيب نفسه أصبحت متناسبة.
نفترض أن العدد x

$$\frac{16-x}{10-x} = \frac{11-x}{7-x}$$
$$(16-x)(7-x) = (10-x)(11-x)$$
$$112-16x-7x+x^2 = 110-10x-11x+x^2$$
$$112-23x = 110-21x$$
$$12x-23x = 110-112$$
$$-2x = -2 \Rightarrow x = 1$$

6. إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}, \frac{c}{d} = \frac{3}{4}$ أوجد $\frac{3ac+2bd}{bc-2ad}$

نفترض أن $a = k, b = 2k, c = 3m, d = 4m$:

$$\frac{3ac + 2bd}{bc - 2ad} = \frac{3(k)(3m) + 2(2k)(4m)}{(2k)(3m) - 2(k)(4m)} = \frac{9km + 16km}{6km - 8km} = \frac{25km}{-2km} = -\frac{25}{2} = -12.5$$

7. إذا كانت الأعداد $4, x-2, 1, \frac{1}{2}$ في تناسب متسلسل أوجد قيمة x

بما أن الأعداد في تناسب متسلسل، فإن

$$\frac{4}{x-2} = \frac{x-2}{1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x-2) &= 1 \times 1 \\ x-2 &= 2 \Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

8. إذا كانت الأعداد a, b, c تكون تناسبًا متسلسلاً، أثبت أن $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{a}{c}$ حيث المقام $\neq$ صفر

بما أن الأعداد a, b, c تكون تناسبًا متسلسلاً:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k : k \neq 0 &\Rightarrow b = ck, a = ck^2 \\ \text{L.H.S} &= \frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{(ck^2)^2 + (ck)^2}{(ck)^2 + c^2} = \frac{c^2k^4 + c^2k^2}{c^2k^2 + c^2} = \frac{c^2k^2(k^2 + 1)}{c^2(k^2 + 1)} = k^2 \\ \text{R.H.S} &= \frac{a}{c} = \frac{ck^2}{c} = k^2 \end{aligned}$$

بالتالي

$$\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$$

9. إذا كانت الأعداد 3, 5, 11 متناسبة مع a, b, c أوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{a+3b}{5b+c}$

بما أن الأعداد 3, 5, 11 متناسبة مع a, b, c :

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{11} = k : k \neq 0 \Rightarrow a = 3k, b = 5k, c = 11k$$

بالتعويض

$$\frac{a + 3b}{5b + c} = \frac{3k + 3(5k)}{5(5k) + 11k} = \frac{3k + 15k}{25k + 11k} = \frac{18k}{36k} = \frac{1}{2}$$

(2 - 2) تشابه المضلعات



تعميم (1): يقال لمضلعين (لهما العدد نفسه من الأضلاع) إنهما متشابهان إذا تحقق الشرطان التاليان معًا:

قياسات زواياهما المتناظرة متساوية وأطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة (والعكس صحيح) وتسمى النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين نسبة التشابه، ويستخدم الرمز ($\sim$) للتعبير عن تشابه المضلعين.

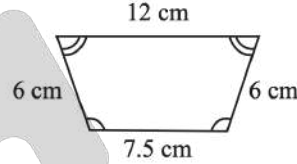
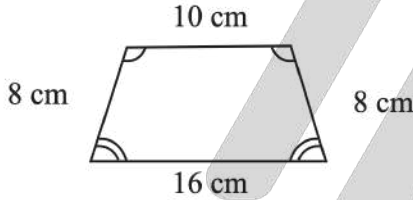
تعميم (2): المضلعان المتطابقان متشابهان

تعميم (3): إذا كان المضلع A يشابه المضلع B وكان المضلع B يشابه المضلع C فإن المضلع A يشابه المضلع C

أي أنه: إذا كان $A \sim B$ و $B \sim C$ فإن $A \sim C$

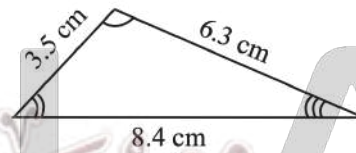
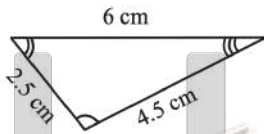
نشاط في كل من الأشكال التالية:

إبحث تشابه المضلعين، فإذا كان المضلعان متشابهين اكتب عبارة التشابه ونسبة التشابه



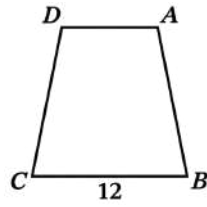
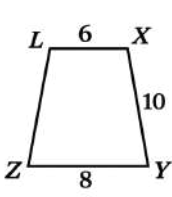
$$\frac{6}{8} = \frac{7.5}{10} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

الزوايا متطابقة وأطوال الأضلاع متناسبة بالتالي المضلعين متشابهين



$$\frac{2.5}{3.5} = \frac{4.5}{6.3} = \frac{6}{8.4} = \frac{5}{7}$$

الزوايا متطابقة وأطوال الأضلاع متناسبة بالتالي المضلعين متشابهين



مثال (1): في الشكل المقابل
إذا كان $XYZL \sim ABCD$
أوجد AB, DA

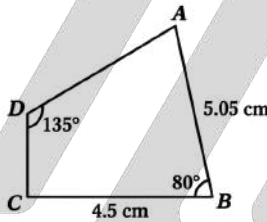
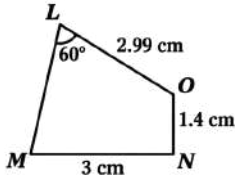
$$ABCD \sim XYZL$$

$$\frac{XY}{AB} = \frac{YZ}{BC} = \frac{LX}{DA}$$

$$\frac{10}{AB} = \frac{8}{12} = \frac{6}{DA}$$

$$\frac{10}{AB} = \frac{8}{12} \Rightarrow AB = \frac{10 \times 12}{8} = 15$$

$$\frac{6}{DA} = \frac{8}{12} \Rightarrow DA = \frac{6 \times 12}{8} = 9$$



تحقق من فهمك (1) في الشكل المقابل
المضلعان $ABCD, LMNO$ متشابهان.
أوجد قياسات الزوايا المجهولة
وأطوال الأضلاع المجهولة في كلا المضلعين.

$$ABCD \sim LMNO$$

باستخدام تعريف التشابه:

$$\frac{AB}{LM} = \frac{BC}{MN} = \frac{CD}{NO} = \frac{DA}{OL}$$

$$\frac{5.05}{LM} = \frac{4.5}{3} = \frac{CD}{1.4} = \frac{DA}{2.99}$$

$$\frac{5.05}{LM} = \frac{4.5}{3} \Rightarrow LM = \frac{5.05 \times 3}{4.5} = \frac{101}{30} \text{ cm}$$

$$\frac{CD}{1.4} = \frac{4.5}{3} \Rightarrow CD = \frac{1.4 \times 4.5}{3} = \frac{21}{10} \text{ cm}$$

$$\frac{DA}{2.99} = \frac{4.5}{3} \Rightarrow DA = \frac{2.99 \times 4.5}{3} = \frac{897}{200} \text{ cm}$$

$$m(\hat{A}) = m(\hat{L}) = 60^\circ$$

$$m(\hat{D}) = m(\hat{O}) = 135^\circ$$

$$m(\hat{B}) = m(\hat{M}) = 80^\circ$$

$$m(\hat{C}) = m(\hat{N}) = 360 - (60 + 135 + 80) = 85^\circ$$



نظرية:

- إذا كانت نسبة التشابه لأي شكلين متشابهين هي: $\frac{a}{b}$ فإن
- النسبة بين محيطي الشكلين $= \frac{a}{b}$ وهي نسبة التشابه.
 - النسبة بين مساحتي الشكلين $= \left(\frac{a}{b}\right)^2$ وهي مربع نسبة التشابه.

ملاحظة:

- إذا كان المضلع A يشابه المضلع B وكانت k نسبة تشابه المضلع A إلى المضلع B ميز الحالات التالية:
- $k > 1$ فإن المضلع A هو تكبير للمضلع B وتسمى k معامل التكبير.
 - $0 < k < 1$ فإن المضلع A هو تصغير للمضلع B وتسمى k معامل التصغير.
 - $k = 1$ فإن المضلع A يطابق المضلع B

مثال (2) إذا كانت نسبة التشابه لمضلعين متشابهين تساوي $\frac{5}{6}$ وكان محيط المضلع الأصغر يساوي 14.5 cm أوجد محيط المضلع الأكبر.

النسبة بين محيطي المضلعين = نسبة التشابه

$$\frac{5}{6} = \frac{\text{محيط المضلع الأصغر}}{\text{محيط المضلع الأكبر}}$$

$$\text{محيط المضلع الأكبر} = \frac{6 \times 14.5}{5} = 17.4 \text{ cm}$$

تحقق من فهمك (2) لدينا شكلان رباعيان متشابهان ونسبة التشابه بينهما $\frac{5}{4}$ فإذا كانت مساحة الشكل الرباعي الأكبر هي 30 cm^2 فما مساحة الشكل الرباعي الأصغر؟

النسبة بين مساحتي الشكلين = مربع نسبة التشابه

$$\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{\text{مساحة الشكل الرباعي الأكبر}}{\text{مساحة الشكل الرباعي الأصغر}}$$

$$\frac{25}{16} = \frac{30}{\text{مساحة الشكل الرباعي الأصغر}}$$

$$\text{مساحة الشكل الرباعي الأصغر} = \frac{16 \times 30}{25} = 19.2 \text{ cm}^2$$



تدرب وحل المسائل: تمارين موضوعية:

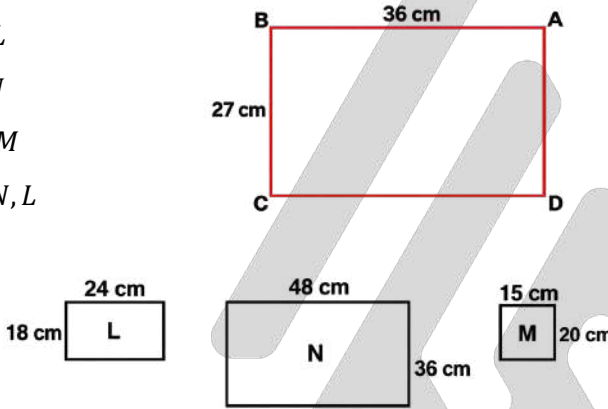
ظل ⑧ إذا كانت العبارة صحيحة أو ⑨ إذا كانت العبارة خاطئة:

1. كل مضلعين متطابقين هما مضلعان متشابهان. ☐ (a) ☐ (b)
2. كل مضلعين متشابهين هما مضلعان متطابقان. ☐ (a) ☒ (b)
3. إذا تساوت الزوايا المتناظرة في مضلعين فإن المضلعين متشابهان. ☐ (a) ☒ (b)

ظل دائرة الإجابة الصحيحة.

4. المستطيلات المشابهة للمستطيل $BADC$ هي:

- (a) فقط L
- (b) فقط N
- ☒ (c) L, N, M
- (d) فقط N, L



5. المضلعان المتشابهان يكونان متطابقين إذا كانت نسبة التشابه x ، فإن:

- ☒ (a) $x = 1$
- ☐ (b) $x > 1$
- ☐ (c) $0 < x < 1$
- ☐ (d) $x = \frac{1}{2}$

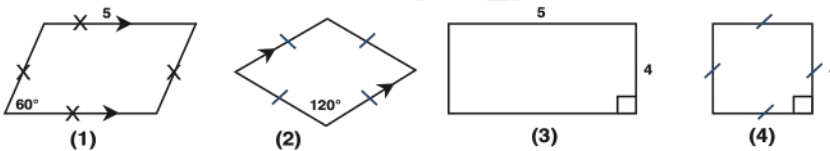
6. مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما 36:25 فإن النسبة بين ضلعي متناظرين فيهما تساوي:

- ☐ (a) 6:5
- ☐ (b) 5:6
- ☒ (c) 36:25
- ☐ (d) 4:5

7. إذا كانت النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين 16:25 فطول ضلعي متناظرين فيهما تساوي:

- ☐ (a) 2:5
- ☒ (b) 4:5
- ☐ (c) 16:25
- ☐ (d) 16:41

8. أي من المضلعين التاليين متشابهان؟



- ☒ (a) المضلعان (1)، (2)
- ☐ (b) المضلعان (1)، (3)
- ☐ (c) المضلعان (3)، (4)
- ☐ (d) المضلعان (2)، (4)

9. إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle LMN$ و $AB = 3 \text{ cm}$, $LM = 6 \text{ cm}$, فإن BC تساوي:

a) 4 cm

b) 3 cm

c) 2 cm

d) 1.5 cm



أسئلة المقال:

1. إذا كانت نسبة التشابه بين مستطيلين هي 3:2 وكان محيط المستطيل الأكبر يساوي 75 أوجد محيط المستطيل الأصغر؟

بفرض محيط الأصغر يساوي x بالتالي:

$$\frac{\text{محيط المضلع الأكبر}}{\text{محيط المضلع الأصغر}} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{75}{x} &= \frac{3}{2} \\ 3 \times x &= 75 \times 2 \\ x &= \frac{75 \times 2}{3} = 50 \end{aligned}$$

2. النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين هي: $\frac{16}{9}$ ما محيط المضلع الأكبر إذا كان محيط المضلع الأصغر 24 cm ؟

حسب نظرية: النسبة بين المساحتين يساوي مربع نسبة التشابه $\frac{16}{9}$

بالتالي نسبة التشابه: $\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$ بالتالي:

$$\frac{\text{محيط المضلع الأكبر}}{\text{محيط المضلع الأصغر}} = \frac{4}{3}$$

بفرض محيط الأكبر x بالتالي:

$$\begin{aligned} \frac{x}{24} &= \frac{4}{3} \\ 3x &= 24 \times 4 \\ x &= \frac{24 \times 4}{3} = 32 \end{aligned}$$

3. مستطيلان متشابهان بعدد الأول 12 cm , 8 cm ومحيط الثاني 200 cm
أوجد نسبة التشابه.
أوجد مساحة المستطيل الثاني.

محيط المستطيل الأول: $P_1 = 2(8 + 12) = 40\text{ cm}$

محيط المستطيل الثاني: $P_2 = 200\text{ cm}$
∴ النسبة بين المحيطين تساوي نسبة التشابه بالتالي:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{200}{40} = \frac{5}{1}$$

∴ نسبة التشابه = $5:1$

مساحة المستطيل الأول: $A_1 = 8 \times 12 = 96\text{ cm}^2$
∴ نسبة المساحات تساوي مربع نسبة التشابه بالتالي:

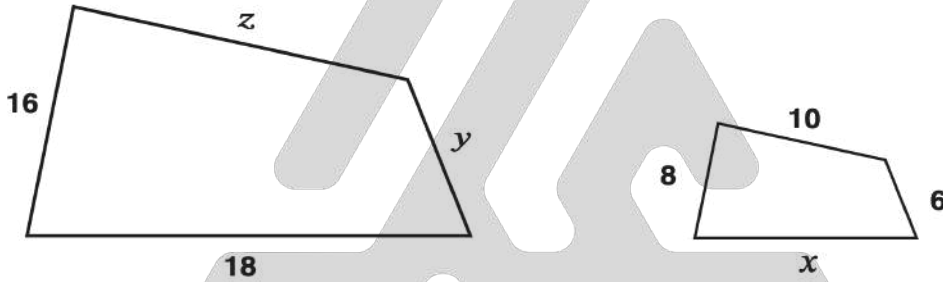
$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{5}{1}\right)^2 = 25$$

$$A_2 = 25 \times A_1 = 25 \times 96 = 2400\text{ cm}^2$$

بالتالي

4. احسب x, y, z في الحالات التالية علماً بأن المضلعين متشابهان.

a)

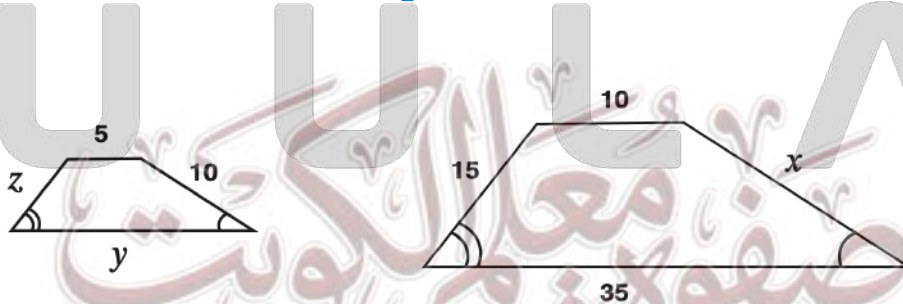


من التشابه نجد أن أطوال الأضلاع متناسبة بالتالي:

$$\frac{6}{y} = \frac{x}{18} = \frac{10}{z} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$y = 2 \times 6 = 12, \quad 2x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{2} = 9, \quad z = 2 \times 10 = 20$$

b)

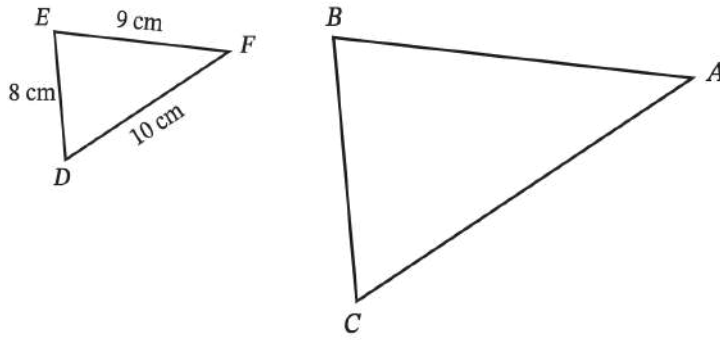


من التشابه نجد أن أطوال الأضلاع متناسبة بالتالي:

$$\frac{x}{10} = \frac{35}{y} = \frac{15}{z} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1} \Rightarrow$$

$$x = 2 \times 10 = 20, \quad 2y = 35 \Rightarrow y = \frac{35}{2}, \quad 2z = 15 \Rightarrow z = \frac{15}{2}$$

5. في الشكل المقابل $\triangle DEF \sim \triangle ABC$
إذا كان محيط المثلث ABC يساوي: 81 cm
أوجد أطوال أضلاع $\triangle ABC$.



بما أن $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ فإن

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} \Rightarrow \frac{8}{AB} = \frac{9}{BC} = \frac{10}{AC}$$

حسب خواص التناسب:

$$\frac{8}{AB} = \frac{9}{BC} = \frac{10}{AC} = \frac{8+9+10}{AB+BC+AC} = \frac{27}{81} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$AB = 8(3) = 24 \text{ cm}$$

$$BC = 9(3) = 27 \text{ cm}$$

$$AC = 10(3) = 30 \text{ cm}$$

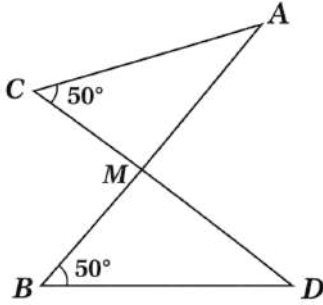
(3 - 2) تشابه المثلثات



نظرية (1):

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثين مع زاويتين في المثلث الآخر.

مثال (1)

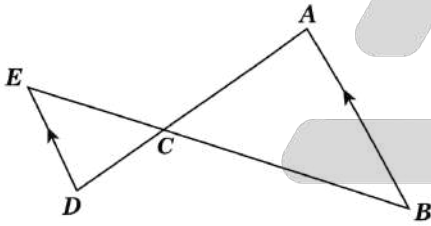


في الشكل المقابل $m(\hat{C}) = m(\hat{B}) = 50^\circ$
أثبت أن $\triangle DBM \sim \triangle ACM$

لدينا: (1) $\rightarrow$ (معطى) $m(\hat{C}) = m(\hat{B}) = 50^\circ$

(2) $\rightarrow$ بالتقابل بالرأس $m(\hat{CMA}) = m(\hat{BMD})$

من (1)، (2) وحسب النظرية (1) نجد أن $\triangle DBM \sim \triangle ACM$



تحقق من فهمك (1)

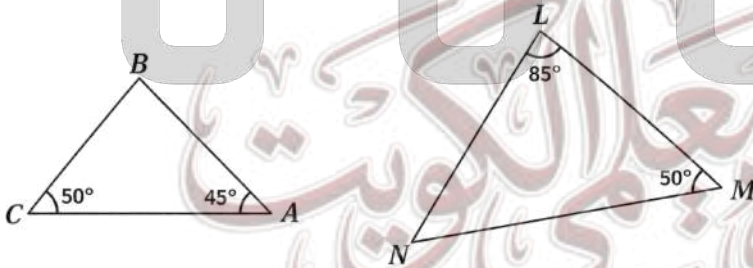
في الشكل المقابل $\overline{DE} \parallel \overline{BA}$
أثبت أن المثلثين ABC, DEC متشابهان ثم اكتب عبارة التشابه

لدينا: (1) $\rightarrow$ بالتبادل والتوازي $m(\hat{BAC}) = m(\hat{EDC})$

(2) $\rightarrow$ بالتقابل بالرأس $m(\hat{ACB}) = m(\hat{DCE})$

من (1)، (2) وحسب النظرية (1) نجد أن $\triangle ABC \sim \triangle DEC$

مثال (2)



في الشكل المقابل
 $m(\hat{A}) = 45^\circ, m(\hat{C}) = 50^\circ$
 $m(\hat{L}) = 85^\circ, m(\hat{M}) = 50^\circ$
أثبت أن $\triangle ABC \sim \triangle NLM$

لدينا:

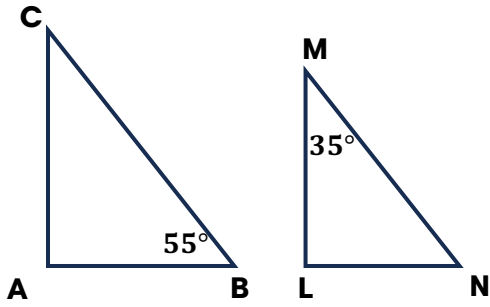
(1) $\rightarrow m(\hat{M}) = m(\hat{C}) = 50^\circ$

$m(\hat{B}) = 180^\circ - (50^\circ + 45^\circ) = 85^\circ$

(2) $\rightarrow m(\hat{L}) = m(\hat{B}) = 85^\circ$

من (1)، (2) وحسب النظرية (1) نجد أن $\triangle ABC \sim \triangle NLM$

تحقق من فهمك (2)



المثلث ABC قائم الزاوية في A فيه: $m(\hat{B}) = 55^\circ$
والمثلث NLM قائم الزاوية في L فيه: $m(\hat{M}) = 35^\circ$
أثبت أن المثلثين متشابهان.

لدينا:

$$m(\hat{A}) = m(\hat{L}) = 90^\circ \rightarrow (1)$$

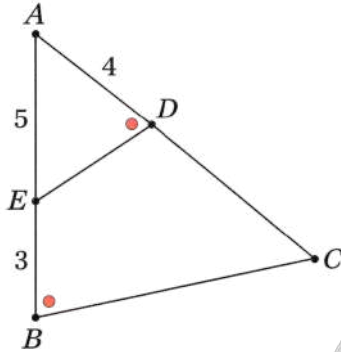
$$m(\hat{C}) = 180^\circ - (90^\circ + 55^\circ) = 35^\circ$$

$$m(\hat{M}) = m(\hat{C}) = 35^\circ \rightarrow (2)$$

من (1)، (2) وحسب النظرية (1) نجد أن
 $\triangle ABC \sim \triangle LNM$

مثال (3) في الشكل المقابل

أثبت أن $\triangle ACB \sim \triangle AED$
أوجد: DC



لدينا المثلثان $\triangle ACB$, $\triangle AED$ فيهما:

$\hat{A}$ زاوية مشتركة $\leftarrow (1)$

معطى $m(\hat{D}) = m(\hat{B})$ $\leftarrow (2)$ معطى
من (1)، (2) وحسب النظرية (1) ينتج أن

$$\triangle ACB \sim \triangle AED$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$$

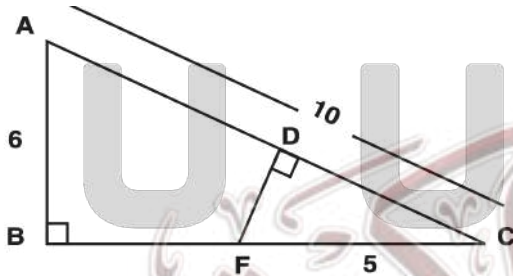
$$\frac{5}{3} = \frac{4}{AD} \Rightarrow$$

$$AC = \frac{8 \times 5}{4} = 10$$

$$DC = 10 - 4 = 6$$

تحقق من فهمك (3) في الشكل المقابل

أثبت أن المثلثين FDC , ABC متشابهان.
أوجد: FD



في المثلثين: $\triangle ABC$, $\triangle FDC$

$m(\hat{B}) = m(\hat{D}) = 90^\circ$ $\leftarrow (1)$

$\hat{C}$ زاوية مشتركة $\leftarrow (2)$

من (1)، (2) وحسب النظرية (1) ينتج أن

$$\triangle ABC \sim \triangle FDC$$

$$\therefore \frac{AC}{FC} = \frac{AB}{FD}$$

$$\frac{10}{5} = \frac{6}{FD} \Rightarrow$$

$$FD = \frac{6 \times 5}{10} = 3$$



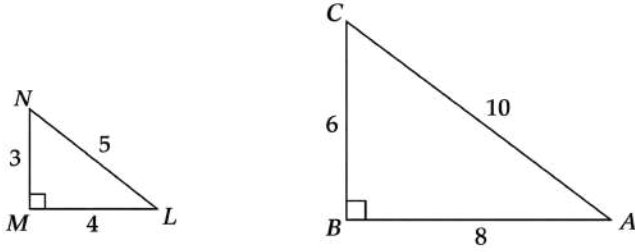
نظرية (2)

يتشابه المثلثان إذا تناسب أضلاعهما المتناظرة.

مثال (4)

في الشكل المقابل

أثبت أن المثلثين LMN, ABC متشابهان.



المثلثان $LMN, \triangle ABC$ فيهما:

$$\frac{LM}{AB} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \rightarrow (1)$$

$$\frac{LN}{AC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \rightarrow (2)$$

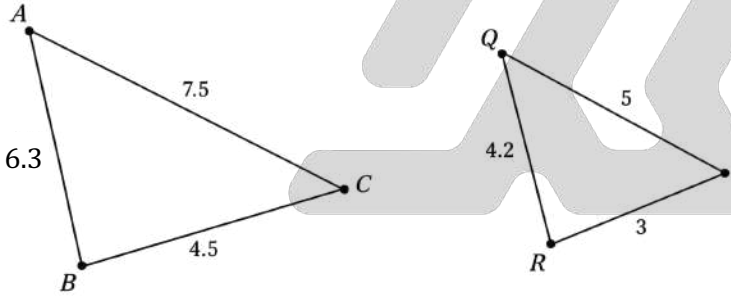
$$\frac{MN}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \rightarrow (3)$$

من (1)، (2)، (3) نجد أن الأضلاع متناسبة بالتالي
 $\triangle ABC \sim \triangle LMN$

تحقق من فهمك (4)

في الشكل المقابل

أثبت أن المثلثين ABC, QRS متشابهان.



المثلثان $ABC, \triangle QRS$ فيهما:

$$\frac{AC}{QS} = \frac{7.5}{5} = \frac{3}{2} \rightarrow (1)$$

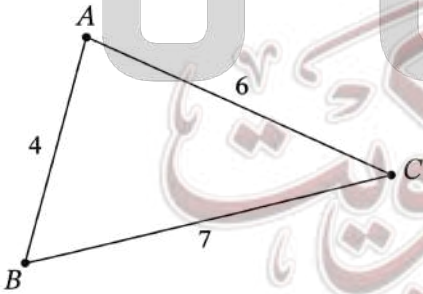
$$\frac{BC}{RS} = \frac{4.5}{3} = \frac{3}{2} \rightarrow (2)$$

$$\frac{AB}{QR} = \frac{6.3}{4.2} = \frac{3}{2} \rightarrow (3)$$

من (1) و (2) و (3) نجد أن الأضلاع متناسبة بالتالي $\triangle ABC \sim \triangle QRS$

في الشكل المقابل المثلثان ABC, LMN متشابهان.

أوجد كلاً من LN, MN



المثلثان $ABC, \triangle LMN$ فيهما:

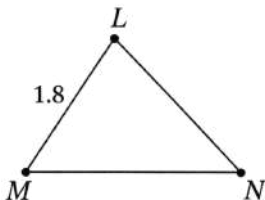
$$\frac{LM}{AB} = \frac{1.8}{4} = \frac{9}{20}$$

وبما أن المثلثين متشابهان، فإن

$$\frac{LM}{AB} = \frac{LN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{9}{20}$$

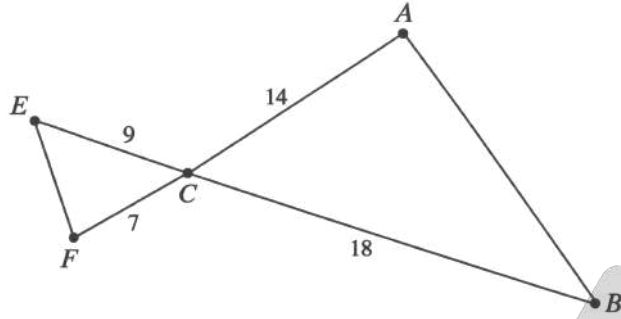
$$\frac{6}{20} = \frac{LN}{9} \Rightarrow LN = \frac{6 \times 9}{20} = 2.7$$

$$\frac{1.8}{7} = \frac{MN}{20} \Rightarrow MN = \frac{1.8 \times 20}{7} = 3.15$$





نظرية (3): يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاوية في أحدهما مع زاوية في المثلث الآخر، وتناسب طول الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين.



مثال (5) في الشكل المقابل أثبت أن المثلثين ABC, FEC متشابهان. ثم اكتب عبارة التشابه.

المثلثان $EFC, \triangle ABC$ فيهما:

$$m(\widehat{ECF}) = m(\widehat{BCA}) \rightarrow (1) \text{ تقابل بالرأس}$$

$$\frac{FC}{AC} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{EC}{BC} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

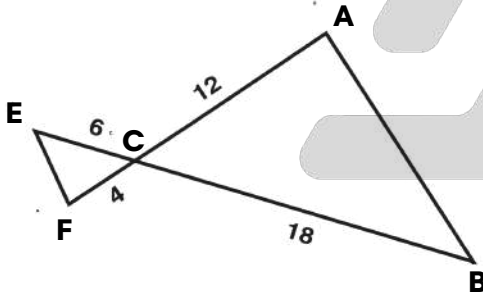
$$\frac{BC}{FC} = \frac{18}{9} = 2$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{FC}{EC} \rightarrow (2)$$

من (1)، (2) ينتج أن $\triangle ABC \sim \triangle FEC$

تحقق من فهمك (5)

في الشكل المقابل أثبت أن المثلثين متشابهان.



المثلثان $EFC, \triangle ABC$ فيهما:

$$m(\widehat{ECF}) = m(\widehat{BCA}) \rightarrow (1)$$

بالتقابل بالرأس.

$$\frac{FC}{AC} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{EC}{BC} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{BC}{FC} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{FC}{EC} \rightarrow (2)$$

من (1)، (2) ينتج أن $\triangle ABC \sim \triangle EFC$

مثال (6)

في الشكل المقابل

أثبت أن المثلثين BAC, BFE متشابهان.

ثم أوجد كلا من x, y

المثلثان BFE, BAC فيهما:

الزاوية $\hat{B}$ زاوية مشتركة $\leftarrow (1)$

معطى $m(\hat{BFE}) = m(\hat{BAC}) = 90^\circ$

من (1)، (2) ينتج أن $\triangle BFE \sim \triangle BAC$

في $\triangle ABC$ القائم في A وحسب نظرية فيثاغورث

$$BC = \sqrt{(6)^2 + (8)^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$\frac{BF}{BA} = \frac{FE}{AC} = \frac{BE}{BC}$$

$$\frac{y}{8} = \frac{x}{6} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{y}{8} = \frac{3}{10} \Rightarrow y = \frac{3 \times 8}{10} = 2.4 \text{ cm}$$

$$\frac{x}{6} = \frac{3}{10} \Rightarrow x = \frac{3 \times 6}{10} = 1.8 \text{ cm}$$

$$\frac{y}{8} = \frac{3}{10} \Rightarrow y = \frac{3 \times 8}{10} = 2.4 \text{ cm}$$

تحقق من فهمك (6)

في الشكل المرسوم:

(a) أثبت أن $\triangle FEC \sim \triangle ABC$

(b) أوجد EF

المثلثان FEC, ABC فيهما:

تقابل بالرأس $\hat{FCE} = \hat{ACB} \rightarrow (1)$

$$\frac{FC}{AC} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\frac{EC}{BC} = \frac{12}{6} = 2$$

$$\frac{FC}{AC} = \frac{EC}{BC} \rightarrow (2)$$

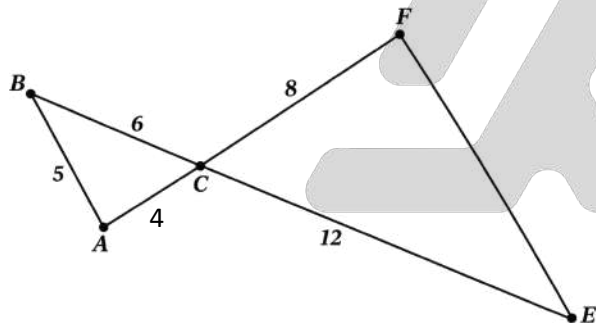
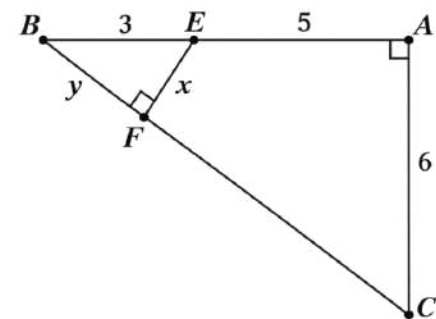
$$\therefore \frac{FC}{AC} = \frac{EC}{BC} \rightarrow (2)$$

من (1)، (2) ينتج أن $\triangle FEC \sim \triangle ABC$

وبالتالي:

$$\frac{EF}{AB} = \frac{FC}{AC}$$

$$\frac{EF}{5} = \frac{8}{4} \Rightarrow EF = \frac{5 \times 8}{4} = 10$$



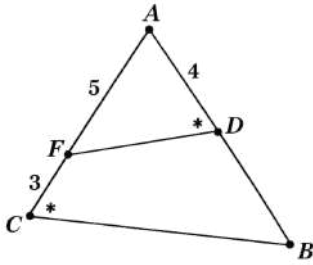


تدرب وحل المسائل تمارين موضوعية:

ظل ③ إذا كانت العبارة صحيحة أو ⑤ إذا كانت العبارة خاطئة:

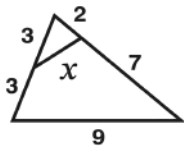
1. في الشكل المقابل طول $\overline{BD}$ يساوي 6

(a) (b)



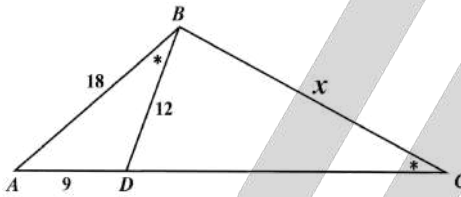
2. في الشكل المقابل $x = 2$

(a) (b)



3. في الشكل المقابل $x = 24$

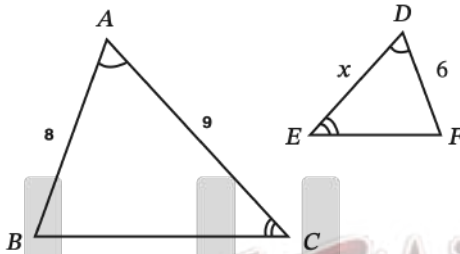
(a) (b)



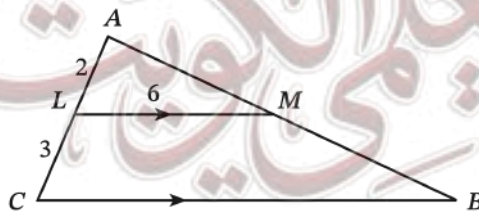
اختر الإجابة الصحيحة:

4. في الشكل المرسوم قيمة x تساوي:

- (a) 6
(b) $5\frac{1}{3}$
(c) 7
(d) 6.75



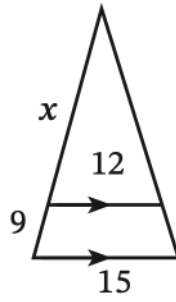
- (a) 9 cm
(b) 12 cm
(c) 15 cm
(d) 10 cm



5. في الشكل المقابل $\overline{LM} \parallel \overline{BC}$
 $AL = 2 \text{ cm}, LC = 3 \text{ cm}, LM = 6 \text{ cm}$
فإن BC تساوي:

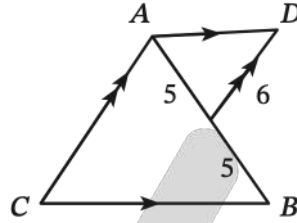
6. في الشكل المقابل، قيمة x تساوي:

- (a) 12
- (b) 24
- (c) 36
- (d) 48



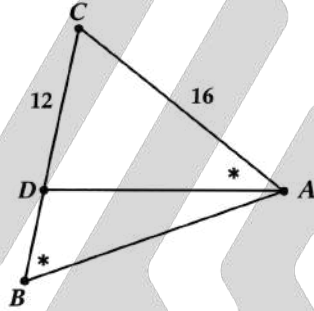
7. في الشكل المقابل AC تساوي:

- (a) 6
- (b) 9
- (c) 12
- (d) 15



8. في الشكل المقابل BC تساوي:

- (a) 16
- (b) 12
- (c) $9\frac{1}{3}$
- (d) $21\frac{1}{3}$



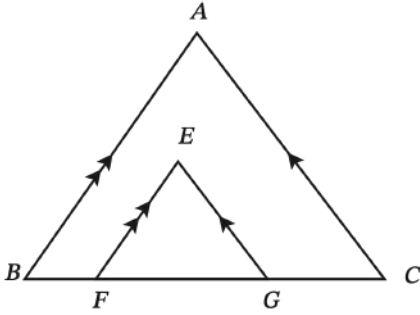


أسئلة المقال :

1. في الشكل المرسوم:

$$\overline{AB} \parallel \overline{EF}, \quad \overline{AC} \parallel \overline{EG}$$

أثبت أن المثلث ABC يشابه المثلث EFG.



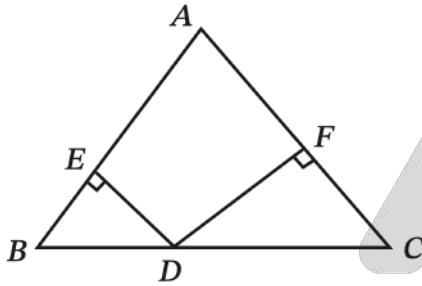
المثلثان $\triangle ABC$, $\triangle EFG$ فيهما $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$, $\overline{AC} \parallel \overline{EG}$

بالتالي

$$m(\hat{B}) = m(\hat{F}) \rightarrow (1) \text{ بالتناظر والتوازي}$$

$$m(\hat{C}) = m(\hat{G}) \rightarrow (2) \text{ بالتناظر والتوازي}$$

من (1)، (2) ينتج أن $\triangle ABC \sim \triangle EFG$



2. في الشكل المرسوم ABC مثلث فيه:

$$AB = AC, BC = 48 \text{ cm}, \frac{ED}{DF} = \frac{5}{7}$$

أوجد طول DC

المثلثان $\triangle BDE$, $\triangle CDF$ فيهما:

$$m(\hat{BED}) = m(\hat{CFD}) = 90^\circ \rightarrow (1)$$

وبما أن $AB = AC$

فإن المثلث ABC متطابق الضلعين فيه:

$$m(\hat{B}) = m(\hat{C}) \rightarrow (2)$$

من (1)، (2) ينتج أن $\triangle BDE \sim \triangle CDF$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{ED}{DF}$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{BD + DC}{DC} = \frac{5 + 7}{7}$$

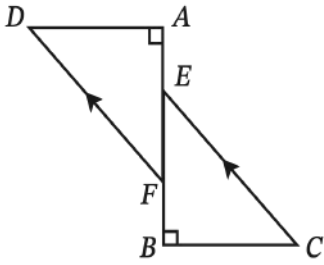
$$\frac{BC}{DC} = \frac{12}{7}$$

$$\frac{48}{DC} = \frac{12}{7}$$

$$12 \times DC = 7 \times 48 \Rightarrow DC = \frac{7 \times 48}{12} = 28 \text{ cm}$$

3. في الشكل المرسوم: $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = 90^\circ$
 $\overline{DF} \parallel \overline{EC}$

أثبت أن $\triangle ADF \sim \triangle BCE$



المثلثان $\triangle ADF$, $\triangle BCE$ فيهما:

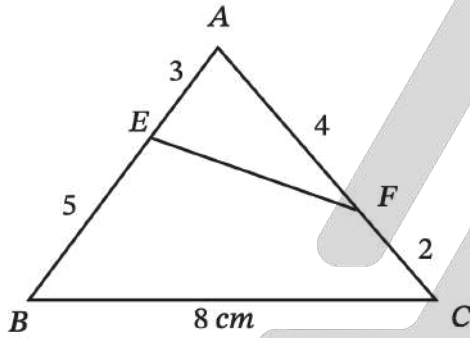
$$m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = 90^\circ \rightarrow (1) \text{ معطى}$$

وبما أن $\overline{DF} \parallel \overline{EC}$ فإن

$$m(\hat{AFD}) = m(\hat{BEC}) \rightarrow (2)$$

تبادل وتوازي

من (1)، (2) ينتج أن $\triangle ADF \sim \triangle BCE$



4. في الشكل المرسوم ABC مثلث فيه:

$$EA = 3 \text{ cm}, BE = 5 \text{ cm}, BC = 8 \text{ cm}$$

$$AF = 4 \text{ cm}, FC = 2 \text{ cm}$$

(a) أثبت أن $\triangle AEF \sim \triangle ACB$

(b) أوجد طول $\overline{EF}$

المثلثان $\triangle AEF$, $\triangle ACB$ فيهما:

$\hat{A}$ زاوية مشتركة $\leftarrow (1)$

$$AB = AE + EB = 3 + 5 = 8$$

$$AC = AF + FC = 4 + 2 = 6$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AF}{AB} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} \rightarrow (2)$$

من (1)، (2) ينتج أن $\triangle AEF \sim \triangle ACB$

وبالتالي:

$$\frac{EF}{CB} = \frac{AE}{AC}$$

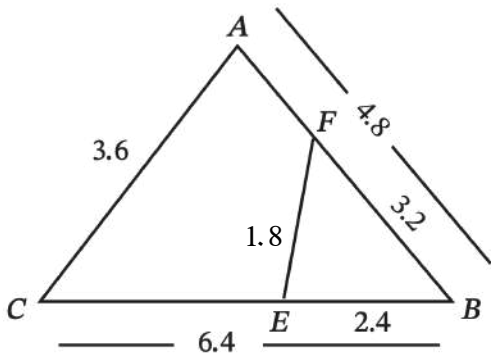
$$\frac{EF}{8} = \frac{3}{6}$$

$$EF = \frac{8 \times 3}{6} = 4 \text{ cm}$$

5. في الشكل المرسوم أثبت أن $\Delta BCA \sim \Delta BFE$

المثلثان ΔBCA , ΔBFE فيهما:

$\hat{B}$ زاوية مشتركة $\leftarrow (1)$



$$\frac{BE}{BA} = \frac{2.4}{4.8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{BF}{BC} = \frac{3.2}{6.4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{BE}{BA} = \frac{BF}{BC} \rightarrow (2)$$

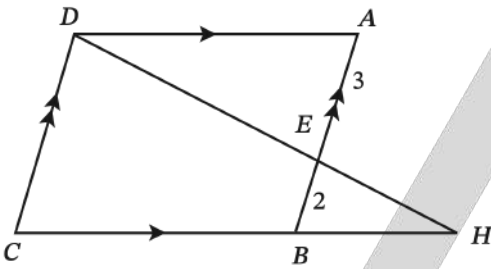
من (1)، (2) ينتج أن $\Delta BCA \sim \Delta BFE$

6. في الشكل المقابل $ABCD$ متوازي أضلاع فيه

$$E \in \overline{AB}, \frac{AE}{EB} = \frac{3}{2}, \overline{CB} \cap \overline{DE} = \{H\}$$

(a) أثبت أن $\Delta EAD \sim \Delta DCH$

(b) أوجد $\frac{\text{مساحة المثلث } DCH}{\text{مساحة المثلث } EAD}$



بما أن $ABCD$ متوازي أضلاع فإن

$$\overline{AB} \parallel \overline{DC}, \overline{AD} \parallel \overline{CH}$$

بالتالي

$$m(\hat{EAD}) = m(\hat{DCH}) \rightarrow (1) \text{ تقابل بالرأس}$$

$$m(\hat{EDA}) = m(\hat{DHC}) \rightarrow (2) \text{ وتبادل توازي}$$

من (1)، (2) ينتج أن $\Delta EAD \sim \Delta DCH$

فإن

$$AB = AE + EB = 3 + 2 = 5$$

وبما أن $ABCD$ متوازي أضلاع:

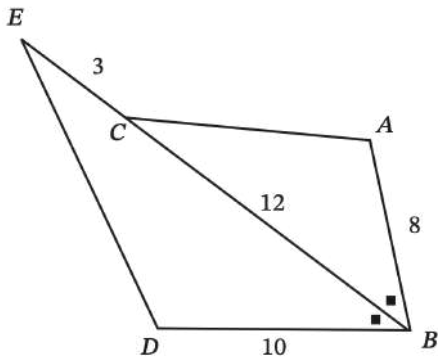
$$DC = AB = 5$$

بالتالي نسبة التشابه:

$$\frac{DC}{EA} = \frac{5}{3}$$

النسبة بين مساحتي المثلثين = مربع نسبة التشابه

$$\frac{\text{مساحة المثلث } DCH}{\text{مساحة المثلث } EAD} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$



7. في الشكل المقابل $\overline{BE}$ منصف $\widehat{ABD}$
مساحة المثلث ABC تساوي 48 cm^2 أوجد مساحة المثلث EBD

$$BE = EC + CB = 3 + 12 = 15$$

المثلثان $\triangle ABC$, $\triangle DBE$ فيهما:

$$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DBE}) \rightarrow (1)$$

حسب نظرية المنصف:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{BC}{BE} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE} \rightarrow (2)$$

من (1)، (2) ينتج أن

$$\triangle ABC \sim \triangle DBE$$

النسبة بين مساحتي المثلثين = مربع نسبة التشابه

$$\frac{\text{مساحة المثلث } ABC}{\text{مساحة المثلث } DBE} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\frac{48}{\text{مساحة المثلث } DBE} = \frac{16}{25}$$

$$\text{مساحة المثلث } DBE = \frac{48 \times 25}{16} = 75 \text{ cm}^2$$



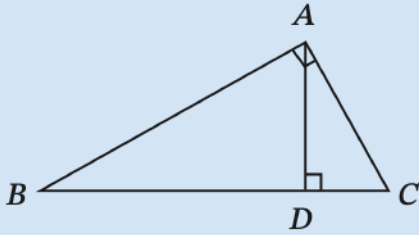


(4 - 2) التشابه في المثلثات القائمة الزاوية

نظرية: العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين، وكل منهما يشابه المثلث الأصلي.

نتيجة: "نظرية إقليدس"

في المثلث القائم ABC إذا كان $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ فإن

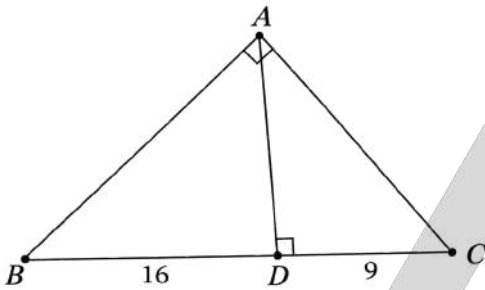


- $(AD)^2 = BD \times DC$
- $(AB)^2 = BD \cdot BC$
- $(AC)^2 = CD \cdot CB$
- $(AB) \cdot (AC) = (AD) \cdot (BC)$

مثال (1) في الشكل المرسوم:

مثلث ABC مثلث قائم الزاوية في A ، إذا كان $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، أوجد طول كل من $\overline{AD}$ ، $\overline{AC}$.

حسب إقليدس



$$(AD)^2 = DC \cdot DB = (9) \cdot (16) = 144$$

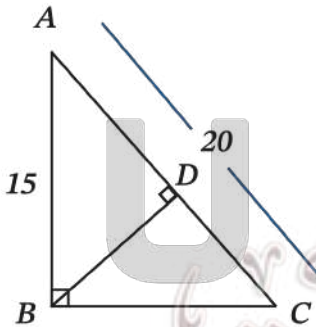
$$\Rightarrow AD = \sqrt{144} = 12$$

$$(AC)^2 = CD \cdot CB = (9) \cdot (25) = 225$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{225} = 15$$

تحقق من فهمك (1) في الشكل المرسوم، أوجد BC ، CD

حسب فيثاغورث



$$BC = \sqrt{20^2 - 15^2} = 5\sqrt{7}$$

$$(BC)^2 = CD \cdot CA$$

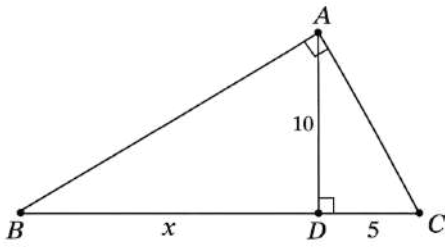
$$(5\sqrt{7})^2 = CD \cdot 20$$

$$175 = CD \cdot 20 \Rightarrow CD = \frac{175}{20} = 8.75$$

حسب إقليدس

مثال (2) في الشكل المرسوم: أوجد قيمة x

حسب اقليدس

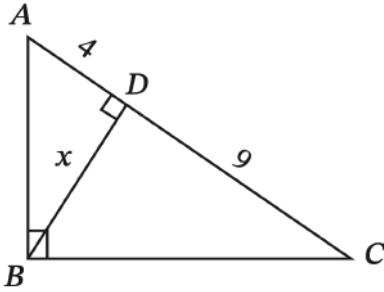


$$(AD)^2 = (DC)(DB)$$

$$(10)^2 = 5 \times x \Rightarrow x = \frac{100}{5} = 20$$

تحقق من فهمك (2) في الشكل المرسوم: أوجد قيمة x

حسب اقليدس



$$(BD)^2 = (AD)(DC) \Rightarrow$$

$$x^2 = 4 \times 9 = 36 \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{36} = 6$$

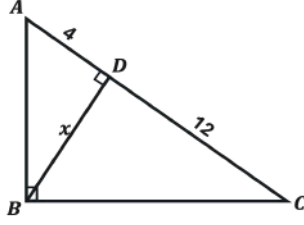
تدرب وحل المسائل:

تمارين موضوعية:

ظل دائرة الإجابة الصحيحة:

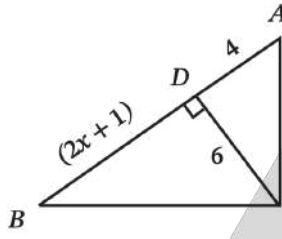
1. في الشكل المرسوم قيمة x تساوي:

- (a) $4\sqrt{3}$
- (b) $3\sqrt{4}$
- (c) 48
- (d) 16



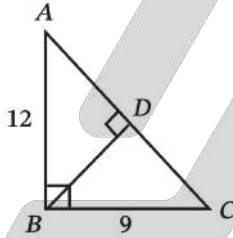
2. في الشكل المرسوم قيمة x تساوي:

- (a) 6
- (b) 4.8
- (c) 8
- (d) 4



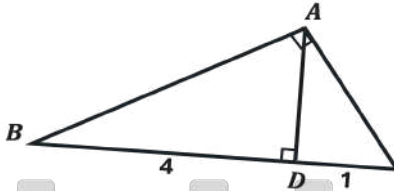
3. في الشكل المرسوم طول $\overline{BD}$ تساوي:

- (a) 9.5
- (b) 7.2
- (c) 7.5
- (d) 8



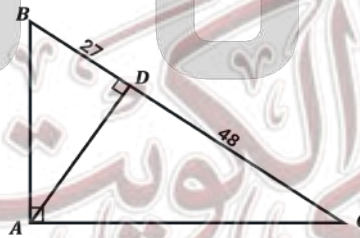
4. في الشكل المرسوم طول $\overline{AD}$ تساوي:

- (a) 2
- (b) 4
- (c) 5
- (d) 16



5. في الشكل المرسوم طول $\overline{AD}$ تساوي:

- (a) 24
- (b) 12
- (c) 36
- (d) 75

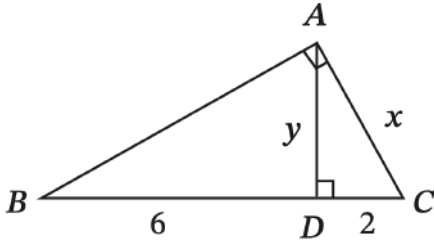




أسئلة المقال:

1. أوجد قيمة x, y في كل من الأشكال التالية:

a)



$$BC = 6 + 2 = 8$$

$$\begin{aligned}(AC)^2 &= CD \cdot CB \\ x^2 &= (2)(8) = 16 \\ x &= \sqrt{16} = 4\end{aligned}$$

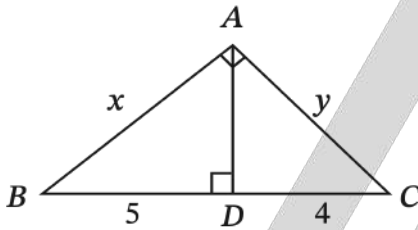
$$\begin{aligned}(AD)^2 &= DC \cdot DB \\ y^2 &= (2)(6) = 12 \\ y &= \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

الحل:

حسب اقليدس

حسب اقليدس

b)



$$BC = 5 + 4 = 9$$

$$\begin{aligned}(AB)^2 &= BD \cdot BC \\ x^2 &= (5)(9) = 45 \\ x &= \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\end{aligned}$$

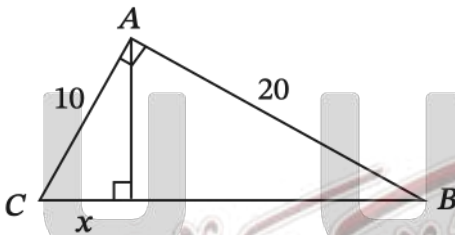
$$\begin{aligned}(AC)^2 &= CD \cdot CB \\ y^2 &= (4)(9) = 36 \\ y &= \sqrt{36} = 6\end{aligned}$$

الحل:

حسب اقليدس

حسب اقليدس

c)



$$CB = \sqrt{10^2 + 20^2} = 10\sqrt{5}$$

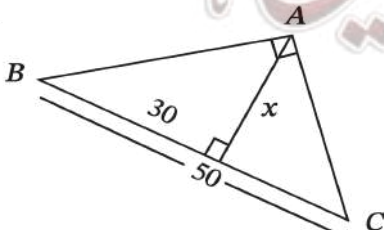
$$\begin{aligned}(AC)^2 &= CD \cdot CB \\ (10)^2 &= x(10\sqrt{5}) \\ 100 &= 10\sqrt{5}x \\ x &= \frac{100}{10\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

الحل:

حسب فيثاغورث

حسب اقليدس

d)



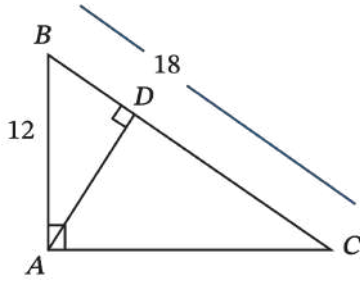
$$DC = 50 - 30 = 20$$

$$\begin{aligned}(AD)^2 &= BD \cdot DC \\ x^2 &= (30)(20) = 600 \\ x &= \sqrt{600} = 10\sqrt{6}\end{aligned}$$

الحل:

حسب اقليدس

2. في الشكل المقابل أوجد DC



حسب اقليدس

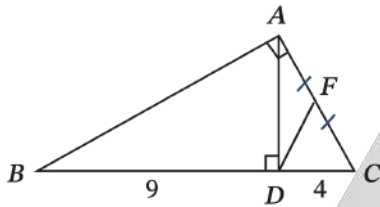
$$(AB)^2 = BD \cdot BC$$

$$(12)^2 = BD \cdot 18$$

$$144 = 18 \times BD$$

$$BD = \frac{144}{18} = 8 \Rightarrow DC = 18 - 8 = 10$$

3. في الشكل المقابل أوجد DF



حسب اقليدس

$$BC = 9 + 4 = 13$$

$$(AC)^2 = DC \cdot BC$$

$$(AC)^2 = (4)(13) = 52$$

$$AC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

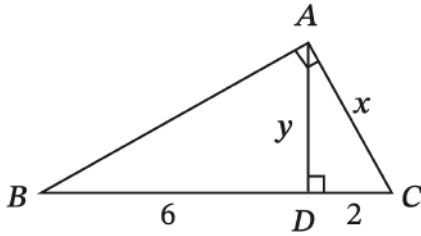
$$AF = FC = \frac{AC}{2}$$

$$AF = FC = \frac{2\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13}$$

في المثلث ADC القائم في D لدينا F منتصف الوتر AC بالتالي:

$$DF = AF = FC = \sqrt{13}$$

4. في الشكل المقابل
أوجد قيمة x, y



$$BC = 6 + 2 = 8$$

حسب اقليدس

$$(AC)^2 = DC \cdot BC$$

$$x^2 = (2)(8) = 16$$

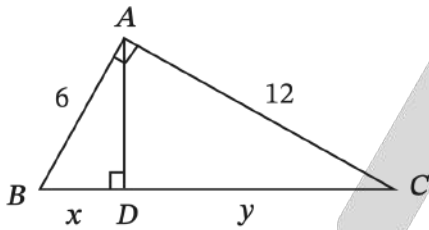
$$x = \sqrt{16} = 4$$

نوجد y

$$(AD)^2 = DB \cdot DC$$

$$y^2 = (6)(2) = 12$$

$$y = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$



5. في الشكل المقابل
المثلث ABC قائم الزاوية في A
 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 12 \text{ cm}$
إذا كان $BD = x, DC = y$
أوجد $\frac{x}{y}$

حسب اقليدس

$$(AB)^2 = BD \cdot BC$$

$$6^2 = x \cdot BC$$

$$36 = x \cdot BC \rightarrow (1)$$

وأيضاً:

$$(AC)^2 = DC \cdot BC$$

$$12^2 = y \cdot BC$$

$$144 = y \cdot BC \rightarrow (2)$$

بقسمة (1) على (2):

$$\frac{36}{144} = \frac{x \cdot BC}{y \cdot BC}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{36}{144} = \frac{1}{4}$$



(5 - 2) التناسبات والمثلثات المتشابهة

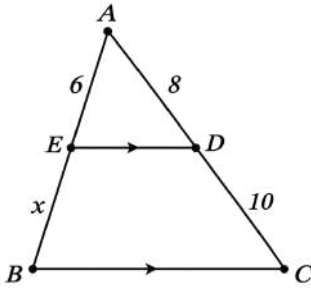
نظرية (1): نظرية المستقيم الموازي

إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة.

مثال (1)

في الشكل المقابل أوجد قيمة x

باستخدام نظرية المستقيم الموازي:



$$\frac{6}{x} = \frac{8}{10}$$

$$8x = 6 \times 10$$

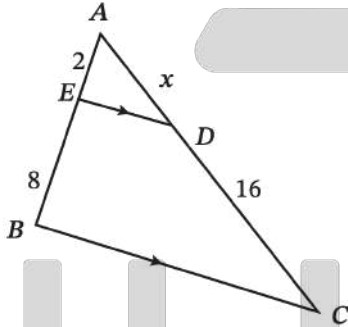
$$x = \frac{6 \times 10}{8} = \frac{15}{2} = 7.5$$

تحقق من فهمك (1):

أوجد قيمة x في كل مما يلي:

باستخدام نظرية المستقيم الموازي:

a)



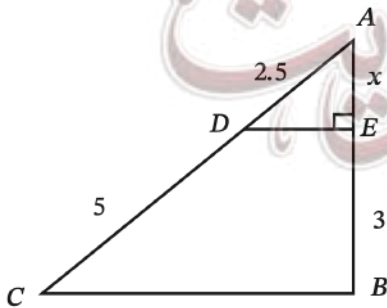
$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$$

$$\frac{2}{8} = \frac{x}{16}$$

$$8x = 2 \times 16$$

$$x = \frac{2 \times 16}{8} = 4$$

b)



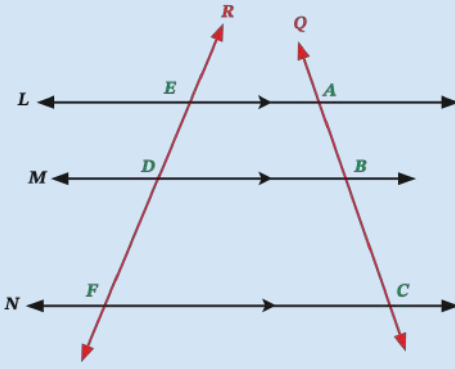
$$\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EB}$$

$$\frac{2.5}{5} = \frac{x}{3}$$

$$5x = 2.5 \times 3$$

$$x = \frac{2.5 \times 3}{5} = \frac{3}{2} = 1.5$$

باستخدام نظرية المستقيم الموازي:



نظرية (2): نظرية طاليس

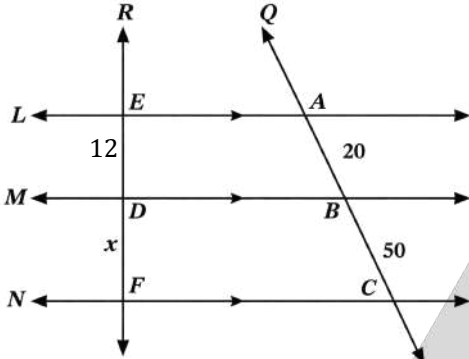
إذا قطع مستقيمان ثلاث مستقيمات متوازية أو أكثر فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.

$$\frac{ED}{DF} = \frac{AB}{BC}$$

مثال (2):

في الشكل المقابل أوجد قيمة x

باستخدام نظرية طاليس



$$\frac{12}{x} = \frac{20}{50}$$

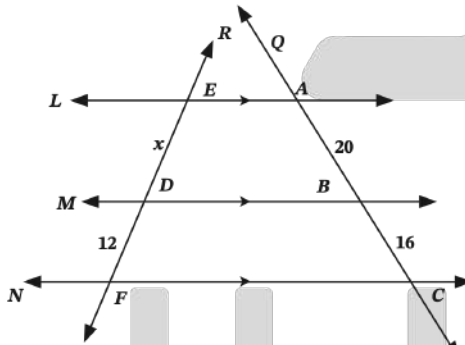
$$20x = 12 \times 50$$

$$x = \frac{12 \times 50}{20} = 30$$

تحقق من فهمك (2):

في الشكل المقابل أوجد قيمة x

باستخدام نظرية طاليس



$$\frac{x}{12} = \frac{20}{16}$$

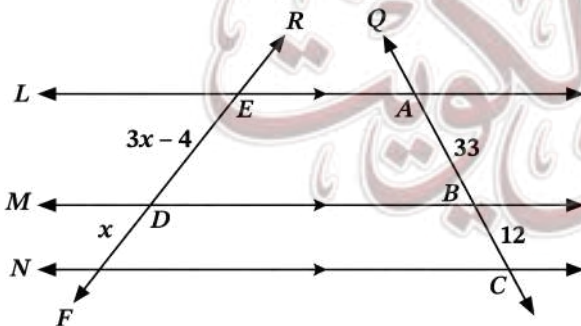
$$16x = 12 \times 20$$

$$x = \frac{12 \times 20}{16} = 15$$

مثال (3)

في الشكل المقابل أوجد قيمة x

باستخدام نظرية طاليس



$$\frac{3x-4}{x} = \frac{33}{12}$$

$$12(3x-4) = 33x$$

$$36x - 48 = 33x$$

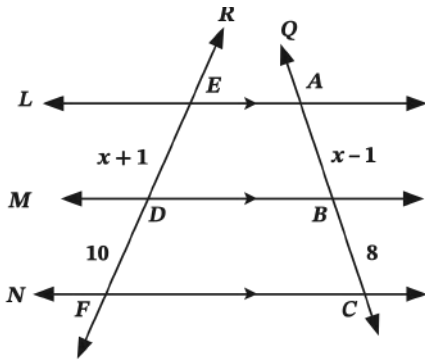
$$36x - 33x = 48$$

$$3x = 48 \Rightarrow x = \frac{48}{3} = 16$$

تحقق من فهمك (3)

في الشكل المقابل أوجد قيمة x

باستخدام نظرية طاليس



$$\frac{x+1}{10} = \frac{x-1}{8}$$

$$8(x+1) = 10(x-1)$$

$$8x + 8 = 10x - 10$$

$$18 = 2x$$

$$x = \frac{18}{2} = 9$$

ملحوظة :

عكس نظرية طاليس ليس بالضرورة صحيح.

نظرية منتصف الزاوية في مثلث



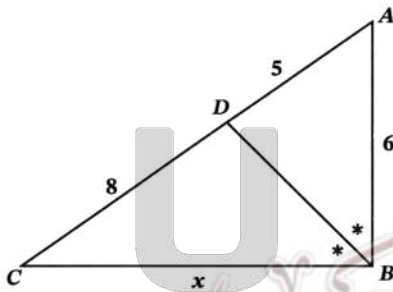
نظرية (3): نظرية منتصف الزاوية في مثلث

إذا نُصِّفَت زاوية رأس مثلث الداخلية أو الزاوية الخارجة عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزئين النسبة بين طولهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث.

مثال (4)

أوجد قيمة x في الشكل حيث $\overline{BD}$ ينصف $\angle ABC$

حسب نظرية منتصف الزاوية:



$$\frac{6}{x} = \frac{5}{8}$$

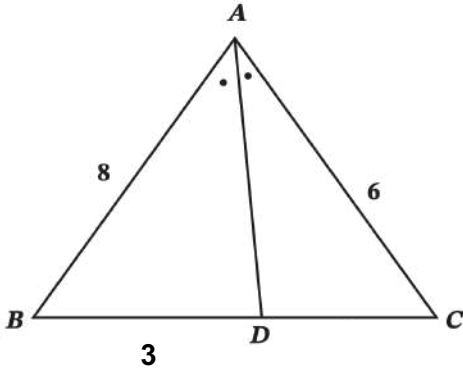
$$5x = 6 \times 8$$

$$x = \frac{6 \times 8}{5} = 9.6$$

تحقق من فهمك (4)

المثلث ABC فيه: $AC = 6, AB = 8$ و $\overline{AD}$ ينصف $\angle BAC$ ويقطع $\overline{BC}$ في D إذا كان $BD = 3$ أوجد CD

حسب نظرية منصف الزاوية:



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{3}{CD} = \frac{8}{6}$$

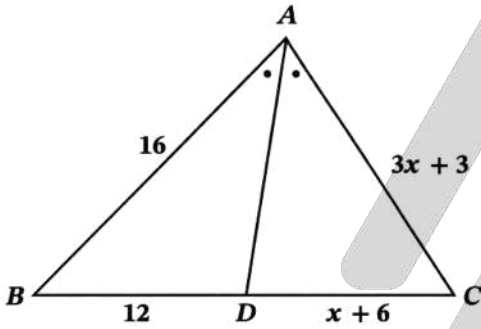
$$8CD = 3 \times 6$$

$$CD = \frac{3 \times 6}{8} = \frac{9}{4} = 2.25$$

مثال (5)

أوجد قيمة x في الشكل المبين حيث $\overline{AD}$ ينصف $\angle BAC$

حسب نظرية منصف الزاوية:



$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

$$\frac{16}{3x + 3} = \frac{12}{x + 6}$$

$$12(3x + 3) = 16(x + 6)$$

$$36x + 36 = 16x + 96$$

$$36x - 16x = 96 - 36$$

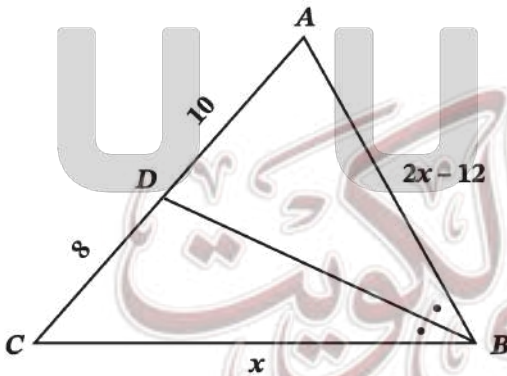
$$20x = 60$$

$$x = \frac{60}{20} = 3$$

تحقق من فهمك (5)

المثلث ABC فيه $AD = 10, DC = 8$ و $\overline{BD}$ ينصف الزاوية $\angle ABC$ ويقطع $\overline{AC}$ في D أوجد x

حسب نظرية منصف الزاوية:



$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$$

$$\frac{2x - 12}{x} = \frac{10}{8}$$

$$8(2x - 12) = 10x$$

$$16x - 96 = 10x$$

$$16x - 10x = 96$$

$$6x = 96$$

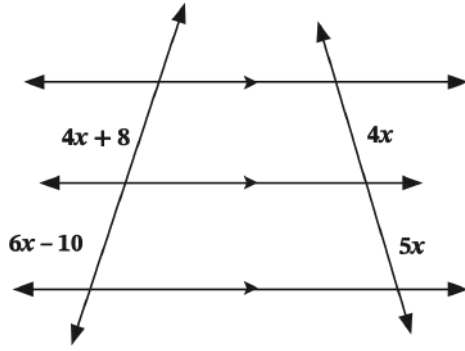
$$x = \frac{96}{6} = 16$$



تمارين موضوعية:

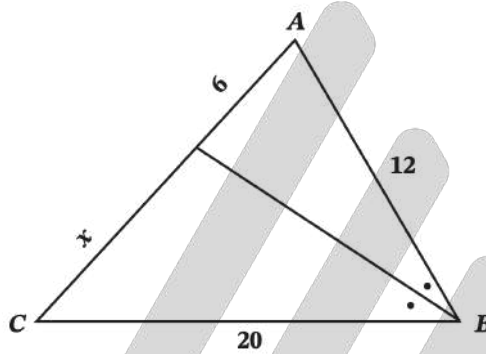
في البنود (2-1) اختر الإجابة الصحيحة:

1. في الشكل المرسوم قيمة x تساوي:



- (a) 10
- (b) 20
- (c) 8
- (d) 5

2. في الشكل المرسوم قيمة x تساوي:



- (a) 8
- (b) 10
- (c) 12
- (d) 20

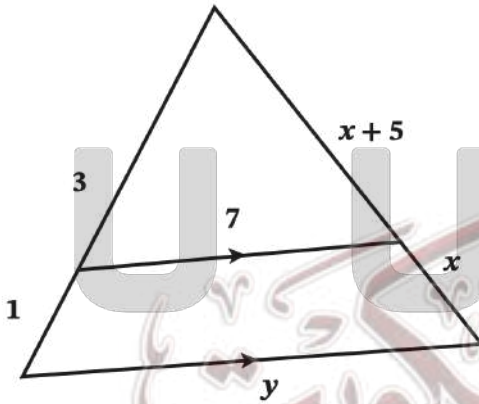


أسئلة المقال:

أجب عن الأسئلة التالية:

1. في الشكل المقابل أوجد قيمة كل من x, y

نستخدم نظرية المستقيم الموازي



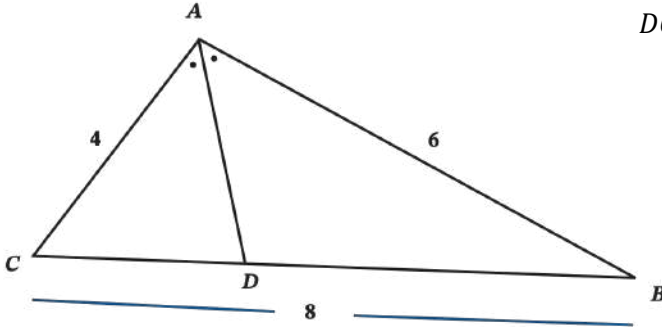
$$\begin{aligned} \frac{3}{1} &= \frac{x+5}{x} \\ 3x &= x+5 \\ 3x-x &= 5 \\ 2x &= 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5 \end{aligned}$$

لإيجاد y
من تشابه المثلثين نجد أن

$$\begin{aligned} \frac{7}{y} &= \frac{3}{3+1} \\ \frac{7}{y} &= \frac{3}{4} \\ 3y &= 7 \times 4 \Rightarrow y = \frac{7 \times 4}{3} = \frac{28}{3} \end{aligned}$$

2. في المثلث ABC لدينا $\overline{AD}$ تنصف $\hat{A}$ إذا كان $AB = 6, AC = 4, BC = 8$ فأوجد DC, DB

باستخدام نظرية منصف الزاوية:

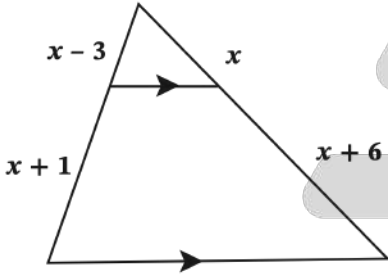


$$\begin{aligned}\frac{DC}{DB} &= \frac{AC}{AB} \\ \frac{DC}{DB} &= \frac{4}{6} \\ \frac{DC}{DC + DB} &= \frac{4}{6} \\ \frac{DC}{8} &= \frac{4}{6} \\ \frac{DC}{8} &= \frac{2}{3} \\ 3 \times DC &= 8 \times 2 \\ 3 \times DC &= 16 \\ DC &= \frac{16}{3} = 5.33 \\ DB &= 8 - DC = 8 - 5.33 = 2.67\end{aligned}$$

3. أوجد قيمة المجهول في كل مما يلي:

(a) أوجد قيمة x

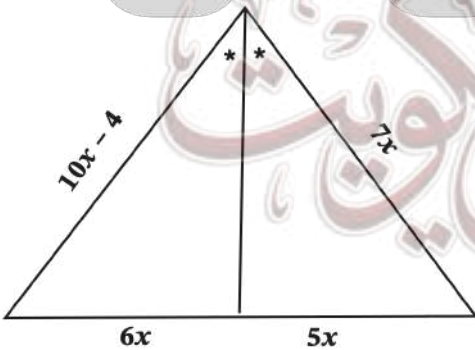
باستخدام نظرية المستقيم الموازي:



$$\begin{aligned}\frac{x-3}{x+1} &= \frac{x}{x+6} \\ (x-3)(x+6) &= x(x+1) \\ x^2 + 3x - 18 &= x^2 + x \\ 3x - x &= 18 \\ 2x &= 18 \\ x &= \frac{18}{2} = 9\end{aligned}$$

(b) أوجد قيمة x

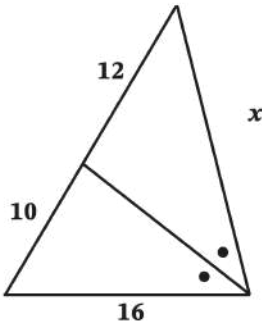
باستخدام نظرية منصف الزاوية:



$$\begin{aligned}\frac{10x-4}{6x} &= \frac{7x}{5x} \\ \frac{10x-4}{6x} &= \frac{7}{5} \\ 5(10x-4) &= 6(7x) \\ 50x - 20 &= 42x \\ 8x &= 20 \\ x &= \frac{20}{8} = 2.5\end{aligned}$$

(c) أوجد قيمة x

باستخدام نظرية منصف الزاوية:



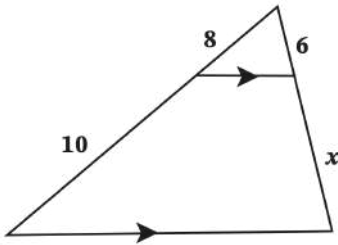
$$\frac{x}{16} = \frac{12}{10}$$

$$10x = (16)(12)$$

$$x = \frac{(16)(12)}{10} = \frac{96}{5} = 19.2$$

(d) أوجد قيمة x

باستخدام نظرية المستقيم الموازي:



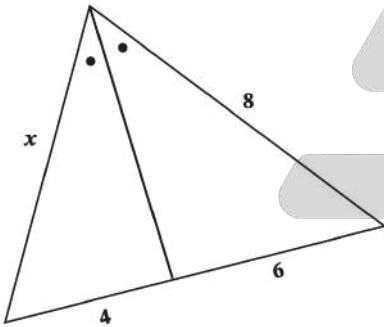
$$\frac{8}{10} = \frac{6}{x}$$

$$8x = (10)(6)$$

$$x = \frac{(10)(6)}{8} = \frac{15}{2} = 7.5$$

(e) أوجد قيمة x

باستخدام نظرية منصف الزاوية:



$$\frac{x}{8} = \frac{4}{6}$$

$$6x = (8)(4)$$

$$x = \frac{(8)(4)}{6} = \frac{16}{3}$$

(f) أوجد قيمة x

باستخدام نظرية فيثاغورث

$$BC = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100$$

وباستخدام نظرية منصف الزاوية:

$$\frac{x}{100 - x} = \frac{60}{80}$$

$$\frac{x}{100 - x} = \frac{3}{4}$$

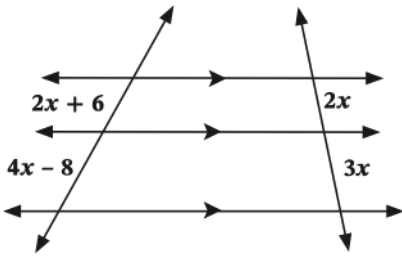
$$4x = 300 - 3x$$

$$4x + 3x = 300$$

$$7x = 300 \Rightarrow x = \frac{300}{7}$$

(g) أوجد قيمة x

باستخدام نظرية طاليس



$$\frac{2x + 6}{4x - 8} = \frac{2x}{3x}$$

$$\frac{2x + 6}{4x - 8} = \frac{2}{3}$$

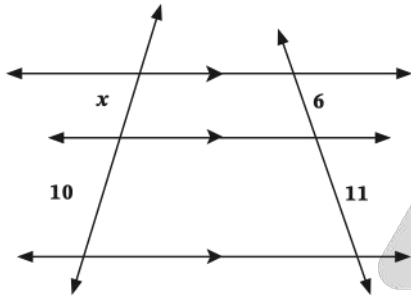
$$8x - 16 = 6x + 18$$

$$8x - 6x = 16 + 18$$

$$2x = 34 \Rightarrow x = \frac{34}{2} = 17$$

(h) أوجد قيمة x

باستخدام نظرية طاليس



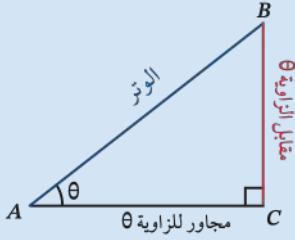
$$\frac{x}{10} = \frac{6}{11}$$

$$11x = 10 \times 6$$

$$x = \frac{10 \times 6}{11} = \frac{60}{11}$$



(1 - 3) النسب المثلثية الأساسية ومقلوباتها



النسب المثلثية الأساسية:

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

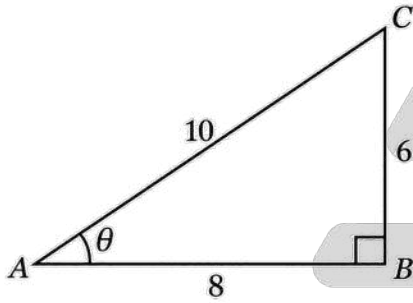
$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

مثال (1) في الشكل المقابل:
مثلث ABC مثلث قائم الزاوية في B.

أوجد:

$\tan \theta$, $\cos \theta$, $\sin \theta$



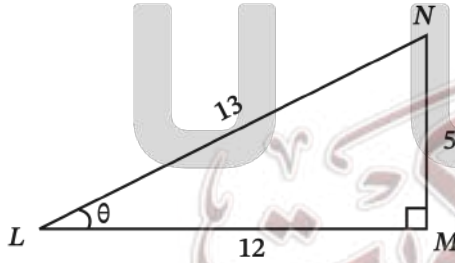
$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

تحقق من فهمك (1) في الشكل المقابل:
مثلث LMN مثلث قائم الزاوية في M

أوجد: $\tan \theta$, $\cos \theta$, $\sin \theta$



$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{5}{13}$$

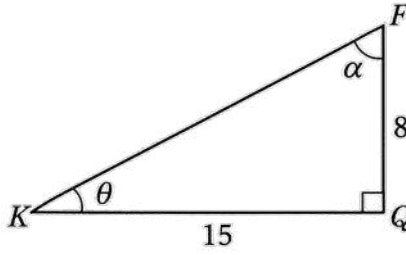
$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{12}{13}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{5}{12}$$

في الشكل المرسوم:

المثلث FQK مثلث قائم الزاوية في Q .
أوجد كلاً من:

1. KF
2. $\cos \theta$
3. $\sin \alpha$
4. $\sin \theta$
5. $\cos \alpha$



6. ماذا تلاحظ بالنسبة إلى النسب المثلثية للزاويتين θ و α ؟

باستخدام نظرية فيثاغورث:

$$KF = \sqrt{(15)^2 + (8)^2} = 17$$

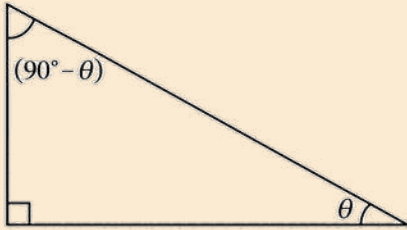
$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{15}{17}$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{15}{17}$$

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{8}{17}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{8}{17}$$

💡 (6) نلاحظ أن:



$$\sin \theta = \cos \alpha \Rightarrow \sin \theta = \cos(90 - \theta)$$

$$\cos \theta = \sin \alpha \Rightarrow \cos \theta = \sin(90 - \theta)$$

في الشكل المقابل:

أوجد: AB , $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$

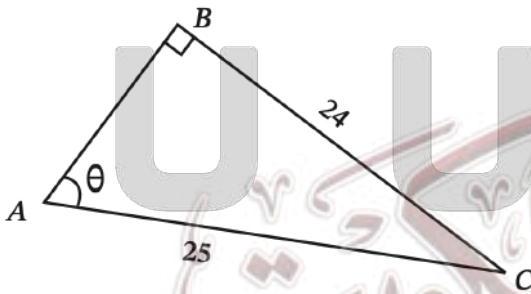
باستخدام نظرية فيثاغورث:

$$AB = \sqrt{(25)^2 - (24)^2} = 7$$

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{24}{25}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{7}{25}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{24}{7}$$





مقلوبات النسب المثلثية الأساسية

مقلوب $\sin \theta$ هو $\frac{1}{\sin \theta}$ ويسمى $(\operatorname{cosecant} \theta)$ ويرمز له بالرمز $\operatorname{csc} \theta$

$$\operatorname{csc} \theta = \frac{1}{\sin \theta} : \sin \theta \neq 0 \Rightarrow \operatorname{csc} \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$$

مقلوب $\cos \theta$ هو $\frac{1}{\cos \theta}$ ويسمى $(\operatorname{secant} \theta)$ ويرمز له بالرمز $\operatorname{sec} \theta$

$$\operatorname{sec} \theta = \frac{1}{\cos \theta} : \cos \theta \neq 0 \Rightarrow \operatorname{sec} \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$$

مقلوب $\tan \theta$ هو $\frac{1}{\tan \theta}$ ويسمى $(\operatorname{cotangent} \theta)$ ويرمز له بالرمز $\operatorname{cot} \theta$

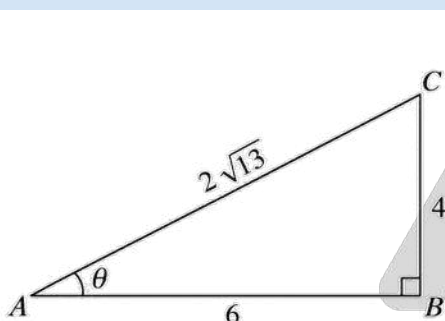
$$\operatorname{cot} \theta = \frac{1}{\tan \theta} : \tan \theta \neq 0 \Rightarrow \operatorname{cot} \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$$

لاحظ أن:

$$(\sin \theta)(\operatorname{csc} \theta) = 1 : \sin \theta \neq 0$$

$$(\cos \theta)(\operatorname{sec} \theta) = 1 : \cos \theta \neq 0$$

$$(\tan \theta)(\operatorname{cot} \theta) = 1$$



مثال (3) في الشكل المرسوم:

- أثبت أن المثلث ABC قائم الزاوية في B
- أوجد: $\operatorname{csc} \theta$, $\operatorname{sec} \theta$, $\operatorname{cot} \theta$

باستخدام عكس نظرية فيثاغورث

$$(AB)^2 + (CB)^2 = (6)^2 + (4)^2 = 52$$

$$(AC)^2 = (2\sqrt{13})^2 = 52$$

بالتالي المثلث ABC قائم الزاوية في B

$$\operatorname{csc} \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{2\sqrt{13}}{4} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

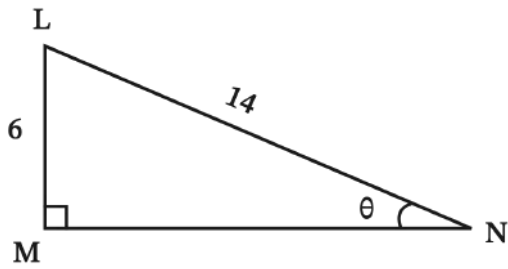
$$\operatorname{sec} \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{2\sqrt{13}}{6} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$\operatorname{cot} \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$



تحقق من فهمك (3) في الشكل المقابل أوجد:

- طول MN
- $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$
- $\sec \theta$, $\csc \theta$, $\cot \theta$



باستخدام نظرية فيثاغورث:

$$MN = \sqrt{14^2 - 6^2} = 4\sqrt{10}$$

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{طول الوتر}} = \frac{4\sqrt{10}}{14} = \frac{2\sqrt{10}}{7}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{6}{4\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{20}$$

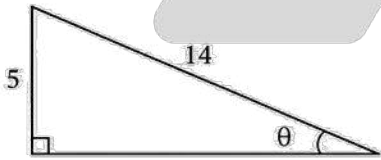
$$\sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{14}{4\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{20}$$

$$\csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

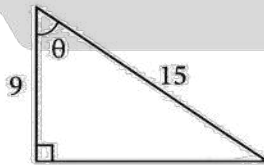
$$\cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{4\sqrt{10}}{6} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$$

استخدام الآلة الحاسبة
إيجاد قياس زاوية باستخدام النسب المثلثية

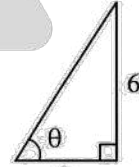
مثال (4) أوجد قياس الزاوية θ في كل مما يلي



①



②



③

$$\textcircled{1} \sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{5}{14}$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{5}{14}\right) = 20.92483243^\circ = 20^\circ 55' 29.4''$$

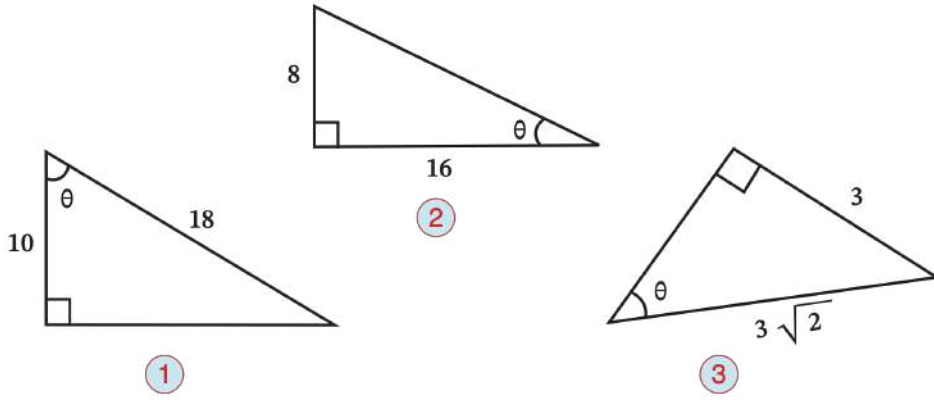
$$\textcircled{2} \cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{9}{15}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{9}{15}\right) = 53.13010235^\circ = 53^\circ 7' 48.37''$$

$$\textcircled{3} \tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{6}{3}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{6}{3}\right) = 63.43494882^\circ = 63^\circ 26' 5.82''$$

تحقق من فهمك (4) أوجد قياس الزاوية θ في كل مما يلي



①

$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{10}{18} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{5}{9} \right) = 56.25101140^\circ = 56^\circ 15' 3.64''$$

②

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) = 26.56505118^\circ = 26^\circ 33' 54.18''$$

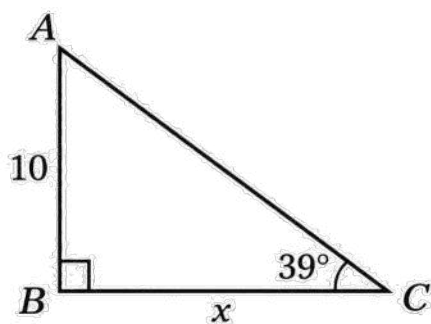
③

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 45^\circ$$

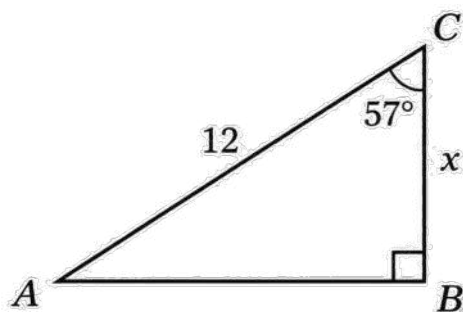
مثال (5)

أوجد قيمة x



$$\begin{aligned}\tan(39^\circ) &= \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \\ \tan(39^\circ) &= \frac{10}{x} \\ x &= \frac{10}{\tan(39^\circ)} \approx 12.35\end{aligned}$$

أوجد قيمة x

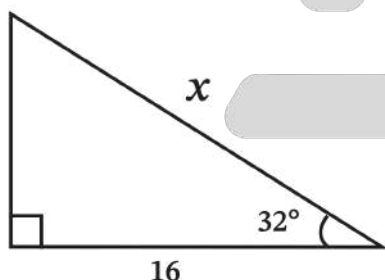


$$\begin{aligned}\cos(57^\circ) &= \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \\ \cos(57^\circ) &= \frac{x}{12} \\ x &= (12)\cos(57^\circ) \approx 6.54\end{aligned}$$

تحقق من فهمك (5)

أوجد قيمة x

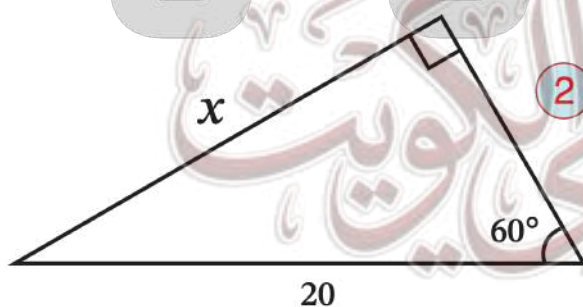
1



$$\begin{aligned}\cos(32^\circ) &= \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \\ \cos(32^\circ) &= \frac{16}{x} \\ x &= \frac{16}{\cos(32^\circ)} \approx 18.87\end{aligned}$$

أوجد قيمة x

2



$$\begin{aligned}\sin(60^\circ) &= \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \\ \sin(60^\circ) &= \frac{x}{20} \\ x &= 20\sin(60^\circ) \\ x &= 20\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10\sqrt{3}\end{aligned}$$

مثال (6)

❏ احسب قياس زاوية الحادة الموجبة التي يصنعها المستقيم $L: y = \frac{1}{4}x + 6$ مع الاتجاه الموجب للمحور السيني

$$L: y = \frac{1}{4}x + 6$$

$$m = \frac{1}{4} \Rightarrow \tan \theta = m = \frac{1}{4}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 14.03624347^\circ = 14^\circ 2' 10.48''$$

تحقق من فهمك (6)

❏ احسب قياس زاوية الحادة الموجبة التي يصنعها المستقيم $L: y = x + 3$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$$L: y = x + 3$$

$$m = 1$$

$$\tan \theta = m = 1$$

$$\theta = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$$

ملاحظات حول بعض الزوايا الخاصة: 💡

- $\sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \csc(45^\circ) = \sqrt{2}$
- $\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sec(45^\circ) = \sqrt{2}$
- $\tan(45^\circ) = 1 \Rightarrow \cot(45^\circ) = 1$

- $\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \csc(60^\circ) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
- $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sec(60^\circ) = 2$
- $\tan(60^\circ) = \sqrt{3} \Rightarrow \cot(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

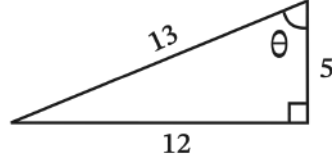
- $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2} \Rightarrow \csc(30^\circ) = 2$
- $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sec(30^\circ) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
- $\tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cot(30^\circ) = \sqrt{3}$



ظل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. في المثلث ABC القائم الزاوية في B يكون $\sec(\hat{A})\cos(\hat{A}) = 1$ حيث $\cos(\hat{A}) \neq 0$

(a) (b)



2. في الشكل المرسوم: $\sin(90^\circ - \theta) = \frac{5}{13}$

(a) (b)

3. في المثلث ABC القائم الزاوية في B يكون $\sin(\hat{C}) \cdot \cot(\hat{C}) = \cos(\hat{C})$ حيث $\sin(\hat{C}) \neq 0$

(a) (b)

4. في المثلث ABC القائم الزاوية في B يكون $AC = (AB)\cos(\hat{C})$

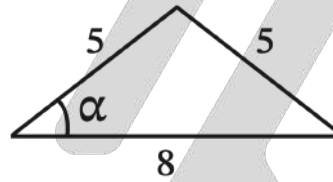
(a) (b)

5. إذا كان المثلث ABC مثلثًا قائم الزاوية في B فإن $\cos(\hat{C}) \cdot \tan(\hat{C}) = \sin(\hat{C})$ حيث $\cos(\hat{C}) \neq 0$

(a) (b)

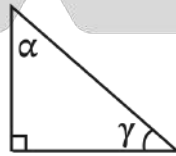
6. قياس الزاوية التي يصنعها المستقيم $y - x = 6$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هي 45°

(a) (b)



7. في المثلث المرسوم: $\sin(\alpha) = \frac{5}{8}$

(a) (b)

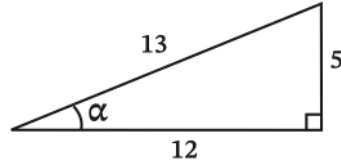


8. في المثلث المرسوم: $\sin(\gamma) = \cos(\alpha)$

(a) (b)

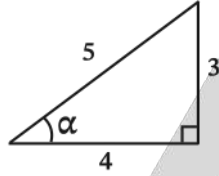
1. في الشكل المرسوم $\sin(\alpha)$ تساوي:

- (a) $\frac{5}{12}$
 (b) $\frac{5}{13}$
 (c) $\frac{12}{13}$
 (d) $\frac{12}{5}$



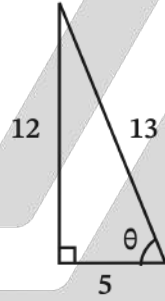
2. في الشكل المرسوم قيمة $\frac{\sin(\alpha) + \cos(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$ تساوي:

- (a) 7
 (b) -7
 (c) 2
 (d) -1



3. في المثلث المرسوم $\cos^2\theta + \sin^2\theta$ يساوي:

- (a) -1
 (b) 0
 (c) 1
 (d) $\frac{17}{13}$



4. قيمة $\sin(30^\circ)\cos(60^\circ) + \cos(30^\circ)\sin(60^\circ)$ تساوي:

- (a) 1
 (b) -1
 (c) 0
 (d) $\frac{1}{2}$

5. قياس الزاوية التي يصنعها المستقيم $L: y = 5 + \sqrt{3}x$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هي:

- (a) 30°
 (b) 60°
 (c) 45°
 (d) 135°

6. إذا كان ABC مثلث قائم الزاوية في B فإن قيمة $\cos(90^\circ - A)$ هي:

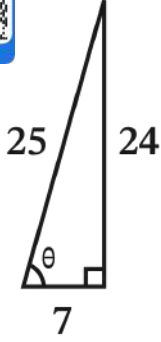
- (a) $\frac{BC}{AC}$
 (b) $\frac{BC}{AB}$
 (c) $\frac{AB}{BC}$
 (d) $\frac{AB}{AC}$



أسئلة المقال:

(1) في الشكل المرسوم:

أوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ



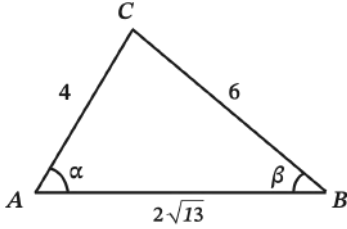
$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{24}{25}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{7}{25}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{24}{7}$$

(2) في الشكل المجاور

- أثبت أن المثلث ACB قائم الزاوية في C
- أوجد $\cos(\alpha), \sin(\beta)$ ماذا تلاحظ؟



باستخدام عكس نظرية فيثاغورث:

$$(AC)^2 + (CB)^2 = (4)^2 + (6)^2 = 16 + 36 = 52$$

$$(AB)^2 = (2\sqrt{13})^2 = 52$$

$\therefore$ المثلث ACB قائم الزاوية في C

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

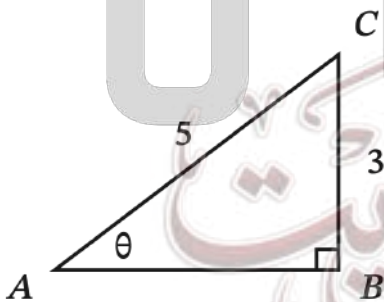
$$\sin(\beta) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin(\beta) = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

نلاحظ أن: $\cos(\alpha) = \sin(\beta)$

(3) في الشكل المرسوم:

- أوجد طول AB
- $\sec \theta$
- $\csc \theta$



باستخدام نظرية فيثاغورث:

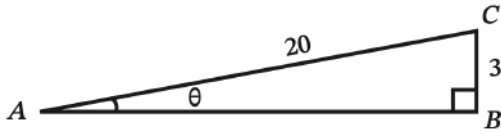
$$AB = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{5}{4}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{5}{3}$$

(4) في الشكل المرسوم:

- أوجد $m(\theta)$
- أوجد AB



$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{20}$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{3}{20}\right)$$

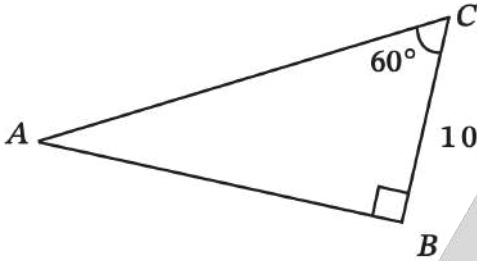
$$\theta \approx 8.62692656^\circ \approx 8^\circ 37' 36.94''$$

باستخدام نظرية فيثاغورث:

$$AB = \sqrt{20^2 - 3^2} = \sqrt{391}$$

(5) في الشكل المرسوم:

- أوجد $m(\hat{A})$
- أوجد طول AC
- أوجد طول AB



$$m(\hat{A}) = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\cos(60^\circ) = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos(60^\circ) = \frac{10}{AC}$$

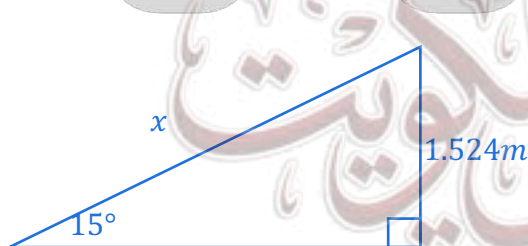
$$AC = \frac{10}{\cos(60^\circ)} = \frac{10}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 20$$

$$\tan(60^\circ) = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan(60^\circ) = \frac{AB}{10}$$

$$AB = 10 \tan(60^\circ) = 10\sqrt{3}$$

(6) منحدر التزلج المائي يشكل زاوية مع سطح الماء قياسها 15° وأعلى نقطة على المنحدر على ارتفاع يساوي $1.524m$ ما طول منحدر التزلج المائي؟



$$\sin(15^\circ) = \frac{\text{الارتفاع}}{\text{طول المنحدر}}$$

$$\sin(15^\circ) = \frac{1.524}{x}$$

$$x = \frac{1.524}{\sin(15^\circ)} \approx 5.888 \approx 5.89m$$

(7) أوجد قيمة $\cos(45^\circ)\cos(45^\circ) - \sin(45^\circ)\sin(45^\circ)$

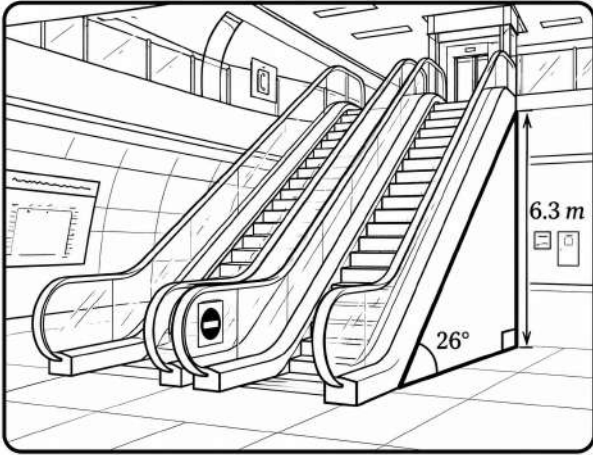
$$\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(45^\circ)\cos(45^\circ) - \sin(45^\circ)\sin(45^\circ) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

(8) أوجد قيمة $\sec^2(45^\circ) + \tan(45^\circ) + \sin(30^\circ)$

$$\sec(45^\circ) = \frac{1}{\cos(45^\circ)} = \sqrt{2}, \tan(45^\circ) = 1, \quad \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\sec^2(45^\circ) + \tan(45^\circ) + \sin(30^\circ) = (\sqrt{2})^2 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$



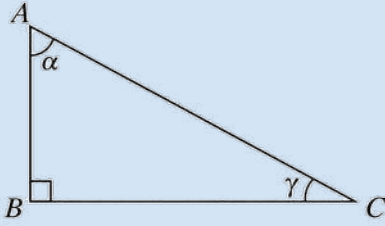
(9) سلم كهربائي متحرك موجود في إحدى محطات مترو الأنفاق إذا كان ارتفاع قمة السلم عن قاعدته $6.3m$ وكان يميل على الأفق بزاوية قياسها 26° أوجد طول السلم الكهربائي

$$\sin(26^\circ) = \frac{\text{الضلع المقابل للزاوية}}{\text{طول السلم}}$$

$$\sin(26^\circ) = \frac{6.3}{x}$$

$$x = \frac{6.3}{\sin(26^\circ)} \approx 14.38m$$

(2 - 3) حل المثلث القائم



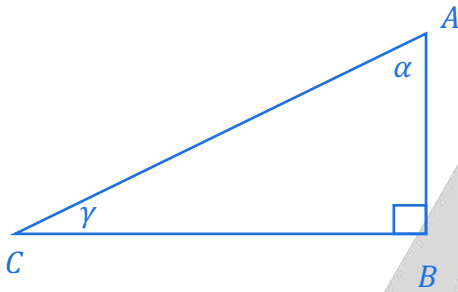
حل المثلث القائم الزاوية

حل المثلث هو إيجاد العناصر المجهولة من الزوايا والأضلاع

مثال (1)

حل المثلث ABC القائم الزاوية في B
إذا علم أن $BC = 4cm$, $AB = 3cm$

من نظرية فيثاغورس نجد طول AC



$$AC = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5$$

$$\tan \gamma = \frac{3}{4} \Rightarrow \gamma = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 36.87^\circ$$

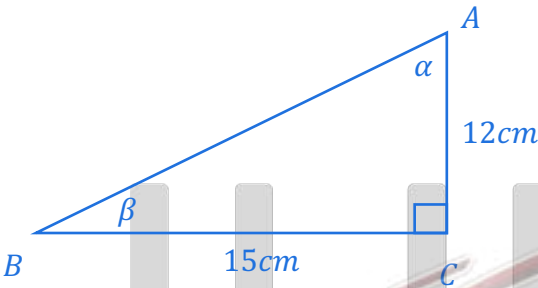
$$\alpha = 90^\circ - 36.87^\circ = 53.13^\circ$$

تحقق من فهمك (1)

حل المثلث ABC القائم الزاوية في C حيث

$$BC = 15cm, AC = 12cm$$

من نظرية فيثاغورس نجد طول AB



$$AB = \sqrt{(12)^2 + (15)^2} = 3\sqrt{41}$$

$$\tan \alpha = \frac{15}{12} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{5}{4}$$

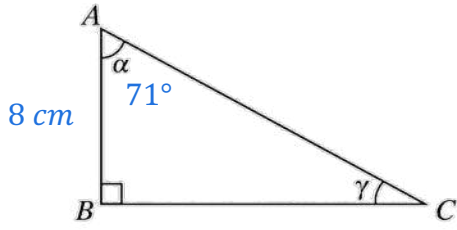
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) \approx 51.19^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - 51.19^\circ \approx 38.81^\circ$$



مثال (2)

حل المثلث ABC القائم الزاوية في B
إذا علم أن $\alpha = 71^\circ$, $AB = 8cm$



$$\gamma = 90^\circ - 71^\circ = 19^\circ$$

$$\tan(71^\circ) = \frac{CB}{AB}$$

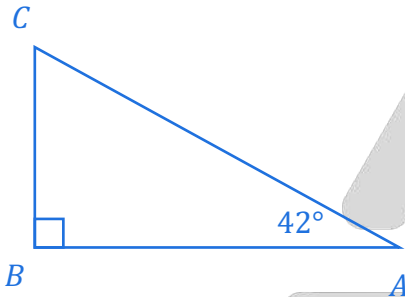
$$\tan(71^\circ) = \frac{CB}{8}$$

$$CB = 8 \tan(71^\circ) \approx 23.23cm$$

$$\cos(71^\circ) = \frac{AB}{CA}$$

$$\cos(71^\circ) = \frac{8}{CA}$$

$$CA = \frac{8}{\cos(71^\circ)} \approx 24.57cm$$



تحقق من فهمك (2)

حل المثلث ABC القائم الزاوية في B
حيث $AB = 12cm$, $m(\hat{A}) = 42^\circ$

$$m(\hat{C}) = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$$

$$\tan(42^\circ) = \frac{CB}{AB}$$

$$\tan(42^\circ) = \frac{CB}{12}$$

$$CB = 12 \tan(42^\circ) \approx 10.80cm$$

$$\cos(42^\circ) = \frac{AB}{AC}$$

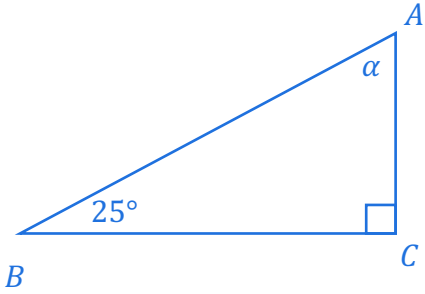
$$\cos(42^\circ) = \frac{12}{AC}$$

$$AC = \frac{12}{\cos(42^\circ)} \approx 16.15cm$$



مثال (3)

حل المثلث ABC القائم الزاوية في C
إذا علم أن $m(\hat{B}) = 25^\circ$, $BA = 40cm$



$$\alpha = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$$

$$\cos(25^\circ) = \frac{BC}{BA}$$

$$\cos(25^\circ) = \frac{BC}{40}$$

$$BC = 40\cos(25^\circ) \approx 36.25cm$$

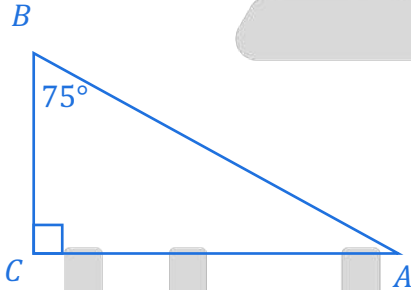
$$\sin(25^\circ) = \frac{AC}{BA}$$

$$\sin(25^\circ) = \frac{AC}{40}$$

$$AC = 40\sin(25^\circ) \approx 16.90cm$$

تحقق من فهمك (3)

حل المثلث ABC القائم الزاوية في C
إذا علم أن $m(\hat{B}) = 75^\circ$, $AC = 20cm$



$$m(\hat{A}) = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$$

$$\sin(75^\circ) = \frac{AC}{AB}$$

$$\sin(75^\circ) = \frac{20}{AB}$$

$$AB = \frac{20}{\sin(75^\circ)} \approx 20.71cm$$

$$\tan(75^\circ) = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan(75^\circ) = \frac{20}{BC}$$

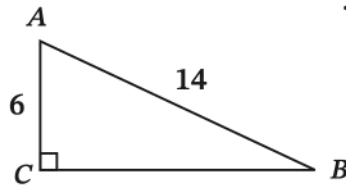
$$BC = \frac{20}{\tan(75^\circ)} \approx 5.36cm$$



تدرب: التمارين الموضوعية

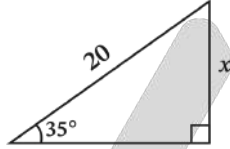
في البنود من 5 – 1 ظلل دائرة الإجابة الصحيحة:

- (a) 31°
- (b) 20°
- (c) 27°
- (d) 25°



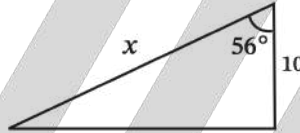
1. في الشكل المرسوم $m(\hat{B})$ تساوي تقريبًا:

- (a) 13
- (b) 11.5
- (c) 14
- (d) 15



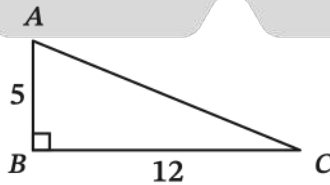
2. في الشكل المقابل قيمة x تساوي تقريبًا:

- (a) 15
- (b) 16
- (c) 18
- (d) 14



3. في الشكل المقابل قيمة x تساوي تقريبًا:

- (a) 22.6°
- (b) 25°
- (c) 32°
- (d) 26.4°



4. في الشكل المقابل $m(\hat{C})$ تساوي:

- (a) 9 cm
- (b) 10 cm
- (c) 12 cm
- (d) 20 cm



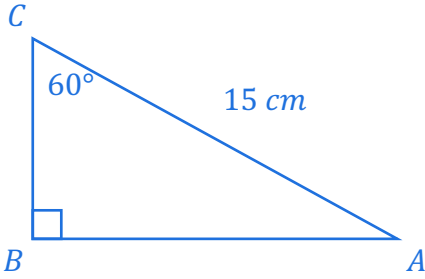
5. في الشكل المقابل: المثلث ABC مثلث قائم الزاوية في B ، إذا كان: $AB = 8 \text{ cm}$, $\sin(\hat{C}) = 0.4$ فإن AC يساوي:



أسئلة المقال:

1. حل المثلث ABC القائم الزاوية في B ، إذا كان:

$$AC = 15 \text{ cm}, m(\hat{C}) = 60^\circ$$



$$m(\hat{A}) = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\sin(60^\circ) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin(60^\circ) = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin(60^\circ) = \frac{AB}{15}$$

$$AB = 15 \sin(60^\circ) = \frac{15\sqrt{3}}{2} \approx 12.99 \text{ cm}$$

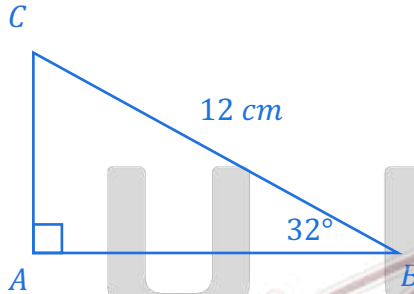
$$\cos(60^\circ) = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos(60^\circ) = \frac{BC}{15}$$

$$BC = 15 \cos(60^\circ) = \frac{15}{2} = 7.5 \text{ cm}$$

2. حل المثلث ABC القائم الزاوية في A ، إذا كان:

$$CB = 12 \text{ cm}, m(\hat{B}) = 32^\circ$$



$$m(\hat{C}) = 180^\circ - 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$$

$$\sin(32^\circ) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin(32^\circ) = \frac{AC}{CB}$$

$$\sin(32^\circ) = \frac{AC}{12}$$

$$AC = 12 \sin(32^\circ) \approx 6.36 \text{ cm}$$

$$\cos(32^\circ) = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos(32^\circ) = \frac{AB}{12}$$

$$AB = 12 \cos(32^\circ) \approx 10.17 \text{ cm}$$

3. حل المثلث RQP القائم الزاوية في Q ، إذا كان:
 $QR = 12 \text{ cm}$, $PQ = 5 \text{ cm}$

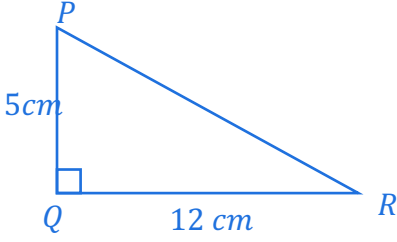
باستخدام نظرية فيثاغورث:

$$RP = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ cm}$$

$$\sin(P) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{QR}{RP} = \frac{12}{13}$$

$$P = \sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) \approx 67.38^\circ$$

$$R = 90^\circ - 67.38^\circ \approx 22.62^\circ$$



4. في الشكل المقابل، حل المثلث RQP

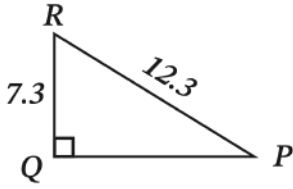
باستخدام نظرية فيثاغورث:

$$QP = \sqrt{(12.3)^2 - (7.3)^2} = \sqrt{98} \approx 9.90$$

$$\sin(P) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{RQ}{RP} = \frac{7.3}{12.3}$$

$$P = \sin^{-1}\left(\frac{7.3}{12.3}\right) \approx 36.41^\circ$$

$$R = 90^\circ - 36.41^\circ \approx 53.59^\circ$$



5. يستند سلم AB طوله 3.5 m بطرفه A على حائط عمودي، ويرتبط طرفه B على الأرض أفقية، ويبعد مترًا واحدًا عن الحائط. أوجد:

1. بعد الطرف A عن الأرض.
2. قياس زاوية ميل السلم على الأرض.
3. قياس زاوية ميل السلم على الحائط.

① إيجاد بعد الطرف A عن الأرض
 باستخدام نظرية فيثاغورث:

$$AC = \sqrt{(3.5)^2 - 1^2} = \sqrt{11.25} \approx 3.35 \text{ m}$$

② إيجاد زاوية ميل السلم على الأرض

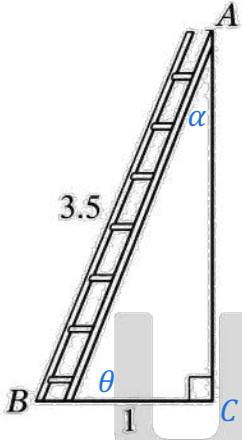
$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{1}{3.5}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3.5}\right) \approx 73.40^\circ$$

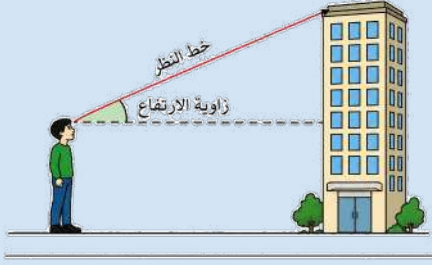
③ إيجاد زاوية ميل السلم على الحائط
 بما أن الأرض والحائط متعامدان:

$$\alpha = 90^\circ - \theta$$

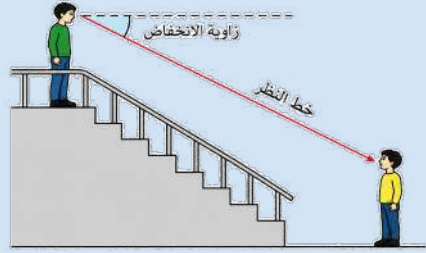
$$\alpha = 90^\circ - 73.40^\circ \approx 16.60^\circ$$



(3 – 3) زاوية الارتفاع - زاوية الانخفاض



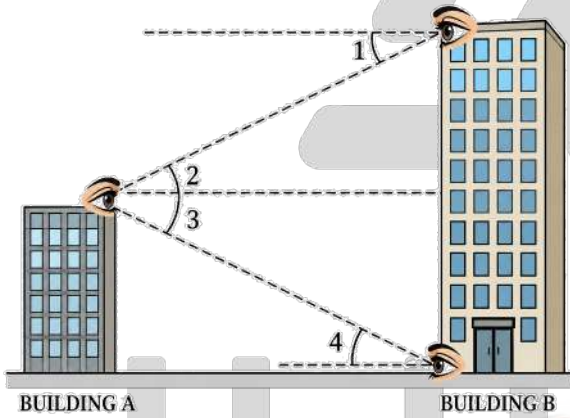
زاوية الارتفاع :
هي الزاوية المحصورة بين الخط الأفقي وخط النظر المتجه إلى الأعلى نحو الشيء المراد رصده.



زاوية الانخفاض :
هي الزاوية المحصورة بين الخط الأفقي وخط النظر المتجه إلى الأسفل نحو الشيء المراد رصده.

تدريب

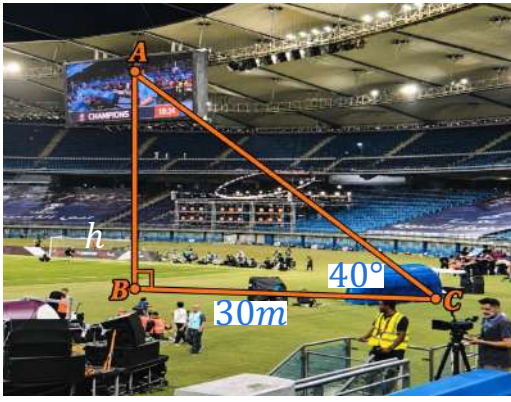
صنّف الزوايا المبينة في الشكل من حيث كونها زاوية ارتفاع أو زاوية انخفاض:



1. انخفاض
2. ارتفاع
3. انخفاض
4. ارتفاع

مثال (1)

يقف أحد المشجعين في ساحة ملعب استاد جابر الأحمد الدولي ويشاهد شاشة الملعب المعلقة، إذا كانت المسافة الأفقية بينه وبين نقطة بعد الشاشة عن الأرض، وكانت زاوية الارتفاع إلى أعلى الشاشة 40° أوجد إلى أقرب متر ارتفاع الشاشة عن سطح الأرض.



$$\tan(40^\circ) = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

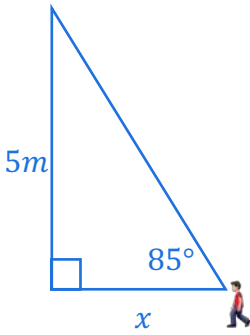
$$\tan(40^\circ) = \frac{h}{30}$$

$$h = 30 \tan(40^\circ) \approx 25.17m$$

∴ ارتفاع الشاشة تقريباً 25 متر

تحقق من فهمك (1)

أثناء تحية العلم ينظر فهد إلى قمة سارية العلم بزاوية ارتفاع مقدارها 85° فإذا كان ارتفاع سارية العلم هو 5m، فألى أي بعد يبلغ فهد عن قاعدة السارية؟



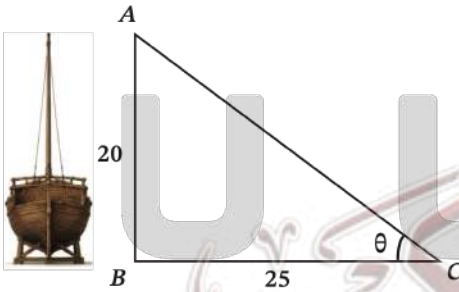
نفرض أن x هو بعد فهد عن قاعدة السارية.
باستخدام النسبة المثلثية المناسبة:

$$\tan(85^\circ) = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{5}{x}$$

$$x = \frac{5}{\tan(85^\circ)} \approx 0.44m$$

مثال (2)

يقف زائر أمام مبنى المركز العلمي، ويبعد 25 m عن قاعدة هيكل "البوم الخشبي الكبير". إذا كان ارتفاع قمة الشراع عن الأرض هو 20 m، احسب قياس زاوية الارتفاع التي يشكلها نظر الزائر إلى قمة الشراع.



$$\tan(\theta) = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{AB}{BC} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

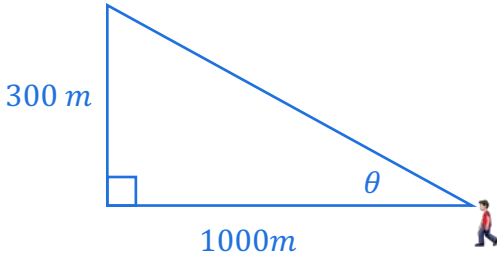
$$\tan(\theta) = 0.8$$

إذن:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 38.6598^\circ \approx 38^\circ 39' 35.31''$$

تحقق من فهمك (2)

يقف شخص على مسافة 1000 m من قاعدة مبنى ارتفاعه 300 m
ما قياس زاوية الارتفاع التي يكونها مع قمة المبنى؟



$$\tan(\theta) = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{300}{1000} = \frac{3}{10} = 0.3$$

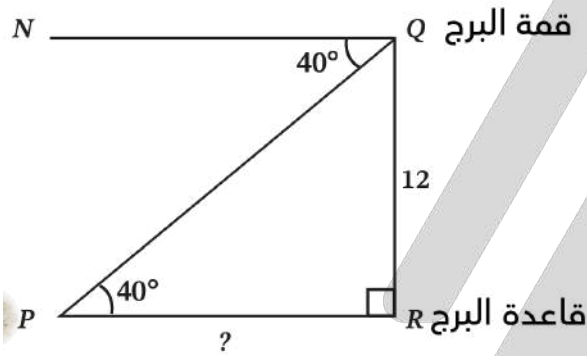
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{10}\right) \approx 16.699^\circ$$

مثال (3)

في محمية صباح الأحمد الطبيعية يقف موظف الرصد فوق برج مراقبة خشبي ارتفاعه 12 m شاهد الموظف أرنبًا عربيًا يقترب من شجيرة صغيرة، فوجد أن زاوية الانخفاض لموقع الأرنب تساوي 40°. أوجد بُعد الأرنب عن قاعدة برج المراقبة في تلك اللحظة، لأقرب متر.



بالتبادل والتوازي:



$$m(\widehat{NQP}) = m(\widehat{QPR}) = 40^\circ$$

$$\tan(40^\circ) = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan(40^\circ) = \frac{12}{RP}$$

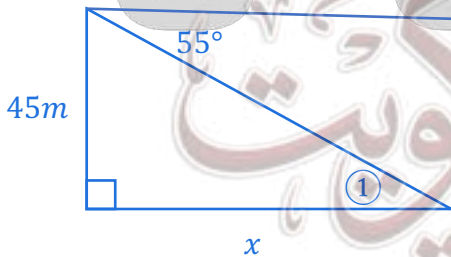
$$RP = \frac{12}{\tan(40^\circ)} \approx 14.30 \text{ m}$$

يبعد الأرنب عن قاعدة البرج 14 m تقريبًا.

تحقق من فهمك (3)

من أعلى برج ارتفاعه 45 m عن سطح الأرض
رصد شخص سيارة بزاوية انخفاض 55°
احسب المسافة بين السيارة وقاعدة البرج لأقرب متر.

بالتبادل والتوازي:



$$m(\hat{1}) = 55^\circ$$

$$\tan(55^\circ) = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan(55^\circ) = \frac{45}{x}$$

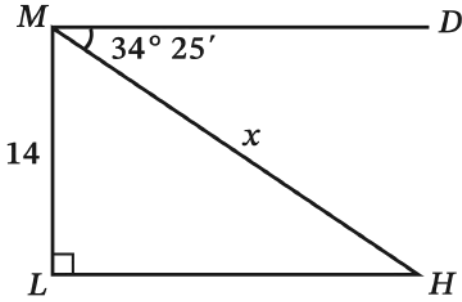
$$x = \frac{45}{\tan(55^\circ)} \approx 31.51 \text{ m}$$

الإجابة 32 m تقريبًا.

مثال (4)

رصد قارب قريب من قمة منارة جزيرة قاروه ارتفاعها 14 m فوجد أن قياس زاوية انخفاضه $34^\circ 25'$ أوجد إلى أقرب متر البعد بين القارب وقمة المنارة.

بالتبادل والتوازي:



$$m(\widehat{DMH}) = m(\widehat{MHL}) = 34^\circ 25'$$

$$\sin(34^\circ 25') = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin(34^\circ 25') = \frac{14}{x}$$

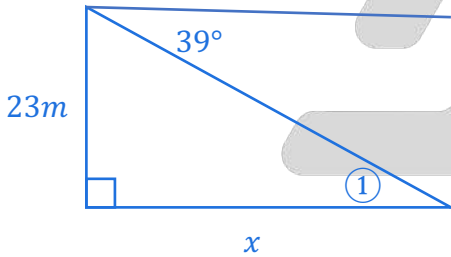
$$x = \frac{14}{\sin(34^\circ 25')} \approx 24.80\text{ m}$$

الإجابة: البعد بين القارب وقمة المنارة تقريباً 25 m

تحقق من فهمك (4)

قاس بخار زاوية انخفاض سفينة من أعلى نقطة على قمة منارة في جزيرة أم المرادم ارتفاعها 23 m فوجد أنها 39° أوجد بُعد السفينة عن قمة المنارة لأقرب متر.

بالتبادل والتوازي:



$$m(\hat{1}) = 39^\circ$$

$$\sin(39^\circ) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin(39^\circ) = \frac{23}{x}$$

$$x = \frac{23}{\sin(39^\circ)} \approx 36.58\text{ m}$$

الإجابة: بُعد السفينة عن قمة المنارة تقريباً 37 m



1. من نقطة على سطح الأرض تبعد 40 m عن قاعدة برج قياس زاوية ارتفاع قمة برج فكانت 63° ، فإن ارتفاع البرج لأقرب متر يساوي:

- ☒ a) 20.38 m
- ☐ b) 78.5 m
- ☐ c) 31 m
- ☐ d) 36 m

2. طائرة ورقية طول خيطها 34 m وكانت زاوية ارتفاع الطائرة 70° ، فإن ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض لأقرب متر يساوي:

- ☒ a) 36.18 m
- ☐ b) 10 m
- ☐ c) 28 m
- ☐ d) 32 m

3. يسير شخص في طريق منحدر، وعندما قطع الشخص مسافة 60 m وصل الشخص لنقطة ارتفاعها عن سطح الأرض 6 m ، فإن زاوية ارتفاع ميل الطريق على سطح الأرض تساوي تقريباً:

- ☒ a) 5.74°
- ☐ b) 89.43°
- ☐ c) 7°
- ☐ d) 9°

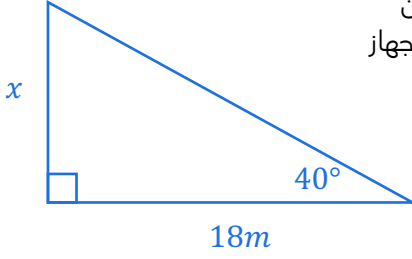
4. برج طوله 12 m يلقي ظلًا على الأرض طوله 8 m ، فإن قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذٍ لأقرب درجة تساوي:

- ☐ a) 33.69°
- ☐ b) 51°
- ☐ c) 48°
- ☒ d) 56.30°



1. لقياس ارتفاع أحد المجمعات، قام إبراهيم برصد قمة المجمع من خلال جهاز الرصد، فوجد أن قياس زاوية الارتفاع 40° إذا كان الجهاز يبعد عن قاعدة المجمع مسافة 18 m . احسب ارتفاع المجمع.

الحل:



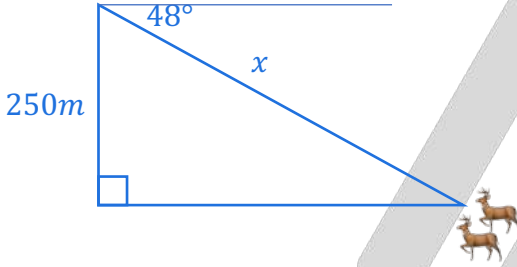
$$\tan(\theta) = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan(40^\circ) = \frac{x}{18}$$

$$x = 18 \tan(40^\circ) \approx 15.1\text{ m}$$

إذن:

ارتفاع المجمع تقريباً 15.1 m



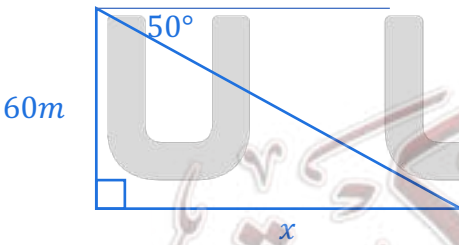
2. تطلق مروحية فوق محمية صباح الأحمد على ارتفاع 250 m وتواكبها على الأرض سيارة من حرس المحمية. شاهد طيار المروحية قطيعة من العزلان بزاوية انخاض قياسها 48° ما المسافة بين المروحية والقطيع في تلك اللحظة؟ علماً بأن السيارة تحت المروحية مباشرة.

$$\sin(48^\circ) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin(48^\circ) = \frac{250}{x}$$

$$x = \frac{250}{\sin(48^\circ)} \approx 336.408\text{ m}$$

المسافة بين المروحية والقطيع تقريباً 336 m



3. شخص يقف على ارتفاع 60 m في إحدى العمارات شاهد موكباً بزاوية انخاض قياسها 50° ما المسافة بين قاعدة العمارة والموكب لأقرب متر؟

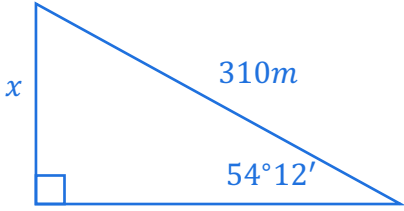
$$\tan(50^\circ) = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan(50^\circ) = \frac{60}{x}$$

$$x = \frac{60}{\tan(50^\circ)} \approx 50.34\text{ m}$$

الإجابة تقريباً: 50 m

4. من نقطة على سطح الأرض قيست زاوية ارتفاع طائرة فوجد أنها $54^{\circ}12'$ فإذا كان بُعد النقطة عن موقع الطائرة 310 m فما ارتفاع الطائرة؟

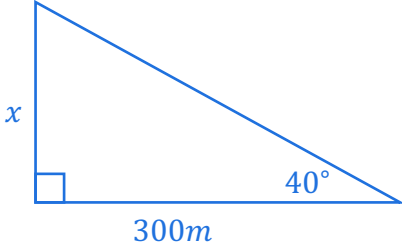


$$\sin(54^{\circ}12') = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin(54^{\circ}12') = \frac{x}{310}$$

$$x = 310 \sin(54^{\circ}12') \approx 251.429\text{ m}$$

5. من نقطة على سطح الأرض تبعد 300 m عن قاعدة برج عمودي وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج هي 40° أوجد ارتفاع البرج عن سطح الأرض.

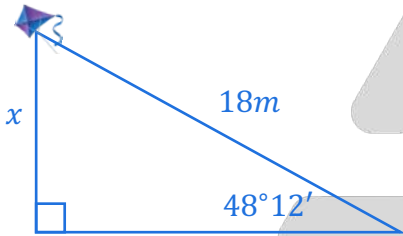


$$\tan(40^{\circ}) = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan(40^{\circ}) = \frac{x}{300}$$

$$x = 300 \tan(40^{\circ}) \approx 251.72\text{ m}$$

6. من نقطة على سطح الأرض وجد أن قياس زاوية ارتفاع طائرة هو $48^{\circ}12'$ إذا كانت مربوطة بخيط مشدود طوله 18 m أوجد ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض لأقرب متر.



$$\sin(48^{\circ}12') = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin(48^{\circ}12') = \frac{x}{18}$$

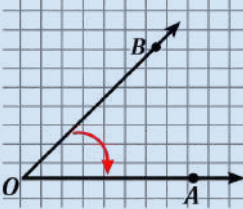
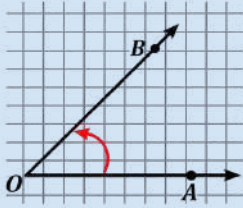
إذن:

$$x = 18 \sin(48^{\circ}12') \approx 13.41\text{ m}$$

الإجابة تقريباً 13 m



(4 – 3) الدوال المثلثية "الدوال الدائرية"

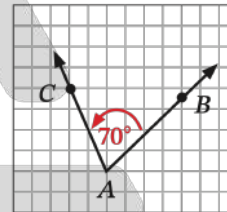
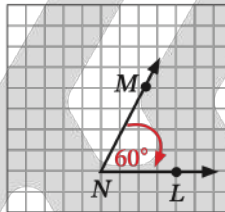
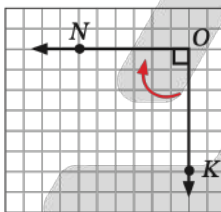
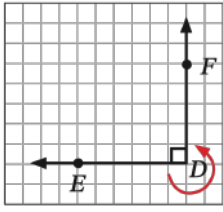


الزاوية الموجبة

- هي زاوية تتكون من اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية
- يسمى الشعاع الأول بالضلع الابتدائي ويسمى الشعاع الثاني بالضلع النهائي
- ويحدد قياسها واتجاهها بالدوران من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي
- يكون قياس الزاوية الموجبة موجباً إذا كان الدوران عكس اتجاه عقارب الساعة ويكون سالباً إذا كان الدوران مع اتجاه عقارب الساعة
- الزاوية الموجبة في الوضع القياسي: هي زاوية رأسها نقطة الأصل وضلعها الابتدائي منطبق على الاتجاه الموجب لمحور السينات

تدريب:

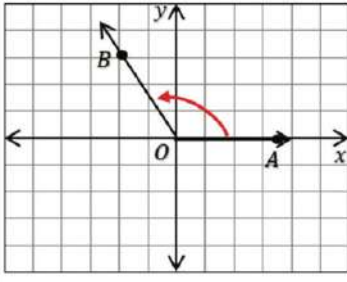
أكمل الجدول



$\overrightarrow{DE}$	$\overrightarrow{OK}$	$\overrightarrow{NM}$	$\overrightarrow{AB}$	الضلع الابتدائي
$\overrightarrow{DF}$	$\overrightarrow{ON}$	$\overrightarrow{LM}$	$\overrightarrow{AC}$	الضلع النهائي
$(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{DF})$	$(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{ON})$	$(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NL})$	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$	الزوج المرتب
عكس عقارب الساعة	مع عقارب الساعة	مع عقارب الساعة	عكس عقارب الساعة	اتجاه الدوران
270°	-90°	-60°	70°	قياس الزاوية
90°	-270°	-300°	290°	القياس الآخر للزاوية

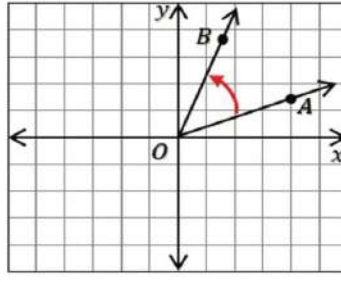
في الأشكال من 1 – 6 حدّد أي من الزوايا الموجهة في وضع قياسي

1



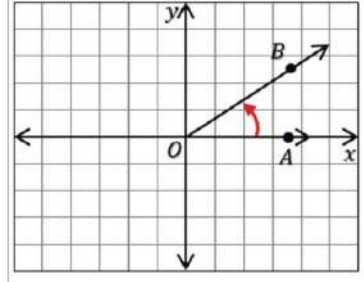
نعم

2



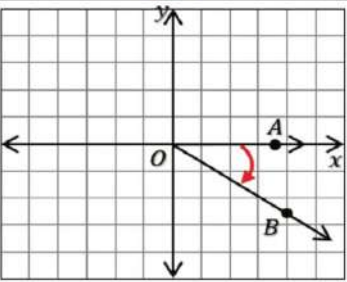
لا

3



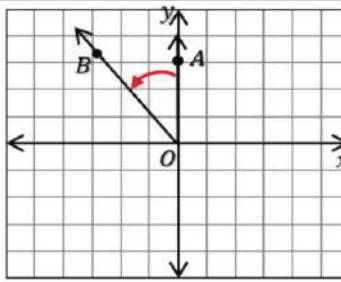
نعم

4



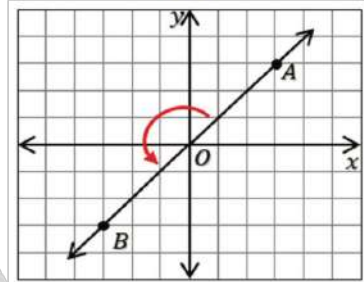
نعم

5

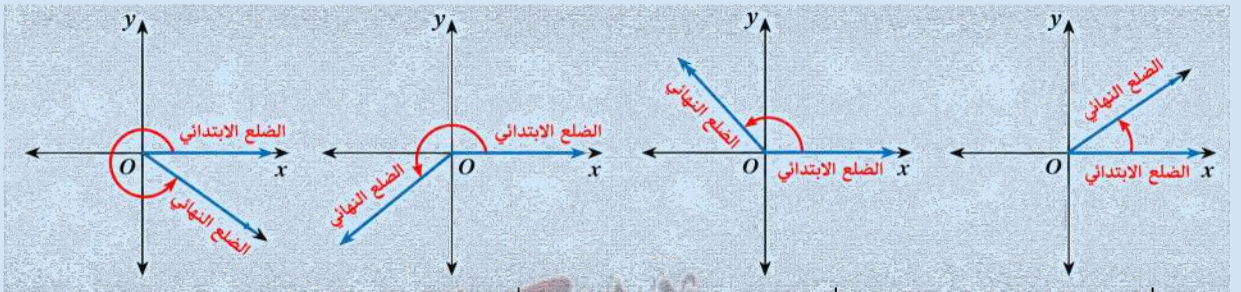


لا

6



لا



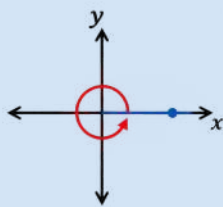
زاوية موجهة
في الربع الرابع
 $270^\circ < x < 360^\circ$

زاوية موجهة
في الربع الثالث
 $180^\circ < x < 270^\circ$

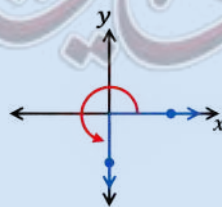
زاوية موجهة
في الربع الثاني
 $90^\circ < x < 180^\circ$

زاوية موجهة
في الربع الأول
 $0^\circ < x < 90^\circ$

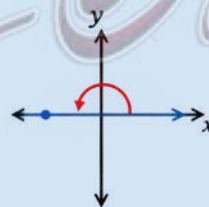
الزاوية الربعية
هي زاوية موجهة في الوضع القياسي ينطبق ضلعها النهائي على أحد محوري الإحداثيات



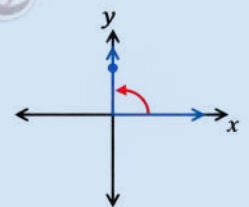
360°



270°



180°



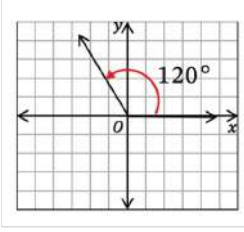
90°



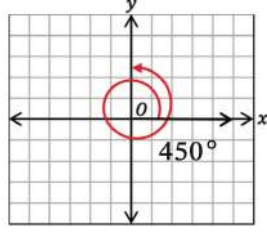
مثال (1) ارسم كلاً من الزوايا الموجهة في الوضع القياسي التالي ثم حدد الزوايا الربعية منها أو حدد الربع الذي تقع فيه الزاوية إن أمكن:

- (a) 120° , (b) 450° , (c) -270° , (d) 300° , (e) -150° , (f) 450°

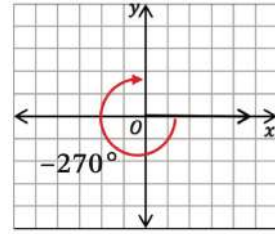
(a)
 120°
تقع في الربع الثاني



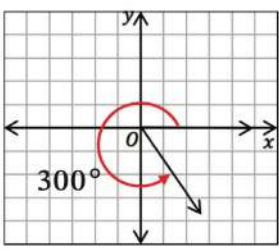
(b)
 $450^\circ - 360^\circ = 90^\circ$
زاوية ربعية



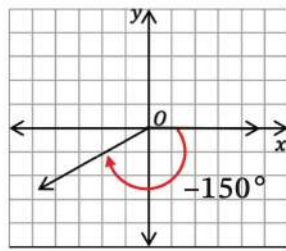
(c)
 $-270^\circ + 360^\circ = 90^\circ$
زاوية ربعية



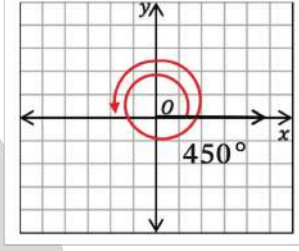
(d)
 300°
تقع في الربع الرابع



(e)
 $-150^\circ + 360^\circ = 210^\circ$
تقع في الربع الثالث



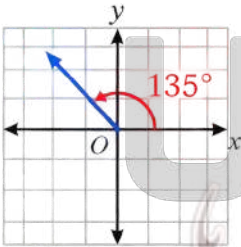
(f)
 $450^\circ - 360^\circ = 90^\circ$
زاوية ربعية



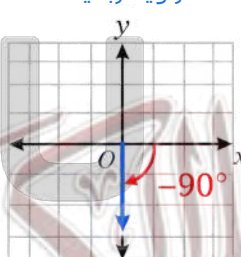
تحقق من فهمك (1) ارسم كلاً من الزوايا الموجهة في الوضع القياسي التالي ثم حدد الزوايا الربعية منها أو حدد الربع الذي تقع فيه الزاوية إن أمكن:

- (a) 135° , (b) -90° , (c) 810° , (d) -70° , (e) 225°

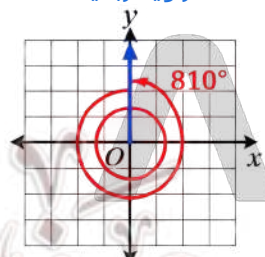
(a)
 135°
تقع في الربع الثاني



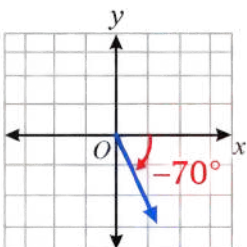
(b)
 $-90^\circ + 360^\circ = 270^\circ$
زاوية ربعية



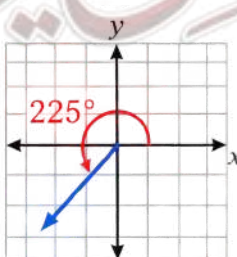
(c)
 $810^\circ - 720^\circ = 90^\circ$
زاوية ربعية



(d)
 $-70^\circ + 360^\circ = 290^\circ$
تقع في الربع الرابع



(e)
 225°
تقع في الربع الثالث





القياس الستيني والقياس الدائري:

أولاً: القياس الستيني

في هذا القياس تُقسم الزاوية التي تمثل دورة كاملة إلى 360 قسمًا متساويًا، قياس كل منها يسمى درجة ويرمز لها بالرمز °
فمثلاً قياس الزاوية القائمة يساوي 90°
وقياس الزاوية المستقيمة يساوي 180°
أجزاء الدرجة:

الدرجة الواحدة = 60 دقيقة ← 1° = 60'

الدقيقة الواحدة = 60 ثانية ← 1' = 60''

ثانياً: القياس الدائري (الراديان)

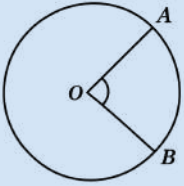
هو نسبة طول القوس في دائرة إلى طول نصف القطر

$$\theta = \frac{L}{r}$$

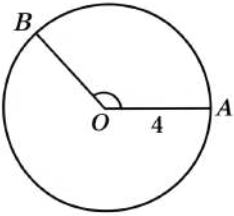
L طول القوس المقابل للزاوية θ

r طول نصف قطر الدائرة

θ الزاوية المركزية بالراديان



مثال (2) في الشكل المقابل:



أوجد قياس الزاوية المركزية $\hat{AOB}$ بالتقدير الدائري
إذا كان طول القوس $\widehat{AB}$ يساوي 8 وحدة وطول نصف القطر يساوي 4 وحدة طول

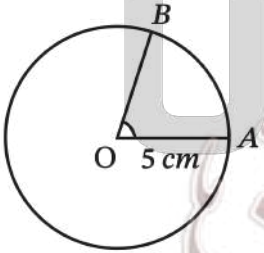
$$\theta = \frac{L}{r} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\therefore m(\hat{AOB}) = 2 \text{ rad}$$

تحقق من فهمك (2) في الشكل المقابل:

إذا كان قياس الزاوية المركزية $\hat{BOA}$ يساوي 1.5rad

أوجد طول القوس $\widehat{AB}$



$$\theta = \frac{L}{r}$$

$$L = r\theta = 5(1.5) = 7.5 \text{ cm}$$

العلاقة بين القياس الستيني والقياس الدائري:

$$\frac{x^{\circ}}{180^{\circ}} = \frac{\theta}{\pi}$$

$$\theta = x^{\circ} \times \frac{\pi}{180^{\circ}}$$

$$x^{\circ} = \theta \times \frac{180^{\circ}}{\pi}$$

مثال (3)

أوجد القياس الدائري للزاوية التي قياسها 120°

$$\begin{aligned}\theta &= x^{\circ} \times \frac{\pi}{180^{\circ}} \\ &= 120^{\circ} \times \frac{\pi}{180^{\circ}} = \frac{2}{3}\pi\end{aligned}$$

تحقق من فهمك (3)

أوجد القياس الدائري للزاوية التي قياسها:

- (a) 60°
(b) 330°

$$\begin{aligned}\theta &= x^{\circ} \times \frac{\pi}{180^{\circ}} \\ &= 60^{\circ} \times \frac{\pi}{180^{\circ}} = \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta &= x^{\circ} \times \frac{\pi}{180^{\circ}} \\ &= 330^{\circ} \times \frac{\pi}{180^{\circ}} = \frac{11\pi}{6}\end{aligned}$$

مثال (4)

أوجد القياس الستيني لكل مما يلي:

- (a) $\frac{3\pi}{4}$
(b) 2 rad

تحقق من فهمك (4)

أوجد القياس الستيني للزاوية التي قياسها:

- (a) $\theta = \frac{3\pi}{4}$
(b) $\theta = \frac{4\pi}{3}$
(c) 1.6 rad

$$\begin{aligned}x^{\circ} &= \theta \times \frac{180^{\circ}}{\pi} \\ &= \frac{3\pi}{4} \times \frac{180^{\circ}}{\pi} = 135^{\circ}\end{aligned}$$

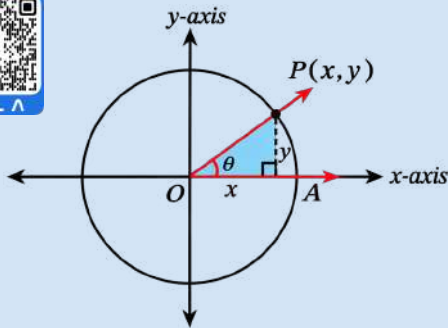
$$\begin{aligned}x^{\circ} &= \theta \times \frac{180^{\circ}}{\pi} \\ &= \frac{4\pi}{3} \times \frac{180^{\circ}}{\pi} = 240^{\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^{\circ} &= \theta \times \frac{180^{\circ}}{\pi} \\ &= 1.6 \times \frac{180^{\circ}}{\pi} \approx 91.67^{\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^{\circ} &= \theta \times \frac{180^{\circ}}{\pi} \\ &= \frac{3\pi}{4} \times \frac{180^{\circ}}{\pi} = 135^{\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^{\circ} &= \theta \times \frac{180^{\circ}}{\pi} \\ &= 2 \times \frac{180^{\circ}}{\pi} = \frac{360^{\circ}}{\pi}\end{aligned}$$

x Degrees	θ Radians	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\sec \theta$	$\csc \theta$	$\cot \theta$
0°	0	0	1	0	1	غير معروف	غير معروف
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	غير معروف	غير معروف	1	0
180°	π	0	-1	0	-1	غير معروف	غير معروف
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	غير معروف	غير معروف	-1	0
360°	2π	0	1	0	1	غير معروف	غير معروف
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{3}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$



دائرة الوحدة:

هي دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها وحدة واحدة

النقطة المثلثية $P(x, y)$:

هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجبة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة ويكون:

- $\sin \theta = y$
- $\cos \theta = x$
- $\tan \theta = \frac{y}{x} ; x \neq 0$
- $\csc \theta = \frac{1}{y} ; y \neq 0$
- $\sec \theta = \frac{1}{x} ; x \neq 0$
- $\cot \theta = \frac{x}{y} ; y \neq 0$

إشارات النسب المثلثية في دائرة الوحدة:

- إذا كانت θ في الربع الأول يكون: $\sin \theta > 0$ $\cos \theta > 0$ $\tan \theta > 0$
- إذا كانت θ في الربع الثاني يكون: $\sin \theta > 0$ $\cos \theta < 0$ $\tan \theta < 0$
- إذا كانت θ في الربع الثالث يكون: $\sin \theta < 0$ $\cos \theta < 0$ $\tan \theta > 0$
- إذا كانت θ في الربع الرابع يكون: $\sin \theta < 0$ $\cos \theta > 0$ $\tan \theta < 0$



مثال (5) إذا كانت النقطة $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ للزاوية θ في الوضع القياسي

- يبين أن النقطة P نقطة مثلثية
- أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ

$$x^2 + y^2 = 1 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

∴ النقطة P مثلثية

$$x = \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

$$y = \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{-1} = -\sqrt{3}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = -2$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

تحقق من فهمك (5) إذا كانت النقطة $P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ للزاوية θ في الوضع القياسي

- يبين أن النقطة P نقطة مثلثية
- أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$$

∴ النقطة P مثلثية

$$x = \cos \theta = \frac{3}{5}$$

$$y = \sin \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{-4}{5} \times \frac{5}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = -\frac{5}{4}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{5}{3}$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{-4} = -\frac{3}{4}$$



مثال (6) إذا كانت النقطة $P\left(\frac{1}{2}, y\right)$ هي النقطة المثلثية للزاوية θ أوجد $\sin \theta$ و $\cos \theta$ حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$x = \cos \theta = \frac{1}{2}$$

بما أن النقطة $\left(\frac{1}{2}, y\right)$ نقطة مثلثية

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{1}{4} + y^2 = 1$$

$$y^2 = \frac{3}{4}$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore y = \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

وبما أن $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ بالتالي θ تقع في الربع الأول $y > 0$

تحقق من فهمك (6) إذا كانت النقطة $P\left(x, -\frac{1}{2}\right)$ هي النقطة المثلثية للزاوية θ أوجد $\sin \theta$ و $\cos \theta$ و $\tan \theta$ حيث $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

بما أن النقطة P نقطة مثلثية

$$\therefore x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$x^2 + \frac{1}{4} = 1$$

$$x^2 = \frac{3}{4}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

وبما أن $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ بالتالي θ تقع في الربع الثالث يكون x سالباً و y سالباً

$$\therefore x = \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



مثال (7) إذا كانت $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ أوجد $\cos \theta$, $\tan \theta$ حيث $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

وبما أن $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ بالتالي θ تقع في الربع الثاني

$$\therefore \cos \theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{-\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{-3}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

تحقق من فهمك (7) إذا كانت $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ أوجد $\sin x$, $\tan x$ حيث $90^\circ < x < 180^\circ$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \sin^2 x = 1$$

$$\sin x = \pm \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

وبما أن $90^\circ < x < 180^\circ$ بالتالي x تقع في الربع الثاني:

$$\therefore \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{-\sqrt{2}} = -1$$





تدرب: التمارين الموضوعية

ظل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. الزاوية الموجهة في وضعها القياسي يمكن أن ينطبق ضلعها الابتدائي على الاتجاه السالب لمحور السينات
 (a) ☒ (b)
2. الزاوية 200° زاوية ربعية
 (a) ☒ (b)
3. الزاوية الموجهة في وضع قياسي يمكن أن يكون قياسها سالباً
 (a) ☒ (b)
4. الزاوية الموجهة التي في وضع قياسي لها أكثر من نقطة مثلثية
 (a) ☒ (b)
5. إذا كانت (x,y) نقطة مثلثية لزاوية موجهة في وضع قياسي فإن $x > 1$
 (a) ☒ (b)
6. النقطة (-1,0) نقطة مثلثية لزاوية موجهة في وضع قياسي
 (a) ☒ (b)
7. النقطة $(\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$ نقطة مثلثية لزاوية موجهة في وضع قياسي
 (a) ☒ (b)
8. إذا كانت $(x, \frac{3}{5})$ نقطة مثلثية لزاوية موجهة في وضع قياسي تقع في الربع الثاني فإن $x = \frac{4}{5}$
 (a) ☒ (b)
9. $\cos(-300^\circ) = \frac{1}{2}$
 (a) ☒ (b)
10. $\sin(120^\circ) = \frac{1}{2}$
 (a) ☒ (b)
11. $\tan(-150^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 (a) ☒ (b)
12. $\sec(315^\circ) = \sqrt{2}$
 (a) ☒ (b)
13. الزاوية التي قياسها $\frac{11\pi}{2}$ تقع في الربع الرابع
 (a) ☒ (b)
14. الزاوية المركزية ABC قياسها 0.75 في دائرة طول قطرها 8cm فإن طول القوس AC الذي تحصره هذه الزاوية يساوي 3cm
 (a) ☒ (b)

اختر الإجابة الصحيحة:

1. الزاوية التي قياسها 300° تقع في الربع

- (a) الأول (b) الثالث (c) الثاني (d) الرابع

2. الزاوية التي قياسها 730° تقع في الربع

- (a) الأول (b) الثالث (c) الثاني (d) الرابع

3. الزاوية التي تقع في الربع الثالث هي

- (a) 39° (b) 550° (c) 70° (d) 650°

4. الزاوية التي تقع في الربع الثاني هي

- (a) 200° (b) 510° (c) 560° (d) 260°

5. الزاوية التي قياسها 280° تقع في الربع

- (a) الأول (b) الثالث (c) الثاني (d) الرابع

6. النقطة المثلثية للزاوية الموجهة في الوضع القياسي يمكن أن يكون

- (a) (0, 0) (b) (3, 0) (c) (-, 11) (d) (0, 1)

7. إذا كانت $\sin \theta = 1$ فإن النقطة المثلثية للزاوية θ هي

- (a) (1, 1) (b) (3, 0) (c) (0, 1) (d) (-, 11)

8. إذا كانت $(x, \frac{5}{13})$ نقطة مثلثية لزاوية حادة موجهة في وضع قياسي فإن x

- (a) $\frac{12}{13}$ (b) $\frac{8}{13}$ (c) $\frac{5}{12}$ (d) $-\frac{12}{13}$

9. إذا كانت $(\frac{1}{2}, y)$ نقطة مثلثية للزاوية θ والتي في وضع قياسي $0^\circ < \theta < 90^\circ$ فإن y تساوي

- (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) $-\sqrt{3}$

10. الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها يختلف عن الزوايا الأخرى هي

- (a) $\frac{7\pi}{4}$ (b) 135° (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) 215°

11. الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها $\frac{\pi}{3}$ هي

- (a) $\frac{11\pi}{6}$ (b) 225° (c) $\frac{7\pi}{8}$ (d) $\frac{5\pi}{3}$

12. النسبة المثلثية فيما يلي التي قيمتها $\frac{1}{2}$ هي

- (a) $\sin(-330^\circ)$ (b) $\cos(-240^\circ)$ (c) $\cot(-1500^\circ)$ (d) $\tan(765^\circ)$

13. النسبة المثلثية فيما يلي التي قيمتها $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ هي

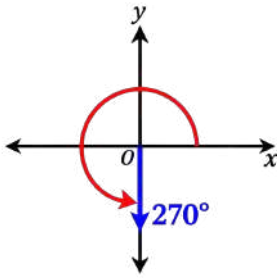
- (a) $\cos \frac{31\pi}{6}$ (b) $\sin \frac{-35\pi}{3}$ (c) $\tan \frac{17\pi}{6}$ (d) $\sec \frac{13\pi}{3}$



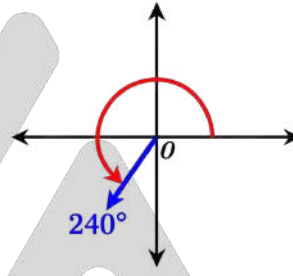
1. ارسم كل زاوية من الزوايا الموجهة التالية في الوضع القياسي مع توضيح الضلع الابتدائي والضلع النهائي مع ذكر الربع الذي تقع فيه الزاوية

- a) $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$
- b) $\theta_2 = -\frac{2\pi}{3}$
- c) $\theta_3 = -30^\circ$
- d) $\theta_4 = -270^\circ$
- e) $\theta_5 = -200^\circ$
- f) $\theta_6 = -250^\circ$

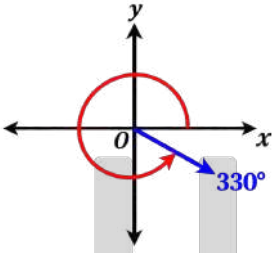
(a) $\theta_1 = -\frac{\pi}{2} = -\frac{180^\circ}{2} = -90^\circ$
 $-90^\circ + 360^\circ = 270^\circ$
 زاوية ربعية



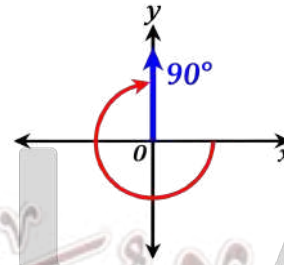
(b) $\theta_2 = -\frac{2\pi}{3} = -\frac{2(180)}{3} = -120^\circ$
 $-120^\circ + 360^\circ = 240^\circ$
 تقع في الربع الثالث



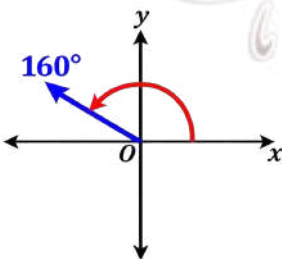
(c) $\theta_3 = -30^\circ$
 $-30^\circ + 360^\circ = 330^\circ$
 تقع في الربع الرابع



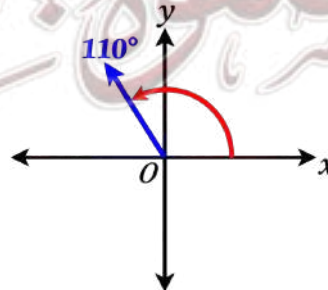
(d) $\theta_4 = -270^\circ$
 $-270^\circ + 360^\circ = 90^\circ$
 زاوية ربعية



(e) $\theta_5 = -200^\circ$
 $-200^\circ + 360^\circ = 160^\circ$
 تقع في الربع الثاني

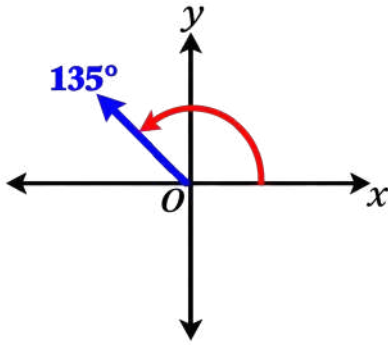


(f) $\theta_6 = -250^\circ$
 $-250^\circ + 360^\circ = 110^\circ$
 تقع في الربع الثاني

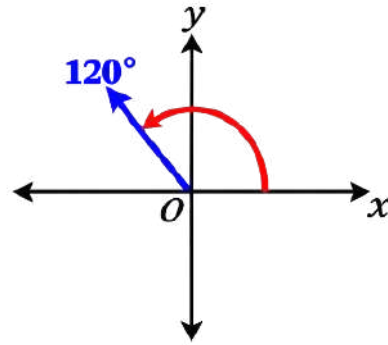


2. ارسم كل زاوية من الزوايا الموجهة التالية في الوضع القياسي

a) $\theta_1 = 135^\circ$



b) $\theta_2 = \frac{2\pi}{3} = \frac{2(180)}{3} = 120^\circ$



3. اكتب بالقياس الدائري كل من الزوايا التالية

a) $30^\circ \Rightarrow \theta = 30^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}$

b) $60^\circ \Rightarrow \theta = 60^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}$

c) $90^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{2}$

d) $40^\circ \Rightarrow \theta = 40^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{9}$

e) $120^\circ \Rightarrow \theta = 120^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3}$

f) $135^\circ \Rightarrow \theta = 135^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{3\pi}{4}$

g) $150^\circ \Rightarrow \theta = 150^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{6}$

h) $240^\circ \Rightarrow \theta = 240^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{4\pi}{3}$

4. اكتب بالقياس الستيني قياسات الزوايا التالية

a) $\frac{\pi}{4} \quad x^\circ = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$

b) $\frac{3\pi}{2} \quad x^\circ = \frac{3(180^\circ)}{2} = 270^\circ$

c) $\frac{2\pi}{3} \quad x^\circ = \frac{2(180^\circ)}{3} = 120^\circ$

d) $\frac{3\pi}{4} \quad x^\circ = \frac{3(180^\circ)}{4} = 135^\circ$

e) 3 $x^\circ = 3 \times \frac{180^\circ}{\pi} \approx 171.89^\circ$

f) $1\frac{1}{2} = 1.5 \therefore x^\circ = 1.5 \times \frac{180^\circ}{\pi} \approx 85.94^\circ$

g) $\frac{11\pi}{6} \quad x^\circ = \frac{11(180^\circ)}{6} = 330^\circ$

5. زاوية قياسها 5 radian أوجد القياس الستيني لهذه الزاوية لأقرب دقيقة

$$x^\circ = 5 \times \frac{180^\circ}{\pi} \approx 286.48^\circ \approx 286^\circ 29'$$

6. زاوية قياسها $58^\circ 18' 23''$ أوجد القياس الدائري لهذه الزاوية مقرباً الناتج إلى أقرب رقمين عشريين

$$\theta = 58^\circ 18' 23'' \times \frac{\pi}{180^\circ} \approx 1.02 \text{ rad}$$

7. أوجد القياس الدائري للزاويتين التاليتين مقرباً الناتج لأقرب جزء من مئة

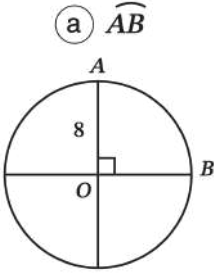
a) $52^\circ 16' 24''$

b) $101^\circ 4' 13''$

$$\theta = 52^\circ 16' 24'' \times \frac{\pi}{180^\circ} \approx 0.91 \text{ rad}$$

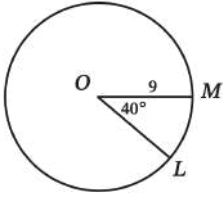
$$\theta = 101^\circ 4' 13'' \times \frac{\pi}{180^\circ} \approx 1.76 \text{ rad}$$

8. في كل من الأشكال التالية دائرة مركزها O أوجد طول القوس في كل منها



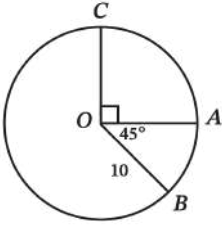
$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow L = r\theta = 8 \left(\frac{\pi}{2} \right) = 4\pi$$

(B) $\widehat{ML}$



$$\theta = 40 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{9} \Rightarrow L = r\theta = 9 \left(\frac{2\pi}{9} \right) = 2\pi$$

(C) $\widehat{BAC}$



$$\theta = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ \Rightarrow \theta = 135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$$

$$L = r\theta = 10 \left(\frac{3\pi}{4} \right) = \frac{15\pi}{2}$$

9. زاوية مركزية تقابل قوساً طوله 8cm في دائرة طول نصف قطرها 6cm أوجد قياسها بالتقدير الستيني

$$\theta = \frac{L}{r} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \text{ rad}$$

$$x^\circ = \theta \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{4}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi} \approx 76.39^\circ \approx 76^\circ 23'$$

10. أوجد طول القوس الذي يقابل زاوية مركزية قياسها $\frac{3}{4}\text{rad}$ في دائرة طول نصف قطرها 10cm

$$L = r\theta = 10 \left(\frac{3}{4} \right) = 7.5 \text{ cm}$$

11. افترض أن ذراع مساحة المياه على الزجاج الأمامي لإحدى السيارات يساوي تقريباً 56cm وأثناء حركتها على الزجاج تصنع قوساً يقابل زاوية قياسها 110° أوجد طول القوس

$$\theta = 110^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{11\pi}{18} \text{ rad}$$

$$L = r\theta = 56 \left(\frac{11\pi}{18} \right) = \frac{308\pi}{9} \text{ cm} \approx 107.51 \text{ cm}$$

12. إذا كانت $(x, -\frac{2\sqrt{6}}{5})$ نقطة مثلثية للزاوية التي قياسها θ حيث θ تقع في الربع الثالث أوجد $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \csc\theta, \cot\theta$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + \left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2 = 1$$

$$x = \pm \sqrt{1 - \left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2} = \pm \frac{1}{5}$$

∴ الزاوية θ في الربع الثالث بالتالي x سالبة

$$x = -\frac{1}{5} \Rightarrow P\left(-\frac{1}{5}, -\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)$$

$$\sin \theta = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{2\sqrt{6}}{5}}{-\frac{1}{5}} = 2\sqrt{6}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = -\frac{5}{2\sqrt{6}} = -\frac{5\sqrt{6}}{12}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = -5$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{2\sqrt{6}}{5}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

13. إذا كانت $(\frac{7}{25}, y)$ نقطة مثلثية للزاوية التي قياسها θ حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ أوجد $\sin\theta, \tan\theta, \csc\theta, \cot\theta$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\left(\frac{7}{25}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$y = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = \pm \frac{24}{25}$$

∴ الزاوية θ في الربع الأول بالتالي y موجبة

$$y = \frac{24}{25} \Rightarrow P\left(\frac{7}{25}, \frac{24}{25}\right)$$

$$\sin \theta = y = \frac{24}{25}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{7}{24}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{25}{24}$$

14. إذا كانت $\sin \theta = \frac{3}{5}$ حيث $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ أوجد $\cos \theta, \tan \theta, \sec \theta, \csc \theta$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm \frac{4}{5}$$

∴ الزاوية θ في الربع الثاني

$$\cos \theta < 0 \Rightarrow \cos \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = -\frac{5}{4}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{5}{3}$$

15. إذا كانت $\cos \theta = -\frac{3\sqrt{3}}{13}$ حيث $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ أوجد $\sin \theta, \tan \theta, \cot \theta, \sec \theta, \csc \theta$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin^2 \theta + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{13}\right)^2 = 1$$

$$\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \left(-\frac{3\sqrt{3}}{13}\right)^2} = \pm \frac{\sqrt{142}}{13}$$

∴ الزاوية θ في الربع الثالث

$$\sin \theta < 0 \Rightarrow \sin \theta = -\frac{\sqrt{142}}{13}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{\sqrt{142}}{13}}{-\frac{3\sqrt{3}}{13}} = \frac{\sqrt{142}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{426}}{9}$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{13}}{-\frac{\sqrt{142}}{13}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{142}} = \frac{3\sqrt{426}}{142}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = -\frac{13}{3\sqrt{3}} = -\frac{13\sqrt{3}}{9}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = -\frac{13}{\sqrt{142}} = -\frac{13\sqrt{142}}{142}$$

(5 - 3) العلاقات بين الدوال المثلثية



العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين

$$(\theta, \pi - \theta)$$

- $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$
- $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$
- $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$

العلاقة بين الزاويتين $(\theta, -\theta)$

- $\cos(-\theta) = \cos\theta$
- $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
- $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

مثال (1)

أولاً: اكتب النسب المثلثية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية

- $\cos(\pi - \theta)$
 - $\tan(180^\circ - x)$
 - $\sin(180^\circ - x)$
- ثانياً: إذا كان $\sec\theta = 2$ أوجد $\cos(\pi - \theta)$

- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\tan(180^\circ - x) = -\tan x$
- $\sin(180^\circ - x) = \sin x$
- $\sec\theta = 2 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

تحقق من فهمك (1)

إذا كان $\sin\theta = 0.2$ أوجد $\sin(\pi - \theta)$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta = 0.2$$

إذا كان $\cos\theta = 0.6$ أوجد $\cos(\pi - \theta)$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta = -0.6$$

إذا كان $\tan\theta = \frac{1}{3}$ أوجد $\cot(\pi - \theta)$

$$\cot(\pi - \theta) = -\cot\theta$$

$$= -\frac{1}{\tan\theta} = -\frac{1}{\frac{1}{3}} = -3$$

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين $(\theta, \pi + \theta)$

- $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$
- $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$
- $\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$

مثال (2)

إذا كان $\tan\theta = 3$ أوجد $\tan(\pi + \theta)$

$$\tan(\pi + \theta) = \tan\theta = 3$$

إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{2}$ أوجد $\sec(\pi + \theta)$

$$\begin{aligned} \cos(\pi + \theta) &= -\cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sec(\pi + \theta) &= \frac{1}{\cos(\pi + \theta)} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \end{aligned}$$

إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{5}$ أوجد $\csc(\pi + \theta)$

$$\begin{aligned} \sin(\pi + \theta) &= -\sin\theta = -\frac{1}{5} \\ \csc(\pi + \theta) &= \frac{1}{\sin(\pi + \theta)} = \frac{1}{-\frac{1}{5}} = -5 \end{aligned}$$

تحقق من فهمك (2)

إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ أوجد $\sin(\pi + \theta)$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

إذا كان $\tan\theta = 3.2$ أوجد $\tan(\pi + \theta)$

$$\tan(\pi + \theta) = \tan\theta = 3.2$$

إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{3}$ أوجد $\sec(\pi + \theta)$

$$\begin{aligned} \cos(\pi + \theta) &= -\cos\theta = -\frac{2}{3} \\ \sec(\pi + \theta) &= \frac{1}{\cos(\pi + \theta)} = \frac{1}{-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$





العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين $(\theta, \frac{\pi}{2} - \theta)$

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$

تحقق من فهمك (3)

إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{2}$ أوجد $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
حيث $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos\theta \\ \sin^2\theta + \cos^2\theta &= 1 \\ \cos\theta &= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

∴ الزاوية θ في الربع الثاني

$$\begin{aligned}\therefore \cos\theta &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \therefore \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

مثال (3)

إذا كان $\cos\theta = \frac{7}{25}$ أوجد $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
حيث $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin\theta \\ \sin^2\theta + \cos^2\theta &= 1 \\ \sin\theta &= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = \pm \frac{24}{25}\end{aligned}$$

∴ الزاوية θ في الربع الأول

$$\begin{aligned}\therefore \sin\theta &= \frac{24}{25} \\ \therefore \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin\theta = \frac{24}{25}\end{aligned}$$



العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين $(\theta, \frac{\pi}{2} + \theta)$

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta$

تحقق من فهمك (4)

إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{5}$ أوجد $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$
حيث $\frac{3\pi}{2} \leq \theta < 2\pi$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= -\sin\theta \\ \sin^2\theta + \cos^2\theta &= 1 \\ \sin\theta &= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \pm \frac{2\sqrt{6}}{5}\end{aligned}$$

$\frac{3\pi}{2} \leq \theta < 2\pi$ (في الربع الرابع) ⇒

$$\begin{aligned}\sin\theta &= -\frac{2\sqrt{6}}{5} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= -\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) = \frac{2\sqrt{6}}{5}\end{aligned}$$

مثال (4)

إذا كان $\tan\theta = \sqrt{3}$ أوجد $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$
حيث $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= -\cot\theta \\ \tan\theta &= \sqrt{3} \Rightarrow \\ -\cot\theta &= -\frac{1}{\tan\theta} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \therefore \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$



- $\cos(\pi - \theta) - \cos(\theta) + \sin(\pi + \theta) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
- $\sin x + \sin(90^\circ + x) + \sin(180^\circ + x) + \sin(90^\circ - x)$
- $\cos(\pi + \theta) + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\theta - \pi) - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} & \cos(\pi - \theta) - \cos(\theta) + \sin(\pi + \theta) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= -\cos\theta - \cos\theta + (-\sin\theta) + \sin\theta \\ &= -2\cos\theta + (-\sin\theta) + \sin\theta \\ &= -2\cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sin x + \sin(90^\circ + x) + \sin(180^\circ + x) + \sin(90^\circ - x) \\ &= \sin x + \cos x + (-\sin x) + \cos x \\ &= 2\cos x + (-\sin x) + \sin x \\ &= 2\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos(\pi + \theta) + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\theta - \pi) - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\cos\theta + \cos\theta + \sin(-(\pi - \theta)) + \sin\theta \\ &= 0 - \sin\theta + \sin\theta = 0 \end{aligned}$$

تحقق من فهمك (5) بسط التعبيرات التالية

- $\sin(\pi + \theta) - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\theta - \pi) + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$
- $\cos(-\theta) + \cos(\pi - \theta) - \sin(\pi + \theta)$
- $\cos x - \sin(90^\circ - x) + \sin(180^\circ - x) + \cos(90^\circ + x)$

$$\begin{aligned} & \sin(\pi + \theta) - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\theta - \pi) + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin\theta - (-\sin\theta) + (-\cos\theta) + \cos\theta \\ &= -\sin\theta + \sin\theta - \cos\theta + \cos\theta = 0 \end{aligned}$$

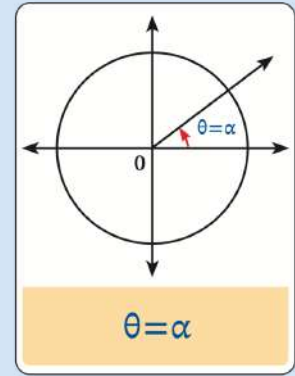
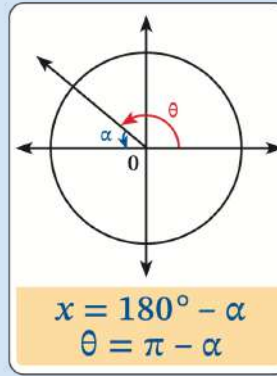
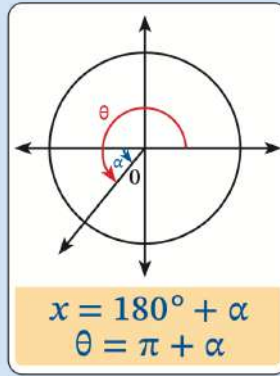
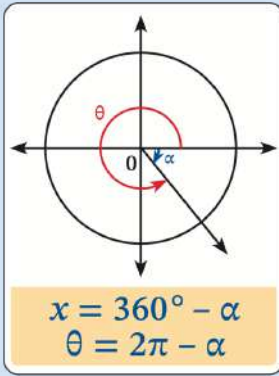
$$\begin{aligned} & \cos(-\theta) + \cos(\pi - \theta) - \sin(\pi + \theta) \\ &= \cos\theta + (-\cos\theta) - (-\sin\theta) \\ &= \cos\theta - \cos\theta + \sin\theta = \sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos x - \sin(90^\circ - x) + \sin(180^\circ - x) + \cos(90^\circ + x) \\ &= \cos x - \cos x + \sin x + (-\sin x) = 0 \end{aligned}$$



زاوية الإسناد

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة θ التي في الوضع القياسي هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة جهة مع محور السينات حيث $0^\circ < \alpha < 90^\circ$



تحقق من فهمك (6)

أوجد زاوية الإسناد للزاويا التالية

- a) $x = 215^\circ$
- b) $\theta = \frac{2\pi}{3}$
- c) $x = 300^\circ$

$x = 215^\circ$
تقع في الربع الثالث
 $\alpha = 215^\circ - 180^\circ = 35^\circ$

$\theta = \frac{2\pi}{3}$
تقع في الربع الثاني
 $\alpha = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

$x = 300^\circ$
تقع في الربع الرابع
 $\alpha = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$

مثال (6)

أوجد زاوية الإسناد للزاويا التالية

- a) $x = 125^\circ$
- b) $x = 215^\circ$
- c) $x = \frac{11\pi}{6}$

$x = 125^\circ$
تقع في الربع الثاني
 $\alpha = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$

$x = 215^\circ$
تقع في الربع الثالث
 $\alpha = 215^\circ - 180^\circ = 35^\circ$

$x = \frac{11\pi}{6}$
تقع في الربع الرابع
 $\alpha = 2\pi - \frac{11\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

- a) $\sin \frac{5\pi}{6}$
- b) $\cos 225^\circ$
- c) $\tan 315^\circ$

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 315^\circ = \tan(360^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$

تحقق من فهمك (7)

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد

- a) $\cos(-150^\circ)$
- b) $\sin \frac{7\pi}{6}$
- c) $\tan 330^\circ$

$$\cos(-150^\circ) = \cos(150^\circ) = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{7\pi}{6} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 330^\circ = \tan(360^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$





تدرب: التمارين الموضوعية

ظل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

(a) (b)

1. إذا كانت $\sin \theta = 0.2$ فإن $\sin(\pi + \theta) = 0.2$

(a) (b)

2. إذا كانت $\cos \theta = \frac{2}{3}$ فإن $\sec(\pi + \theta) = -\frac{3}{2}$

(a) (b)

3. إذا كانت $\tan \theta = 3$ فإن $\cot(\pi + \theta) = 3$

(a) (b)

4. إذا كانت $\sin \theta = \frac{1}{5}$ فإن $\csc(\pi + \theta) = -5$

(a) (b)

5. إذا كانت $\cos x = \frac{1}{2}$ فإن $x = \frac{\pi}{3}$

(a) (b)

6. إذا كانت $x = \frac{\pi}{6}$ فإن $\sin x = \frac{1}{2}$

اختر الإجابة الصحيحة

(a) 315°

(b) 60°

(c) 45°

(d) 135°

1. الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها تختلف عن الزوايا التالية هي

(a) 45°

(b) 225°

(c) 135°

(d) 330°

2. الزاوية التي في الوضع القياسي وضلعها النهائي يمر بالنقطة المثلثية $M(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ هي

3. إذا كانت $\cos x$ سالبة و $\sin x$ موجبة فإن الضلع النهائي للزاوية x يقع في الربع

(a) الأول

(b) الثاني

(c) الثالث

(d) الرابع





1. أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة

a) $\sin 150^\circ$

$$= \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

b) $\tan(-225^\circ)$

$$= \tan(135^\circ) = \tan(180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$

c) $\cos(-135^\circ)$

$$= \cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

d) $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

$$= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e) $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

$$= -\sin \frac{2\pi}{3} = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

f) $\tan\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

g) $\sin 330^\circ$

$$= \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

h) $\csc 135^\circ$

$$= \frac{1}{\sin 135^\circ} = \frac{1}{\sin(180^\circ - 45^\circ)} = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

i) $\sec\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

$$= \frac{1}{\cos\frac{7\pi}{4}} = \frac{1}{\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$



بسط التعبيرات التالية لأبسط صورة

Q $\cos(\pi - \theta) - \cos(-\theta) + \sin(\pi + \theta) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$$= -\cos\theta - \cos\theta + (-\sin\theta) + \sin\theta$$

$$= -2\cos\theta$$

Q $\cos(\pi + \theta) + \cos\theta - \sin(\theta - \pi) - \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

$$= -\cos\theta + \cos\theta - (-\sin\theta) - \cos\theta$$

$$= -\cos\theta + \cos\theta + \sin\theta - \cos\theta$$

$$= \sin\theta - \cos\theta$$

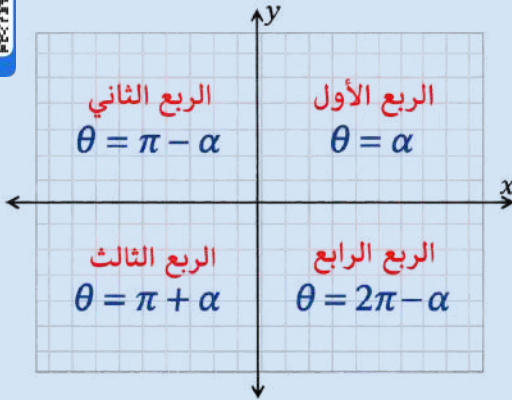
Q $\sec(\pi - \theta) - \csc\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \sin\theta$

$$= -\sec\theta - \sec\theta + (-\sin\theta) + \sin\theta$$

$$= -2\sec\theta$$



حل المعادلات المثلثية (3 - 6)

تذكر (2) زاوية الإسناد α :

تذكر (1) إشارات النسب المثلثية في دائرة الوحدة:

مثال (1) أوجد مجموعة حل المعادلة $2 \sin \theta - 1 = 0$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$

$$2 \sin \theta - 1 = 0$$

$$2 \sin \theta = 1 \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\sin \alpha = \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2} > 0$$

 θ تقع في الربع الثاني

$$\theta = \pi - \alpha$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \in [0, 2\pi)$$

 θ تقع في الربع الأول

$$\theta = \alpha = \frac{\pi}{6} \in [0, 2\pi)$$

$$S.S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

تحقق من فهمك (1) أوجد مجموعة حل ما يلي حيث $\theta \in [0, 2\pi)$

Q $2 \cos \theta - \sqrt{2} = 0$

$$2 \cos \theta = \sqrt{2} \Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\cos \alpha = \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

θ تقع في الربع الرابع

$$\theta = 2\pi - \alpha$$

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \in [0, 2\pi)$$

θ تقع في الربع الأول

$$\theta = \alpha = \frac{\pi}{4} \in [0, 2\pi)$$

$$S.S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

Q $2 \sin \theta + \sqrt{3} = 0$

$$2 \sin \theta = -\sqrt{3} \Rightarrow \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\sin \alpha = \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$$

θ تقع في الربع الرابع

$$\theta = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \in [0, 2\pi)$$

θ تقع في الربع الثالث

$$\theta = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \in [0, 2\pi)$$

$$S.S = \left\{ \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$$



مثال (2) أوجد مجموعة حل المعادلة $2 \cos \theta + \sqrt{3} = 0$ حيث $0 \leq \theta < 2\pi$

$$2 \cos \theta + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 2 \cos \theta = -\sqrt{3} \Rightarrow \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\cos \alpha = \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\cos \theta < 0$$

θ تقع في الربع الثالث

$$\theta = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \in [0, 2\pi)$$

θ تقع في الثاني

$$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \in [0, 2\pi)$$

$$S.S = \left\{ \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right\}$$

تحقق من فهمك (2) أوجد مجموعة حل المعادلة $2 \cos \theta + 1 = 0$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$

$$2 \cos \theta + 1 = 0 \Rightarrow 2 \cos \theta = -1 \Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\cos \alpha = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \theta < 0$$

θ تقع في الربع الثالث

$$\theta = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \in [0, 2\pi)$$

θ تقع في الثاني

$$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \in [0, 2\pi)$$

$$S.S = \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$$



مثال (3) أوجد مجموعة حل المعادلة $\sqrt{2} \csc \theta + 2 = 0$ حيث $0 \leq \theta < 2\pi$

$$\sqrt{2} \csc \theta + 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{2} \csc \theta = -2 \Rightarrow \csc \theta = -\sqrt{2} \Rightarrow \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\sin \alpha = \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \theta < 0$$

θ تقع في الربع الرابع

$$\theta = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \in [0, 2\pi)$$

θ تقع في الثالث

$$\theta = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \in [0, 2\pi)$$

$$S.S = \left\{ \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

تحقق من فهمك (3) أوجد مجموعة حل المعادلة $\sec \theta - 2 = 0$ حيث $0 \leq \theta < 2\pi$

$$\sec \theta - 2 = 0 \Rightarrow \sec \theta = 2 \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\cos \alpha = \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \theta > 0$$

θ تقع في الربع الرابع

$$\theta = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \in [0, 2\pi)$$

θ تقع في الربع الأول

$$\theta = \alpha = \frac{\pi}{3} \in [0, 2\pi)$$

$$S.S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$$

معلم الكويت
صِفْوَه مِي كَوِيَت



مثال (4) أوجد مجموعة حل المعادلة $\tan \theta + \sqrt{3} = 0$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$

$$\tan \theta + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan \theta = -\sqrt{3} < 0$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\tan \alpha = |-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

$$\alpha = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\tan \theta < 0$$

θ تقع في الربع الرابع

$$\theta = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \in [0, 2\pi)$$

θ تقع في الثاني

$$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \in [0, 2\pi)$$

$$S.S = \left\{ \frac{5\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\}$$

تحقق من فهمك (4) أوجد مجموعة حل كل مما يلي حيث $\theta \in [0, 2\pi)$

❶ $\sqrt{3} \tan \theta + 1 = 0$

$$\sqrt{3} \tan \theta = -1 \Rightarrow \tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\tan \alpha = \left| -\frac{1}{\sqrt{3}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\tan \theta < 0$$

θ تقع في الربع الرابع

$$\theta = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \in [0, 2\pi)$$

θ تقع في الثاني

$$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \in [0, 2\pi)$$

$$S.S = \left\{ \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$$

❷ $\cot \theta - 1 = 0$

$$\cot \theta = 1 > 0 \Rightarrow \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} = 1 > 0$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\tan \alpha = |1| = 1$$

$$\alpha = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan \theta > 0$$

θ تقع في الربع الثالث

$$\theta = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \in [0, 2\pi)$$

θ تقع في الربع الأول

$$\theta = \alpha = \frac{\pi}{4} \in [0, 2\pi)$$

$$S.S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$$



تدرب: التمارين الموضوعية

ظل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

(a) (b)

1. إذا كانت $\sin x = \sqrt{3}$ فإن حل المعادلة يساوي $\emptyset$

(a) (b)

2. إذا كانت $\cos x = \frac{1}{2}$ فإن $x = \frac{\pi}{3}$

(a) (b)

3. إذا كانت $x = \frac{\pi}{6}$ فإن $\sin x = \frac{1}{2}$

اختر الإجابة الصحيحة:

(a) 30°

(b) 120°

(c) 135°

(d) 150°

4. إذا كانت $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$ وكانت $2 \sin \theta = 1$ فإن قياس الزاوية θ بالقياس الستيني تساوي

(a) 60°

(b) 120°

(c) 300°

(d) 315°

5. إذا كانت $\pi \leq \theta < 2\pi$ وكانت $2 \cos \theta - 1 = 0$ فإن قياس الزاوية θ بالقياس الستيني تساوي

(a) 30°

(b) 150°

(c) 240°

(d) 45°

6. حل المعادلة $\sqrt{3} \tan \theta - 1 = 0$ حيث $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ بالقياس الستيني تساوي





$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

بفرض α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\cos \alpha = \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos \theta < 0$$

θ تقع في الربع الثالث

$$\theta = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \in [0, 2\pi)$$

θ تقع في الربع الثاني

$$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \in [0, 2\pi)$$

$$S.S = \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$$

$$2 \sin x + \sqrt{3} = 0$$

$$2 \sin x = -\sqrt{3}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$$\sin \alpha = \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin x < 0$$

x تقع في الربع الرابع

$$x = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \in [0, 2\pi)$$

x تقع في الربع الثالث

$$x = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \in [0, 2\pi)$$

$$S.S = \left\{ \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$$

❶ $\tan \theta = -1$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\tan \alpha = |-1| = 1$$

$$\alpha = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan \theta < 0$$

θ تقع في الربع الرابع

$$\theta = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \in [0, 2\pi)$$

θ تقع في الربع الثاني

$$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \in [0, 2\pi)$$

$$S.S = \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

❷ $\cot \theta = \sqrt{3} \Rightarrow \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\tan \alpha = \left| \frac{\sqrt{3}}{3} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\tan \theta > 0$$

θ تقع في الربع الثالث

$$\theta = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \in [0, 2\pi)$$

θ تقع في الربع الأول

$$\theta = \alpha = \frac{\pi}{6} \in [0, 2\pi)$$

$$S.S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right\}$$

❸ $2 \sin \theta + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow 2 \sin \theta = -\sqrt{2} \Rightarrow \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\sin \alpha = \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \theta < 0$$

θ تقع في الربع الرابع

$$\theta = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \in [0, 2\pi)$$

θ تقع في الربع الثالث

$$\theta = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \in [0, 2\pi)$$

$$S.S = \left\{ \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

❹ $\csc \theta + 2 = 2$

$$\csc \theta = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sin \theta} = 0$$

وهذا مستحيل

$$\therefore S.S = \emptyset$$

(1 – 4) المنطق والتقارير



الاستقراء والاستنتاج

الاستقراء	الاستنتاج
يبدأ بأمثلة	يبدأ بقاعدة عامة
النتيجة متوقعة أو ممكنة	النتيجة مؤكدة منطقية
من الخاص إلى العام	من العام إلى الخاص

مثال (1) في المواقف التالية حدد أيًا منها استقراء وأيًا منها استنتاج

1. الحديد والنحاس والألمنيوم تتمدد بالحرارة إذا المعادن تتمدد بالحرارة
(استقراء)
2. جميع الطيور لها مخالب طائر إذا العصفور له أجنحة
(استنتاج)
3. جميع الأعداد التي رقم خاتمتها الآحاد لها 0 أو 5 تقبل القسمة على 5 والعدد 75 آحاده 5 إذا العدد 75 يقبل القسمة على 5
(استنتاج)
4. الأعداد 2,4,6,8 كلها يقبل منها القسمة على 2 إذا الأعداد 2,4,6,8 هي أعداد زوجية
(استقراء)
5. كل من يلتزم بقوانين المرور يقل تعرضه للحوادث وأحمد يلتزم بقوانين المرور إذا أحمد أقل عرضة للحوادث
(استقراء)

تحقق من فهمك (1) في المواقف التالية حدد أيًا منها استقراء وأيًا منها استنتاج

1. جميع الأعداد الفردية لا تقبل القسمة على 2 والعدد 39 هو عدد فردي إذا العدد 39 لا يقبل القسمة على 2
(استنتاج)
2. إذا كان مجموع قياسات زوايا المثلث 180° وقياس زاويتين فيه 30° و 60° إذا قياس الزاوية الثالثة تساوي 90°
(استنتاج)
3. إذا كانت السماء مليئة بالغيوم السوداء فإن المطر يتساقط والسماء اليوم مليئة بالغيوم السوداء فإننا نتوقع سقوط الأمطار
(استقراء)
4. إذا علمت أن $1^2 = 1$ و $2^2 = 4$ و $3^2 = 9$ إذا مربع أي عدد هو ضرب العدد في نفسه
(استقراء)
5. جميع المتعلمين المجتهدين نجحوا وأنور مجتهد إذا أنور ناجح
(استنتاج)
6. لدراسة حالة الطقس يعتمد المختصون على أمور كثيرة مثل سرعة الرياح واتجاهها ومقدار الضغط الجوي ومناطق الضغط الجوي إذا يمكننا توقع حالة الطقس في أي يوم من الأيام
(استقراء)

المنطق: هو أسلوب منظم للتفكير يساعد على الوصول إلى نتائج صحيحة اعتمادًا على معلومات واضحة
العبرة المنطقية: هي التقرير وهي أيضًا القضية المنطقية

في المنطق الرياضي فتقسم الجمل إلى قسمين هما
• **جملة خبرية:** هي الجملة التي تحمل لنا خبرًا ما ويمكن تحديد صحتها أو خطئها
• **جملة غير خبرية:** هي الجملة التي لا تحمل لنا خبرًا ما ولا يمكن الحكم على صحتها كالأمر والتعجب



مثال (2) بالنظر إلى خريطة دولة الكويت اقرأ الجمل التالية ثم حدد نوع هذه الجمل أيا
منها يمكن الحكم عليها بأنها جملة خبرية صحيحة أو خاطئة وأيا منها استفهامية وأيا منها
تعجب أو أمر

- مدينة الكويت هي عاصمة دولة الكويت ← **عبارة خبرية صحيحة**
- نهر النيل يمر بأرض الكويت ← **عبارة خبرية خاطئة**
- ما أجمل الكويت! ← **تعجب**
- هل زرت جزيرة فيلكا؟ ← **استفهام**
- اذهب إلى البحر مساءً ← **أمر**

تحقق من فهمك (2) حدد نوع كل جملة أهي جملة خبرية وأياها غير خبرية

- الشتاء فصل من فصول السنة ← **جملة خبرية صحيحة**
- الفروانية عاصمة الكويت ← **جملة خبرية غير صحيحة**
- ما أجمل السماء! ← **جملة غير خبرية (تعجب)**
- اكتب الواجب يا أحمد ← **جملة غير خبرية (أمر)**
- هل المثلث متطابق الأضلاع متطابق الزوايا؟ ← **جملة غير خبرية (سؤال)**



العبارة البسيطة (التقرير)

هي جملة خبرية ذات معنى تحمل خبرًا ويمكن الحكم بأنها صائبة *True* أو خاطئة *False* وليس كلاهما معًا
العبارة الصائبة: عبارة تحمل خبرًا صادقًا، نرسم لها بالرمز *T* أو *True*
العبارة الخاطئة: عبارة تحمل خبرًا غير صادق، نرسم لها بالرمز *F* أو *False*

مثال (3) وضح قيمة الصحة لكل من العبارات (التقارير التالية):

- العدد 32 يقبل القسمة على 4 ← T
- $\sqrt{16} = -4$ ← F
- العدد 18 من مضاعفات العدد 3 ← T
- الشكل الرباعي يسمى مربعًا ← F
- 5 عدد فردي ← T
- $2 \times 10 \neq 20$ ← F

تحقق من فهمك (3) وضح قيمة الصحة لكل من العبارات (التقارير التالية):

- $3 + 4 > 5$ ← T
- العدد 5 من مضاعفات العدد 10 ← T
- للمعادلة $x^2 - 3x + 2 = 0$ جذران حقيقيان مختلفان ← T
- تونس دولة آسيوية ← F
- مجموع قياسات زوايا الشكل الخماسي 180° ← F
- عدد حروف كلمة ثريا هو أربعة حروف ← T
- استاذ جابر يقع في منطقة جابر الأحمد ← F





تدرب: التمارين الموضوعية

ظل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

- | | |
|-----|-----|
| (a) | (b) |
| (a) | (b) |
| (a) | (b) |
| (a) | (b) |
| (a) | (b) |
| (a) | (b) |
| (a) | (b) |
| (a) | (b) |
| (a) | (b) |

1. الجملة خبرية يمكن الحكم عليها بالصواب أو الخطأ
2. الجملة الاستفهامية تُعد عبارة منطقية
3. الاستنتاج يبدأ بأُمثلة متعددة
4. اكتب الدرس هي "جملة خبرية"
5. لا تذهب إلى الصحراء مساءً هي "جملة خبرية"
6. دولة الكويت تقع على الخليج العربي "جملة خبرية"
7. هبة درست جيداً "جملة خبرية"
8. هل المثلث المتطابق الضلعين متطابق الزوايا؟ "جملة خبرية"
9. $3 + 4 = 7$ هي عبارة صحيحة
10. ما الدول التي تشترك في الحدود مع المملكة العربية السعودية؟ "جملة خبرية"

في البنود من (1-7) ظل اختر الإجابة الصحيحة

- (a) ما أجمل السماء!
(c) عدد أولي 7

- (b) هل حضرت الدرس؟
(d) افتح الباب

- (a) الكويت دولة عربية
(c) $2 + 2 = 4$

12. أي من الجمل التالية ليست عبارة منطقية
(b) ادرس جيداً
(d) $5 > 9$

- (a) استخدام قانون لإيجاد نتيجة
(c) حل معادلة

- (b) ملاحظة نمط والوصول إلى قاعدة
(d) رسم شكل هندسي

- (a) توقع نتيجة إحدى المباريات
(c) تطبيق قاعدة عامة لإيجاد نتيجة

14. أي مما يلي يمثل استنتاجاً
(b) التنبؤ بحالة الطقس
(d) تضمين الإجابة

- (a) كل المربعات هي مستطيلة
(b) العدد 64 هو مربع كامل

15. أي مما يلي يمثل استنتاجاً

- (c) لاحظت أن الحديد والنحاس يتمددان بالحرارة فاستنتجت أن المعادن تتمدد بالحرارة
(d) جميع الأعداد الفردية لا تقبل القسمة على 2 والعدد 39 عدد فردي فإن العدد 39 لا يقبل القسمة على 2

- (a) لاحظ المتعلم أن كل اختبارات الرياضيات تحتاج إلى تركيز عال
- (b) شاهدت عدة طيور تطير فاستنتجت أن الطيور تطير
- (c) جميع المتعلمين المجتهدين ناجحون وخالد مجتهد إذًا خالد ناجح
- (d) الماء يغلي عند 100° مئوية



أسئلة المقال:

حدد نوع الجملة خبرية أو غير خبرية:

م	الجملة	نوع الجملة
1	الشمس تشرق من المشرق	خبرية
2	هل تحب القراءة؟	غير خبرية
3	اجتهد في دراستك	غير خبرية
4	ما أجمل البحر!	غير خبرية
5	$12 < 5$	خبرية
6	الربيع فصل من فصول السنة	خبرية
7	ما اسم مدرستك؟	غير خبرية
8	التدخين ضار جداً بالصحة	خبرية
9	الهندسة علم من علوم الرياضيات	خبرية
10	اكتبي الدرس يا حصة	غير خبرية
11	العدد 55 أكبر من العدد 9	خبرية
12	$3 \times 3 \times 3 = 27$	خبرية

وضح قيمة الصح

م	العبارة	T, F
1	الإسلام دين محبة	T
2	$5 + 7 = 9$	F
3	يتجه المسلمون في دولة الكويت إلى المشرق لأداء الصلاة	T
4	12 عدد أولي	F
5	الشمس تشرق من الغرب	F
6	العدد 10 يقبل القسمة على 2 و 5	T
7	عدد حروف كلمة عبدالرحمن 9 حروف	F

(2 - 4) أدوات الربط



العبرة البسيطة (التقرير البسيط - القضية الأولية - القضية المستقلة) :

هي جملة خبرية ذات معنى تحمل خبراً واحداً

العبرة المركبة (التقرير المركب) :

هي جملة خبرية تشتمل على أكثر من خبر واحد

أدوات الربط المنطقية:

1- أداة النفي

2- أداة الوصل "و"

3- أداة الفصل "أو"

4- أداة الربط الشرطية "إذا كان ... فإن ..."

p	$\sim p$	$\sim (\sim p)$
T	F	T
F	T	F

1- أداة النفي $\sim$: نستخدم فيها الكلمات: ليس , لا , ما , ...

فإذا كان لدينا العبرة p فإن نفي هذه العبرة هو ليس p ونرمز لها بالرمز $\sim p$
أداة النفي هي من الأدوات الأحادية لأنها تتعامل مع عبارة واحدة
جدول الصحة (الحقيقة) لعبارة النفي:

مثال (1):

في الجدول التالي عبارات (تقارير) قد تكون صحيحة T وقد تكون خاطئة F اكتب نفي كل منها

العبرة (التقرير) p	نفي العبرة $\sim p$
عيون أحمد زرقاء	عيون أحمد ليست زرقاء
العدد 7 يقبل القسمة على 2	العدد 7 لا يقبل القسمة على 2
$3 + 4 < 10$	$3 + 4 \geq 10$
$2 \times 3 \neq 5$	$2 \times 3 = 5$
$2 \in \{3, 4, 5\}$	$2 \notin \{3, 4, 5\}$

تحقق من فهمك (1):

في الجدول التالي عبارات (تقارير) قد تكون صحيحة T وقد تكون خاطئة F اكتب نفي كل منها

العبرة (التقرير) p	نفي العبرة $\sim p$
منهج الرياضيات مشوق في دراسته	منهج الرياضيات ليس مشوقاً في دراسته
العدد 2 عامل من عوامل العدد 5	العدد 2 ليس عاملاً من عوامل العدد 5
$x \in \mathbb{R}$	$x \notin \mathbb{R}$
خالد يدرس الطب	خالد لا يدرس الطب



p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

2- أداة الوصل "و" :

- العبرة المركبة (p و q) ترمز لها بالرمز $p \wedge q$ تكون صحيحة إذا وفقط إذا كانت العبارتان p و q صحيحتان معاً
- أداة الوصل "و" هي من أدوات الربط الثنائية لأنها تربط بين عبارتين

مثال (2) بفرض العبارات البسيطة التالية:

$$p: 4 > 3$$

q : عدد زوجي

r : المنامة عاصمة البحرين

اكتب العبارات المركبة التالية: $r \wedge q$, $p \wedge r$, $p \wedge q$

p $4 > 3$	q 7 عدد زوجي	r المنامة عاصمة البحرين	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$r \wedge q$
عبارة صحيحة (T)	عبارة خاطئة (F)	عبارة صحيحة (T)	F	T	F

تحقق من فهمك (2) بفرض العبارات البسيطة التالية:

$$p: 2 > 3$$

q : عدد زوجي

r : الدوحة عاصمة قطر

اكتب العبارات المركبة التالية: $r \wedge q$, $p \wedge r$, $p \wedge q$

كۆن جدول الصحة للعبارة: $\sim (p \wedge q)$

p $2 > 3$	q 6 عدد زوجي	r الدوحة عاصمة قطر	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$r \wedge q$
عبارة خاطئة (F)	عبارة صحيحة (T)	عبارة صحيحة (T)	F	F	T

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T



p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

3- أداة الفصل "أو":

- العبرة المركبة (p أو q) نرمر لها بالرمز $p \vee q$ تكون صحيحة إذا وفقط إذا كان أحد العبارتين p أو q صحيحة
- أداة الفصل "أو" هي من أدوات الربط الثنائية لأنها تربط بين عبارتين

مثال(3) كؤن جدول الصحة للعبارات التالية:

a) $(p \vee \sim q)$

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

b) $(p \wedge q) \vee \sim q$

p	q	$p \wedge q$	$\sim q$	$(p \wedge q) \vee \sim q$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	F	F
F	F	F	T	T

c) $(p \vee q) \wedge \sim q$

p	q	$p \vee q$	$\sim q$	$(p \vee q) \wedge \sim q$
T	T	T	F	F
T	F	T	T	T
F	T	T	F	F
F	F	F	T	F

تحقق من فهمك (3) كَوْن جدول الصحة لكل من العبارات التالية:

a) $(p \wedge q) \vee q$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	F	F

b) $(p \vee q) \wedge q$

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge q$
T	T	T	T
T	F	T	F
F	T	T	T
F	F	F	F

c) $(p \vee q) \wedge (p \wedge q)$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \wedge (p \wedge q)$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	F	F

d) $\sim (p \wedge q) \vee \sim q$

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim q$	$\sim (p \wedge q) \vee \sim q$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	F	T	T	T

e) $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \vee (p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	F	T

f) $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	T	T	T
F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	F



p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

4- أداة الربط الشرطية "إذا كان ... فإن ..."

العبارة "إذا كان p فإن q " نسميها عبارة شرطية ونرمز لها بالرمز $p \rightarrow q$
العبارة الأولى p نسميها شرط
العبارة الثانية q نسميها جواب الشرط

مثال (4) وعد عبدالله ابنه حمد قائلاً: "إذا نجحت في الامتحان فسأشتري لك هدية" متى يكون عبدالله صادقاً في كلامه؟ ومتى يكون عبدالله غير صادق؟

بفرض:

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

نجح حمد في الامتحان: p
اشترى عبدالله لحمد هدية: q
فإن العبارة الشرطية هي: $p \rightarrow q$
يكون عبدالله غير صادق في كلامه فقط عندما ينجح الابن ولم يحضر له الهدية، فيما عدا ذلك يكون صادق

تحقق من فهمك (4) وعد محمد ابنه قائلاً:

"إذا حصلت على زيادة في راتبي فسأشتري لك سيارة جديدة"
متى يكون محمد صادقاً صائباً في كلامه؟ ومتى يكون غير صادق خاطئاً؟ وضع ذلك في جدول الصحة

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

بفرض

حصلت الابنة على زيادة في راتبي: p
اشترى محمد لها سيارة جديدة: q
إذن العبارة الشرطية هي $p \rightarrow q$
يكون محمد غير صادق في كلامه عندما يحصل على زيادة ولم يشتري الهدية
فيما عدا ذلك يكون صادق

مثال (5) كۆن جدول الصحة لكل من العبارات التالية:

a) $q \rightarrow p$

p	q	$q \rightarrow p$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

b) $\sim q \rightarrow \sim p$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

تحقق من فهمك (5) كۆن جدول الصحة لكل من العبارات التالية:

a) $(p \wedge q) \rightarrow q$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow q$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

b) $(p \vee q) \rightarrow q$

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow q$
T	T	T	T
T	F	T	F
F	T	T	T
F	F	F	T

c) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q)$

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

d) $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow q)$

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

e) $p \rightarrow (p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \rightarrow (p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	F
T	F	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

f) $(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T

ملخص أدوات الربط المنطقية:							
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
T	T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	T	F	T
F	T	F	T	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T	T	T



p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

5- أداة الربط الشرطية المزدوجة $p \leftrightarrow q$
إذا كان p فإن q و إذا كان q فإن p

مثال (6): ما قيم الصحة للتقرير المركب $p \leftrightarrow q$ ؟

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q)$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

تحقق من فهمك (6) ما قيم الصحة للتقرير المركب $p \leftrightarrow \sim q$ ؟

p	q	$\sim q$	$p \leftrightarrow \sim q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	T	F

مثال (7) كؤن جدول الصحة للعبارة التالية: $\sim (p \wedge q) \vee \sim (q \leftrightarrow p)$

p	q	$p \wedge q$	$q \leftrightarrow p$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim (q \leftrightarrow p)$	$\sim (p \wedge q) \vee \sim (q \leftrightarrow p)$
T	T	T	T	F	F	F
T	F	F	F	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T
F	F	F	T	T	F	T

ق كؤن جدول الصحة للعبارة التالية: $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \rightarrow q$	$(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T



تدرب: التمارين الموضوعية

ظل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

(a) (b)

1. العبارة "العدد 3 عدد أولي" هي عبارة بسيطة

(a) (b)

2. العبارة "العدد 2 عدد أولي وزوجي" هي عبارة بسيطة

(a) (b)

3. عدد الإمكانيات الممكنة للعبارة البسيطة تساوي 2

(a) (b)

4. عدد الإمكانيات الممكنة للعبارة المركبة من عبارتين أوليتين يساوي 8

(a) (b)

5. إذا كانت p عبارة بسيطة فإن نفي p هي عبارة بسيطة أيضاً

(a) (b)

6. لأي عبارتين p و q يكون $(p \wedge q)$ صحيحاً إذا كان كل من p و q صحيحاً

(a) (b)

7. لأي عبارتين p و q يكون $(p \vee q)$ صحيحاً إذا كان كل من p و q صحيحاً

(a) (b)

8. لأي عبارتين p و q يكون $(p \rightarrow q)$ صحيحاً إذا كان كل من p و q خاطئاً

(a) (b)

9. لأي عبارتين p و q يكون $(p \leftrightarrow q)$ خاطئاً إذا كان p صحيحاً و q خاطئاً

(a) (b)

10. نفي العبارة " $3 + 5 < 9$ " هو " $3 + 5 \geq 9$ "

(a) (b)

11. نفي العبارة " $2 \times 4 = 8$ " هو " $2 \times 4 \neq 8$ "

(a) (b)

12. في نفي العبارة "العدد 3 هو عدد فردي" هو "العدد 3 ليس عدداً فردياً"

(a) (b)

13. في نفي العبارة "الرياض عاصمة المملكة العربية السعودية" هو "الرياض ليست عاصمة المملكة العربية السعودية"

(a) (b)

14. القاهرة عاصمة جمهورية مصر العربية أو لندن عاصمة فرنسا

(a) (b)

15. الدولة عاصمة قطر و مسقط عاصمة عمان

(a) (b)

16. إذا كان $2 + 3 = 5$ فإن $2^3 = 8$

(a) (b)

17. إذا كان المثلث قائم الزاوية فإن مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين

(a) (b)

18. يتشابه المثلثان إذا تطابقت زواياهما المتناظرة أو تناسبت أطوال أضلعهما المتناظرة

(a) (b)

19. إذا كانت p صحيحة و q صحيحة و r خاطئة فتكون العبارة $(p \rightarrow q) \vee r$ صحيحة

في البنود من (1-6) ظلل اختر الإجابة الصحيحة:

1. العبارة $p \rightarrow \sim p$ تكافئ:

- (a) $\sim p \wedge p$ (b) $\sim p$ (c) $\sim p \rightarrow p$ (d) $p \rightarrow p$

2. العبارة: $p \rightarrow p$

- (a) صحيحة دائماً (b) صحيحة مرة واحدة
(c) خاطئة دائماً (d) خاطئة مرة واحدة دائماً

3. أي من العبارات التالية صحيحة؟

- (a) الكويت في آسيا إذا وفقط إذا $35 \div 7 = 8$
(b) إذا كانت الكويت تقع في آسيا فإن $35 \div 7 = 8$
(c) $\frac{2}{5} < \frac{2}{3}$ و $\frac{3}{2} < \frac{5}{2}$
(d) ليس أبداً مما سبق

4. أي من العبارات التالية صحيحة؟

- (a) لندن ليست عاصمة أوروبية أو الموز من الفاكهة
(b) لندن عاصمة أوروبية وألمانيا في أفريقي
(c) ألمانيا ليست في أفريقيا ولندن ليست عاصمة أوروبية
(d) الموز ليس من الفاكهة أو لندن ليست عاصمة أوروبية

5. إن العبارة الخاطئة فيما يلي هي:

- (a) 16 من مضاعفات العدد 4 أو 16 عدد أولي
(b) $\frac{3}{8} < \frac{2}{5}$ و $0 < \pi - 3$
(c) إذا كان $3 \times 3 = 9$ فإن 9 من عوامل 3
(d) $(-8)^{\frac{2}{3}} = -4$ إذا وفقط إذا $3 \times 6 = 21$



كُون جدول الصحة للعبارات التالية:

a) $(p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F

b) $p \vee (p \wedge q)$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	F	F

c) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	F	T

d) $(\sim p \vee \sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

e) $(p \wedge \sim p)$

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
T	F	F
F	T	F

$$f) \sim (p \rightarrow q)$$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim (p \rightarrow q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	F

$$g) (p \vee \sim p)$$

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

$$h) (p \wedge q) \leftrightarrow (q \rightarrow q)$$

p	q	$p \wedge q$	$q \rightarrow q$	$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \rightarrow q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	F
F	F	F	T	F

$$i) (\sim p \wedge q) \rightarrow (q \vee q)$$

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$q \vee q$	$(\sim p \wedge q) \rightarrow (q \vee q)$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T

$$j) \sim [(p \wedge q) \leftrightarrow (q \rightarrow q)]$$

p	q	$p \wedge q$	$q \rightarrow q$	$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \rightarrow q)$	$\sim [(p \wedge q) \leftrightarrow (q \rightarrow q)]$
T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	T
F	T	F	T	F	T
F	F	F	T	F	T

Σ رمز المجموع (3 - 4)

تعريف: رمز المجموع Σ

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, n \in \mathbb{Z}^+$$

ونقرأ مجموع a_k من $k = 1$ إلى $k = n$ حيث n عدد صحيح موجب.

ويسمى $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

مفكوك المجموع $\sum_{k=1}^n a_k$

نلاحظ أن عدد حدود مفكوك $\sum_{k=1}^n a_k$ هو: n



مثال (1)

عبر باستخدام رمز المجموع Σ عن $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20}$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20} = \sum_{k=1}^{20} a_k$$

قاعدة:

$$\sum_{k=i}^n a_k = a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + \dots + a_n, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

عدد حدود المفكوك يساوي $(n - i + 1)$

مثال (2)

عبر باستخدام رمز المجموع Σ عن $a_5 + a_6 + a_7 + \dots + a_{15}$

$$a_5 + a_6 + a_7 + \dots + a_{15} = \sum_{k=5}^{15} a_k$$

عدد الحدود $15 - 5 + 1 = 11$

تحقق من فهمك (1) عبر باستخدام رمز المجموع Σ عن $5 + 6 + 7 + 8 + \dots + 45$

$$5 + 6 + 7 + 8 + \dots + 45 = \sum_{k=5}^{45} k$$

عدد الحدود $45 - 5 + 1 = 41$

مثال (3) اكتب مفكوك $\sum_{k=10}^{40} k$ ثم أوجد عدد حدود المفكوك.

$$\sum_{k=10}^{40} k = 10 + 11 + 12 + \dots + 40$$

عدد الحدود $40 - 10 + 1 = 31$

مثال (4) اكتب مفكوك $\sum_{k=1}^{50} k^2$

$$\sum_{k=1}^{50} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 50^2$$

تحقق من فهمك (2) اكتب مفكوك $\sum_{k=1}^{10} k^3$

$$\sum_{k=1}^{10} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + 10^3$$

مثال (5) اكتب مفكوك $\sum_{k=1}^{50} (k + k^2)$

$$\sum_{k=1}^{50} (k + k^2) = (1 + 1^2) + (2 + 2^2) + (3 + 3^2) + (4 + 4^2) + \dots + (50 + 50^2)$$

حل آخر:

$$\sum_{k=1}^{50} (k + k^2) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 50) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + 50^2)$$

نتيجة $\sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k, n \in \mathbb{Z}^+$

معلم الكويت
صفوة مكي الكويت

تحقق من فهمك (5) اكتب مفكوك $\sum_{k=1}^8 (2k + 1)$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^8 (2k + 1) &= (2(1) + 1) + (2(2) + 1) + (2(3) + 1) + \cdots + (2(8) + 1) \\ &= 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17\end{aligned}$$

ويمكن كتابة هذا المفكوك بطريقة أخرى:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^8 (2k + 1) &= 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 8) + (1 + 1 + 1 + \cdots + 1) \\ &= 2 \sum_{k=1}^8 k + \sum_{k=1}^8 1\end{aligned}$$

مثال (6): أوجد قيمة $\sum_{k=1}^3 \left(k + \frac{1}{k}\right)$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^3 \left(k + \frac{1}{k}\right) &= \left(1 + \frac{1}{1}\right) + \left(2 + \frac{1}{2}\right) + \left(3 + \frac{1}{3}\right) \\ &= 1 + 1 + 2 + 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{47}{6}\end{aligned}$$

حل آخر:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^3 \left(k + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^3 k + \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k} \\ &= (1 + 2 + 3) + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \\ &= 6 + 1 + \frac{5}{6} = \frac{47}{6} = 7\frac{5}{6}\end{aligned}$$

تحقق من فهمك (4) اكتب مفكوك $\sum_{k=1}^4 \left(3 + \frac{1}{k}\right)$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^4 \left(3 + \frac{1}{k}\right) &= \left(3 + \frac{1}{1}\right) + \left(3 + \frac{1}{2}\right) + \left(3 + \frac{1}{3}\right) + \left(3 + \frac{1}{4}\right) \\ &= 3 + 1 + 3 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{3} + 3 + \frac{1}{4} \\ &= 12 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{169}{12}\end{aligned}$$

حل آخر:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^4 \left(3 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^4 3 + \sum_{k=1}^4 \frac{1}{k} \\ &= (3 + 3 + 3 + 3) + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{169}{12}\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n c k = c \sum_{k=1}^n k, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\sum_{k=1}^n c = n \times c, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\sum_{k=i}^n c = c(n - i + 1)$$

مثال (7) أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{10} 3k$

$$\sum_{k=1}^{10} 3k = 3 \sum_{k=1}^{10} k = 3(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 10) = 165$$

تحقق من فهمك (5) اكتب مفكوك $\sum_{k=1}^7 2k$

$$\sum_{k=1}^7 2k = 2 \sum_{k=1}^7 k = 2(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 7) = 56$$

مثال (8) أوجد قيمة $\sum_{k=1}^5 (5k - 3)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 (5k - 3) &= \sum_{k=1}^5 5k - \sum_{k=1}^5 3 \\ &= 5 \sum_{k=1}^5 k - \sum_{k=1}^5 3 \\ &= 5(1 + 2 + 3 + 4 + 5) - (3 + 3 + 3 + 3 + 3) \\ &= 5(15) - 15 = 60 \end{aligned}$$

تحقق من فهمك (6) اكتب مفكوك $\sum_{k=1}^8 (3k - 5)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 (3k - 5) &= \sum_{k=1}^8 3k - \sum_{k=1}^8 5 \\ &= 3 \sum_{k=1}^8 k - \sum_{k=1}^8 5 \\ &= 3(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) - (5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5) \\ &= 3(36) - 40 = 68 \end{aligned}$$

مثال (9) أوجد قيمة $\sum_{k=4}^8 7$

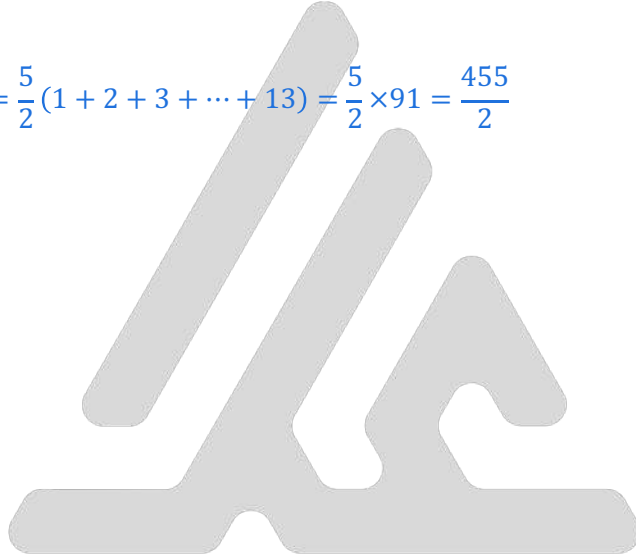
$$\sum_{k=4}^8 7 = 7(8 - 4 + 1) = 7(5) = 35$$

تحقق من فهمك (7) اكتب مفكوك $\sum_{k=2}^6 10$

$$\sum_{k=2}^6 10 = 10(6 - 2 + 1) = 10(5) = 50$$

مثال (10) أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{13} \frac{5}{2}k$

$$\sum_{k=1}^{13} \frac{5}{2}k = \frac{5}{2} \sum_{k=1}^{13} k = \frac{5}{2}(1 + 2 + 3 + \dots + 13) = \frac{5}{2} \times 91 = \frac{455}{2}$$





تدرب - البنود الموضوعية:

ظل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

(a) (b)

$$\sum_{k=0}^3 k^3 = (\sum_{k=0}^3 k)^3 \quad .1$$

(a) (b)

$$\sum_{k=2}^5 10 = 10(10 - 2) \quad .2$$

(a) (b)

$$\sum_{k=0}^5 (k^5) = 16 \quad .3$$

(a) (b)

$$\sum_{k=1}^{10} 3k = 3 \sum_{k=1}^{10} k \quad .4$$

اختر الإجابة الصحيحة:

4. مجموعة حل المعادلة $|x - 3| = |3 - x|$ هي:

(a) $\sum_{k=0}^3 3k$

(b) $\sum_{k=1}^3 k^3$

(c) $\sum_{k=1}^3 3k$

(d) $\sum_{k=0}^3 3k$

(a) 3

(b) 7

(c) 4

(d) 9

4. إذا كانت $\sum_{k=2}^n k = 9$ فإن n تساوي:

(a) $\mathbb{Z}$

(b) (b) 3

(c) (c) 2

(d) (d) 1

4. إذا كانت $\sum_{k=m}^3 k^3 = 36$ فإن m تساوي:

(a) $n - 1$

(b) $n - r$

(c) $n - \sum_{k=1}^n k$

(d) $1 - \sum_{k=1}^n k$

4. المقدار $\sum_{k=1}^n k - (\sum_{k=1}^n (2k - 1))$ يساوي:



1. أوجد قيمة كل من:

a) $\sum_{k=1}^5 (k+1)^2$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 (k+1)^2 &= (1+1)^2 + (2+1)^2 + (3+1)^2 + (4+1)^2 + (5+1)^2 \\ &= 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 90 \end{aligned}$$

b) $\sum_{k=1}^4 (3k-1)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 (3k-1) &= (3(1)-1) + (3(2)-1) + (3(3)-1) + (3(4)-1) \\ &= 2 + 5 + 8 + 11 = 26 \end{aligned}$$

c) $\sum_{k=0}^4 k(k+2)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^4 k(k+2) &= 0(0+2) + 1(1+2) + 2(2+2) + 3(3+2) + 4(4+2) \\ &= 0 + 3 + 8 + 15 + 24 = 50 \end{aligned}$$

2. استخدم الرمز $\sum$ للتعبير عن المجاميع التالية:

a. $1 + 4 + 9 + 16 + \dots + 100 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = \sum_{k=1}^{10} k^2$

b. $(4 \times 2) + (4 \times 3) + (4 \times 4) + \dots + (4 \times 20) = \sum_{k=2}^{20} 4k$

c. $(1 \times 2) + (2 \times 3) + (3 \times 4) + \dots + (24 \times 25) = \sum_{k=1}^{24} k(k+1)$

d. $(5 + 2) + (5 + 2^2) + (5 + 2^3) + \dots + (5 + 2^{100}) = \sum_{k=1}^{100} (5 + 2^k)$

e. $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + 30 = \sum_{k=1}^{15} 2k$

f. $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + 31 = \sum_{k=1}^{15} (2k+1)$

(4 – 4) مقاييس التشتت - الانحراف المعياري

أولاً: المدى



المدى لمجموعة من القيم هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة، ويرمز له بالرمز R
المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة
وفي التوزيعات التكرارية يكون المدى هو الفرق بين الحد الأعلى للفتة الأخيرة والحد الأدنى للفتة الأولى.
المدى = الحد الأعلى للفتة الأخيرة - الحد الأدنى للفتة الأولى

مثال (1): أوجد المدى لكل من:

(a) القيم 32, 31, 24, 21, 18, 24

$$R = 32 - 18 = 14$$

(b) القيم 60, 25, 24, 16, 1, 24

$$R = 60 - 1 = 59$$

(c) التوزيع التكراري:

الفتات	10 –	25 –	40 –	55 –	70 –	85 –
التكرار	4	6	8	5	3	2

الحد الأدنى للفتة الأولى = 10
الحد الأعلى للفتة الأخيرة = 100

$$R = 100 - 10 = 90$$

تحقق من فهمك (1)

يبين الجدول أدناه معدل السرعة km/h لمجموعة من السيارات على إحدى الطرق:

الفتات	60 –	70 –	80 –	90 –
التكرار	35	65	70	30

أوجد المدى لقيم هذه البيانات.

الحد الأدنى للفتة الأولى = 60
الحد الأعلى للفتة الأخيرة = 100

$$R = 100 - 60 = 40 \text{ km/h}$$

ملاحظة

المدى يتأثر بالقيم المتطرفة دائماً.

ثانيًا: التباين والانحراف المعياري



التباين: ليكن لدينا مجموعة من القيم:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

يُعرّف التباين على أنه المتوسط الحسابي لمجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي $\bar{x}$ ويرمز له بالرمز σ^2

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n}$$

الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n}}$$

مثال (2): أوجد التباين والانحراف المعياري لمجموعة القيم التالية:

$$3, 7, 5, 4, 6, 8, 2$$

المتوسط الحسابي

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} = \frac{3 + 7 + 5 + 4 + 6 + 8 + 2}{7} = \frac{35}{7} = 5$$

x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
3	$3 - 5 = -2$	4
7	$7 - 5 = 2$	4
5	$5 - 5 = 0$	0
4	$4 - 5 = -1$	1
6	$6 - 5 = 1$	1
8	$8 - 5 = 3$	9
2	$2 - 5 = -3$	9
$\sum_{k=1}^7 x_k = 35$	$\sum_{k=1}^7 (x_k - \bar{x}) = 0$	$\sum_{k=1}^7 (x_k - \bar{x})^2 = 28$

التباين σ^2

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n} = \frac{28}{7} = 4$$

الانحراف المعياري σ

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4} = 2$$

تحقق من فهمك (2) أوجد التباين والانحراف المعياري لمجموعة القيم التالية:

a) 12, 8, 10, 6, 4, 14, 2

المتوسط الحسابي

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} = \frac{12 + 8 + 10 + 6 + 4 + 14 + 2}{7} = \frac{56}{7} = 8$$

x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
12	$12 - 8 = 4$	16
8	$8 - 8 = 0$	0
10	$10 - 8 = 2$	4
6	$6 - 8 = -2$	4
4	$4 - 8 = -4$	16
14	$14 - 8 = 6$	36
2	$2 - 8 = -6$	36
$\sum_{k=1}^7 x_k = 56$	$\sum_{k=1}^7 (x_k - \bar{x}) = 0$	$\sum_{k=1}^7 (x_k - \bar{x})^2 = 112$

التباين σ^2

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n} = \frac{112}{7} = 16$$

الانحراف المعياري σ

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{16} = 4$$



تحقق من فهمك (2) أوجد التباين والانحراف المعياري لمجموعة القيم التالية:

b) 9, 5, 7, 3, 11, 1, 6

المتوسط الحسابي

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} = \frac{9 + 5 + 7 + 3 + 11 + 1 + 6}{7} = \frac{42}{7} = 6$$

x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
9	$9 - 6 = 3$	9
5	$5 - 6 = -1$	1
7	$7 - 6 = 1$	1
3	$3 - 6 = -3$	9
11	$11 - 6 = 5$	25
1	$1 - 6 = -5$	25
6	$6 - 6 = 0$	0
$\sum_{k=1}^7 x_k = 42$	$\sum_{k=1}^7 (x_k - \bar{x}) = 0$	$\sum_{k=1}^7 (x_k - \bar{x})^2 = 70$

التباين σ^2

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n} = \frac{70}{7} = 10$$

الانحراف المعياري σ

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{10} \approx 3.16$$



التباين والانحراف المعياري للتوزيعات التكرارية:

(a) ذات الجدول التكراري البسيط:
التباين

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \cdot f}{\sum_{k=1}^n f}$$

الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \cdot f}{\sum_{k=1}^n f}}$$

حيث:

x_k : القيم

f : تكرار القيم

$\bar{x}$: المتوسط الحسابي

مثال (3): أوجد التباين والانحراف المعياري للتوزيع التكراري البسيط التالي

القيمة x	10	20	30	40	
التكرار f	6	7	6	1	
x	f	$x \cdot f$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 \cdot f$
10	6	60	-11	121	726
20	7	140	-1	1	7
30	6	180	9	81	486
40	1	40	19	361	361
المجموع	$\sum_{k=1}^n f = 20$	420			1580

المتوسط الحسابي

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k \cdot f)}{\sum_{k=1}^n f} = \frac{420}{20} = 21$$

التباين σ^2

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \cdot f}{\sum_{k=1}^n f} = \frac{1580}{20} = 79$$

الانحراف المعياري σ

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{79} \approx 8.89$$



(b) التوزيعات التكرارية ذات الفئات:

مثال (4): يبين الجدول أدناه أطوال 20 طفلاً حديثي الولادة إلى أقرب سنتيمتر، أوجد التباين والانحراف المعياري

الفئات	34 –	36 –	38 –	40 –
التكرار	4	5	8	3

الفئات	x	f	$x \cdot f$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 \cdot f$
34 –	35	4	140	-3	9	36
36 –	37	5	185	-1	1	5
38 –	39	8	312	1	1	8
40 –	41	3	123	3	9	27
المجموع		20	760			76

المتوسط الحسابي $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k \cdot f)}{\sum_{k=1}^n f} = \frac{760}{20} = 38$$

التباين σ^2

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \cdot f}{\sum_{k=1}^n f} = \frac{76}{20} = 3.8$$

الانحراف المعياري σ

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{3.8} \approx 1.95$$



مثال (5): أوجد التباين والانحراف المعياري للتوزيع التكراري البسيط التالي:

القيمة	4 –	8 –	12 –	16 –	20 –	24 –	28 –
التكرار	4	5	2	7	6	10	6

الفئات	x	f	$x \cdot f$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 \cdot f$
4 –	6	4	24	-14	196	784
8 –	10	5	50	-10	100	500
12 –	14	2	28	-6	36	72
16 –	18	7	126	-2	4	28
20 –	22	6	132	2	4	24
24 –	26	10	260	6	36	360
28 –	30	6	180	10	100	600
المجموع		40	800			2368

المتوسط الحسابي $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k \cdot f)}{\sum_{k=1}^n f} = \frac{800}{40} = 20$$

نوجد التباين σ^2

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \cdot f}{\sum_{k=1}^n f} = \frac{2368}{40} = 59.2$$

الانحراف المعياري σ

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{59.2} \approx 7.69$$



تحقق من فهمك (3):

يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات 60 متعلقا في امتحان نهاية العام الدراسي حيث النهاية العظمى 100 درجة:

الفئات	0 –	20 –	40 –	60 –	80 –
f التكرار	4	6	16	24	10

الفئات	x	f	x · f	x – $\bar{x}$	(x – $\bar{x}$) ²	(x – $\bar{x}$) ² · f
0 –	10	4	40	–50	2500	10000
20 –	30	6	180	–30	900	5400
40 –	50	16	800	–10	100	1600
60 –	70	24	1680	10	100	2400
80 –	90	10	900	30	900	9000
المجموع		60	3600			28400

المتوسط الحسابي $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k \cdot f)}{\sum_{k=1}^n f} = \frac{3600}{60} = 60$$

التباين σ^2

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \cdot f}{\sum_{k=1}^n f} = \frac{28400}{60} = \frac{1420}{3} \approx 473.33$$

الانحراف المعياري σ

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1420}{3}} \approx 21.756$$

مثال (6):

إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم من بيانات هو $\sigma = 6$ ومجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو $\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 = 540$ فما عدد قيم هذه البيانات؟

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n} \\ (6)^2 &= \frac{540}{n} \\ 36 &= \frac{540}{n} \\ n &= \frac{540}{36} \\ n &= 15 \end{aligned}$$

إذن عدد قيم هذه البيانات هو 15 قيمة.

تحقق من فهمك (4)

الانحراف المعياري لمجموعة قيم من البيانات هو σ
 $= 4$ ومجموع مربعات انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي هو 28 فما عدد قيم هذه البيانات؟

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n}$$

$$(4)^2 = \frac{28}{n}$$

$$16 = \frac{28}{n}$$

$$n = \frac{28}{16}$$

$$n = \frac{7}{4}$$

$$n = 7$$

∴ عدد قيم هذه البيانات هو 7 قيم.

الانحراف المعياري لمجموعة قيم من البيانات هو σ
 $= 4$ ومجموع مربعات انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي هو 480 فما عدد قيم هذه البيانات؟

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n}$$

$$(4)^2 = \frac{480}{n}$$

$$16 = \frac{480}{n}$$

$$n = \frac{480}{16}$$

$$n = 30$$

∴ عدد قيم هذه البيانات هو 30 قيمة.



استخدام النماذج

يمثل الجدول أدناه الزمن المستغرق بالدقائق أثناء مراقبة المكالمات التي يقوم بها مندوب مبيعات الهاتف

الفئات	0 –	4 –	8 –	12 –
التكرار	6	5	7	2

أوجد التباين σ^2 والانحراف المعياري σ لزمن هذه المكالمات.

الفئات	x	f	$x \cdot f$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 \cdot f$
0 –	2	6	12	-5	25	150
4 –	6	5	30	-1	1	5
8 –	10	7	70	3	9	63
12 –	14	2	28	7	49	98
المجموع		20	140			316

المتوسط الحسابي $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k \cdot f)}{\sum_{k=1}^n f} = \frac{140}{20} = 7$$

نوجد التباين σ^2

$$\sigma^2 = \frac{[\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \cdot f]}{\sum_{k=1}^n f} = \frac{316}{20} = 15.8$$

الانحراف المعياري σ

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{15.8} \approx 3.97$$



تدرب - البنود الموضوعية:

اختر الإجابة الصحيحة:

1. الانحراف المعياري للقيم 2,4,6,8 هو:

- (a) 2 (b) 4 (c) 5 (d) $\sqrt{5}$

2. إذا كان التباين لمجموعة من القيم يساوي 4 فإن الانحراف المعياري لها:

- (a) 16 (b) 8 (c) 4 (d) 2

3. إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من القيم يساوي 6 فإن التباين يساوي:

- (a) 36^2 (b) 6 (c) 36 (d) 72

4. إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من القيم 5 = ومجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو 100 = فإن عدد القيم يساوي:

- (a) 10 (b) 20 (c) 4 (d) 25

5. إذا كان الانحراف المعياري لأربع قيم هو 5 فإن مجموع مربعات انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي:

- (a) 25 (b) 100 (c) 20 (d) 4





أسئلة المقال:

1. أوجد المدى والتباين والانحراف المعياري للقيم:

a) 12 , 8 , 15 , 17 , 14

$$R = 17 - 8 = 9$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{66}{5} = 13.2$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} = \frac{46.8}{5} = 9.36$$

$$\sigma = \sqrt{9.36} \approx 3.06$$

x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
12	$12 - 13.2 = -1.2$	1.44
8	$8 - 13.2 = -5.2$	27.04
15	$15 - 13.2 = 1.8$	3.24
17	$17 - 13.2 = 3.8$	14.44
14	$14 - 13.2 = 0.8$	0.64
66		46.8

المجموع

b) 32 , 54 , 46 , 20 , 35 , 23

$$R = 54 - 20 = 34$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{210}{6} = 35$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} = \frac{860}{6} \approx 143.33$$

$$\sigma = \sqrt{143.33} \approx 11.97$$

x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
32	$32 - 35 = -3$	9
54	$54 - 35 = 19$	361
46	$46 - 35 = 11$	121
20	$20 - 35 = -15$	225
35	$35 - 35 = 0$	0
23	$23 - 35 = -12$	144
210		860

المجموع

c) 100 , 400 , 300 , 500 , 700

$$R = 700 - 100 = 600$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{2000}{5} = 400$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} = \frac{200000}{5} = 40000$$

$$\sigma = \sqrt{40000} = 200$$

x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
100	$100 - 400 = -300$	90000
400	$400 - 400 = 0$	0
300	$300 - 400 = -100$	10000
500	$500 - 400 = 100$	10000
700	$700 - 400 = 300$	90000
2000		200000

المجموع

2. أوجد التباين والانحراف المعياري للتوزيع التكراري البسيط التالي:

القيمة x	30	32	34	36	38
التكرار f	2	8	12	4	4

x	f	$x \cdot f$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 \cdot f$
30	2	60	$30 - 34 = -4$	16	32
32	8	256	$32 - 34 = -2$	4	32
34	12	408	$34 - 34 = 0$	0	0
36	4	144	$36 - 34 = 2$	4	16
38	4	152	$38 - 34 = 4$	16	64
	30	1020			144

الحل:
المتوسط الحسابي

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n f_k x_k}{\sum_{k=1}^n f_k} = \frac{1020}{30} = 34$$

التباين

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^n f_k (x_k - \bar{x})^2}{\sum_{k=1}^n f_k} = \frac{144}{30} = 4.8$$

الانحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4.8} \approx 2.19$$





3. الجدول التالي يوضح التوزيع التكراري لأعمار 300 عامل في أحد المصانع أوجد كلاً من المدى والتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع

الفئات	14 -	22 -	30 -	38 -	المجموع
التكرار	70	140	75	15	300

الفئات	x	f	$x \cdot f$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 \cdot f$
14 -	18	70	1260	-8.93	79.81	5586.67
22 -	26	140	3640	-0.93	0.87	121.33
30 -	34	75	2550	7.07	49.94	3745.67
38 -	42	15	630	15.07	227.01	3405.00
المجموع		300	8080			12858.67

المدى:

$$R = 46 - 14 = 32$$

المتوسط الحسابي

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k \cdot f)}{\sum_{k=1}^n f} = \frac{8080}{300} \approx 26.93$$

التباين

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \cdot f}{\sum_{k=1}^n f} = \frac{12858.67}{300} \approx 42.86$$

الانحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{42.86} \approx 6.55$$



4. يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان بعض متعلمي المرحلة الثانوية في إحدى المدارس أوجد كلاً من المدى والتباين والانحراف المعياري لهذه الأوزان

الفئات	60 -	64 -	68 -	72 -	76 -	المجموع
التكرار	5	18	42	27	8	100

الفئات	x	f	$x \cdot f$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 \cdot f$
60 -	62	5	310	-8.6	73.96	369.8
64 -	66	18	1188	-4.6	21.16	380.88
68 -	70	42	2940	-0.6	0.36	15.12
72 -	74	27	1998	3.4	11.56	312.12
76 -	78	8	624	7.4	54.76	438.08
المجموع		100	7060			1516

$$R = 80 - 60 = 20$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k \cdot f)}{\sum_{k=1}^n f} = \frac{7060}{100} = 70.6$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \cdot f}{\sum_{k=1}^n f} = \frac{1516}{100} = 15.16$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{15.16} \approx 3.89$$

المدى:

المتوسط الحسابي

التباين

الانحراف المعياري



UULA

صِفْوَةٌ مَعَالِكِي



Made in Kuwait