الفصل الدراسي الأول

مذكرة الفلاح

الصف الحادي عشر علمي

أ / محمد نوري الفلاح

المحتوَياتُ

الوحدة الأولى: الأعداد الحقيقية

1 – 1 الجذور والتعبيرات الجذرية

1 – 2 الأسس النسبية

1 – 3 حل المعادلات

الوحدة الثانية: الدوال الحقيقية

2 – 1 مجال الدالة

2 – 2 الدوال التربيعية ونمذجتها

2 – 3 الدوال التربيعية والقطوع المكافئة

2 – 4 مقارنة بين صورة معادلة الدالة التربيعية بدلالة إحداثيات رأس المنحنى والصورة العامة

2 – 5 المعكوسات ودوال الجذر التربيعي

2 – 6 حل المتباينات

الوحدة الثالثة: كثيرات الحدود

3 – 1 دوال القوى ومعكوساتها

3 – 2 الدوال الحدودية

3 – 3 العوامل الخطية لكثيرات الحدود

3 – 4 قسمة كثيرات الحدود

3 – 5 حل معادلات كثيرات الحدود

الوحدة الرابعة: الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية

4 – 1 استكشاف النماذج الأسية

4 – 2 الدوال الأسية وتمثيلها بيانيًا

4 – 3 الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانيًا

4 – 4 خواص اللوغاريتمات

4 – 5 المعادلات الأسية واللوغاريتمية

4 – 6 اللوغاريتم الطبيعي

الوحدة الخامسة: المتجهات

5 – 1 المتجه في المستوى

5 – 2 جمع المتجهات وطرحها

5 – 3 الضرب الداخلي

الوحدة السادسة: الجبر المتقطع (الإحصاء)

6 – 1 المجتمع الإحصائي والمعاينة

6 – 2 العينات

6 – 3 أساليب عرض البيانات

6 – 4 الانحراف المعياري

6 – 5 القاعدة التجريبية

6 – 6 القيمة المعيارية

صفوة معلمي الكويت

الجذور التكعيبية

$$(\sqrt[3]{x})^3 = \sqrt[3]{x^3} \quad , \quad \forall\, x \in R$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

مثال(1) صـ 13: أوجد الجذر التكعيبي لكل من الأعداد التالية دون استخدام اللآلة الحاسبة:

-27 , 125 , $-\frac{375}{24}$, - 0.008

تبسيط الجذور : حتى يكون التعبير الجذري في أبسط صورة يجب مراعاة ما يايلي:

- إلا يكون للمجذور عوامل مرفوعة لقوة أكبر من أو تساوي دليل الجذر. مثل $\sqrt{8\ a^6\ b^7}$
- إلا يكون المقام جذرا. مثل $\frac{5}{\sqrt{2}}$ ليس في أبسط صورة.
- إلا يكون المجذور كسرا. مثل $\sqrt{\frac{4}{7}}$ ليس في أبسط صورة.
- أن يكون دليل الجذر أصغر عدد صحيح موجب ممكن. مثل $\sqrt[10]{32}$ ليس في أبسط صورة.

مثال(2) صـ 14: بسط كلا من التعبيرات الجذرية التالية لكل عدد حقيقي x :

1) $\sqrt{4x^6}$

2) $\sqrt[3]{8x^3} + 3x$

3) $\sqrt[3]{-27x^6} + 3x^2$

حاول(2) صـ 14: بسط كلا من التعبيرات الجذرية التالية حيث x ، y عددان حقيقيان:

1) $\sqrt{9\,x^2\,y^4}$

2) $\sqrt{x^8\,y^6}$

صفوة معلمي الكويت

جمع وطرح التعبيرات الجذرية:

لجمع التعبيرات الجذرية وطرحها ، يجب أن تكون متشابهة

يكون التعبيران الجذريان متشابهان عندما يكون لهما دليل الجذر نفسه والمجذور نفسه.

مثال + حاول (4) صـ 15: أوجد الناتج في أبسط صورة :

1) $3\sqrt{32}-\sqrt{98}$

2) $2\sqrt{75}-\sqrt{48}$

3) $\sqrt{12}+\sqrt{147}-\sqrt{27}$

4) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{72}$

صفوة معلمي الكويت

مثال + حاول (4) صـ 15: أوجد الناتج في أبسط صورة :

1) $2\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{375}$

2) $4\sqrt[3]{8}+2\sqrt[3]{128}$

3) $\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{54}-2\sqrt[3]{250}$

4) $\sqrt[3]{320}+\sqrt[3]{40}-\sqrt[3]{135}$

صفوة معلمي الكويت

ضرب وقسمة الجذور التعبيرية والجذور التكعيبية:

الجذور التربيعية	الجذور التكعيبية
$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$	$\forall x, y \in \mathbb{R}$
$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert = x$	$\sqrt[3]{x^3} = x$
$(\sqrt{x})^2 = x$	$(\sqrt[3]{x})^3 = x$
$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$	$\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$
$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, $y \neq 0$	$\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}$, $y \neq 0$

مثال + حاول (5) صـ 17: بسط كلا من التعبيرات الجذرية التالية:

1) $\sqrt{72\,x^3}$, $x \geq 0$

2) $\sqrt{50\,x^4}$

3) $\sqrt[3]{80\,n^5}$

4) $\sqrt[3]{18\,x^3}$

صفوة معلمي الكويت

مثال + حاول (6) صـ 18: بسط كلا من التعبيرات الجذرية التالية:

1) $\sqrt{5x^3} \times \sqrt{40\,x} \quad , \; x \geq 0$

2) $3\sqrt{7x^3} \times 2\sqrt{x^3\,y^2} \quad , \; x \geq 0$

3) $\sqrt[3]{5\,x^3\,y^4} \times \sqrt[3]{64\,x^2\,y^3}$

4) $4\sqrt[3]{x^4\,y} \times 3\sqrt[3]{x^2\,y}$

صفوة معلمي الكويت

مثال + حاول (7) صـ 19: بسط كلا من التعبيرات الجذرية التالية:

1) $\frac{\sqrt{12\,x^4}}{\sqrt{3\,x}}$, $x > 0$

2) $\frac{\sqrt[3]{162\,x^5}}{\sqrt[3]{3\,x^2}}$, $x \neq 0$

3) $\frac{\sqrt[3]{128\,x^{15}}}{\sqrt[3]{2\,x^2}}$, $x \neq 0$

4) $\frac{\sqrt[3]{250\,x^7\,y^3}}{\sqrt[3]{2\,x^2\,y}}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$

صفوة معلمي الكويت

كراسة صـ 9: بسط كلا من التعبيرات الجذرية التالية:

$(3-f)$ $5\sqrt{216\,x^2}+23\sqrt{64\,x^4}$, $x>0$

$(3-k)$ $\sqrt[3]{256\,x^4\,y}\div\sqrt[3]{4\,x^2\,y^{10}}$, $x\neq 0$, $y\neq 0$

صفوة معلمي الكويت

تبسيط كسر مقامه يتضمن جذرا:

إذا كان x , y تعبيرين جذريين يمثلان أعداد غير نسبية وكان ناتج ضرب x في y عدداً نسبيا فإن x, y مترافقان.

مثلا: $\sqrt{2}$ مرافق $\sqrt{2}$ ، مثلا $(3+\sqrt{2})$ مرافق $(3-\sqrt{2})$ ، مثلا $\sqrt[3]{5}$ مرافق $\sqrt[3]{5^2}$

مثال + حاول (8) صـ 20: اكتب كل كسر بحيث يكون المقام عددا نسبيا:

1) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

2) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

3) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}}$

4) $\dfrac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

صفوة معلمي الكويت

مثال + حاول (8) صـ 20: اكتب كل كسر بحيث يكون المقام عددا نسبيا:

1) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$

2) $\frac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$

3) $\frac{5+\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}}$

4) $\frac{4}{3\sqrt{3}-2}$

صفوة معلمي الكويت

كراسة صـ 10:(7) أوجد قيمة التعبير : $x^2 - 6$ ، إذا كان $x = \frac{4}{\sqrt{5}-1}$

كراسة صـ 10:(8) أوجد قيمة التعبير : $x^2 - x + 1$ ، إذا كان $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

صفوة معلمي الكويت

الصورة الأسية	الصورة الجذرية
$25^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{25} = \sqrt[2]{25}$
$27^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[3]{27}$
$64^{\frac{1}{4}}$	$\sqrt[4]{64}$

مثال: بسط كلا مما يلي:

1) $\left(x^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{5}{6}}\right) \div x^{\frac{2}{3}}$, $x > 0$

2) $\left(\frac{16\, x^{14}}{81\, y^{18}}\right)$, $x \geq 0$, $y > 0$

3) $\left[(\sqrt{x^3\, y^3})^{\frac{1}{3}}\right]^{-1}$, $x , y \in Q$

4) $(\sqrt[4]{x} . \sqrt[4]{y^3})^{-12}$, $x , y \in Q^+$

صفوة معلمي الكويت

كراسة صـ 12: (5) **بسط كلا مما يلي:**

$f)\ \dfrac{x^{\frac{2}{3}}.y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}.y^{-\frac{1}{2}}}\ ,\quad x>0\ ,\ y>0$

$i)\ \left(\dfrac{\sqrt{9x}}{\sqrt[3]{27x^2}}\right)^{-12}\ ,\quad x>0$

كراسة صـ 13: (6) **أوجد ناتج ما يلي في أبسط صورة:**

$c)\ \dfrac{\sqrt[3]{8^2}\times\sqrt[4]{32}}{8\sqrt[8]{4}}$

$e)\ \dfrac{(32)^{\frac{1}{2}}\times(16)^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{64}}$

صفوة معلمي الكويت

كراسة صـ 15:(1) أوجد مجموعة حل المعادلة:

$b)\ \sqrt{x+3}=5$

امتحان سابق: أوجد مجموعة الحل للمعادلة:

$2\sqrt{x-3}-3=9$

صفوة معلمي الكويت

مثال (1) صـ 31: أوجد مجموعة الحل للمعادلة: $2 + \sqrt{3x - 2} = 6$

حاول (1) صـ 31: أوجد مجموعة الحل للمعادلة: $\sqrt{5x + 4} - 7 = 0$

صفوة معلمي الكويت

كراسة صـ 15:(1) أوجد مجموعة الحل للمعادلة:

$e)\ \sqrt{3-4x}-2=0$

حاول (5) صـ 34: أوجد مجموعة الحل للمعادلة:

$\sqrt{5x}-\sqrt{2x+9}=0$

مثال (4) صـ 33: أوجد مجموعة الحل للمعادلة: $\sqrt{8x} - 2\sqrt{4x - 16} = 0$

كراسة صـ 15:(3) أوجد مجموعة الحل للمعادلة:

$f)$ $\sqrt{10x} - 2\sqrt{5x - 25} = 0$

صفوة معلمي الكويت

امتحان سابق: أوجد مجموعة الحل للمعادلة: $\sqrt{x+2} = x$

كراسة صـ 15:(3) أوجد مجموعة الحل للمعادلة:

$a)$ $\sqrt{11x+3} - 2x = 0$

مثال (3) صـ 32: أوجد مجموعة الحل للمعادلة: $5 + \sqrt{x - 3} = x$

حاول (3) صـ 33: أوجد مجموعة الحل للمعادلة: $\sqrt{5x - 1} + 3 = x$

صفوة معلمي الكويت

كراسة صـ 15:(3) أوجد مجموعة الحل للمعادلة:

$c)\ \sqrt{-3x-5} = x+3$

مثال (2) صـ 32: أوجد مجموعة الحل للمعادلة:

$2\,(x-2)^{\frac{2}{3}} = 50$

صفوة معلمي الكويت

كراسة صـ 15: (3) أوجد مجموعة الحل للمعادلة:

$j)\ \ 2\,(x-1)^{\frac{4}{3}}+4=36$

امتحان سابق: أوجد مجموعة الحل للمعادلة:

$2(x-4)^{\frac{2}{5}}-8=0$

صفوة معلمي الكويت

حاول (2) صـ 32: أوجد مجموعة الحل للمعادلة: $(1-x)^{\frac{2}{5}}-4=0$

حاول (2) صـ 32: أوجد مجموعة الحل للمعادلة: $2(x+3)^{\frac{3}{2}}=54$

صفوة معلمي الكويت

كراسة صـ 15:(1) أوجد مجموعة الحل للمعادلة:

$d)\ \ (x+1)^{\frac{3}{2}} - 2 = 25$

كراسة صـ 15:(1) أوجد مجموعة الحل للمعادلة:

$f)\ \ 2(2x+4)^{\frac{3}{4}} = 16$

صفوة معلمي الكويت

حاول (6) صـ 36: b) أوجد مجموعة الحل للمعادلة: $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{128}$

حاول (6) صـ 36: c) أوجد مجموعة الحل للمعادلة: $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{81}{16}$

مثال (7) صـ 36: c) أوجد مجموعة الحل للمعادلة: $6^{2x-8} = 1$

حاول (7) صـ 36: a) أوجد مجموعة الحل للمعادلة: $5^{x^2-4} = 1$

صفوة معلمي الكويت

مثال (7) صـ 36: a) أوجد مجموعة الحل للمعادلة: $3^{x^2-1} = 27$

حاول (7) صـ 36: c) أوجد مجموعة الحل للمعادلة: $2^{x^2-4} = 32$

حاول (7) صـ 36: b) أوجد مجموعة الحل للمعادلة: $3^{x^2+5x} = \frac{1}{81}$

مثال (7) صـ 36: b) أوجد مجموعة الحل للمعادلة: $7^{x^2-3x} = \frac{1}{49}$

صفوة معلمي الكويت

امتحان سابق: أوجد مجموعة الحل للمعادلة: $6^{x^2-3x} = 1$

كراسة صـ 16:(7) أوجد مجموعة الحل للمعادلة: $f)\quad 5^x = 125\sqrt{5}$

كراسة صـ 16:(7) أوجد مجموعة الحل للمعادلة: $g)\quad (3^x - 27)(2^x - 1) = 0$

الوحدة الثانية: الدوال الحقيقية مجال الدالة (2-1)

مجال الدوال :

1- مجال الدالة كثيرة الحدود R
2- مجال الدالة مطلق x هو R
3- مجال الدالة الحدودية النسبية هو R ما عدا أصفار المقام
4- مجال الدالة $f(x)=\sqrt[3]{g(x)}$ هو مجال g
5- مجال الدالة $f(x)=\sqrt{g(x)}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق الشرط $g(x)\geq 0$
6- مجال دالة ناتجة عن جمع أو طرح أو ضرب دالتين هو تقاطع مجالي الدالتين
7- مجال دالة ناتج قسمة دالتين هو (مجال البسط ∩ مجال المقام) – أصفار المقام

مثال: أوجد مجال الدوال الاتية:

1) $f(x)=x^2+3x+1$

2) $f(x)=\frac{2x+5}{x-4}$

3) $f(x)=\sqrt{3x-7}+2$

4) $f(x)=\sqrt[3]{2x+1}$

5) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2-5x}{x}}$

صفوة معلمي الكويت

حاول (2) صـ 49: b) أوجد مجال الدالة : $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4 + \sqrt{x-9}$

مثال (2) صـ 48: a) أوجد مجال الدالة : $f(x) = 2x^3 - 4x - \sqrt{2x-6}$

مثال (2) صـ 48: b) أوجد مجال الدالة :

$$f(x) = (2x^2 + x)\sqrt{8 - 2x}$$

امتحان سابق: أوجد مجال الدالة :

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{7-5x}}{x+2}$$

صفوة معلمي الكويت

مثال (2) صـ 48: c) أوجد مجال الدالة :

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{1+x}}{x^2-1}$$

مثال (2) صـ 48: d) أوجد مجال الدالة :

$$f(x)=\frac{4}{\sqrt{-x}}$$

صفوة معلمي الكويت

امتحان سابق: أوجد مجال الدالة :

$$f(x)=\frac{\sqrt{3+x}}{2x+6}$$

امتحان سابق: أوجد مجال الدالة :

$$f(x)=\frac{\sqrt{3-x}}{x-3}$$

صفوة معلمي الكويت

امتحان سابق: أوجد مجال الدالة :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{2-x}$$

امتحان سابق: أوجد مجال الدالة :

$$f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x+3}}$$

صفوة معلمي الكويت

امتحان سابق: أوجد مجال الدالة :

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x-4}}{x^2-9}$$

امتحان سابق: أوجد مجال الدالة :

$$f(x)=\frac{\sqrt{5-x}}{x^2-4}$$

صفوة معلمي الكويت

كراسة صـ 20:(9) أوجد مجال الدالة :

$$f(x)=\frac{\sqrt{-2x+3}}{x-1}$$

حاول (2) صـ 49: c) أوجد مجال الدالة :

$$f(x)=\frac{\sqrt{5-4x}}{x^2+4}$$

الصورة العامة للدالة التربيعية هي:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a,b,c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$

ax^2: حد من الدرجة الثانية — bx: حد من الدرجة الأولى — c: حد مطلق (ثابت)

تمثل الدالة التربيعية بيانيًّا بمنحنى متماثل حول المستقيم الرأسي الذي يمر برأس المنحنى، ويسمى شكل المنحنى **قطعًا مكافئًا** «parabola».

والإحداثي السيني لرأس هذا المنحنى $x = \frac{-b}{2a}$ وهو معادلة المستقيم الرأسي الذي يسمى **محور التماثل**.

تعريف الدالة الخطية:

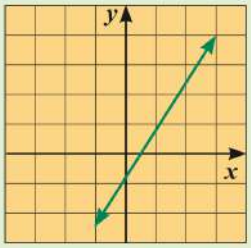
الدالة $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = ax + b$

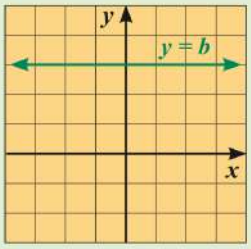
أو $y = ax + b$

حيث $a \in \mathbb{R}$ ، $a \neq 0$

و $b \in \mathbb{R}$ تسمى دالة خطية وبيانها خط مستقيم.



عندما $a = 0$ تكون الدالة $y = b$ ثابتة وبيانها خطًا مستقيمًا أفقيًّا.



مثال + حاول (1) صـ 52: حدد ما إذا ما كانت الدالة خطية أم تربيعية:

1) $f(x) = 2x(x-3)$

2) $f(x) = (3x-4)(x+2)$

3) $f(x) = (x-2)(2x+1)$

4) $f(x) = (2x+3)^2 - 4x^2 - 7x$

5) $f(x) = 3(x^2 - 4x) - 3x^2 + 4$

صفوة معلمي الكويت

معادلة الدالة التي تمثل قطعاً مكافئاً رأسه $(0\,,0)$ هي: $y = a\,x^2$

مثال + حاول (1) صـ 57: كل نقطة مما يلي تقع على قطع مكافيء رأسه نقطة الأصل.

اكتب معادلة تربيعية لهذا القطع المكافيء واذكر ما إذا كان بيانه مفتوحاً إلى أعلى أم إلى أسفل.

1) $F(-1\,,6)$

2) $H(-4\,,-8)$

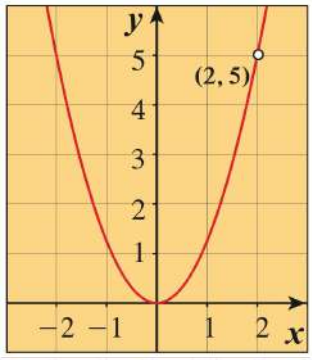
3) $E(4\,,2)$

4) $D(1\,,-5)$

صفوة معلمي الكويت

حاول (2) صـ 59: البيان المقابل يمثل دالة: $y = a\,x^2$

أوجد معادلة هذه الدالة.



معادلات بعض القطوع المكافئة بدلالة إحداثيات رؤوسها وخواصها

المعادلة في الصورة: $y = a(x-h)^2 + k \quad , a \neq 0 \quad , \quad h, k \in R$

تسمى **معادلة القطع المكافئ بدلالة إحداثيات رأسه (h, k)**

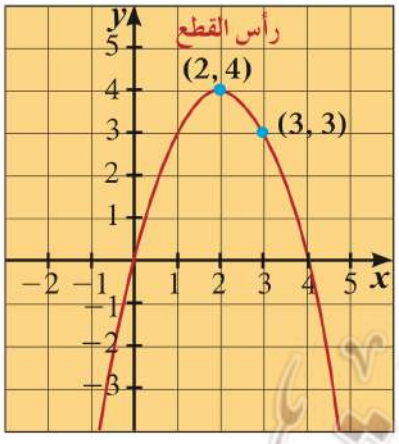
بعض خواص القطوع المكافئة

المعادلة على الصورة: $y = a(x-h)^2 + k$، هي دالة مكتوبة بدلالة إحداثيات الرأس، وهذه المعادلة تمدك بالمعلومات التالية:

- رأس المنحنى هو النقطة (h, k)، ومحور التماثل هو الخط: $x = h$
- تكون فتحة القطع المكافئ إلى الأعلى عندما تكون a موجبة، وتكون فتحة القطع المكافئ إلى الأسفل عندما تكون a سالبة.
- إذا كان $|a| < 1$، فإن الرسم سوف يكون أوسع من رسم الدالة: $y = x^2$
- إذا كان $|a| > 1$، فإن الرسم سوف يكون أضيق من رسم الدالة: $y = x^2$

مثال (3) صـ 59: اكتب معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $V(3\,,4)$ ويمر بالنقطة $P(5\,,-4)$

حاول (3) صـ 60: أوجد معادلة القطع المكافئ في الرسم المقابل.



صفوة معلمي الكويت

مثال (4) صـ 60: ارسم منحنى الدالة: $y = 2(x+1)^2 - 2$ مستخدما خواص القطوع المكافئة.

حاول (4) صـ 61: ارسم منحنى الدالة: $y = (x+3)^2 + 1$ مستخدما خواص القطوع المكافئة.

صفوة معلمي الكويت

مثال (5) صـ 61: ارسم منحنى الدالة: $y = -0.5\ (x-2)^2 + 3$ مستخدما خواص القطوع المكافئة.

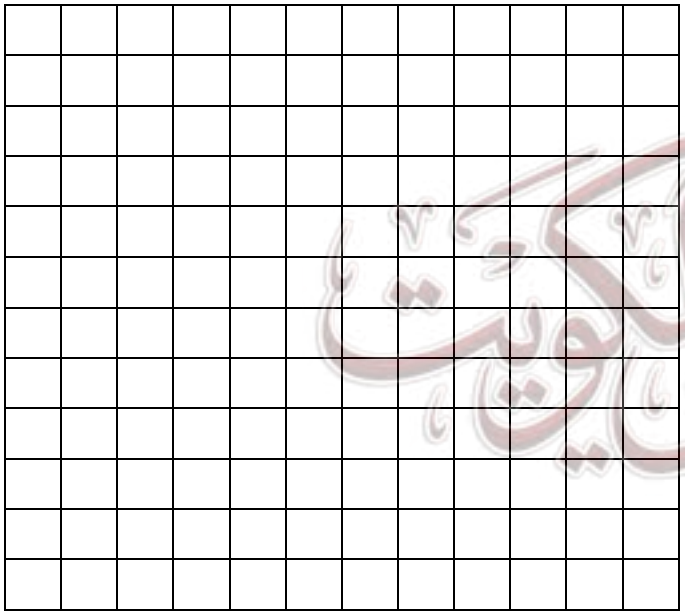
حاول (5) صـ 61: ارسم منحنى الدالة: $y = -2(x-3)^2 - 1$ مستخدما خواص القطوع المكافئة.

صفوة معلمي الكويت

إذا كانت النقطة (a, b) تنتمي إلى بيان دالة فإن النقطة (b, a) تنتمي إلى بيان معكوس هذه الدالة. ولكي ترسم معكوس الدالة بيانيًّا اعكس الترتيب لكل زوج مرتب ينتمي لبيان الدالة.

معكوس الدالة الخطية هو دالة خطية أيضًا.

مثال (1) صـ 71: ارسم بيان الدالة $y = \frac{x-4}{2}$ ومعكوسها ثم اكتب معادلة المعكوس.



صفوة معلمي الكويت

حاول (1) صـ 71: ارسم الدالة $y = -3x + 5$ ومعكوسها، ثم اكتب معادلة المعكوس.

صفوة معلمي الكويت

طريقة أخرى لإيجاد معكوس الدالة جبريًا وهي التبديل بين متغيرات الدالة x, y ثم الحل بالنسبة إلى y

إذا كانت الدالة تستخدم الرمز $f(x)$ عوّض عن $f(x)$ بـ y

مثال (2) صـ 72: أوجد معكوس الدالة $y = 5x - 4$

حاول (2) صـ 72: a) أوجد معكوس الدالة $y = \frac{2x-1}{3}$

حاول (2) صـ 72: b) أوجد معكوس الدالة $y = 2(x + 1) - 3$

صفوة معلمي الكويت

مثال (3) صـ 72: أوجد معكوس الدالة $f(x) = x^2 + 3$

حاول (3) صـ 73: أوجد معكوس الدالة $f(x) = (x + 3)^2 - 4$

صفوة معلمي الكويت

مثال (4) صـ 73: ارسم الدالة: $y = \sqrt{x-4} - 2$ ، وعين المجال والمدى للدالة.

حاول (4) صـ 74: ارسم الدالة: $y = \sqrt{x-2} + 1$ ، وعين المجال والمدى للدالة.

صفوة معلمي الكويت

كراسة صـ 30: (14) ارسم الدالة: $y = -\sqrt{x+3} - 2$ ، وعين المجال والمدى للدالة.

كراسة صـ 30: (12) ارسم الدالة: $y = -\sqrt{x} + 2$ ، وعين المجال والمدى للدالة.

صفوة معلمي الكويت

مثال (1) صـ 75: أوجد مجموعة حل المتباينة: $x^2 - x - 6 < 0$

حاول (1) صـ 76: أوجد مجموعة حل المتباينة: $x^2 + 4x + 3 \leq 0$

صفوة معلمي الكويت

امتحان سابق: أوجد مجموعة حل المتباينة: $x^2 - 7x - 3 \leq 5$

كراسة صـ 32: (1) f) أوجد مجموعة حل المتباينة: $21 + 4x \geq x^2$

كراسة صـ 32: (1) b) أوجد مجموعة حل المتباينة: $2x^2 - 3x - 5 \geq 0$

كراسة صـ 32: (1) a) أوجد مجموعة حل المتباينة: $(x-3)(2x+5)<0$

ملاحظة: عند ضرب طرفي متباينة في عدد سالب نعكس علاقة الترتيب

مثال (2) صـ 76: أوجد مجموعة حل المتباينة: $-x^2 + 7x - 10 \leq 0$

صفوة معلمي الكويت

حاول (2) صـ 77: أوجد مجموعة حل المتباينة: $-2x^2 + 5x - 3 \geq 0$

صفوة معلمي الكويت

مثال (4) صـ 79: a) أوجد مجال الدالة: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

صفوة معلمي الكويت

مثال (4) صـ 79: b) أوجد مجال الدالة: $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$

حاول (4) صـ 80: a) أوجد مجال الدالة: $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

صفوة معلمي الكويت

حاول (4) صـ 80: b) أوجد مجال الدالة: $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

صفوة معلمي الكويت

امتحان سابق: أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{x+1}{x-3} \leq 0$

صفوة معلمي الكويت

امتحان سابق: أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{2x+6}{x+2} \leq 0$

صفوة معلمي الكويت

مثال (5) صـ 81: أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{3x+7}{x+2} \geq 2$

صفوة معلمي الكويت

حاول (5) صـ 81: أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{3x-5}{-2x+3} \geq 0$

مثال (6) صـ 82: أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{x^2-5x+3}{x+4} < 3$

صفوة معلمي الكويت

حاول (6) صـ 82: أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{x^2+5x}{x+3} > -2$

مثال (7) صـ 83: أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{x^2-5x+6}{x-3} > 0$

حاول (7) صـ 83: أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{x^2-49}{x+7} \leq 0$

صفوة معلمي الكويت

الوحدة الثالثة: كثيرات الحدود

دوال القوى ومعوساتها (3-1)

تكون دوال القوى على الشكل:

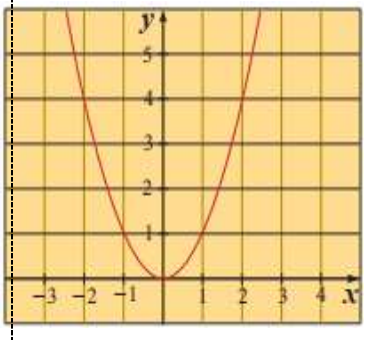
$$y = ax^n \ , \ a \neq 0 \ , \ n \in \mathbb{Z}^+$$

الدوال الزوجية والدوال الفردية Even Functions and Odd Functions

تعريف

تكون الدالة $y = f(x)$ التي مجالها D دالة زوجية إذا وفقط إذا كان:

1. $\forall x \in D \ , \ -x \in D$
2. $f(-x) = f(x)$



في مستوى الإحداثيات، المحور الصادي هو محور تماثل (تناظر) لبيان كل دالة زوجية.

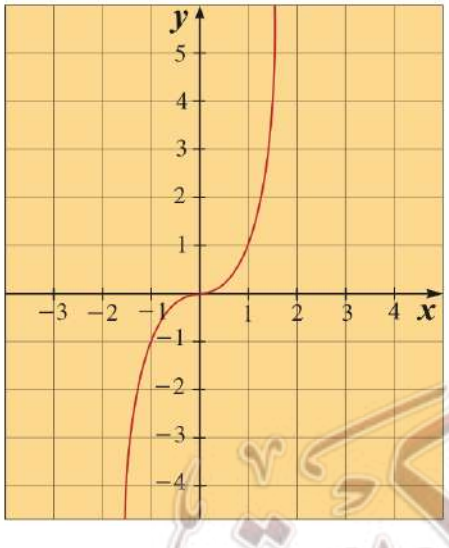
فمثلًا: $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 , h(x) = x^4$، هما دالتان زوجيتان مجال كل منهما $\mathbb{R}$.

تعريف

تكون الدالة $y = f(x)$ التي مجالها D دالة فردية

إذا وفقط إذا كان:

1. $\forall x \in D \ , \ -x \in D$
2. $f(-x) = -f(x)$



في مستوى الإحداثيات نقطة الأصل هي نقطة تماثل (تناظر) لبيان كل دالة فردية.

فمثلًا: $\forall x \in \mathbb{R}$، الدالة: $f(x) = x^3$ هي دالة فردية.

صفوة معلمي الكويت

مثال + حاول (3) صـ 93: بين ما إذا كانت كل دالة مما يلي زوجية أو فردية أو ليست زوجية وليست فردية

1) $f(x) = 2x^7$

2) $f(x) = x^5$

3) $f(x) = x$

4) $f(x) = -x^8$

5) $f(x) = 2x^4$

6) $f(x) = 4$

7) $f(x) = (x+2)^2$

8) $f(x) = (x+3)^3$

صفوة معلمي الكويت

حاول (5) صـ 95: أوجد معكوس الدالة: $y = 5\,x^3$

مثال (5) صـ 95: أوجد معكوس الدالة: $y = 2\,x^4$

صفوة معلمي الكويت

مثال (6) صـ 96: أوجد معكوس الدالة: $f(x) = \sqrt{x+2}$

حاول (6) صـ 96: أوجد معكوس الدالة: $f(x) = \sqrt{x-4}$

امتحان سابق: أوجد معكوس الدالة: $y = \sqrt[5]{x+3}$

صفوة معلمي الكويت

تعريف الدالة الحدودية (كثيرة الحدود)

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

حيث n عدد صحيح غير سالب.

$a_n , a_{n-1} , a_{n-2} \ldots , a_0$ أعدادًا حقيقية

دالة كثيرة حدود

$$P(x) = \boxed{2}x^3 - 5x^2 - 2x - 5$$

المعامل الرئيسي — حد تكعيبي — حد تربيعي — حد خطي — حد ثابت

مثال + حاول (1) صـ 98: اكتب كل كثيرة حدود بالصورة العامة ثم صنفها تبعاً للدرجة وعدد الحدود

1) $-7x + 5x^4$

2) $6 - 2x^5$

3) $4x - 6x + 5$

4) $5x^3 - (4x^2 + 5x^3) + 2x^2$

5) $3x^3 + x^2 - (4x + 2x^3)$

6) $(2l - 5)(l^2 - 1)$

صفوة معلمي الكويت

الوحدة الثالثة: كثيرات الحدود العوامل الخطية لكثيرات الحدود (3-3)

مثال (1) صـ 102: اكتب التعبير: $(x+1)(x+2)(x+5)$ في شكل كثيرة حدود في الصورة العامة.

حاول (1) صـ 102: اكتب التعبير: $(x+1)(x+1)(x-2)$ في شكل كثيرة حدود في الصورة العامة.

صفوة معلمي الكويت

مثال (2) صـ 103: حلل كثيرة الحدود: $2x^3 + 10x^2 + 12x$ إلى عوامل ثم تحقق.

حاول (2) صـ 103: حلل كثيرة الحدود: $12x^3 - 12x^2 + 3x$ إلى عوامل ثم تحقق.

صفوة معلمي الكويت

نظرية العامل

المقدار $(x - a)$ هو عامل خطي لكثيرة الحدود $\Leftrightarrow$ a صفر من أصفار كثيرة الحدود.

ويعني أنه إذا كان $(x - a)$ عاملًا خطيًّا لكثيرة الحدود فإن a صفر من أصفار دالة كثيرة الحدود والعكس صحيح.

فمثلًا $(x - 5)$ عامل خطي لكثيرة الحدود $\Leftrightarrow$ 5 صفر لها.

مثال (5) صـ 106: اكتب دالة كثيرة حدود حيث أصفارها: $3 \ , \ 3 \ , \ -2$ في الصورة العامة.

حاول (5) صـ 106:b) اكتب دالة كثيرة حدود حيث أصفارها: $0 \ , \ -2 \ , \ -4$ في الصورة العامة.

صفوة معلمي الكويت

حاول (5) صـ 106:a) اكتب دالة كثيرة حدود حيث أصفارها: $1 \ , \ -2 \ , \ -4$ في الصورة العامة.

حاول(5)صـ 106:c)اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث 3 صفر مكررمرتين و -1 صفر بسيط.

صفوة معلمي الكويت

مثال (1) صـ 107: a) اقسم x^2+6x+8 على $(x+4)$

مثال (1) صـ 107: b) اقسم $x^2+3x-12$ على $(x-2)$

حاول (1) صـ 108: a) اقسم x^2+5x+6 على $(x+2)$

حاول (1) صـ 108: b) اقسم $2x^2-19x+24$ على $(x-8)$

صفوة معلمي الكويت

مثال (2) صـ 109: تحقق ما إذا كان $(x+4)$ عامل من عوامل كل كثيرة حدود باستخدام القسمة المطولة

1) x^3+3x^2-6x-7

2) x^3+64

صفوة معلمي الكويت

حاول (2) صـ 109: تحقق ما إذا كان كل مقسوم عليه هو من عوامل المقسوم.

1) $(x^3 + 4x^2 + x - 6) \div (x + 2)$

2) $(x^3 - x + 1) \div (x + 1)$

صفوة معلمي الكويت

مثال(3)صـ 111: استخدم القسمة التركيبية لقسمة $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ على $(x + 2)$ ثم أوجد باقي العوامل.

حاول (3) صـ 111: استخدم القسمة التركيبية لقسمة $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ على $(x + 2)$

صفوة معلمي الكويت

مثال (4) صـ 112: استخدم القسمة التركيبية لقسمة $x^3 + 2x^2 + x - 5$ على $(x + 3)$

حاول (4) صـ 112: استخدم القسمة التركيبية لقسمة $x^3 + 4x^2 + x - 6$ على $(x + 1)$

صفوة معلمي الكويت

نظرية الباقي

إذا قسمت كثيرة الحدود $f(x)$ من الدرجة $n \geq 1$ على $(x-a)$ حيث a ثابت، فإن باقي القسمة هو $f(a)$

مثال (7) صـ 115: باستخدام نظرية الباقي أوجد باقي قسمة $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4x + 12$ على $(x+4)$ ثم تحقق باستخدام القسمة التركيبية.

حاول (7) صـ 115: باستخدام نظرية الباقي أوجد باقي قسمة $f(x) = 2x^4 + 6x^3 - 5x^2 - 60$ على $(x+4)$ ثم تحقق باستخدام القسمة التركيبية.

صفوة معلمي الكويت

امتحان سابق: باستخدام نظرية الباقي أثبت أن $(x+2)$ عامل من عوامل x^3-3x^2-6x+8 ثم أوجد باقي العوامل.

امتحان سابق: باستخدام نظرية الباقي أوجد باقي قسمة $f(x)=x^3+15x-9$ على $(x-3)$ ثم تحقق باستخدام القسمة التركيبية.

صفوة معلمي الكويت

مثال (1) صـ 117: أوجد مجموعة حل المعادلة $3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$ بالتحليل ثم تحقق من صحة الحل.

حاول(1)صـ 117: أوجد مجموعة حل المعادلة $4x^3 - 16x^2 - 20x = 0$ بالتحليل ثم تحقق من صحة الحل.

صفوة معلمي الكويت

مثال (2) صـ 117: أوجد مجموعة حل المعادلة: $2x^3 - 4x^2 = 10x$

حاول (2) صـ 118: a) أوجد مجموعة حل المعادلة: $2x^3 = 3x - 5x^2$

صفوة معلمي الكويت

حاول (2) صـ 118: b) أوجد مجموعة حل المعادلة: $x^3 - x^2 - 3x = 0$

مثال (3) صـ 118: a) أوجد مجموعة حل المعادلة: $x^3 + 3x^2 = x + 3$

صفوة معلمي الكويت

مثال (3) صـ 118: b) أوجد مجموعة حل المعادلة: $x^3 - 3x = 6 - 2x^2$

حاول (3) صـ 118: أوجد مجموعة حل المعادلة: $x^3 + 3x^2 - 4x = 8$

صفوة معلمي الكويت

كراسة صـ 49 (16) أوجد مجموعة حل المعادلة التالية باستخدام الأصفار النسبية الممكنة: $x^3 - 7x + 6 = 0$

صفوة معلمي الكويت

حاول (4) صـ 121: a)

أوجد مجموعة حل المعادلة التالية باستخدام الأصفار النسبية الممكنة: $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$

صفوة معلمي الكويت

مثال (4) صـ 120:

a) أوجد مجموعة حل المعادلة التالية باستخدام الأصفار النسبية الممكنة: $x^3 - 4x^2 + 3 = 0$

صفوة معلمي الكويت

مثال (4) صـ 120: b) أوجد مجموعة حل المعادلة التالية باستخدام الأصفار النسبية الممكنة:

$$x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x = 2$$

صفوة معلمي الكويت

حاول (4) صـ 121: 2) أوجد مجموعة حل المعادلة التالية باستخدام الأصفار النسبية الممكنة:

$$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x = 18$$

صفوة معلمي الكويت

الدالة:

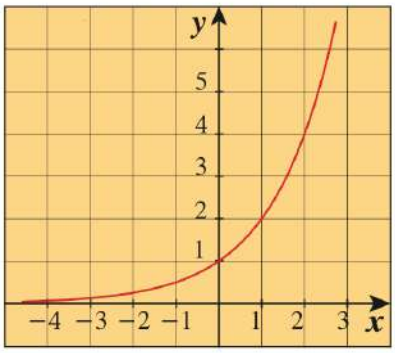
$y = ab^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

(عدد ثابت) $a \in \mathbb{R}^*$

(الأساس) $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

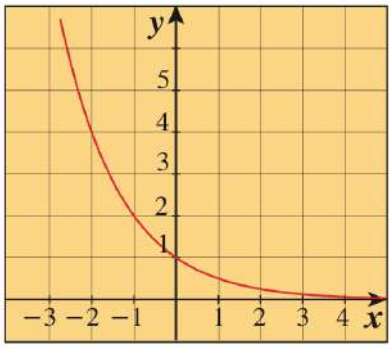
تسمى دالة أسية.

نمو أسي



عندما تكون $b > 1$، فإن الدالة تمثل نموًّا أسيًّا، وتكون b هي عامل النمو.

تضاؤل أسي



عندما تكون $0 < b < 1$، فإن الدالة تمثل تضاؤلًا أسيًّا، وتكون b هي عامل التضاؤل.

مثال (1) صـ 127: مثل بيانيا الدالة: $y = 2^x$. ثم بين ما إذا كانت الدالة تمثل نمواً أسياً أو تضاولاً أسياً وحدد العامل.

صفوة معلمي الكويت

حاول (1) صـ 127: b) مثل بيانيا الدالة: $y = 3^x$. ثم بين ما إذا كانت الدالة تمثل نمواً أسياً أو تضاولاً أسياً وحدد العامل.

حاول (1) صـ 127: a) مثل بيانيا الدالة: $y = 4(2)^x$.ثم بين ما إذا كانت الدالة تمثل نمواً أسياً أو تضاؤلاً أسياً وحدد العامل.

صفوة معلمي الكويت

مثال (2) صـ 127: مثل بيانيا الدالة: $y = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x$.ثم بين ما إذا كانت الدالة تمثل نمواً أسياً أو تضاولاً أسياً وحدد العامل.

حاول (2) صـ 128: a) مثل بيانيا الدالة: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. ثم بين ما إذا كانت الدالة تمثل نمواً أسياً أو تضاولاً أسياً وحدد العامل.

صفوة معلمي الكويت

حاول (2) صـ 128: b) مثل بيانيا الدالة: $y = 2(0.1)^x$.ثم بين ما إذا كانت الدالة تمثل نمواً أسياً أو تضاولاً أسياً وحدد العامل.

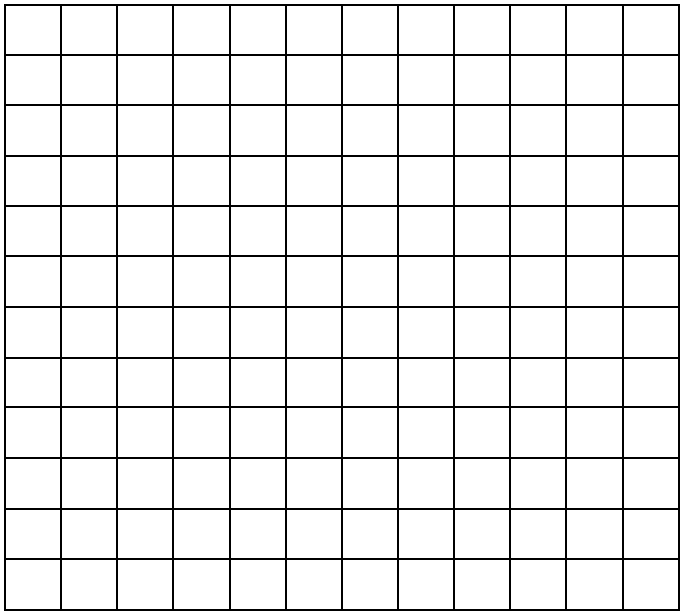
مثال (4) صـ 129: اكتب دالة أسية: $y = a\,b^x$ يمر بيانها بالنقطتين: $Q(3\,,16)$ ، $P(2\,,4)$

صفوة معلمي الكويت

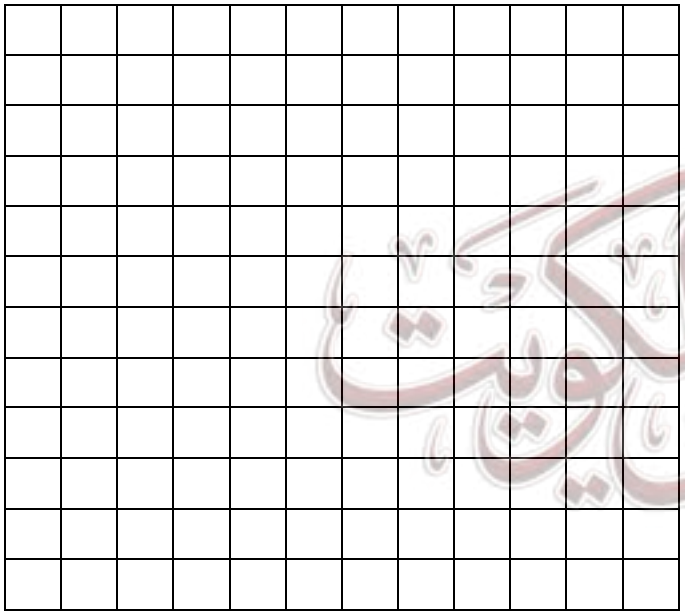
حاول (4) صـ 129: اكتب دالة أسية: $y = a\,b^x$ يمر بيانها بالنقطتين: $S(3\,,16)$ ، $H(2\,,4)$

صفوة معلمي الكويت

مثال (1) صـ 133: مثل بيانياً كلاً من: $y = (\frac{1}{3})^x$, $y = 3^x$ في نفس المستوي الإحداثي.



حاول (1) صـ 133: مثل بيانياً كلاً من: $y = (\frac{1}{5})^x$, $y = 5^x$ في نفس المستوي الإحداثي.



صفوة معلمي الكويت

مثال (2) صـ 134: مثل بيانياً كلاً من: $y = -\frac{1}{2}(2)^x$, $y = \frac{1}{2}(2)^x$ في نفس المستوي الإحداثي.

حاول (2) صـ 134: مثل بيانياً كلاً من: $y = 4(2)^x$, $y = -4(2)^x$ في نفس المستوي الإحداثي.

صفوة معلمي الكويت

امتحان سابق: مثل بيانياً الدالة $y = 2^{x-1} + 2$ مستخدماً دالة المرجع

امتحان سابق: مستخدما دالة المرجع مثل بيانياً الدالة: $y = (3)^{x-3} + 1$

صفوة معلمي الكويت

امتحان سابق: مثل بيانيا الدالة: $y_1 = 2^x$ ومنها مثل بيانيا الدالة: $y_2 = (2)^{x+3} - 2$

مثال (3) صـ 134: مثل بيانيا الدالة: $y_1 = 8\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ومنها مثل بيانيا الدالة: $y_2 = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 3$

صفوة معلمي الكويت

حاول (3) صـ 135: مثل كل دالة مما يلي وذلك بانسحاب لبيان دالة المرجع: $y = 2(3)^x$

1) $y_1 = 2(3)^{x+1}1)$ 2) $y_2 = 2(3)^x - 4$ 3) $y_3 = 2(3)^{x-3} + 1$

صفوة معلمي الكويت

الوحدة الرابعة: الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية — الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانيا (4-3)

تعريف

$\forall y \in \mathbb{R}^+ \quad , \quad b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

يتعين عدد حقيقي x بحيث يكون: $y = b^x \iff \log_b y = x$

أكمل الجدول التالي:

الصورة الأسية	الصورة اللوغاريتمية
$7^2 = 49$	$\log_7 49 = 2$
$10^3 = 1\,000$	$\log_{10} \ldots = \ldots$
$3^5 = 243$	$\log_3 \ldots = \ldots$
$4^{\cdots} = \ldots$	$\log_4 2 = \frac{1}{2}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$	
...	$\log_5 \frac{1}{25} = -2$
$12^0 = 1$	...

مثال + حاول (2) صـ 140: أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

1) $log_8 16$ 2) $log_{10} 100$ 3) $log_9 27$ 4) $log_{64} \frac{1}{32}$

صفوة معلمي الكويت

تعريف: الدالة اللوغاريتمية

$\forall x > 0 \ , \ b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \ , \ f(x) = \log_b x$

فإن الدالة:

تسمى دالة لوغاريتمية أساسها b

مثال (4) صـ 141: أوجد مجال تعريف كل من الدوال التالية:

1) $y = log_5(6x)$

2) $f(x) = \log(3 - x)$

3) $g(x) = log_2(x^2)$

4) $h(x) = 4\, log_3(5 - 3x)$

صفوة معلمي الكويت

حاول (4) صـ 141: أوجد مجال تعريف كل من الدوال التالية:

1) $y = 2 + log_5(x - 2)$

2) $f(x) = \log_4 (x^2 + 1)$

3) $g(x) = log_7(1 - x)$

4) $h(x) = log_8(x) - 2$

مثال (5) صـ 142: استخدم خواص الانعكاس لرسم بيان الدالة: $y = log_2 x$ ومعكوسها.

حاول (5) صـ 143: استخدم خواص الانعكاس لرسم بيان الدالة: $y = log_3 x$ ومعكوسها.

صفوة معلمي الكويت

التمثيل البياني للدالة: $y = \log_b (x-h)+k$ هو انسحاب لبيان دالة المرجع: $y = \log_b x$، h وحدة أفقيًا، k وحدة رأسيًا.

مثال (6) صـ 143: ارسم بيان الدالة: $y = log_6 (x + 2) - 3$ مستخدما دالة المرجع.

حاول (6) صـ 143: ارسم بيان الدالة: $y = log_3 (x - 3) + 1$ مستخدما دالة المرجع.

صفوة معلمي الكويت

خواص اللوغاريتمات: $\forall\ m,n,b\ \in R^+\ ,b\neq 1$

1) $log_b m + log_b n = log_b m\,n$ (الجمع يتحول إلى ضرب)

2) $log_b m - log_b n = log_b \frac{m}{n}$ (الطرح يتحول إلى قسمة)

3) $log_b m^k = k\ log_b m \quad , k \in R$

$log_b 1 = 0 \quad , log_b b = 1 \quad , \quad log_b b^m = m$

$\forall\ a,b\ \in R^*\ , \quad m \in R^* - \{1\} \quad log_m a = log_m b \Leftrightarrow\ a = b$

مثال (1) + حاول صـ 145: أعد كتابة كل مقدار لوغاريتمي مما يلي بصورة لوغاريتم واحد:

1) $log_2 8 - log_2 4$ 2) $3\log_b x + \log_b y$ 3) $3\log_5 2 + \log_5 4 - \log_5 16$

4) $log_5 2 + log_5 6$ 5) $3\log_b 4 - 3\log_b 2$ 6) $4\log_3 2 - \log_3 5 + \log_3 10$

صفوة معلمي الكويت

مثال (2) صـ 145: أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي حيث x , y عددان حقيقيان موجبان.

1) $log_5 \frac{x}{y}$ 2) $\log (3x^4)$ 3) $\log \sqrt{\frac{25}{x}}$

حاول (2) صـ 146: أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي حيث a , b , c أعداد حقيقية موجبة.

1) $log_2 7b$ 2) $\log (\frac{c}{3})^2$ 3) $\log_7 (a^3 b^4)$

صفوة معلمي الكويت

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$
$$a = b \iff \log_m a = \log_m b$$

مثال (1) صـ 150: حل المعادلة التالية، ثم تحقق: $7^{3x} = 20$

مثال (2) صـ 151: حل كلاً من المعادلات التالية:

1) $x^{\frac{2}{3}}$, $x > 0$

2) $\sqrt{m^5} = 32$, $m > 0$

صفوة معلمي الكويت

حاول (2) صـ 152: حل كلاً من المعادلات التالية:

1) $t^{\frac{7}{2}}$, $t > 0$

2) $\sqrt[3]{u^4} - 5 = 11$, $u > 0$

صفوة معلمي الكويت

قاعدة تغيير الأساس :

$$\log_b m = \frac{\log_c m}{\log_c b} \qquad \forall\, m, b, c \in R^+, \quad b \neq 1, c \neq 1$$

مثال (3) صـ 152:

استخدم قاعدة تغيير الأساس لإيجاد قيمة $\log_3 15$ ثم حول $\log_3 15$ إلى لوغاريتم للأساس 2

حاول (1) صـ 153: أوجد قيمة $\log_3 400$ ثم حولها إلى لوغاريتم للأساس 8

صفوة معلمي الكويت

حاول (4) صـ 153: استخدم قاعدة تغيير الأساس لحل المعادلة: $7^{5x} = 3000$

مثال (4) صـ 153: حل المعادلة: $2^{3x} = 172$

حل معادلات لوغاريتمية

مثال (5) صـ 155: حل المعادلة: $\log(3x + 1) = 5$

حاول (5) صـ 155: حل المعادلة: $\log(7 - 2x) = -1$

صفوة معلمي الكويت

مثال (6) صـ 155: حل المعادلة: $2\log x - \log 3 = 2$

حاول (6) صـ 156: حل المعادلة: $\log 6 - \log 3x = -2$

صفوة معلمي الكويت

امتحان سابق: حل المعادلة: $\log x - \log(x-1) = 1$

كراسة صـ 65: (18) أوجد مجموعة حل المعادلة: $\log(2x) + \log(x-3) = log8 \ , \ x \in (3, \infty)$

امتحان سابق: أوجد مجموعة حل المعادلة: $\log(x)+\log(x-3)=log4\,,\ x\in(3,\infty)$

حاول (7) صـ 157: (a) أوجد مجموعة حل المعادلة: $\log x^2-\log(x^2-x)=1\,,\ x\in(1,\infty)$

صفوة معلمي الكويت

مثال (7) صـ 156: (b)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $\log_2(x-1) - \log_2(x+3) = log_2(\frac{1}{x}) \quad , x \in (1, \infty)$

حاول (7) صـ 157: (b) أوجد مجموعة حل المعادلة:

$\log_4(x+6) - \log_4 12 = log_4\, 2 - log_4(x-4) \quad , x \in (4, \infty)$

امتحان سابق: أوجد مجموعة حل المعادلة: $\log x^2 - \log 3 = 2 \quad , x \in (0 , \infty)$

مثال (7) صـ 156: (c) أوجد مجموعة حل المعادلة: $\log_{x+1} 32 = 1 \quad , x \in (0 , \infty)$

كراسة صـ 65:(19) أوجد مجموعة حل المعادلة: $\log(3x) - \log(x+20) = -\log 2$

كراسة صـ 65:(20) أوجد مجموعة حل المعادلة: $\log_{(2x-1)} 64 = 2$

صفوة معلمي الكويت

الوحدة الرابعة: الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية اللوغاريتم الطبيعي (4-6)

مثال (1) صـ 159: استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل: $8\ e^{2x} = 20$

حاول (1) صـ 159: استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل: $e^{4(x+1)} = 32$

صفوة معلمي الكويت

كراسة صـ 67:(17) استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل: $2\ e^{(3x-2)} + 4 = 16$

امتحان سابق: استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل: $9\ e^{2x} - 3 = 24$

حاول (4) صـ 161: (a) استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل: $e^{x+1} = 30$

صفوة معلمي الكويت

حاول (3) صـ 160: (a) استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل: $e^{\frac{2x}{5}} + 7.2 = 9.1$

مثال(4) صـ 161: استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل: $7\ e^{2x} + 2.5 = 13$

صفوة معلمي الكويت

حاول (4) صـ 161: (b) استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل المعادلة: $2^{2x-3} + 4 = 7$

مثال (3) صـ 160: حل المعادلة: $\ln\ (3x + 5) = 4$

امتحان سابق: حل المعادلة: $\ln(4x-1)=5$

حاول (3) صـ 160: (b) حل المعادلة: $5+\ln\left(\frac{x+2}{3}\right)=7$

كراسة صـ 67: (25) حل المعادلة: $\frac{1}{2}\ln x + \ln 2 - \ln 3 = 3 \quad , \quad x \in (0, \infty)$

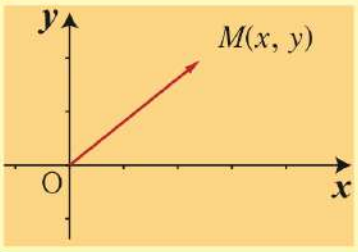
كراسة صـ 67: (28) حل المعادلة: $\ln (5x-3)^{\frac{1}{3}} = 2 \quad , \quad x \in (\frac{3}{5}, \infty)$

صفوة معلمي الكويت

الوحدة الخامسة: المتجهات

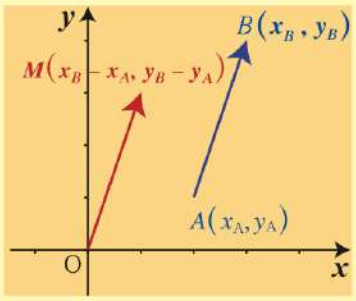
المتجه في المستوي (5-1)

متجه الموضع PositionVector



تعريف

القطعة الموجهة $\overrightarrow{OM}$ التي بدايتها نقطة الأصل ونهايتها $M(x\ ,y)$ تسمى «متجه الموضع» ويمثّلها الزوج المرتب $(x\ ,y)$



تعريف

$\overrightarrow{AB}$ قطعة موجهة في المستوى الإحداثي

حيث $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$

متجه الموضع لهذه القطعة هو القطعة الموجهة $\overrightarrow{OM}$

حيث $M(x_B - x_A\ , y_B - y_A)$

مثال (1) صـ 169: ليكن: $A(2\ ,-1)\ B(7\ ,3)\ ,C(4\ ,2)\ ,M(3\ ,-2)$

1) عين الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضع لكل من: $\overrightarrow{CA}\ ,\ \overrightarrow{BC}\ ,\ \overrightarrow{AB}$

2) إذا كان متجه الموضع $\overrightarrow{OM}$ يمثل القطعة الموجهة $\overrightarrow{AE}$ ، فأوجد إحداثيات E

صفوة معلمي الكويت

حاول (1) صـ 169: ليكن: $A(1,-3)\ B(2,2)\ ,C(2,3)\ ,D(-2,-1)$

1) عين الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضع لكل من: $\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{BD}$

2) متجه الموضع $\overrightarrow{DC}$ يمثل القطعة الموجهة $\overrightarrow{KD}$ ، فأوجد إحداثيات K

صفوة معلمي الكويت

مثال (2) صـ 171: إذا كانت $P(0\ ,3)\ ,L(2\ ,-4)\ ,K(-2\ ,3)$.
فأوجد مركبات كل من المتجهات التالية: $\langle\overrightarrow{LP}\rangle$, $\langle\overrightarrow{PK}\rangle$, $\langle\overrightarrow{KL}\rangle$

حاول (2) صـ 171: إذا كانت $D(-2\ ,-7)\ ,E(3\ ,11)\ ,F(5\ ,13)$.
فأوجد مركبات كل من المتجهات التالية: $\langle\overrightarrow{DE}\rangle$, $\langle\overrightarrow{ED}\rangle$, $\langle\overrightarrow{EF}\rangle$

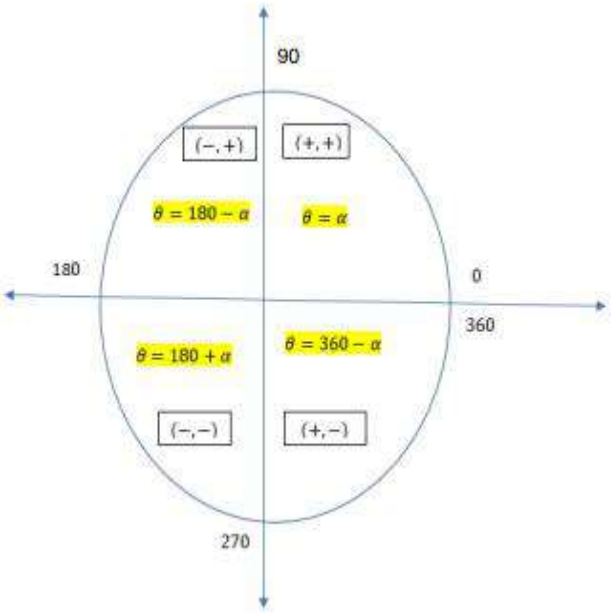
صفوة معلمي الكويت

المتجه $\vec{U} = \langle x , y \rangle$ طوله (معياره) $\|\vec{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

إذا كان معياره يساوي الوحدة يسمى متجه وحدة

زاوية الأسناد α :

$$\alpha = tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right|$$



مثال (3) صـ 172: لكل من المتجهات ارسم متجه الموضع ثم أوجد طول (معيار) المتجه وقياس الزاوية θ التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

1) $\vec{u} = \langle 2 , 3 \rangle$

2) $\vec{v} = \langle -\sqrt{2} , 2 \rangle$

صفوة معلمي الكويت

مثال (3) صـ 172: لكل من المتجهات ارسم متجه الموضع ثم أوجد طول (معيار) المتجه وقياس الزاوية θ التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

1) $\vec{u} = \langle 1 , -3 \rangle$ 2) $\vec{v} = \langle -3 , -1 \rangle$

صفوة معلمي الكويت

حاول (3) صـ 173: لكل من المتجهات ارسم متجه الموضع ثم أوجد طول (معيار) المتجه وقياس الزاوية θ التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

1) $\vec{u} = \langle 2 , 2 \rangle$ 2) $\vec{v} = \langle -1 , -2 \rangle$

صفوة معلمي الكويت

حاول (3) صـ 173: لكل من المتجهات ارسم متجه الموضع ثم أوجد طول (معيار) المتجه وقياس الزاوية θ التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

1) $\vec{u} = \langle -2 , 3 \rangle$ 2) $\vec{v} = \langle 1 , -4 \rangle$

صفوة معلمي الكويت

امتحان سابق: إذا كان المتجه $\vec{t} = \langle -3 , -1 \rangle$ أوجد:

1) طول المتجه $\vec{t}$ 2) قياس الزاوية θ التي يصنعها المتجه $\vec{t}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

صفوة معلمي الكويت

متجه الوحدة

تعريف

المتجه $\overrightarrow{U} = < x,y >$ **هو متجه وحدة إذا كان معياره يساوي الوحدة أي أن:**

$$\| \overrightarrow{U} \| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

فمثلًا $< 1,0 >$، $< 0,1 >$، $< -1,0 >$، $< \frac{4}{5}, \frac{3}{5} >$ هي متجهات وحدة.

مثال (4) صـ 175: إذا كان $\vec{u} = \langle \frac{2}{\sqrt{5}} , y \rangle$ فأوجد قيمة y . بحيث يصبح $\vec{u}$ متجه وحدة.

حاول (4) صـ 175: إذا كان $\vec{v} = \langle x , \frac{12}{13} \rangle$. أوجد قيمة x بحيث يصبح $\vec{v}$ متجه وحدة.

صفوة معلمي الكويت

تساوي متجهين

ليكن: $\vec{A} = < x_A , y_A >, B = < x_B , y_B >$

$\vec{A} = \vec{B} \iff x_A = x_B \ , \ y_A = y_B$

مثال (5) صـ 175: إذا كانت $S(-1 , 6)$, $R(-4 , 2)$, $P(3 , 4)$, $O(0 , 0)$ في المستوي الإحداثي

فأثبت أن: $\langle \overrightarrow{OP} \rangle = \langle \overrightarrow{RS} \rangle$

حاول (5) صـ 175: إذا كانت $D(4 , 8)$, $C(3 , 6)$, $B(1 , 3)$, $A(0 , 1)$ في المستوي الإحداثي

فأثبت أن: $\langle \overrightarrow{CD} \rangle = \langle \overrightarrow{AB} \rangle$

صفوة معلمي الكويت

مثال (6) صـ 176: ليكن المتجهان $\vec{A} = \langle 2x+1\,,\ 3y-1 \rangle$, $\vec{B} = \langle 3\,,\ 2 \rangle$

حيث $x\,,y$ عددان حقيقيان. أوجد قيمتا $x\,,y$ اللتين تحققان $\vec{A} = \vec{B}$

حاول (6) صـ 176: ليكن المتجهان , $\vec{A} = \langle -2x+3\,,\ 4y-1 \rangle$, $\vec{B} = \langle -1\,,\ 3 \rangle$

حيث $x\,,y$ عددان حقيقيان. أوجد قيمتا $x\,,y$ اللتين تحققان $\vec{A} = \vec{B}$

صفوة معلمي الكويت

خواص

1. يكون للمتجهين غير الصفريين $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ الاتجاه نفسه إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي موجب k يحقق $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$
2. يكون للمتجهين غير الصفريين $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ اتجاهين متعاكسين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي سالب k يحقق $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$
3. تكون النقاط A, B, C على استقامة واحدة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير صفري k يحقق $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

مثال (8) صـ 178: إذا كان $\vec{A} = \langle -1 , 2 \rangle$ فأوجد:

1) $2\vec{A}$ 2) $-\vec{A}$ 3) $0.5\vec{A}$

حاول (8) صـ 178: إذا كان $\vec{B} = \langle 3 , -2 \rangle$ فأوجد:

1) $3\vec{B}$ 2) $-5\vec{B}$ 3) $\frac{3}{2}\vec{B}$

صفوة معلمي الكويت

مثال (9) صـ 178: باستخدام خواص المتجهات أثبت أن النقاط $A(2,3)$, $B(-2,5)$ $C(10,-1)$ على استقامة واحدة

حاول (9) صـ 179: باستخدام خواص المتجهات أثبت أن النقاط $K(0,-1)$, $L(2,3)$, $C(-2,-5)$ على استقامة واحدة

صفوة معلمي الكويت

لأي ثلاث نقاط في المستوى تسمى العلاقة: $\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{LN}$ **علاقة شال.**

خواص عملية جمع المتجهات في المستوي Properties of Adding Vectors in the Plane

لأي ثلاثة متجهات $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ في المستوي

- خاصية الإبدال في جمع المتجهات: $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$
- خاصية العنصر المحايد $\vec{0}$: $\vec{A}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{A}=\vec{A}$
- خاصية التجميع في جمع المتجهات: $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$
- خاصية المعكوس الجمعي: $\vec{A}+(-\vec{A})=(-\vec{A})+\vec{A}=\vec{0}$
- خاصية الحذف: $\vec{A}+\vec{C}=\vec{B}+\vec{C} \Rightarrow \vec{A}=\vec{B}$
- خاصية التوزيع مع عدد حقيقي غير الصفر: $K(\vec{A}+\vec{B})=K\vec{A}+K\vec{B}$

مثال (3) صـ 182: ABC مثلث. أوجد:

1) $\vec{L}=\langle\overrightarrow{AC}\rangle+\langle\overrightarrow{BA}\rangle+\langle\overrightarrow{CB}\rangle$

2) $\vec{K}=\langle\overrightarrow{AB}\rangle+\langle\overrightarrow{CA}\rangle+\langle\overrightarrow{BC}\rangle+\langle\overrightarrow{AB}\rangle$

صفوة معلمي الكويت

حاول (3) صـ 182: $ABCD$ مضلع. أوجد:

1) $\langle\overrightarrow{AB}\rangle + \langle\overrightarrow{CD}\rangle + \langle\overrightarrow{BC}\rangle$ 2) $\langle\overrightarrow{AD}\rangle + \langle\overrightarrow{CA}\rangle + \langle\overrightarrow{BC}\rangle + \langle\overrightarrow{DB}\rangle$

مثال (5) صـ 184: ABC مثلث. أثبت أن $\langle\overrightarrow{AB}\rangle - \langle\overrightarrow{AC}\rangle = \langle\overrightarrow{CB}\rangle$

حاول (5) صـ 184: $ABCD$ مضلع في المستوي. أوجد:

1) $\langle\overrightarrow{AB}\rangle + \langle\overrightarrow{CD}\rangle - \langle\overrightarrow{AD}\rangle - \langle\overrightarrow{CB}\rangle$ 2) $\langle\overrightarrow{AB}\rangle - \langle\overrightarrow{AC}\rangle + \langle\overrightarrow{BC}\rangle + \langle\overrightarrow{AD}\rangle$

صفوة معلمي الكويت

إذا كان $\vec{A} = \langle x_A, y_A \rangle , \vec{B} = \langle x_B, y_B \rangle$ فإن:

$$\vec{A} = \overrightarrow{B} \Leftrightarrow x_A = x_B , y_A = y_B$$

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_B - x_A , y_B - y_A \rangle$$

$$\vec{A} + \overrightarrow{B} = \langle x_A + x_B , y_A + y_B \rangle$$

$$\vec{A} - \overrightarrow{B} = \langle x_A - x_B , y_A - y_B \rangle$$

مثال (4) صـ 183: إذا كان $\vec{A} = \langle 2 , 3 \rangle , \vec{B} = \langle -1 , 5 \rangle$ فأوجد: 1) $\vec{A} + \vec{B}$ 2) $2\vec{A} + 3\vec{B}$

حاول (4) صـ 183: إذا كان $\vec{A} = \langle 4 , -2 \rangle , \vec{B} = \langle -7 , 5 \rangle$ فأوجد: 1) $\vec{A} + \vec{B}$ 2) $3\vec{A} + 5\vec{B}$

صفوة معلمي الكويت

مثال (6) صـ 184: إذا كان $\vec{A} = \langle 5\ ,\ 12 \rangle\ ,\vec{B} = \langle 11\ ,\ 7 \rangle$ فأوجد: 1) $\vec{A} - \vec{B}$ 2) $4\ \vec{A} - 6\vec{B}$

حاول (6) صـ 184: إذا كان $\vec{A} = \langle -3\ ,\ 0 \rangle\ ,\vec{B} = \langle 5\ , -9 \rangle$ فأوجد: 1) $\vec{A} - \vec{B}$ 2) $-3\ \vec{A} + 4\vec{B}$

صفوة معلمي الكويت

امتحان سابق: إذا كان $\vec{A} = \langle 2\,,3\rangle$, $\vec{B} = \langle -1\,,2\rangle$ فأوجد:

1) $2\vec{A} + 3\ \vec{B}$ 2) $\vec{A}\,.\,\vec{B}$ 3) $\|\vec{A}\|$

حاول (8) صـ 186: إذا كانت $A(3\,,4\,)$, $B(-2\,,5)$, $C(\,-4\,,-1)$

اكتب كلا من المتجهات $\langle\overrightarrow{OC}\rangle$, $\langle\overrightarrow{OB}\rangle$, $\langle\overrightarrow{OA}\rangle$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$

صفوة معلمي الكويت

الضرب الداخلي لمتجهين Scalar Product

في المستوى الإحداثي لأي متجهين غير صفريين $\vec{A}$, $\vec{B}$

ناتج الضرب الداخلي لهما ويرمز له بالرمز $\vec{A}\cdot\vec{B}$ يساوي ناتج ضرب طولي المتجهين في جيب تمام قياس الزاوية المحددة بهما.

أي أن: $\vec{A}\cdot\vec{B}=\|\vec{A}\|\times\|\vec{B}\|\times\cos(\vec{A},\vec{B})$, $0^\circ\leq m(\vec{A},\vec{B})\leq 180^\circ$

مثال (1) صـ 187: إذا كان $\vec{v}=\langle 3\,,3\rangle$, $\vec{u}=\langle 3\,,\ 0\rangle$ فأوجد $\vec{u}\,.\,\vec{v}$

حاول (1) صـ 187: إذا كان $\vec{v}=\langle 2\,,2\rangle$, $\vec{u}=\langle 0\,,2\rangle$ فأوجد $\vec{u}\,.\,\vec{v}$

صفوة معلمي الكويت

قانون: إذا كان $\vec{A} = \langle x_A, y_A \rangle , \vec{B} = \langle x_B, y_B \rangle$ فإن:

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = x_A . x_B + y_A . y_B$$

$$\vec{A}.\vec{A} = \|\vec{A}\|^2$$

$$\vec{A} \perp \overrightarrow{B} \Leftrightarrow \vec{A}.\overrightarrow{B} = 0 \Leftrightarrow x_A.x_B + y_A.y_B = 0$$

حيث $\vec{A} \neq 0 \ , \vec{B} \neq 0$

مثال (3) صـ 189: إذا كانت $C(-3,-1)$, $B(1,1)$, $A(-2,-3)$ هي رؤوس المثلث ABC .

1) اكتب كلا من المتجهين $\langle \overrightarrow{CB} \rangle$, $\langle \overrightarrow{CA} \rangle$ بدلالة متجهي الوحدة $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$

2) أوجد قيمة $\langle \overrightarrow{CB} \rangle$. $\langle \overrightarrow{CA} \rangle$

3) أثبت أن المثلث ABC قائم في $\hat{C}$

صفوة معلمي الكويت

حاول (3) صـ 189: إذا كانت $C(2,1)$, $B(3,2)$, $A(6,-1)$

1) اكتب كلا من المتجهين $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$ بدلالة متجهي الوحدة $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$

2) أوجد قيمة $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$

3) أثبت أن المثلث ABC قائم في $\hat{B}$

صفوة معلمي الكويت

مثال (4) صـ 189: إذا كان $\vec{B} = \langle 1 , y \rangle$, $\vec{A} = \langle -2 , 3 \rangle$ وكان $\vec{A} \perp \vec{B}$ أوجد قيمة y

حاول (4) صـ 189: إذا كان $\vec{B} = \langle x , -2 \rangle$, $\vec{A} = \langle 3 , -1 \rangle$ وكان $\vec{A} \perp \vec{B}$ أوجد قيمة x

صفوة معلمي الكويت

امتحان سابق: لنأخذ $\vec{v} = \langle 2 , -3 \rangle$, $\vec{u} = \langle x , 4 \rangle$.

1) أوجد قيمة x بحيث يكون $\vec{u}$ متعامد مع $\vec{v}$

2) أوجد قيمة x بحيث يكون $\|\vec{u}\| = 5 \ units$

صفوة معلمي الكويت

$$\vec{A} \parallel \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A} = k\vec{B} \Leftrightarrow x_A . y_B - x_B . y_A = 0$$

مثال (5) صـ 190: (a) أثبت أن $\vec{A} \parallel \vec{B}$ حيث $\vec{A} = \langle -7 , 5 \rangle$, $\vec{B} = \langle 14 , -10 \rangle$

حاول (5) صـ 190: (a) أثبت أن $\vec{A} \parallel \vec{B}$ حيث $\vec{A} = \langle 3 , -2 \rangle$, $\vec{B} = \langle 6 , -4 \rangle$

مثال (5) صـ 190: (b) إذا كان $\vec{A} \parallel \vec{B}$ حيث $\vec{A} = \langle 6 , -8 \rangle$, $\vec{B} = \langle 2 , y \rangle$ أوجد قيمة y

صفوة معلمي الكويت

حاول (5) صـ 190: (b) إذا كان $\vec{A} \parallel \vec{B}$ حيث $\vec{B} = \langle x , \frac{4}{5} \rangle$, $\vec{A} = \langle \frac{7}{3} , \frac{2}{3} \rangle$ أوجد قيمة x

امتحان سابق: إذا كان $\vec{B} = \langle 6 , y \rangle$, $\vec{A} = \langle 3 , -2 \rangle$

1) أوجد قيمة y بحيث $\vec{A} \perp \vec{B}$

2) أوجد قيمة y بحيث $\vec{A} \parallel \vec{B}$

صفوة معلمي الكويت

خواص الضرب الداخلي

$\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ ثلاثة متجهات غير صفرية في المستوى، k عدد حقيقي.

- خاصية الإبدال: $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$
- خاصية التجميع مع عدد حقيقي غير صفري: $\vec{A}\cdot(k\vec{B})=(k\vec{A})\cdot\vec{B}=k(\vec{A}\cdot\vec{B})$
- خاصية توزيع الضرب الداخلي على جمع المتجهات أو طرحها: $\vec{A}\cdot(\vec{B}\pm\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}\pm\vec{A}\cdot\vec{C}$

مثال (6) صـ 191: $\vec{A}$, $\vec{B}$ متجهان في المستوي ، حيث $\vec{A}\ .\ \vec{B}=-3$, $\|\vec{B}\|=2$, $\|\vec{A}\|=3$

أوجد قيمة $(4\vec{A}-3\ \vec{B}).(\vec{A}\ +\ 2\vec{B})$

حاول (6) صـ 191: $\vec{A}$, $\vec{B}$ متجهان في المستوي ، حيث $\vec{A}\ .\ \vec{B}=5$, $\|\vec{B}\|=4$, $\|\vec{A}\|=3$

أوجد قيمة $(3\vec{A}-2\ \vec{B}).(-\vec{A}\ +\ 3\vec{B})$

صفوة معلمي الكويت

قياس الزاوية بين متجهين

$$\cos(\vec{A},\vec{B}) = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|} = \frac{x_A.x_B+y_A.y_B}{\sqrt{{x_A}^2+{y_A}^2}\ \sqrt{{x_B}^2+{y_B}^2}}$$

حيث $0° \le m(\vec{A},\vec{B}) \le 180°$

مثال (7) صـ 192: إذا كان $\vec{A}\ .\ \vec{B} = 15$ ، $\|\vec{B}\| = 6$ ، $\|\vec{A}\| = 5$ فأوجد قياس الزاوية $(\vec{A}\ ,\ \vec{B}\ )$

حاول (7) صـ 192: إذا كان $\vec{A}\ .\ \vec{B} = -3\sqrt{3}$ ، $\|\vec{B}\| = 2$ ، $\|\vec{A}\| = 3$ فأوجد قياس الزاوية $(\vec{A}\ ,\ \vec{B}\ )$

صفوة معلمي الكويت

امتحان سابق: $\vec{A}$, $\vec{B}$ متجهان في المستوي ، حيث $\vec{A} \cdot \vec{B} = -3$, $\|\vec{B}\| = 2$, $\|\vec{A}\| = 3$

1) أوجد قيمة $(4\vec{A} - 3\ \vec{B}).(\vec{A} + 2\vec{B})$

2) أوجد قياس الزاوية $(\vec{A}\ ,\ \vec{B})$

صفوة معلمي الكويت

مثال (8) صـ 193: أوجد قياس الزاوية المحددة بالمتجهين: $\vec{A} = \langle 2 , 2\sqrt{3} \rangle$, $\vec{B} = \langle -4 , 4\sqrt{3} \rangle$

امتحان سابق: إذا كان $\vec{B} = \langle 6 , 3 \rangle$, $\vec{A} = \langle 3 , -1 \rangle$ فأوجد:

1) $2\vec{A} + 3\ \vec{B}$

2) قياس الزاوية المحددة بالمتجهين $(\vec{A} , \vec{B})$

صفوة معلمي الكويت

امتحان سابق: إذا كان $\vec{B} = \langle 0\ ,3 \rangle$, $\vec{A} = \langle -3\ ,4 \rangle$ فأوجد:

1) $2\vec{A} - \vec{B}$

2) قياس الزاوية المحددة بالمتجهين $\left(\vec{A}\ ,\vec{B}\right)$

صفوة معلمي الكويت

امتحان سابق: إذا كان $\vec{v} = \langle 2 , 2 \rangle$, $\vec{u} = \langle 0 , 2 \rangle$ فأوجد:

1) $\|\vec{u}\|$ 2) $\|\vec{v}\|$ 3) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

4) قياس الزاوية المحددة بالمتجهين $(\vec{u} , \vec{v})$

صفوة معلمي الكويت

مثال (1) صـ 198: في كل من المجتمعات الإحصائية التالية حدد نوع المجتمع (منته أو غير منته) ووحدة الدراسة.

1) طلاب الصف الحادي عشر في مدارس دولة الكويت
2) الطيور على سطح الأرض

حاول (1) صـ 199: في كل من المجتمعات الإحصائية التالية حدد نوع المجتمع (منته أو غير منته) ووحدة الدراسة.

1) لاعبو فرق كرة السلة في دولة الكويت.
2) مجتمع الأسماك في مياه الخليج العربي.

مثال (2)صـ 199: هل يمكن استخدام الحصرالشامل في دراسة المجتمعات الإحصائية التالية أم لا؟اذكر السبب.

1) دراسة كمية الدهون الموجودة في الدم.
2) دراسة نسبة عدد الطلاب الذين لون عيونهم أزرق إلى عدد طلاب صفك.

صفوة معلمي الكويت

حاول (2) صـ 200: اكتب مثالاً يبين:

1) دراسة في مجتمع إحصائي يمكن استخدام الحصر الشامل فيها.
2) دراسة في مجتمع إحصائي لا يمكن استخدام الحصر الشامل فيها.

المعاينة

أنواع البيانات

يمكن تصنيف البيانات إلى نوعين: كمية وكيفية كما يبيّن الجدول التالي:

أنواع البيانات	الصفات	أمثلة
بيانات كيفية	اسمية	لون العيون – لون الشعر
	مرتبة	المستوى العلمي – الدرجات التقديرية
بيانات كمية	متقطعة	عدد طلاب الفصل – نقاط مباراة كرة السلة
	مستمرة	أطوال القامات – الأوزان – درجات الحرارة

مثال + حاول (3) صـ 200: حدد نوع البيانات لكل مما يلي:

1) عدد أهداف الدوري العام لكرة القدم في أحد المواسم.
2) ترتيب الدول بحسب المداليات التي حصلت عليها في دورة من دورات الألعاب الأولمبية.
3) لون سيارات معلمي مدرسة ما.
4) عدد أعضاء فريق كرة القدم.
5) الوظيفة (ضابط ، محاسب ، محام ، تاجر مدرس ، ...)
6) أطوال قامات طلاب الصف الحادي عشر.
7) تقديرات الطلاب في مادة اللغة الإنجليزية في جامعة الكويت.

طرق جمع البيانات Ways To Collect Data

عند جمع البيانات يمكن استخدام طرائق متنوعة وذلك بحسب ما هو متوفر وما هو أسهل وهي:

- المشاهدة والملاحظة
- الاستبانة
- البريد العادي أو البريد الإلكتروني
- الهاتف المنزلي أو الهاتف النقال
- المقابلة الشخصية
- الوثائق والسجلات
- الأبحاث التاريخية والأرشيف
- قواعد البيانات
- مواقع التواصل الإجتماعي

صفوف معلم الكويت

العينة العشوائية البسيطة

مثال (1) صـ 203: عدد العاملين في مؤسسة هو90 موظفا مرقمين من 1 إلى 90 . يراد اختيار 7 موظفين لأداء فريضة الحج على نفقة المؤسسة ويتم اختيارهم بطريقة عشوائية. المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداء من الصف السادس والعمود الرابع.

حاول (1) صـ 203: عدد العاملين في مؤسسة هو90 موظفا مرقمين من 1 إلى 90 . يراد اختيار 7 موظفين لأداء فريضة الحج على نفقة المؤسسة ويتم اختيارهم بطريقة عشوائية. المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداء من الصف العاشر والعمود الخامس.

صفوة معلمي الكويت

العينة العشوائية الطبقية

$$\text{كسر المعاينة} = \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}} = \frac{m}{n}$$

$$\text{حجم العينة من كل طبقة} = \text{كسر المعاينة} \times \text{حجم الطبقة المناظرة}$$

مثال (2) صـ 203: لدراسة الأداء الوظيفي والكفاءة لدى الموظفين في أحدى المؤسسات،
تم سحب عينة طبقية مكونة من 80 فراداً من أصل 1600 موظف موزعين كما يبين الجدول التالي:

المجموع	عمال ومستخدمون	تقنيون وفنيون	إداريون
1600	1200	300	100

ما حجم كل عينة عشوائية بسيطة مسحوبة من كل طبقة؟

صفوة معلمي الكويت

حاول (2) صـ 204: لدراسة الأداء الوظيفي والكفاءة لدى الموظفين في أحد المصارف، تم سحب عينة طبقية مكونة من 7 أفراد من 35 موظفا كما يبين الجدول التالي:

المجموع	مستخدمون	محاسبون ومدققون	مدراء أقسام
35	5	20	10

ما حجم كل عينة عشوائية بسيطة مسحوبة من كل طبقة؟

صفوة معلمي الكويت

مثال (3) صـ 204: في إحدى المؤسسات يوجد 100 إداري مرقمين من 100 إلى 199 ، 200 مهندس مرقمين من 200 إلى 399 ، 600 عامل مرقمين من 400 إلى 999.
المطلوب سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 18 فردا لدراسة كفاءة العاملين في هذه المؤسسة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداء من الصف الرابع والعمود الرابع.

صفوة معلمي الكويت

حاول (3) صـ 205: في إحدى المستشفيات يوجد 80 إداري مرقمين من 1 إلى 80 ، 140 طبيباً مرقمين من 81 إلى 220، 240 ممرضاً مرقمين من 221 إلى 460. 40 عاملاً مرقمين من 461 إلى 500 . المطلوب سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 25 فرداً لدراسة كفاءة العاملين وذلك بتكوين عينات عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية

صفوة معلمي الكويت

العينة العشوائية المنتظمة:

$$\text{طول الفترة} = \frac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}}$$

مثال (4) صـ 206: في أحد المصانع حيث عدد العمال 900 مرقمين من 1 إلى 900 . أراد صاحب هذا المصنع مناقشة هؤلاء العمال حول كيفية تحسين الأداء وزيادة الإنتاج. المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها 15 ، باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثامن والعمود العاشر.

حاول (4) صـ 206: في أحد المصانع حيث عدد العمال 900 مرقمين من 1 إلى 900 . أراد صاحب هذا المصنع مناقشة هؤلاء العمال حول كيفية تحسين الأداء وزيادة الإنتاج.المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها 10 ، باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثامن عشروالعمود السابع.

صفوة معلمي الكويت

مثال (5) صـ 207: يبلغ عدد طلاب إحدى مدارس الكويت 700 طالب مرقمين من 1 إلى 700 .
أراد مديرالمدرسة إرسال 10 طلاب لحضور ندوة حول حماية الحيوانات المهددة بالانقراض.
المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها 10 باستخدام جدول الأعداد العشوائية
ابتداءً من الصف الثاني والعشرون والعمود الثالث.

حاول (5) صـ 207: يبلغ عدد طلبة الصف الحادي عشر علمي في إحدى المدارس 140 طالبا مرقمين من 1 إلى 140 .المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها 7 لزيارة دور المسنين وتقديم الهدايا لهم بمناسبة حلول عيد الفطر السعيد باستخدام جدول الأعداد العشوائية
ابتداء من الصف السادس والعمود التاسع.

صفوة معلمي الكويت

الوحدة السادسة: الجبر المتقطع (الإحصاء) القاعدة التجريبية (5-6)

مثال (1) صـ 218: إذا كان المتوسط الحسابي لأرباح إحدى الشركات الصغيرة 350 ديناراً والانحراف المعياري 110 والمنحنى التكراري لأرباح هذه الشركة هو على شكل الجرس (توزيع طبيعي).

1) طبق القاعدة التجريبية.
2) هل وصلت أرباح الشركة إلى 690 ديناراً؟ فسر ذلك.

حاول(1) صـ 218: لاحظت شركة تجارية أن المتوسط الحسابي لأرباحها 475 دينارا بانحراف معياري 115 دينارا.

1) طبق القاعدة التجريبية.
2) هل وصلت أرباح الشركة إلى 750 ديناراً؟ فسر ذلك.

صفوة معلمي الكويت

مثال (2) صـ 219: يعلن مصنع لإنتاج البطاريات المستخدمة في السيارات أن متوسط عمر البطارية من النوع (A) هو60 شهراً بانحراف معياري 10 أشهر
على افتراض أن المنحنى الممثل لتوزيع عمر البطاريات يقترب كثيراً من التوزيع الطبيعي.

1) طبق القاعدة التجريبية.
2) أوجد النسبة المئوية للبطاريات من النوع (A) التي يزيد عمرها عن 50 شهراً بفرض أن ما يعلنه المصنع صحيحاً
3) أوجد النسبة المئوية للبطاريات من النوع (A) التي يقل عمرها عن 40 شهراً بفرض أن ما يعلنه المصنع صحيحاً

صفوة معلمي الكويت

حاول (2) صـ 219: يعلن مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية أن متوسط عمر المصباح الكهربائي من النوع (A) هو $700\ h$ بانحراف معياري $100\ h$
على افتراض أن المنحنى الممثل لتوزيع عمر المصابيح الكهربائية يقترب كثيراً من التوزيع الطبيعي.

1) طبق القاعدة التجريبية.
2) أوجد النسبة المئوية للمصابيح الكهربائية من النوع (A) التي يزيد عمرها عن $500\ h$
3) أوجد النسبة المئوية للبطاريات من النوع (A) التي يقل عمرها عن $400\ h$

صفوة معلمي الكويت

$$\text{القيمة المعيارية} = \frac{\text{قيمة المفردة} - \text{المتوسط الحسابي}}{\text{الانحراف المعياري}} \qquad z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

مثال (1) صـ 220: في أحد الاختبارات نال أحد الطلاب درجة 16 من 20 في مادة الرياضيات حيث المتوسط الحسابي 13 والانحراف المعياري 5 ونال أيضا 16 من 20 في مادة الكيمياء حيث المتوسط الحسابي 14 والانحراف المعياري 4 .ما القيمة المعيارية للدرجة 16 مقارنة مع درجات كل مادة ؟ أيهما أفضل؟

حاول (1) صـ 221: جاءت إحدى درجات طالب في مادة الفيزياء 15 حيث المتوسط الحسابي 14 والانحراف المعياري 3.8 وفي مادة الكيمياء 15 حيث المتوسط الحسابي 13 والانحراف المعياري 7.8

ما القيمة المعيارية للدرجة 15 مقارنة مع درجات كل مادة ؟ أيهما أفضل

صفوة معلمي الكويت

مثال (2) صـ 221: في نتيجة العام الدراسي حصلت الطالبة موضي على 64 درجة في مادة اللغة العربية حيث المتوسط الحسابي 69 والانحراف المعياري 8 . وحصلت على 48 درجة في مادة الجغرافيا حيث المتوسط الحسابي 56 والانحراف المعياري 10 . في أي المادتين كانت موضي أفضل؟

حاول (2) صـ 221: يسكن خالد في المدينة A حيث إن طول قامته $180\ cm$ والمتوسط الحسابي لأطوال قامات الرجال في هذه المدينة $174\ cm$ مع انحراف معياري $12\ cm$. أما صالح فيسكن في المدينة B حيث إن طول قامته $172\ cm$ والمتوسط الحسابي لأطوال قامات الرجال في هذه المدينة $165\ cm$ مع انحراف معياري $15\ cm$. أي منهما أفضل من الاخر مقارنة مع أطوال الرجال في كل مدينة؟

صفوة معلمي الكويت