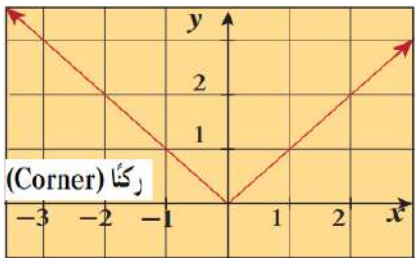
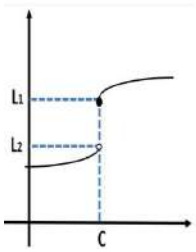
مذكرة

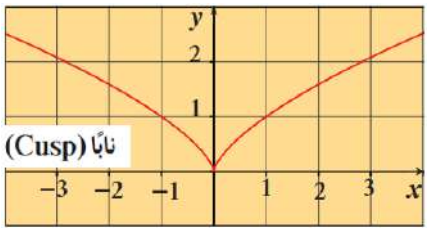




$\lim_{x\to c^-} f(x) = L_1 \qquad \lim_{x\to c^+} f(x) = L_2$

$\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)$

$\lim_{x\to c} f(x)$ غير موجودة



الصف الثاني عشر علمي

الفصل الدراسي الأول

2026-2027

صفوة معلمي الكويت

أبو يوسف

97610736

ملحوظة : المذكرة غير مخصصة للبيع لا يوجد نسخة محلولة

الوحدة الأولى : النهايات والاتصال

بند (1 - 1) النهايات

تعريف (١)

لتكن x كمية متغيرة، c عدد ثابت

نقول إن x تقترب من c باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكمية $|x - c|$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب

تعريف النهاية

إذا كان L ، c عددين حقيقيين، f دالة حقيقية فإن:

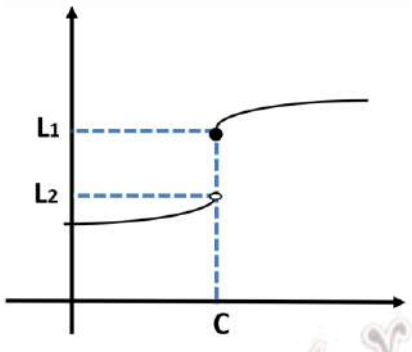
$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

تعني أن: عندما تقترب x من c باطراد، $x \neq c$ فإن $f(x)$ تقترب باطراد من L.

ملاحظة

وجود نهاية عند نقطة لا تعتمد على كون الدالة معرفة أو غير معرفة عند هذه النقطة

النهاية من جهة واحدة أو جهتين



$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L_1 \qquad \lim_{x \to c^+} f(x) = L_2 \qquad L_1 \neq L_2$$

$$\lim_{x \to c^+} f(x) \neq \lim_{x \to c^-} f(x)$$

$\lim_{x \to c} f(x)$ غير موجودة

نظرية (1)

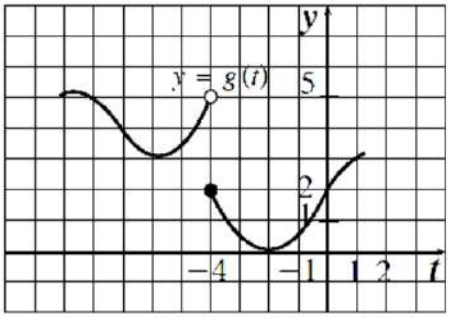
بفرض أن L, c عددين حقيقين

يكون للدالة f نهاية عندما تقترب x من c إذا و فقط إذا كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة من اليسار و يعبر عن ذلك :

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to c^+} f(x) = L = \lim_{x \to c^-} f(x)$$

صفوة معلمي الكويت

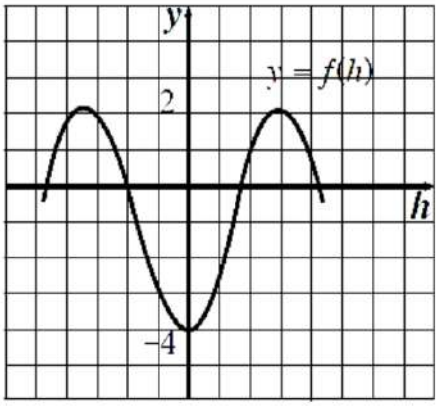
الشكل المقابل، يمثّل بيان الدالة g. أوجد إن أمكن:



(a) $\lim_{t\to -4^-} g(t)$ (b) $\lim_{t\to -4^+} g(t)$

(c) $\lim_{t\to -4} g(t)$ (d) $g(-4)$

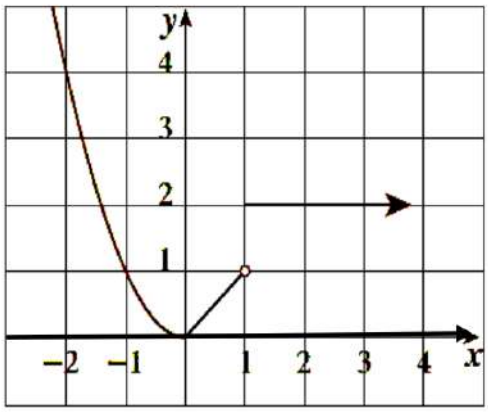
الشكل المقابل، يمثّل بيان الدالة f. أوجد إن أمكن:



(a) $\lim_{h\to 0^-} f(h)$ (b) $\lim_{h\to 0^+} f(h)$

(c) $\lim_{h\to 0} f(h)$ (d) $f(0)$

الشكل المقابل يمثل بيان الدالة f

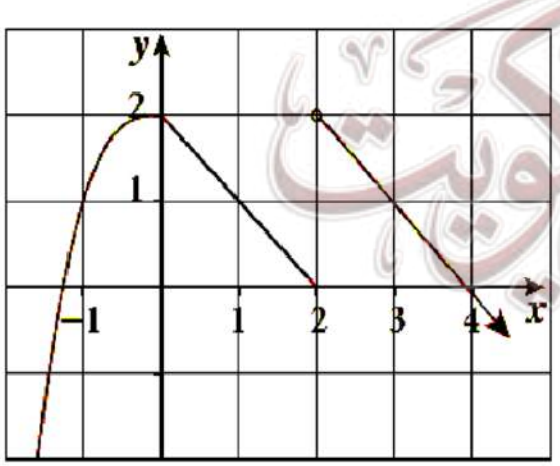


أوجد إن أمكن :

1 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 2 $\lim_{x\to 1} f(x)$

3 $\lim_{x\to 2} f(x)$ 4 $\lim_{x\to -2} f(x)$

يمثل الشكل المقابل بيان دالة f أوجد إن أمكن :



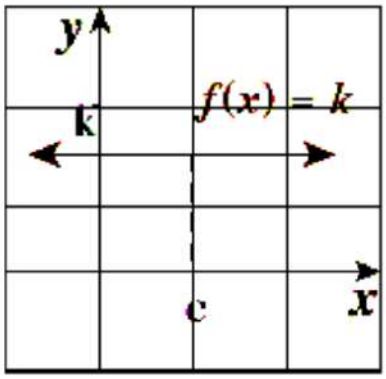
a $\lim_{x\to -1} f(x)$ b $\lim_{x\to 0} f(x)$

c $\lim_{x\to 2} f(x)$ d $\lim_{x\to 3} f(x)$

صفوة معلمي الكويت

حساب النهايات

نظرية (2)

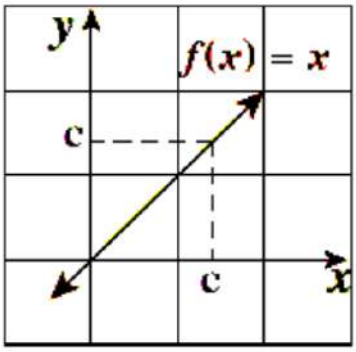


إذا كانت f دالة : $f(x)=k$ و كانا k ، c عددان حقيقيان فإن :

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$$

$$(1)\ \lim_{x \to 4} 3$$

نظرية (3)



إذا كانت f دالة : $f(x)=x$ و كانا c عددا حقيقيا فإن :

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c$$

نظرية (4)

إذا كان L ، M ، c ، k أعدادا حقيقية ، $\lim_{x \to c} g(x) = M$ ، $\lim_{x \to c} f(x) = L$

(a) قاعدة الجمع : $\lim_{x \to c} \big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) = L+M$

(b) قاعدة الفرق : $\lim_{x \to c} \big(f(x)-g(x)\big) = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x) = L-M$

(c) قاعدة الضرب : $\lim_{x \to c} \big(f(x).g(x)\big) = \lim_{x \to c} f(x) . \lim_{x \to c} g(x) = L.M$

(d) قاعدة الضرب في ثابت : $\lim_{x \to c} \big(k.f(x)\big) = k . \lim_{x \to c} f(x) = k.L$

(e) قاعدة ناتج القسمة : $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} = \frac{L}{M}$, $M \neq 0$

صفوة معالكات

بفرض أن : $\lim_{x \to 1} g(x) = 5$ ، $\lim_{x \to 1} f(x) = -2$ أوجد :

$\lim_{x \to 1} \left(f(x) - g(x)\right)$

.....

.....

$\lim_{x \to 1} \dfrac{2f(x)}{g(x)}$

.....

.....

.....

$\lim_{x \to 1} \dfrac{g(x) + 4}{f(x).g(x)}$

.....

.....

.....

.....

بفرض أن $\lim_{x \to 2} g(x) = -3$ ، $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$ أوجد :

$\lim_{x \to 2} \left(f(x).g(x)\right)$

.....

.....

$\lim_{x \to 2} \left(\dfrac{8f(x).g(x)}{f(x) + g(x)}\right)$

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

نظرية (5)

دوال كثيرات الحدود و دوال الحدوديات النسبية

(a) إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ دالة كثيرة الحدود ، c عددا حقيقيا ، فإن :

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_0$$

(b) إذا كانت $f(x)$، $g(x)$ كثيرتي حدود ، c عددا حقيقيا ، فإن

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} \quad ، \ g(c) \neq 0$$

أوجد : (تعويض مباشر)

$$\lim_{x \to -1} (x^4 - 2x^3 + 5)$$

.....

$$\lim_{x \to 1} (x^3 + 3x^2 - 17)$$

.....

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$$

.....

.....

.....

.....

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$$

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

إذا كانت الدالة f : فأوجد إن أمكن

$\lim_{x \to 1} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & x < 1 \\ 5 & x = 1 \\ \frac{5}{x} & x > 1 \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

إذا كانت الدالة f : فأوجد إن أمكن

$\lim_{x \to 2} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & : \ x < 2 \\ x - 1 & : \ x > 2 \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

إذا كانت الدالة g :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & : \ x \leq 0 \\ 1 - 2x & : \ x > 0 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

إذا كانت الدالة g :

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + x & : \ x > 1 \\ \frac{x}{x^2+1} & : \ x \leq 1 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

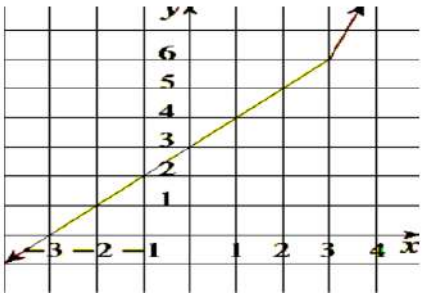
.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت



لتكن : $f(x) = |x - 3| + 2x$ الممثلة بالشكل

(a) أكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة .

(b) أوجد : $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ ، $\lim_{x \to 3^-} f(x)$

(c) هل للدالة f نهاية عندما $x \to 3$ ؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

لتكن : $f(x) = x^2 - |x + 2|$

(a) أكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة .

(b) أوجد : $\lim_{x \to -2^+} f(x)$ ، $\lim_{x \to -2^-} f(x)$

(c) هل للدالة f نهاية عندما $x \to -2$ ؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

قاعدة القوى

$$\lim_{x \to -1} (x^2 - 3x - 1)^5$$

.....

.....

$$\lim_{x \to 2} \sqrt[3]{x - 3}$$

.....

.....

$$\lim_{x \to 5} \sqrt{x^2 - 5}$$

.....

.....

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{3x^2 - 2}}{x - 2}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 4x + 5}}{x - 2}$$

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

إلغاء العامل الصفري

تذكر تحليل الحدوديات

- **تحليل جدودية ثلاثية** (تحليل الحدودية الثلاثية بالآلة الحاسبة)

مثال x^2+x-2 = ...

x^2+3x+2 = ...

x^2-x = ...ممكن بإخراج العامل المشترك

- **تحليل فرق بين مربعين** $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

x^2-4 = ...

x^2-16 = ...

x^2-4 = ...

$(x+4)^2-9$ = ...

- **تحليل مجموع وفرق بين مكعبين**

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ ✿ $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

مثال x^3-27 = ...

$(2+x)^3-8$ = ...

.....

$(3+x)^3-27$ = ...

.....

$(2+x)^3-1$ = ...

.....

صفوة معلمي الكويت

أوجد إن أمكن :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$$

أوجد إن أمكن :

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$$

صفوة معلمي الكويت

أوجد إن أمكن :

$$\lim_{x \to 0} \frac{(4+x)^2 - 16}{x}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

اوجد إن امكن :

$$\lim_{x \to -7} \frac{(x+4)^2 - 9}{x^2 + 7x}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

أوجد

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x+1)^2 - 9}{x^2 - 2x}$$

٢٠١٨-٢٠١٩

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد إن أمكن :

$$\lim_{x \to 0} \frac{(2+x)^3 - 8}{x}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

2014-2015

أوجد إن أمكن : $\lim_{x \to 0} \frac{(3+x)^3 - 27}{x}$

أوجد إن أمكن : $\lim_{x \to 5} \frac{|x+2| - 7}{x^2 - 25}$

صفوة معلمي الكويت

أوجد إن أمكن : $\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|}{x^2-1}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2025-2026

أوجد إن أمكن $\lim_{x \to -2} \frac{|x+2|}{x^2+3x+2}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

أوجد إن أمكن : $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$

صفوة معلمي الكويت

2021-2022

أوجد $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$

صفوة معلمي الكويت

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}$$

صفوة معلمي الكويت

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}$$

صفوة معلمي الكويت

أوجد إن أمكن $\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{3-\sqrt{x}}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد : $\lim_{x \to -1} \frac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

أوجد إن أمكن $\lim_{x \to -2} \frac{x^5 + 32}{x + 2}$

أوجد إن أمكن $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x - 3}$

صفوة معلمي الكويت

2024-2025

أوجـد إن امكن : $\lim_{x\to 2} \frac{-x^5+x^3+x+22}{x-2}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد ان أمكن : $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$\lim_{x\to 1^+} (2x - |x| + 2) = 3$$

ⓐ ⓑ

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2} - x}{x} = -2$$

ⓐ ⓑ

$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ هي :

(a) 0

(b) $-\frac{1}{4}$

(c) $\frac{1}{4}$

(d) غير موجوده

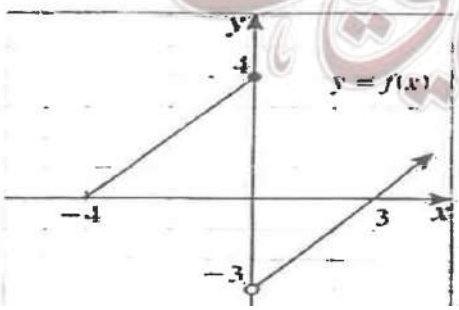
$\lim_{x\to -3} \frac{2x^3+9x^2+9x}{x+3}$ يساوي

(a) -9 (b) -3 (c) 0 (d) 9

$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$ يساوي :

ⓐ 1 ⓑ 0 ⓒ $\frac{1}{2}$ ⓓ $\frac{1}{3}$

إذا كان الشكل المقابل هو بيان دالة f فإن العبارة الصحيحة في ما يلي هي :



(a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 4$

(b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 4$

(c) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -3$

(d) $\lim_{x\to 0} f(x) = -3$

بند (2 - 1) نهايات تشمل $\pm\infty$

نظرية7:

$$f: f(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \ . \ \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

نظرية8:

$$f: f(x) = \frac{k}{x^n} \ . \ n \in Z^+ \ . \ k \in R \Longrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{k}{x} = 0$$

أوجد: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x+4}\right)$

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد: $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x+5}{x^2+25}\right)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

أوجد: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x^3}{5-7x^3}\right)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد: $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+2}{x^2+9}\right)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-3x+1}{x^3+5}\right)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

بند (3 – 1) نهايات تشمل على صيغة غير معينة

لتكن : $a \in R^+$ ، $n \in z^+$ ، $f(x) = ax^n$:

1) إذا كان n عدد زوجي فإن : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} ax^n = \begin{cases} \infty & ، a > 0 \\ -\infty & ، a < 0 \end{cases}$

2) إذا كان n عدد فردي فإن :

$$\lim_{x \to \infty} ax^n = \begin{cases} \infty & ، a > 0 \\ -\infty & ، a < 0 \end{cases} \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} ax^n = \begin{cases} -\infty & ، a > 0 \\ \infty & ، a < 0 \end{cases}$$

أوجد: $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{2x^2 + x - 1}{3x^4 + x} \right)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-3x^2 + 5x + 1}{6x^2 - x + 1} \right)$

صفوة معلمي الكويت

.....

.....

.....

.....

.....

.....

إذا كانت: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^2+bx+3}{2x+5}\right)=3$ فأوجد قيمة كل من الثابتين a , b.

إذا كانت: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{ax^2+bx-3}\right)=-1$ فأوجد قيمة كل من الثابتين a , b.

إذا كانت $\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^3+bx^2+4}{3x^2-2x+1}=-1$ فإن $a=-3\,,b=-2$

ⓐ ⓑ

$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+3}$ يساوي :

ⓐ ∞ ⓑ $-\infty$ ⓒ 1 ⓓ 0

إذا كان $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+3}{2x+5}=3$ فإن قيم $a\,,b$ هي

$(a)\ a=0\,,b=6$ $(b)\ a=0\,,b=-6$

$(c)\ a=6\,,b=0$ $(d)\ a=-6\,,b=0$

ابو يوسف

2025/2024 م

أوجد $\lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{\sqrt{x^2+2x+7}}$

صفوة معلمي الكويت

2019-2020مكرر2023-2024

أوجد: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}\right)$

صفوة معلمي الكويت

أوجد: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}\right)$

2017-2018

صفوة معلمي الكويت

2018-2019

أوجد

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-5}{\sqrt{x^2-2x-3}}$$

صفوة معلمي الكويت

2025-2026

أوجد $\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{4x^2+2x-1}}$

صفوة معلمي الكويت

أوجد :

2016-2017

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2-5x+1}}{3x-5}$$

صفوة معلمي الكويت

ⓐ ⓑ $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-7}{\sqrt{4x^2-8x+5}} = \frac{3}{2}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{\sqrt{4x^2-x+3}} =$

(a) -1 (b) $\frac{-1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

بند (4 – 1)نهايات بعض الدوال المثلثية

نظرية (12) :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$ حيث x بالراديان،

نتيجة (1) :

إذا كان a ، b عددين حقيقين ، $b \neq 0$ ، $a \neq 0$ فإن :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$$

فمثلا : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5}$, $\lim_{x \to 0} \frac{3x}{\sin 4x} = \frac{3}{4}$

و من تعريف النهاية على الدوال المثلثية الأساسية نجد أن :

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 0} \tan x = 0$$

أوجد : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{2x}$

.....

.....

.....

.....

.....

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x^2 - x}$

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x \cos x}$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - 3}{\cos x}$$

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$

2019-2020مكرر 2018مكرر2023

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

2014-2015

أوجد: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2015-2016

أوجد: $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{\cos x - 1}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

أوجد : $\lim_{x\to 0} \frac{sin^2 x}{1 - cosx}$

2024 / 2023م

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

نتيجة (2) : $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

نتيجة (3) : إذا كان $a, b \in R^+$ فإن : $\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$

$\lim_{x \to 0} \frac{5\tan x - 3 \sin x}{4x}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x \tan x - 2x \cos x}{3x}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2016-2017

أوجد : $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x + 3x \cos 4x}{5x}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

$$\lim_{x \to 0} \frac{5x + \sin x}{x}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x - x^2}{3x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - tanx}{sinx - cosx}$$

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

ⓐ ⓑ

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x^2 + 5sin^2x}{3x^2} = 3$$

$\lim_{x \to 0} \frac{tan\,2x}{sinx}$ يساوي :

(a) 0 (b) ∞ (c) -2 (d) 2

بند (5 – 1) الاتصال عند نقطة

شروط إتصال الدالة عند $x = c$

1) الدالة f معرفة عند $x = c$ أي $f(c)$ موجودة

2) $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة

3) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

وإذا لم يتحقق أي شرط من الشروط فنقول أن f منفصلة (ليست متصلة) عند $x = c$

لتكن f : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & : \quad x \geq 1 \\ 5x - 1 & : \quad x < 1 \end{cases}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 1$

صفوة معلمي الكويت

ابحث اتصال f عند $x = 0$ $\quad f(x) = \begin{cases} x^3 + x & : \quad x \leq 0 \\ \frac{x^2}{x+1} & : \quad x > 0 \end{cases}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2021-2022

لتكن f : $\begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & : \quad x > 3 \\ 7 & : \quad x \leq 3 \end{cases}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 3$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$ حيث $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & : \ x<2 \\ 1 & : \ x=2 \\ x^2+1 & : \ x>2 \end{cases}$

ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$ حيث $f(x)=\begin{cases} \frac{x-2}{|x-2|} & : \ x\neq 2 \\ 1 & : \ x=2 \end{cases}$

صفوة معلمي الكويت

ابحث اتصال الدالة f عند $x=-1$ حيث $f(x)=\begin{cases}\frac{|x+1|}{x+1}-2x & : x\neq -1\\ 2 & : x=-1\end{cases}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2020-2021

ابحث اتصال الدالة f $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-3x}{|x|} & : x\neq 0\\ -3 & : x=0\end{cases}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....ذ

.....

صفوة معلمي الكويت

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 1$,
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & : \quad x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & : \quad x = 1 \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد قيمة a بحيث تصبح الدالة التالية متصلة عند $x = 3$
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & : \quad x < 3 \\ 2ax & : \quad x \geq 3 \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

بند (6 – 1) نظريات الاتصال

نظرية (14) : خواص الدوال المتصلة

إذا كانت f ، g دالتين متصلتين عند $x = c$ ، فإن الدوال التالية هي دوال متصلة عند $x = c$

(1) $f + g$ الجمع (2) $f - g$ الطرح

(3) $k.f$ ، $k \in R$ الضرب في ثابت (4) $f.g$ الضرب

(5) $\frac{f}{g}$ ، $g(c) \neq 0$ القسمة

ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي : $f(x) = x^2 + |x|$ ، $c = -1$

.....

.....

.....

.....

.....

$f(x) = x^2 - 4x + 3 + |x|$ ، $c = 3$

.....

.....

.....

.....

.....

ابحث اتصال الدالة f : $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - \frac{2x}{x - 2}$ عند $x = 1$

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

اتصال الدوال الجذرية عند نقطة :

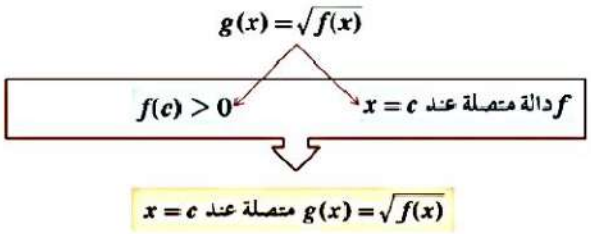
نظرية (15)

a الدالة الجذرية $y=\sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x=c:c\in\mathbb{R}^+$ ، n عدد صحيح زوجي موجب،

ومتصلة عند كل $x=c:c\in\mathbb{R}$ ، n عدد صحيح فردي أكبر من 1.

b إذا كانت f دالة متصلة عند $x=c$ وكانت $f(c)>0$

فإن الدالة: $g(x)=\sqrt{f(x)}$ متصلة عند $x=c$



ابحث اتصال كل من الدالتين التاليتين عند العدد المبيّن:

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1} \quad , \quad x=1$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

الدالة المركبة:

إذا كانت كل من f, g دالتين حقيقيتين وكان مدى الدالة f مجموعة جزئية من مجال الدالة g فإنه يتعين دالة مركبة h:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

نظرية ١٦ : إذا كانت f دالة متصلة عند $x = c$ ، و g متصلة عند $f(c)$.

فإن الدالة المركبة $g \circ f$ هي دوال متصلة عند $x = c$

ملاحظة: $(g \circ f)(c) \neq (f \circ g)(c)$ إلا في بعض الحالات الخاصة

الدالتين f ، g معرفتان على R كما يلي: $g(x) = x^2 + 1$, $f(x) = 1 + x$ أوجد :

$a)\ (gof)(x)$, $b)\ (gof)(2)$, $c)\ (fog)(x)$, $d)\ (fog)(2)$

صفوة معلمي الكويت

الدالتين f ، g معرفتان على R كما يلي: $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x^2 + 3$ أوجد :

$a)\ (gof)(x)$, $b)\ (gof)(-1)$, $c)\ (fog)(x)$, $d)\ (fog)(-1)$

لتكن: $g(x) = x^4 + 2$, $f(x) = \sqrt{x}$ أوجد :

$a)\ (fog)(x)$, $b)\ (fog)(0)$, $c)\ (gof)(x)$, $d)\ (gof)(0)$

صفوة معلمي الكويت

2022-2023

لتكن: $f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = \sqrt{x}$. ابحث اتصال الدالة gof عند $x = -2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2015-2016

لتكن الدالة f : $f(x) = x^2 - 3x$ ، الدالة g : $g(x) = \sqrt{x}$

ابحث إتصال الدالة (gof) عند $x = -1$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

لتكن: $g(x) = 2x + 3$, $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$ | ابحث اتصال الدالة fog عند $x = 1$

لتكن : $f(x) = 2x^2 - 3$ ، $g(x) = \sqrt{x+4}$ ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

صفوة معلمي الكويت

لتكن: $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

لتكن: $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

صفوة معلمي الكويت

بند (7 – 1) الاتصال على فترة

تعريف (٩): "الاتصال على فترة مفتوحة"

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة $(a.b)$ فإننا نقول إن الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة (a,b) إذا كانت f متصلة عند كل x تنتمي إلى الفترة $(a.b)$

تعريف (١٠): "الاتصال على فترة مغلقة"

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة $[a.b]$ فإننا نقول إن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a.b]$ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

١) الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة $(a.b)$

٢) الدالة f متصلة عند $x = a$ من جهة اليمين أي أن: $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

٣) الدالة f متصلة عند $x = b$ من جهة اليسار أي أن: $\lim_{x\to b^+} f(x) = f(b)$

ادرس اتصال الدالة f على الفترة $[1,3]$ حيث.

$$f(x) = \begin{cases} -2 & : \quad x = 1 \\ x^2 - 3 & : \quad 1 < x < 3 \\ 6 & : \quad x = 3 \end{cases}$$

صفوة معلمي الكويت

2016-2017

إدرس إتصال الدالة f على $[1,3]$ حيث :

$$f(x)=\begin{cases}-2 & :x=1\\ x^2-3 & :1<x<3\\ 5 & :x=3\end{cases}$$

صفوة معلمي الكويت

ادرس اتصال الدالة f على الفترة $[1,5]$ حيث.

$$f(x)=\begin{cases}2 & : \quad x=1\\ \frac{x^2+1}{x} & : \quad 1<x<5\\ \frac{26}{5} & : \quad x=5\end{cases}$$

.

صفوة معلمي الكويت

2025-2026

$$f(x)=\begin{cases}-5 & : \quad x=-3\\ -x^2+4 & : \quad -3<x<4\\ -10 & : \quad x=4\end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة f على $[-3,4]$ حيث :

صفوة معلمي الكويت

الدالة f معرفة كما يلي: $f(x)=\begin{cases}-x+4 & : \ x\leqslant 7\\ \dfrac{9}{-x+4} & : \ x>7\end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها

صفوة معلمي الكويت

2021-2022 2022-2023مكرر 2024-2025مكرر

ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث :

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & : x \leq -1 \\ \dfrac{4}{x+3} & : x > -1 \end{cases}$$

صفوة معلمي الكويت

الدالة f معرفة كما يلي: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+9} & : \quad x\leqslant 0\\ \dfrac{6}{x+3} & : \quad x>0\end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها

صفوة معلمي الكويت

لتكن الدالة f متصلة على R . أوجد قيمة الثابتين a ، b .

$$f(x)=\begin{cases} x^2-a & : x<0 \\ 2 & : x=0 \\ ax+b & : x>0 \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

لتكن الدالة f متصلة على $[1,4]$. أوجد قيمة الثابتين a ، b .

$$f(x)=\begin{cases} 5 & : x=1 \\ ax+b & : 1<x<4 \\ b+8 & : x=4 \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2014-2015

أوجد قيمة a, b بحيث تكون الدالة f متصلة على مجالها حيث :

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & : x<1 \\ 3x+a & : x>1 \\ b & : x=1 \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

تعميم:

إذا كانت الدالة g متصلة على فترة ما، $g(x) \geqslant 0$ في هذه الفترة فإن الدالة $f(x)=\sqrt{g(x)}$ متصلة على هذه الفترة.

لتكن الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. أوجد مجال الدالة f (D_f) ثم ادرس اتصالها على الفترة $[-5\ ,\ 0]$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

لتكن الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$. أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصالها على الفترة $[6\ ,\ 10]$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

لتكن الدالة f : $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$. ادرس اتصال الدالة f على الفترة $[-3 , 3]$.

لتكن الدالة f : $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$. ادرس اتصال الدالة f على الفترة $[1 , 3]$

صفوة معلمي الكويت

إذا كانت f دالة متصلة على $[-2,3]$ فإن : $\lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2)$ ⓐ ⓑ

إذا كانت f داله متصله عند $x=c$ فإن الداله : $g(x)=\sqrt{f(x)}$ متصله عند $x=c$ ⓐ ⓑ

إذا كانت الدالة f متصلة عند $[-3,1]$ ، g دالة متصلة على $[-1,3]$ فإن $f+g$ هي دالة متصلة عند $x=0$ ⓐ ⓑ

الدالة f : $f(x)=\frac{\sqrt[3]{3x-1}}{x^2}$ متصلة عند $x=3$ ⓐ ⓑ

إذا كانت الدالة f : $f(x)=\sqrt{x^2-a}$ متصلة عند $x=3$ فإن a يمكن أن تساوي :

ⓐ 4 ⓑ 9 ⓒ 16 ⓓ 25

الدالة f : $f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-25}}$ متصلة على :

ⓐ $(-\infty,\frac{1}{2}]$ ⓑ $(5,\infty)$

ⓒ $\mathbb{R}$ ⓓ $(-5,5)$

** لتكن الدالة g : $g(x)=\begin{cases}x+1 & : x>a\\ 3-x & : x\le a\end{cases}$ متصلة عند $x=a$,

$a\in Z$ فإن a تساوي :

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) -1

لتكن الدالة f : $f(x)=\sqrt{x^2+7}$, $g(x)=x^2-3$ فإن $(f\circ g)(0)$ يساوي

(a) 1 (b) -1 (c) 4 (d) -4 *

الدالة f : $f(x)=\frac{x+1}{25-x^2}$ متصلة على :

(a) $\mathbb{R}$ (b) $[-5,5]$

(c) $\mathbb{R}\setminus\{-5,5\}$ (d) $(-\infty,25)$

إذا كانت الدالة f متصلة عند $x=-2$ وكانت $\lim_{x\to -2}(x^2+f(x))=7$ ،

فإن $f(-2)$ تساوي :

(a) 3 (b) 5 (c) 9 (d) 11 *

إذا كانت g دالة متصلة عند $x=1$ فإن الدالة المتصلة عند $x=1$ فيما يلي هي $f(x)$ تساوي

(a) $\sqrt{g(x)}$ (b) $\frac{1}{g(x)}$ (c) $\frac{g(x)}{x-1}$ (d) $|g(x)|$

الداله المتصلة عند $x=2$ فيما يلي هي

(a) $f(x)=\sqrt{x-2}$ (b) $g(x)=|x-2|$

(c) $h(x)=\frac{1}{x-2}$ (b) $k(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$

إذا كانت الدالة f : $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} & : x\neq 0\\ a & : x=0\end{cases}$ متصلة عند $x=0$

فإن a تساوي

(a) 4 (b) $-\frac{1}{4}$

(c) -4 (d) $\frac{1}{4}$

ابو يوسف

الوحدة الثانية : الاشتقاق

بند (1 - 2) معدلات التغير وخطوط التماس

أوجد ميل المماس للقطع المكافئ: $y = x^2$. عند النقطة $p\,(2, 4)$.

يفرض أن: $y = f(x)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

ميل القاطع عند $(2, 4)$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2 - 4}{h}$$
$$= \frac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h}$$
$$= \frac{h^2 + 4h}{h}$$
$$= h + 4 \quad , \quad h \neq 0$$

نهاية ميل القاطع عندما تقترب Q من P على المنحنى هي:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} (h + 4) = 4$$

على ذلك يكون ميل المماس للقطع المكافئ عند P يساوي 4

أوجد ميل المماس للقطع المكافئ: $y = (x-2)^2 + 2$. عند النقطة $A\,(1, 3)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

بند (2 - 2) المشتقة عند نقطة

تعريف المشتقة عند نقطة

مشتقة الدالة f عند $x=a$ هي $f'(a)$: $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (شرط وجود النهاية)

ويرمز للمشتقة بالرمز: $\frac{dx}{dy}|_{x=a}$ أ، $f'(a)$

أما إذا كانت النهاية غير موجودة عند $x=a$ نقول أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x=a$

باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f : $f(x)=2x^2+1$ عند $x=1$

صفوة معلمي الكويت

باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = 3x^2$ عند $x = -2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

التعريف البديل للمشتقة : صورة أخرى لتعريف المشتقة

مشتقة دالة f عند $x = a$ هي : $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ شرط وجود النهاية

باستخدام التعريف البديل، أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = \sqrt{x}$. عند $x = a$ حيث $a > 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

بيّن أن الدالة f لها مشتقة لجهة اليمين ومشتقة لجهة اليسار عند $x = 0$ ، لكن ليس لها مشتقة عند $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : \ x \leq 0 \\ 2x & : \ x > 0 \end{cases}$$

لتكن الدالة f : $f(x) = |x - 2|$. ابحث قابلية اشتقاق الدالة f عند $x = 2$.

صفوة معلمي الكويت

لتكن الدالة: $f(x) = x^3$ ، أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة إن وجدت.

لتكن الدالة: $f(x) = x^2 + 2$ ، أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة.

صفوة معلمي الكويت

نظرية : ((الاشتقاق والاتصال))

اذا كانت الدالة f لها مشتقة عند نقطة ، فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة ((عكس النظرية ليس دائماً صحيح))

لتكن الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : \ x < 2 \\ 2x - 1 & : \ x \geq 2 \end{cases}$$

ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x = 2$.

.....

.....

.....

.....

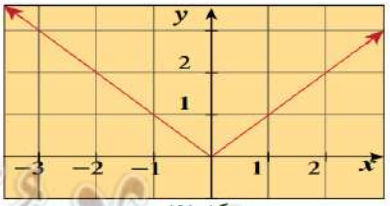
.....

.....

.....

وتوضّح الأشكال التالية أربع حالات تكون فيها هذه النهاية غير موجودة:

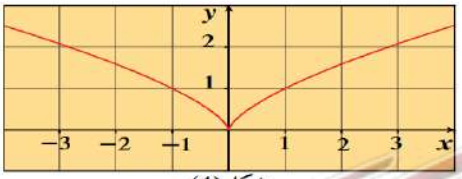
a **ركنًا (Corner):** تكون المشتقّتان من جهة اليمين ومن جهة اليسار عند التقاء الشعاعين غير متساويتين.
مثال: $f(x) = |x|$



شكل (3)

يوجد ركن عند $x = 0$ ، $f'(0)$ غير موجودة

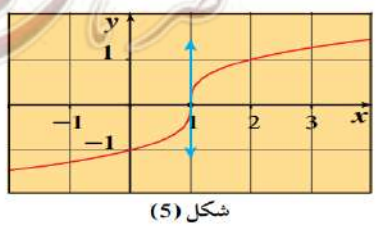
b **نابًا (Cusp):** يكون ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطع محددة يقترب من ∞ في إحدى الجهات ويقترب من $-\infty$ في الجهة الثانية ويوجد مماس رأسي عندها. مثال: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$



شكل (4)

يوجد ناب عند $x = 0$ ، $f'(0)$ غير موجودة ويوجد مماس رأسي عندها

c **مماسًا رأسيًا:** يكون المماس للمنحنى عند نقطة محددة رأسيًا.
مثال: $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$



شكل (5)

يوجد مماس رأسي عند $x = 1$ ، $f'(1)$ غير موجودة

d **عدم اتصال:** تكون المشتقّة من جهة واحدة أو كلّ من الجهتين غير موجودة. مثال:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$

شكل (6)

يوجد عدم اتصال عند $x = 0$ ، $f'(0)$ غير موجودة

لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x+5 & : \ x \leq 3 \\ x^2-1 & : \ x>3 \end{cases}$ أوجد إن أمكن $f'(3)$.

صفوة معلمي الكويت

لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x^2+x & : \ x\leq -1 \\ x^2-x-2 & : \ x>-1 \end{cases}$ أوجد إن أمكن $f'(-1)$.

صفوة معلمي الكويت

2014-2015

لتكن الدالة g : $g(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & , \quad x \leq 1 \\ 3x-2 & , \quad x > 1 \end{cases}$

أوجد إن أمكن $g'(1)$.

صفوة معلمي الكويت

لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x^2 & : \quad x \le 2 \\ 4x-4 & : \quad x > 2 \end{cases}$. أوجد $f'(2)$.

صفوة معلمي الكويت

بند (3 – 2) قواعد الاشتقاق

قاعدة (1) : مشتقة دالة ثابتة :

إذا كان $f(x) = k$ حيث k عدد ثابت فإن $f'(x) = 0$ لجميع قيم x الحقيقية .

أي أن : مشتقة أي دالة ثابتة تساوي صفر .

قاعدة (2) : مشتقة الدالة $f(x) = x$:

إذا كان $f(x) = x$ فإن $f'(x) = 1$ لجميع قيم x الحقيقية .

قاعدة (3) : قاعدة القوى للأسس الصحيحة الموجبة للمتغيّر x

إذا كان $f(x) = x^n$ حيث n عدد صحيح موجب $n \neq 1$ فإنّ: $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

أي أن : $f'(x) = nx^{n-1}$

أوجد $\frac{dy}{dt}$ ، حيث: $y = t^3 + 6t^2 - \frac{5}{3}t + 16$.

.....

.....

.....

أوجد $\frac{dy}{dx}$ ، حيث: $y = 5x^3 - 4x^2 + 6$.

.....

.....

.....

صفوة معالي الكيت

قاعدة (6) قاعدة اشتقاق ضرب دالتين

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

مشتقة ضرب دالتين = الدالة الأولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الدالة الأولى.

أوجد $f'(x)$: إذا كان $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$

.....

.....

.....

.....

أوجد $f'(x)$: إذا كان $f(x) = (2x + 1)(3x - 2)$

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد $f'(x)$: $f(x) = 4x^2(x + 6)$

.....

.....

.....

.....

أوجد $f'(x)$: $f(x) = (x^3 - 4)^2$

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

2025-2026

أوجد معادلة الخط العمودي على المماس لمنحنى الدالة f حيث $f(x) = (x^3 + 1)^8 + 2x$ عند النقطة $(0, 1)$.

صفوة معلمي الكويت

قاعدة (6) قاعدة القسمة

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad ; \quad g(x) \neq 0$$

مشتقة قسمة دالتين = (اشتق البسط × ثبت المقام – ثبت البسط × اشتق المقام) / مربع المقام

أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \frac{x^3-1}{5x^2+1}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \frac{4x^2+2x}{2x^3+5}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

2021-2022

أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم عند النقطة $(1,\frac{2}{3})$ لمنحنى الدالة f حيث $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+1}$

صفوة معلمي الكويت

أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة f حيث $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$ عند النقطة $(1\ ,\ 0)$

صفوة معلمي الكويت

2016-2017

أوجد معادلة المماس لمنحنى الداله f : $f(x)=\frac{3x-4}{x+2}$ عند $x=0$

صفوة معلمي الكويت

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f : f(x) = \frac{5x-7}{x^2-2}$ عند النقطة A(1,2) 2014-2015

صفوة معلمي الكويت

**** اذا كان البسط عدد (حد ثابت) فإن الاشتقاق ((سالب البسط ضرب مشتقة المقام على مربع المقام))**

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $y = \frac{8}{4+x^2}$ عند $x = 2$ **2019-2020**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $y = \frac{8}{4+x^2}$ **عند النقطة (2,1)** **2022-2023**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

2024-2025

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة f حيث $f(x)=\sqrt{x^2+5}$ عند النقطة $(2,3)$

لتكن : $y=\frac{x^2+3}{2x}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x=1$.

لتكن : $y=\frac{3x^2+7}{8x^2}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x=-1$.

صفوة معلمي الكويت

لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & : x \le 1 \\ 2x+1 & : x > 1 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها. أوجد $f'(x)$ إن أمكن.

صفوة معلمي الكويت

2019-2020

لتكن الدالة f : $a)\ f(x)=\begin{cases}x^2+1 & : x\le 2\\ 4x-3 & : x>2\end{cases}$ دالة متصلة على مجالها أوجد $f'(x)$ إن أمكن:

صفوة معلمي الكويت

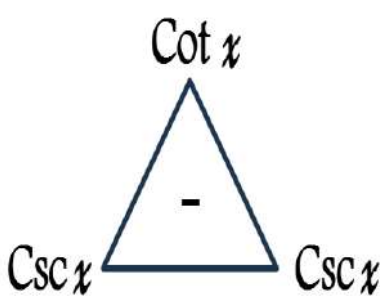
2017-2018

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & : \quad x<1\\ 2\sqrt{x} & : \quad x\geqslant 1\end{cases}$$

أوجد $f'(x)$ وعيّن مجالها

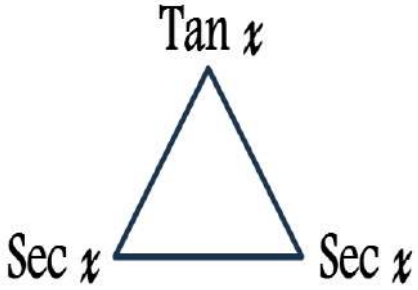
صفوة معلمي الكويت

بند (4 – 2) مشتقات الدوال المثلثية



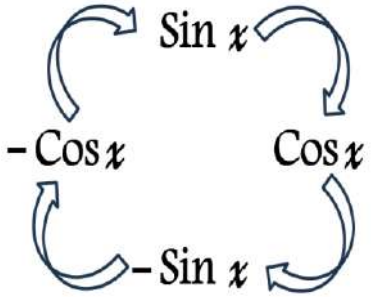
$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$



$$(\tan x)' = sec^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$



$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

أوجد المشتقات للدوال التالية:

$y = x^2 sinx$

.....

.....

.....

.....

.....

$u = \frac{\cos x}{1-sin\, x}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

$$f(x) = sin^2 x$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$h(x) = cos^2 x$$

.....

.....

.....

.....

.....

2024-2025

أوجد مشتقة الدالة g حيث $g(x) = \frac{x}{\cos x}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

$$y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$$

2025-2026

$$g(x) = \sec x \,.\, (1 + \sin x)$$

$$h(x) = \csc x + \sin x \,.\, \tan x$$

صفوة معلمي الكويت

$$f(x) = \frac{1+\tan x}{\tan x}$$

$$g(x) = \sec x + \csc x$$

$$h(x) = \frac{\sec x}{\csc x}$$

أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \tan x$ عند النقطة $p(\frac{\pi}{4}, 1)$.

صفوة معلمي الكويت

أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = sec\ x$ عند النقطة $F(\frac{\pi}{3}, 2)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ميل مماس منحنى الدالة f : $f(x) = x^2$ عند $x = -2$ هو 4 ⓐ ⓑ

الدالة f : $f(x) = x + \sqrt{x^2} + 2$ ليست قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ لوجود ركن . ⓐ ⓑ

إذا كانت $y = 5\ cot\left(\frac{2}{x}\right)$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{10}{x^2} csc^2\left(\frac{2}{x}\right)$ ⓐ ⓑ

إذا كانت $f(x) = \sin 2x$ فإن : $f'(x) = 2\cos 2x$ ⓐ ⓑ

الدالة f : $f(x) = x\,|x|$ قابلة للإشتقاق $\forall\, x \in \mathbb{R}$ ⓐ ⓑ

إذا كانت الداله f : $f(x) = \sqrt{x+3}$ فإن $f'(1) = \frac{1}{4}$ ⓐ ⓑ

إذا كانت الداله f : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & : x \geq 1 \\ 4x - 1 & : x < 1 \end{cases}$ فإن مجال f' هو $\mathbb{R}$ ⓐ ⓑ

إن الدالة f : $f(x) = x + \sqrt{x^2} + 2$ ليست قابلة للإشتقاق عند $x = 0$ لوجود

(a) مماس عمودي (b) إنفصال (c) تاب (d) ركن

ميل الناظم لمنحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{x}$ عند $x = -2$ هي :

(a) -2 (b) $\frac{-1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 2

ميل الناظم لمنحنى الدالة : $y = x^3 - 3x + 1$ عند النقطة $(2, 3)$ هي:

ⓐ 9 ⓑ 3 ⓒ $-\frac{1}{3}$ ⓓ $-\frac{1}{9}$

ابو يوسف

إذا كانت $y = \frac{1}{sinx}$ فإن y' تساوي :

ⓐ $cotx\,.csc\,x$ ⓑ $cosx$

ⓒ $-cotx\,.csc\,x$ ⓓ $-cosx$

إذا كانت $y = sin^{-5}x - cos^{3}x$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي

$(a)\ 5sin^{-6}x\,cosx - 3cos^{2}x\,sinx$ $(b)\ 5sin^{-6}x\,cosx + 3cos^{2}x\,sinx$

$(c)\ -5sin^{-6}x\,cosx + 3cos^{2}x\,sinx$ $(d)\ -5sin^{-6}x\,cosx - 3cos^{2}x\,sinx$

إذا كانت : $y = \frac{4}{3\pi}sin\,3t - \frac{4}{5\pi}cos\,5t$ فإن $\frac{dy}{dt}$ تساوي

$(a)\ \frac{4}{\pi}cos\,3t + \frac{4}{\pi}sin\,5t$ $(b)\ \frac{4}{\pi}sin\,3t - \frac{4}{\pi}cos\,5t$

$(c)\ \frac{4}{\pi}cos\,3t - \frac{4}{\pi}sin\,5t$ $(d)\ \frac{4}{\pi}cos\,3t - \frac{4}{\pi}sin\,3t$

إذا كانت الدالة $y = \frac{1}{x} + 5\,sinx$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

ⓐ $-\frac{1}{x^2} - 5\,cosx$ ⓑ $\frac{1}{x^2} + 5\,cosx$

ⓒ $-\frac{1}{x^2} + 5\,cosx$ ⓓ $\frac{1}{x^2} - 5\,cosx$

إذا كانت الدالة f : $f(x) = 3x + tan\,x$ ، فإن $f'(0)$ تساوي

$(a)\ 0$ $(b)\ 1$

$(c)\ 3$ $(d)\ 4$

للدالة f : $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ مماس رأسي معادلته :

$(a)\ x = 0$ $(b)\ x = 1$

$(c)\ y = 0$ $(d)\ y = 1$

إن الدالة f : $f(x) = x + \sqrt{x^2} + 2$ ليست قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ و السبب هو

(a) ناب (b) ركن

(c) مماس عمودي (d) غير متصلة

لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & : x \geq 1 \\ 4x - 1 & : x < 1 \end{cases}$ فإن مجال f' هو

$(a)\ \{1\}$ $(b)\ [1, \infty)$ $(c)\ \mathbb{R}$ $(d)\ \mathbb{R} - \{1\}$

إذا كانت الدالة f : $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}}$ فإن $f'(1)$ تساوي

$(a)\ -\frac{3}{2}$ $(b)\ \frac{3}{2}$ $(c)\ -3$ $(d)\ 3$

بند (5 – 2) قاعدة السلسلة

قاعدة السلسلة (التسلسل) $(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)).g'(x)$

- صورة أخرى لقاعدة السلسلة: $u = g(x)$. $y = f(u)$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

- قاعدة سلسلة القوى: $\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1}.f'(x)$

إذا كان: $g(x) = x^{10}$. $f(x) = 3x^2 + 1$. فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة:

$a)$ $(f \circ g)'(x)$ $b)$ $(g \circ f)'(-1)$

صفوة معلمي الكويت

لتكن $g(x) = x^{13}$. $f(x) = -2x^3 + 4$. أوجد باستخدام قاعدة السلسلة:

$a)\ (g \circ f)'(0)$ $b)\ (f \circ g)'(x)$

صفوة معلمي الكويت

2018-2019

إذا كانت : $f(x) = 2x + 1 \ , \ g(x) = x^3$

(1) أوجد $(g \circ f)'(x)$

(2) أوجد معادلة المماس للدالة $(g \circ f)(x)$ عند النقطة $A(0 , 1)$

صفوة معلمي الكويت

لتكن : $g(x) = x^2 + 1$, $f(x) = \frac{2x+1}{x}$ $(x \neq 0)$

أوجد 1) باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$

2) $(f \circ g)'(1)$

2021-2022

صفوة معلمي الكويت

لتكن: $g(x) = \sqrt{x}$. $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$. أوجد باستخدام قاعدة السلسلة: $(f \circ g)'(1)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$y = u^3 - 3u + 1$, $u = 5x^2 + 2$. أوجد: $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

لتكن : $u = 2x^3 + x$ ، $y = u^2 + 4u - 3$ أوجد : $y' = \frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل 2023-2024

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$y' = \sqrt[5]{(x^2 + 3x + 5)^3}$ ، أوجد: y

.....

.....

.....

.....

.....

$y' = \sqrt[4]{(2x^4 - 3x^2 + 4)^3}$ ، أوجد: y

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

بند (6 – 2) المشتقات ذات الرتب العاليا والاشتقاق الضمني

أوجد مشتقات حتى الرتبة الرابعة للدالة: $y = 2x^7 - 4x^2 + 3x - 5$ بدلالة المتغير x .

.....

.....

.....

.....

.....

إذا كانت: $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$. فأوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة.

.....

.....

.....

إذا كانت: $y = \sin x$ ، بين ان: $y^{(4)} = y$

.....

.....

.....

.....

.....

لتكن الدالة: $y = \cos x$ ، بين ان: $y^{(4)} + y'' = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

أوجد y'' حيث $y = \frac{1}{\cos x}$.

أوجد y'' حيث $y = \frac{1}{\sin x}$.

أوجد: $y' = \frac{dy}{dx}$ $y^2 + xy = 7x$

صفوة معلمي الكويت

2023-2024مكرر2025-2024

لتكن : $y = x + x^2y^5$ ، أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

لتكن: $y^2 = x^2 - 2x$ ، أوجد: $y' = \frac{dy}{dx}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد ميل المماس للمنحنى (الدائرة) الذي معادلته: $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(3, -4)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

2025-2026مكرر2022-2021

أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند النقطة $(1,1)$.

أوجد ميل المماس ($\frac{dy}{dx}$) للمنحنى الذي معادلته: $2y = x^2 + \sin y$ عند النقطة $(2\sqrt{\pi}, 2\pi)$.

صفوة معلمي الكويت

2015-2016

أوجد ميل المماس ($\frac{dy}{dx}$) للمنحنى الذي معادلته : $2y = x^2 - \cos y$ عند النقطة $A(1,0)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد ميل المماس ($\frac{dy}{dx}$) للمنحنى الذي معادلته: $x^2 + y^2 - 2xy = 1$ حيث $x \neq y$ عند النقطة $(2,1)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

2017-2018

للمنحنى الذي معادلته: $2\sqrt{y} + y = x$. أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(3,1)$.

للمنحنى الذي معادلته: $y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$. أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1,1)$

صفوة معلمي الكويت

إذا كانت: $y = \sqrt{1-2x}$. فأثبت ان: $y\,y'' + (y')^2 = 0$.

إذا كانت: $y = x\ sin\,x$ ، فأثبت ان: $y''' + y' + 2\,sin\,x = 0$

إذا كانت: $y = x\ sin\,x$ ، فأثبت أن : $y" + y - 2\,cos\,x = 0$ 2016-2017

صفوة معلمي الكويت

إذا كانت:

$y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ اثبت أن $y' = (y \cdot csc x)^2$

2018-2019

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

إذا كانت $f(x) = (1+6x)^{\frac{2}{3}}$ فإن $f''(x)$ يساوي

(a) $-8(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

(b) $-64(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

(c) $-8(1+6x)^{\frac{4}{3}}$

(d) $-64(1+6x)^{\frac{4}{3}}$ *

إذا كان $x^2 + y^2 = 25$ ، فإن $\dfrac{dy}{dx}$ تساوي

(a) $\dfrac{x}{y}$ (b) $\dfrac{-x}{y}$ (c) $2x + 2y$ (d) $-x$

ميل الخط العمودي على المماس (الناظم) عند النقطة $A(3,2)$ على منحنى : $x^2 - y^2 - 2xy = -7$ هو

(a) -5 (b) $\dfrac{-1}{5}$ (c) $\dfrac{1}{5}$ (d) 5

صفوف معلم الكويت

الوحدة الثالثة : تطبيقات على الاشتقاق

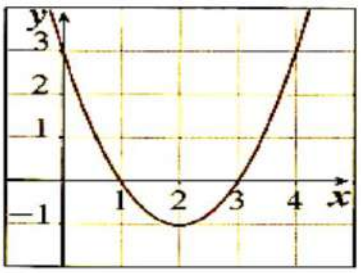
بند (1 - 3) القيم القصوى (العظمى / الصغرى) للدوال

القيم القصوى المطلقة :

تعريف (1): القيم القصوى المطلقة إذا كانت f دالّة مجالها D، $c \in D$، فإن $f(c)$ تسمى:

a) قيمة عظمى مطلقة للدالة f على D عندما: $\forall x \in D_f$, $f(c) \geqslant f(x)$

b) قيمة صغرى مطلقة للدالة f على D عندما: $\forall x \in D_f$, $f(c) \leqslant f(x)$



الشكل يمثّل بيان $y = x^2 - 4x + 3$. أوجد القيم القصوى للدالة على المجالات التالية:

a) $(-\infty, \infty)$

b) $[2,3]$

c) $(1,3)$

d) $[3,4]$

لتكن $(c, f(c))$ نقطة داخلية للدالة f ، D فترة مفتوحة تحوي c تكون $f(c)$:

a) قيمة عظمى محلية عند c عندما: $f(c) \geq f(x)$. $\forall x \in D$

b) قيمة صغرى محلية عند c عندما: $f(c) \leq f(x)$. $\forall x \in D$

تعريف "النقطة الحرجة":

النقطة الداخليّة للدالّة f $(c, f(c))$ تسمى **نقطة حرجة** عندما $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة،

أوجد النقاط الحرجة للدالة: $g(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

أوجد النقاط الحرجة للدالة: $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 10$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

خطوات ايجاد القيم القصوى المطلقة على الفترة المغلقة [a , b]

١) إيجاد قيم الدالة عند النقاط الطرفية: $x = b$. $x = a$

٢) إيجاد النقاط الحرجة للدالة f في الفترة (a , b) إن وجدت.

٣) أكبر قيمة للدالة في الخطوتين ٢، ١ هي قيمة عظمى مطلقة في $[a , b]$ وأصغر قيمة للدلة هي قيمة صغرى مطلقة في $[a , b]$

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[\ 0 , 3\ ]$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة $f : f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[-2, 1]$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2015-2016 إذا كانت الدالة f متصلة على $[1,4]$: أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة في الفترة $[1,4]$ $f(x) = x + \frac{4}{x}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ في الفترة $[\ -2\ ,\ 3\ ]$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = \frac{1}{x^2}$ في الفترة $[\ 1\ ,\ 3\ ]$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

إذا كانت f دالة متصلة على $(a\ ,\ b)$ فإن f لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة .

ⓐ ⓑ

عدد النقاط الحرجة للدالة : $y = 3x^2 - 9x - 4$ على الفترة $(-2\ ,\ 0)$ هو :

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 0

عدد النقاط الحرجة للدالة : $y = 3x^3 - 9x - 4$ على الفترة $(0\ ,\ 2)$ هو :

ⓐ 3 ⓑ 2 ⓒ 1 ⓓ 0

للدالة f : $f(x) = -3x + 1$ قيمة عظمى مطلقة في $[0\ ,\ 3]$ عند

(a) $x = 3$ (b) $x = 1$ (c) $x = 0$ (d) $x = -8$

تزايد وتناقص الدوال

نظرية 4

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a,b):

١) إذا كانت: $f'(x) > 0 \ , \forall x \in (a,b)$ ،فإن الدالة f تتزايد على (a,b)

٢) إذا كانت: $f'(x) < 0 \ , \forall x \in (a,b)$ ،فإن الدالة f تتناقص على (a,b)

٣) إذا كانت: $f'(x) = 0 \ , \forall x \in (a,b)$ ،فإن الدالة f ثابتة على (a,b)

نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت f دالة:

– متّصلة على الفترة $[a\ ,\ b]$

– قابلة للاشتقاق على الفترة $(a\ ,\ b)$

فإنّه يوجد على الأقل $c \in (a,b)$ بحيث $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

بين أن الدالة f : $f(x) = x^2$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0,2]$

ثم أوجد قيمة c التي تنبيء بها النظرية و فسر إجابتك .

2019-2020مكرر2024-2025

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

بيّن أن الدالّة $f(x) = x^2 + 2x$ تحقّق شروط نظريّة القيمة المتوسّطة على الفترة $[-3, 1]$، ثم أوجد قيمة c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

بين أن الدالة f : $f(x) = x + \frac{1}{x}$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ ثم أوجد قيمة c التي تنبئ به النظرية ، فسر اجابتك

2019-2020

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

بين أن الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x + 2$
تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 4]$
ثم أوجد قيمة c التي تنبيء بها النظرية

2016-2017

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

الدالة f: $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة $[-1, 2]$ ⓐ ⓑ

الدالة التي تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطه على الفترة $[-2, 3]$ هي $f(x) =$

(a) $\sqrt[3]{x}$

(b) $\tan x$

(c) $\sqrt{9 - x^2}$

(d) $\frac{1}{x}$

صفوة معلمي الكويت

أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

صفوة معلمي الكويت

لتكن الدالة $f : f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$. حدد الفترات حيث تكون f متزايدة والفترات حيث تكون f متناقصة .

إذا كانت الدالة $f : f(x) = x^3 - 6x$. حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f .

صفوة معلمي الكويت

إذا كانت الدالة f : $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

الدالة f: $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ متناقصة على كل من الفترة $(-\infty , -\sqrt{5})$

والفترة $(\sqrt{5} , \infty)$ (a) (b)

إذا كانت f' : $f'(x) = -3x$ ، فإنّ الدالة f:

(a) متزايدة على الفترة $(0, \infty)$ (c) متزايدة على مجال تعريفها.

(b) متناقصة على الفترة $]-\infty, 0]$ (d) متزايدة على الفترة $(-\infty, 0)$ ومتناقصة على الفترة $(0 , \infty)$

إذا كانت f' : $f'(x) = -x^2$ ، فإن الدالة f :

(a) متزايدة على مجال تعريفها **(c) متزايدة على الفترة $(-\infty , 0)$ فقط**

(b) متناقصة على مجال تعريفها **(d) متناقصة على الفترة $(0 , \infty)$ فقط**

**

بند (3 - 3) ربط المشتقة الأولى "f'" بالمشتقة الثانية "f''" بمنحنى الدالة

نظريّة : (5) اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحليّة

لتكن f دالة متصلة على مجالها وكانت $(c, f(c))$ نقطة حرجة .

1. إذا كانت إشارة المشتقّة f' تتغيّر من الموجب إلى السالب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة عظمى محلية عند c.
2. إذا تغيرت إشارة f' من السالب إلى الموجب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة صغرى محلّية عند c.
3. إذا لم تتغيّر إشارة f' عند $x = c$ ، فإن f لا يكون لها قيمة قصوى محلّية عند c.

إذا كانت الدالة f : $f(x) = X^3 - 12X - 5$. أوجد كلا مما يلي :

a) أوجد النقاط الحرجة للدالة.

b) الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.

c) القيم القصوى المحلية

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

إذا كانت الدالة f : $f(x) = x^3 - 12x - 4$. أوجد كلا مما يلي :

a) أوجد النقاط الحرجة للدالة.

b) الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.

c) القيم القصوى المحلية

2022-2023

صفوة معلمي الكويت

إذا كانت الدالة f : $f(x) = -X^3 + 3X^2 - 4$. أوجد كلا مما يلي :

a) أوجد النقاط الحرجة للدالة.

b) الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.

c) القيم القصوى المحلية

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

إذا كانت $f(x) = ax^2 - 25x$ لها قيمه قصوى محلية عند $x = \frac{5}{2}$ فإن a تساوى :

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

اختبار التقعر

(a) إذا كانت $\forall x \in I$, $f''(x) > 0$ فإن منحنى الدالة f مقعراً للأعلى على I

(b) إذا كانت $\forall x \in I$, $f''(x) < 0$ فإن منحنى الدالة f مقعراً للأسفل على I

تعريف نقطة الانعطاف

تسمى النقطة $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f إذا كانت f دالة متصلة عند c ، ومنحنى الدالة f يغيّر تقعّره عند هذه النقطة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى.

أوجد فترات التقعر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة f : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ 2022-2023مكرر2024-2025

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

أوجد فترات التقعر ونقاط الانعطاف لمنحنى الدالة: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

أوجد فترات التقعر ونقاط الانعطاف $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 5$

صفوة معلمي الكويت

لتكن الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x$

أوجد كلا مما يلي :

(1) النقاط الحرجة للدالة .

(2) الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها .

(3) فترات التقعر ونقاط الانعطاف .

صفوة معلمي الكويت

إذا كانت $f''(c) = 0$ فإن لمنحنى الدالة f نقطة انعطاف هي $(c, f(c))$ (a) (b)

إذا كانت f داله كثيرة حدود ، $(c, f(c))$ نقطة إنعطاف لها فإن :

(a) $f''(c)=0$ (b) $f'(c) = 0$

(c) $f(c) = 0$ (d) $f''(c)$ غير موجودة *

أي من الدوال التالية ليس لها نقطة انعطاف:

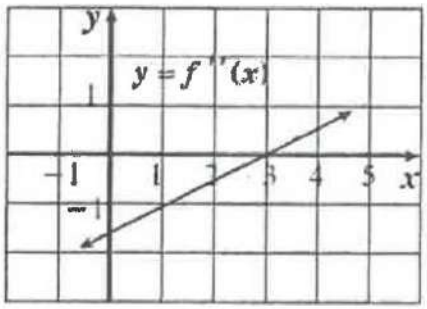
ⓐ $f(x) = x^3 + 5x$ ⓑ $f(x) = 4x^2 - 2x^4$

ⓒ $f(x) = x^3$ ⓓ $f(x) = (x-2)^4$ *

أي منحنيات الدوال التالية يكون مقعراً للأسفل في $(-1, 1)$:

(a) $f(x) = x^3$ (b) $f(x) = -x^3$

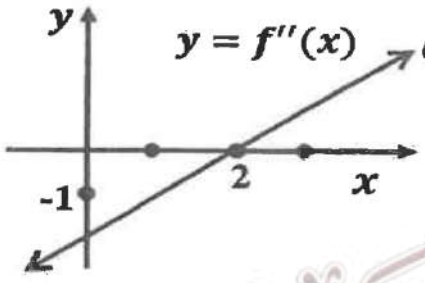
(c) $f(x) = x^2$ * (d) $f(x) = -x^2$



إذا كانت f دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة والشكل المقابل يوضح بيان f'' فإن منحنى f مقعرا للاسفل في الفترة

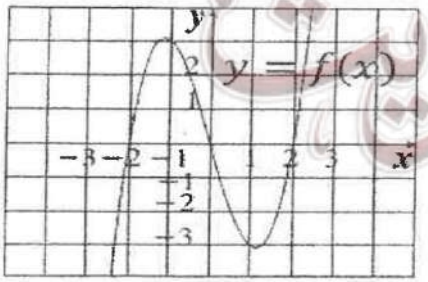
(a) $(-\infty, 3)$ (b) $(3, \infty)$

(c) $(-1,4)$ (d) $(3,5)$



إذا كانت f دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة والشكل المقابل يوضح بيان f'' فإن منحنى f مقعراً لأسفل في الفترة

(a) $(-\infty, 2)$ (b) $(0, \infty)$ (c) $(0, 2)$ (d) $(2, \infty)$



إذا كان بيان الداله f ممثلا بالشكل المقابل :
فإن $f''(x) < 0$ في الفترة

(a) $(-\infty, 0)$ (b) $(0, \infty)$

(c) $(-1, 1)$ (d) $(-\infty, 1)$

اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية

a) إذا كانت $f'(c) = 0$, $f''(c) < 0$ ، فإن تكون لها قيمة عظمى محليّة عند $x = c$

b) إذا كانت $f'(c) = 0$, $f''(c) > 0$ ، فإن تكون لها قيمة صغرى محليّة عند $x = c$

استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للدالة: $f(x) = x^3 - 12x - 5$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

استخدم اختبار المشتقة الثانية لتجد القيم القصوى المحلية للدالة f: $f(x) = 4x^3 - 12x^2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

بند (4 – 3) رسم بيان الدالة كثيرة الحدود

خطوات دراسة تغير دالة ورسم بيانها

١) عيّن مجال الدالة.

٢) أوجد النهايات عند الحدود المفتوحة لمجال الدالة.

٣) عيّن النقاط الحرجة للدالة.

٤) كوّن جدولًا لدراسة إشارة المشتقة الأولى وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية.

٥) كوّن جدولًا لدراسة إشارة المشتقة الثانية وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت.

٦) أوجد نقاطًا إضافية لتساعد في الرسم "نقاط التقاطع مع المحاور إن لم تكن موجودة".

٧) ارسم بيان الدالة مستخدماً نتائج الخطوات السابقة في الرسم.

صفوة معلمي الكويت

لتكن الدالة f : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

(1) أوجد النقاط الحرجة للدالة.

(2) أوجد الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها .

(3) أوجد فترات التقعر ونقاط الانعطاف.

(4) ارسم بيان الدالة.

صفوة معلمي الكويت

.....

.....

.....

.....

.....

.....

X					
F(x)					

صفوة معلمي الكويت

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ ثم ارسم بيانها ٢٠١٨-٢٠١٩

صفوة معلمي الكويت

.....

.....

.....

.....

.....

X					
F(x)					

صفوة معلمي الكويت

إدرس تغير الدالة f : $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ ثم إرسم بيانها ٢٠١٥-٢٠١٦

صفوة معلمي الكويت

.....

.....

.....

.....

.....

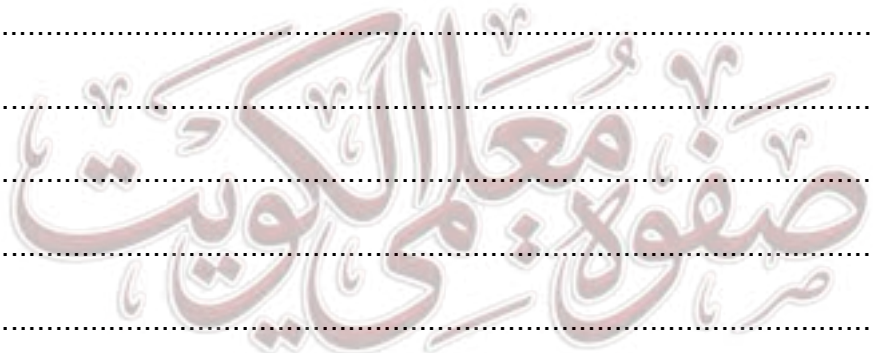
.....

X					
F(x)					

صفوة معلمي الكويت

ادرس تغير الدالة $f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها.

٢٠١٧-٢٠١٨



.....

.....

.....

.....

.....

.....

X					
F(x)					

صفوة معلمي الكويت

ادرس تغير الدالة $f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها.

صفوة معلمي الكويت

.....

.....

.....

.....

.....

.....

X					
F(x)					

صفوة معلمي الكويت

بند (5 – 3) تطبيقات على القيم القصوى

عددان موجبان مجموعهما 100 ، ومجموع مربعيهما أصغر ما يمكن، ما العددان 2024-2023

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد عددين مجموعهما 14 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن. 2025-2026

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

أوجد عددين موجبين مجموعهما 20 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أثبت أن من بين المستطيلات التي محيطها $8\ cm$. واحد منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعاً. 2018-2019

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

تعطي الدالة: $v(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$. حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h .

a) أوجد الارتفاع $h\,(cm)$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة.

b) ما قيمة هذا الحجم ؟.

.....

.....

.....

.....

.....

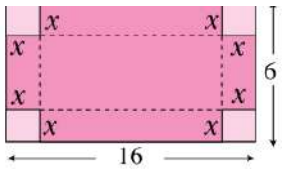
.....

.....

.....

.....

.....



يراد صنع صندوق بدون غطاء بقص مربعات متطابقة طول ضلع كل منها X من أركان طبقة صفيح أبعاده 6 cm , 16 cm وثني جوانبها إلى أعلى أوجد قيمة X بحيث يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن وما حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

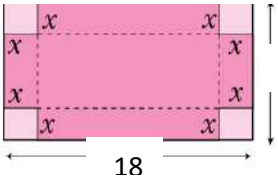
.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

يراد صنع صندوق بدون غطاء بقص مربعات متطابقة طول ضلع كل منها X من أركان طبقة صفيح أبعاده 15 cm , 18 cm وثني جوانبها إلى أعلى أوجد قيمة X بحيث يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن وما حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ما أكبر مساحة ممكنة لمثلث قائم الزاوية وطول وتره يساوي **6 cm** ؟ وما أبعاده ؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أصغر محيط ممكن لمستطيل مساحته $16\ cm^2$ هو $16\ cm$ (a) (b)

مستطيل مساحته $36\ cm^2$ فإن أبعاده التي تعطي أصغر محيط هي:

(a) 9 cm , 4 cm (b) 12 cm , 3 cm

(c) 6 cm , 6 cm (d) 18 cm , 2 cm

ابو يوسف

الوحدة الرابعة : الاحصاء

بند (1 – 4) التقدير بفترة الثقة

المعلمة: هي ثابت يصف المجتمع أو يصف توزيع المجتمع كالمتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ

الإحصاءة: هو اقتران تتعين قيمته من العينة كالمتوسط الحسابي $\overline{x}$ أو الانحراف المعياري S

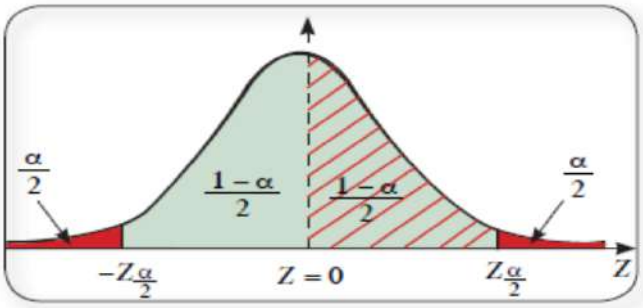
تقدير المعلمة: هو إحصاءة تعتمد على قيم العينة وتعكس قيمة قريبة لمعلمة المجتمع ككلّ وتوزيعه.

فترة الثقة: هي فترة طرفاها متغيران عشوائيان (أي أنها فترة عشوائية) تحوي إحدى معالم المجتمع بنسبة معينة تسمى درجة الثقة (مستوى الثقة).

التقدير بفترة الثقة: هو إيجاد فترة معينة يتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة أو احتمال معيّن

α: نسبة الخطأ في التقدير وتسمى **مستوى المعنوية** أو مستوى الدلالة.

$1-\alpha$: درجة الثقة أو مستوى الثقة



القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ ملاحظة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$

	العينة	المجتمع
المتوسط الحسابي	$\overline{x}$	μ
الانحراف المعياري	s	σ
التباين	s^2	σ^2

أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى الثقة 95 % . باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى الثقة 97 % . باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

	الانحراف المعياري σ				الانحراف المعياري σ	
$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{S}{\sqrt{n}}$	$n \leq 30$ درجات الحرية $(n-1)$	غير معلوم	$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{S}{\sqrt{n}}$	$n > 30$	$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$n > 30$ $n \leq 30$ معلوم

ملاحظة: عند إيجاد فترة الثقة سنكتفي بدرجة الثقة 95% والتي تناظرها القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ (من جدول التوزيع الطبيعي المعياري).

أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهن فإذا كان حجم عينة الإناث $n = 40$ والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 12.5$ ، والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 76.3$.

2018-2019

استخدم مستوى ثقة 95% لإيجاد:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

أجريت دراسة لعينة على عينة أخرى من الإناث حجمها 25 ،

والانحراف المعياري لمجتمع الاناث $\sigma = 3.6$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 18.4$ باستخدام **مستوى ثقة 95%**.

1) أوجد هامش الخطأ.

2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الاحصائي μ

3) فسر فترة الثقة.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2022-2023
2025-2026

عينة عشوائية حجمها 36 ، فإذا كان المتوسط الحسابي للعينة 60 وتباينها 16 باستخدام مستوى ثقة 95%

(1) أوجد هامش الخطأ . (2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 81$ ومتوسطها الحسابي $\bar{x} = 50$ ،

وانحرافها المعياري $S = 9$ ، باستخدام **مستوى ثقة** 95%.

1) أوجد هامش الخطأ.

2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الاحصائي μ

3) فسر فترة الثقة.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 25$ ، فإذا كان الانحراف المعياري للعينة (s) يساوي 10 ، ومتوسطها الحسابي ($\bar{x}$) يساوي 15 ، استخدم مستوى ثقة 95% لإيجاد:

2017-2018

1) هامش الخطأ

2) فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

أوجد فترة ثقة 95% للمتوسط الحسابي للمجتمع الاحصائي μ **علماً أن العينة أخذت من مجتمع طبيعي.**

إذا كان لدينا $n = 13$ ، $S = 0.3$ ، $\bar{x} = 8.4$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

بند (2 – 4) اختبار الفروض الاحصائية

الخطوات المتبعة لإجراء اختبار الفروض الاحصائية

1) صياغة الفروض الإحصائية (فرض العدم H_0 والفرض البديل H_1).

2) التحقق من الانحراف المعياري σ للمجتمع (معلوم أم غير معلوم) وتحديد حجم العينة (n) ومن ثم إيجاد المقياس الإحصائي للاختبار (Z أو t)

3) تحديد مستوى المعنوية α وحساب القيمة الجدولية $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري ،

أو القيمة الجدولية من جدول $t_{\frac{\alpha}{2}}$.

4) تحديد منطقة القبول: $\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}, Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ أو $\left(-t_{\frac{\alpha}{2}}, t_{\frac{\alpha}{2}}\right)$.

5) اتخاذ القرار الإحصائي (قبول فرض العدم) أو (رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل) .

تزعم شركة أن متوسط رواتب موظفيها يساوي 4000 دينار كويتي. إذا اخذت عينة من 25 موظفاً ، ووجد أن متوسط رواتب العينة هو 3950 ديناراً كويتياً. فاذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع (ديناراً)

$\sigma = 125$. وضح كيفية اجراء الاختبار الاحصائي بمستوى ثقة 95%.

صفوة معلمي الكويت

بيّنت الدراسة أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل أسلاك معدنية هو $\mu = 1800\ kg$ مع انحراف معياري $\sigma = 150\ kg$ ، ويؤكد الأخصائيون في المصنع المنتج لهذه الاسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة تحمل هذه الأسلاك، وتأكيدًا على ذلك تمّ اختبار عينة من 40 سلكاً . فتبيّن أن متوسط قوة تحمل هذه الأسلاك يساوي $1840\ kg$.

هل يمكن قبول مثل هذا الفرض بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

صفوة معلمي الكويت

2024-2025

إذا كانت $S = 1.79$, $\bar{x} = 37.2$, $n = 80$

اختبر الفرض بأن $\mu = 37$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

صفوة معلمي الكويت

يعتقد مدير شركة أن متوسط رواتب المستخدمين لديه 290 دينار ، فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 مستخدمين و تبين أن متوسطها الحسابي $\bar{x} = 283$ دينار وإنحرافها المعياري $S = 32$ دينار . فهل يمكن الإعتماد على هذه العينة لتأكيد ما إفترضه باستخدام مستوى ثقة 95 % (علما بأن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي)

2014-2015
مكرر2016-2017

صفوة معلمي الكويت

2019-2020

إذا كانت : $S = 7$, $\bar{x} = 40$, $n = 20$

اختبر الفرض بأن $\mu = 35$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

صفوة معلمي الكويت

إن القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لدرجة الثقة 96% هي 2.055 (a) (b)

متوسط عمر الإطارات في أحد المصانع $\mu = 25000$.من خلال دراسة لعينة عشوائية تبيّن أن المتوسط الحسابي هو $\bar{x} = 27000$ مع انحراف معياري $S = 5000$ إذا كان المقياس الإحصائي $Z = 2$ فإن حجم العينة : $n = 20$ (a) (b)

القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 96.6% هي :

(a)2.21 (b) 2.17

(c)21.2 (d) 2.12

إذا كان القرار رفض فرض العدم و كانت فترة الثقة هي : $(-1.96 , 1.96)$ فإن قيمة الإختبار z يمكن أن تكون :

(a) 1.5 (b) 1.87

(c) -1.5 (d) -2.5

في دراسة لمجتمع إحصائي تبين أن متوسطه الحسابي $\mu = 125$ أخذت عينة من هذا المجتمع حجمها $n = 36$ فتبين أن متوسطهما الحسابي $\bar{x} = 130$ إذا كان المقياس الإحصائي $Z = 3.125$ فإن الإنحراف المعياري σ تحت مستوى ثقة 95% يساوي

(a) -9.6 (b) 6.9

(c) 9.6 (d) -6.9

إذا كان القرار قبول فرض العدم ، وفترة الثقة $(-1.96 , 1.96)$ فإن قيمة الإختبار Z يمكن أن تكون :

(a) -2.5 (b) -2 (c) 1.5 (d) 1.99

لنفترض ان متوسط مجتمع إحصائي يقع ضمن الفترة $62.84 < \mu < 69.46$ فمتوسط هذه العينة يساوى :

(a) 56.34 (b) 62.96 (c) 6.62 (d) 66.15

صفوة معلمي الكويت