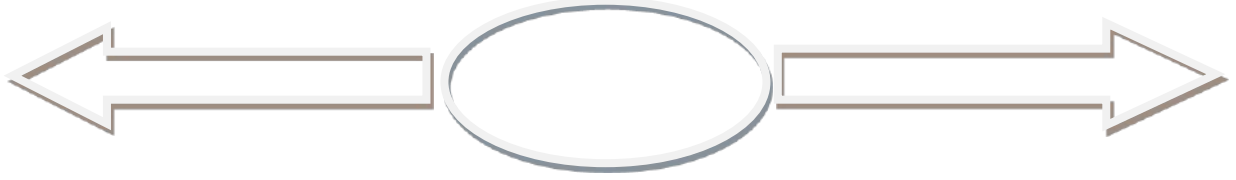




قناة الفلاح للرياضيات



الفصل الدراسي الأول

مذكرة الفلاح

مَرْفُوقٌ مَعَالِ الْكُتُبِ
الصف الثاني عشر علمي



@MOH82FALAH

المحتويات

الوحدة الأولى: النهايات والاتصال

1-1 النهايات

1-2 نهايات تشتمل على $-\infty$ ، ∞

1-3 صيغ غير معينة

1-4 نهايات بعض الدوال المثلثية

1-5 الاتصال

1-6 نظريات الاتصال

1-7 الاتصال على فترة

الوحدة الثانية: الاشتقاق

2-1 معدلات التغير وخطوط المماس

2-2 المشتقة

2-3 قواعد الاشتقاق

2-4 مشتقات الدوال المثلثية

2-5 قاعدة السلسلة

2-6 المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

الوحدة الثالثة: تطبيقات على الاشتقاق

3-1 القيم القصوى (العظمى / الصغرى) للدوال

3-2 تزايد وتناقص الدوال

3-3 ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f

3-4 رسم بيان دوال كثيرات الحدود

3-5 تطبيقات على القيم القصوى

الوحدة الرابعة: الإحصاء

4-1 التقدير

4-2 اختبارات الفروض الإحصائية

4-3 الارتباط والانحدار

النهايات (1-1)

الوحدة الأولى : النهايات والاتصال

الفترة المفتوحة $(c - a, c + a)$ تسمى جواراً للعدد c وفقاً للمعيار $a > 0$.

فمثلاً: الفترة المفتوحة $(3, 5)$ هي جوار للعدد 4 وفقاً للمعيار 1.

والفترة $(1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4})$ هي جوار للعدد 2 وفقاً للمعيار $\frac{1}{4}$.

تعريف (1)

لتكن x كمية متغيرة، c عدداً حقيقياً.

نقول إن x تقترب من c باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكمية $|x - c|$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب.

نشاط



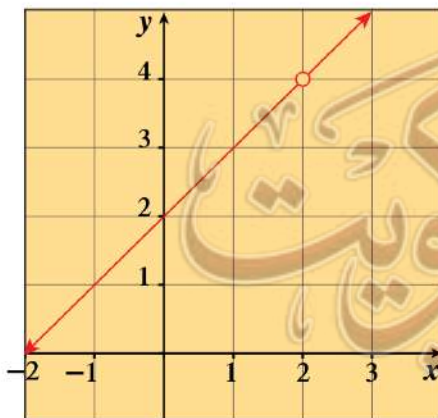
أولاً: لتكن الدالة $f: f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

a أوجد مجال الدالة f .

b هل يمكن إيجاد $f(2)$ ؟

c أكمل الجدول التالي:

x	...	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\rightarrow$	2	$\leftarrow$	2.0001	2.001	2.01	2.1	
$f(x)$							غير معرف						



d ماذا تلاحظ على قيم x ؟

(هل تقترب من عدد محدد؟)

e ماذا تلاحظ على قيم $f(x)$ ؟

(هل تقترب من عدد محدد؟)

الشكل المقابل يمثل بيان f

ثانياً:

a هل يمكن تبسيط الدالة السابقة f ؟ كيف؟

b ارسم بيان الدالة g حيث $g(x) = x + 2$

ثالثاً: قارن بين الدالتين f, g .



تعريف (2)

ليكن L , c عددين حقيقيين، f دالة حقيقية معرفة في جوار أو جوار ناقص للعدد c

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

نكتب:

وتعني أنه عندما تقترب x من c باطراد، فإن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L .

نظرية (1)

يفرض أن L , c عددين حقيقيين

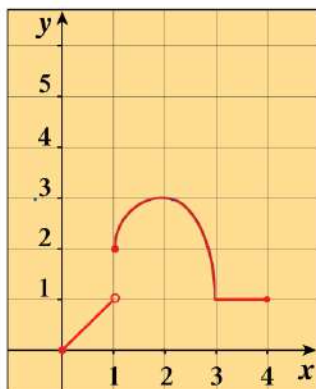
يكون للدالة f نهاية عندما تقترب x من c إذا وفقط إذا كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة اليسار

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \quad \text{ويعبر عن ذلك:}$$

تدريب (1)

الشكل المقابل يمثل بيان الدالة: $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$

أكمل ما يلي:



1 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \dots$

2 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \dots$

3 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \dots$

4 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \dots$

5 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \dots$

6 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \dots$

7 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \dots$

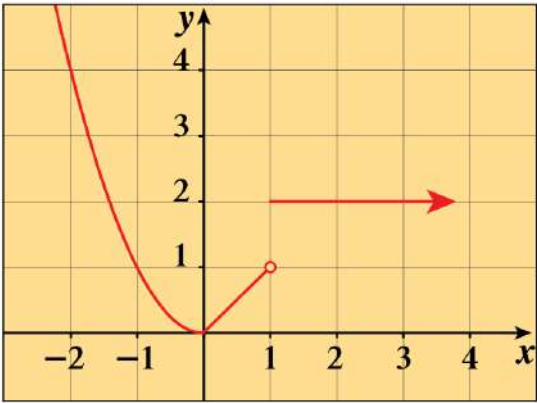
8 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \dots$

9 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \dots$

10 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \dots$

11 $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \dots$





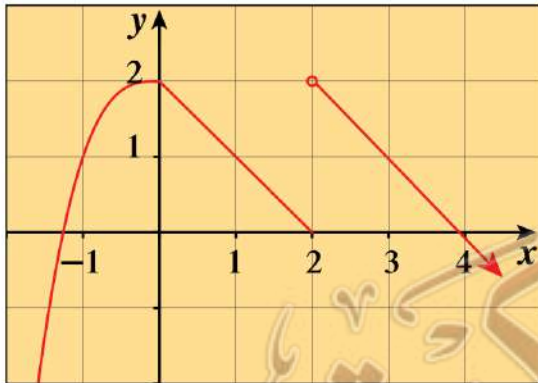
مثال (1) صد 15: الشكل المقابل ، يمثل بيان الدالة f . أوجد إن أمكن:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

3) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

4) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$



حاول (1) صد 15: الشكل المقابل ، يمثل بيان الدالة f . أوجد إن أمكن:

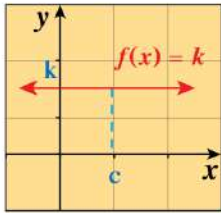
1) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

3) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

4) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$



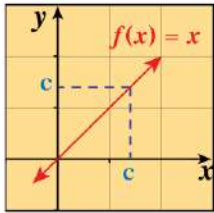


شكل (2)

نظرية (2)

إذا كانت f دالة: $f(x) = k$ وكانا k, c عدداً حقيقيين فإن:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} k = k$$



شكل (3)

نظرية (3)

إذا كانت f دالة: $f(x) = x$ وكان c عدداً حقيقياً فإن:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} x = c$$

نظرية (4)

إذا كانت k, c, M, L أعداداً حقيقية، $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ ، $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L + M$$

a قاعدة الجمع:

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L - M$$

b قاعدة الطرح:

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \cdot M$$

c قاعدة الضرب:

$$\lim_{x \rightarrow c} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \rightarrow c} f(x) = k \cdot L$$

d قاعدة الضرب في ثابت:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \frac{L}{M}, M \neq 0$$

e قاعدة القسمة:

صَفْوَةُ مُعَلِّمِي الْكُوَيْتِ



مثال (2) ص 17: بفرض أن: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 5$ أوجد:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x))$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)}{g(x)}$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) + 4}{f(x) \cdot g(x)}$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ





حاول (2) ص 17: بفرض أن: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -3$ أوجد:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x))$ 2) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \cdot g(x)$ 3) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{8f(x) \cdot g(x)}{f(x) + g(x)} \right)$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ





نظرية (5): دوال كثيرات الحدود ودوال الحدوديات النسبية

Polynomial and Rational Functions

a إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ دالة كثيرة الحدود، c عددًا حقيقيًا، فإن:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0$$

b إذا كانت $f(x), g(x)$ كثيرتي حدود، c عددًا حقيقيًا، فإن:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}, \quad g(c) \neq 0$$

مثال (3) ص 18: أوجد:

1) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^4 - 2x^3 + 5)$

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$

3) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2(2 - x))$

حاول (3) ص 18: أوجد:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 3x^2 - 2x - 17)$

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ



$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & : x < 1 \\ 5 & : x = 1 \\ \frac{5}{x} & : x > 1 \end{cases}$$

مثال (4) صد 19: إذا كانت الدالة f :

فأوجد إن أمكن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & : x < 2 \\ x - 1 & : x > 2 \end{cases}$$

حاول (4) صد 19: إذا كانت الدالة f :

فأوجد إن أمكن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ



$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & : x \leq 0 \\ 1 - 2x & : x > 0 \end{cases}$$

مثال (5) صد 19: إذا كانت الدالة f :

فأوجد إن أمكن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x & : x > 1 \\ \frac{x}{x^2 + 1} & : x \leq 1 \end{cases}$$

حاول (5) صد 19: إذا كانت الدالة f :

فأوجد إن أمكن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

مُعَلِّمَاتُ الْكَوَيْتِ
صَفْوَةُ مِصْبُوح



مثال (6) ص 20: لتكن الدالة f : $f(x) = x^2 - |x + 2|$

- (1) اكتب $f(x)$ دون استخدام القيمة المطلقة.
- (2) أوجد: $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$
- (3) هل للدالة f نهاية عندما $x \rightarrow -2$ ؟

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ



نظرية (6)

بفرض أن $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجودة وكانت n عددًا صحيحًا موجبًا فإن:

a $\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right)^n$

b $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$

(في حالة n عددًا زوجيًا يشترط أن يكون $c > 0$)

c $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$

(في حالة n عددًا زوجيًا يشترط أن تكون $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$)

مثال (7) ص 21: أوجد:

1) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 3x - 1)^5$

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x - 3}$

3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x^2 - 2}}{x - 2}$

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ



حاول (7) ص 22: أوجد:

1) $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x^2 - 5}$

2) $\lim_{x \rightarrow 4} (x + \sqrt{x})^4$

3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 4x + 5}}{x - 2}$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



إلغاء العامل الصفري في المقام

ملاحظات:

- 1 عند التعويض المباشر لقيمة x في كل من البسط والمقام وحصلنا على $\frac{0}{0}$ فإنها تسمى صيغة غير معينة (Indeterminate Form).
- 2 يمكن استخدام التحليل أو القسمة أو الضرب بالمرافق أو غيرها لإيجاد الصيغة المبسطة.

مثال+حاول 8 ص 22-23: أوجد:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$$

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ





مثال+حاول 8 ص 22-23: أوجد:

$$1) \lim_{x \rightarrow -7} \frac{(x+4)^2 - 9}{x^2 + 7x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4+x)^2 - 16}{x}$$

صَفْوَةٌ مَعَالِمُ الْكُوَيْتِ





مثال+حاول 8 ص 22-23: أوجد:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^3 - 8}{x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x)^3 - 27}{x}$$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x^2-1}$$

مثال+حاول 8 ص 22-23: أوجد إن أمكن:

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x+2|}{x^2+3x+2}$$

كراسة ص 10 رقم 14 : أوجد إن أمكن:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x+2|-7}{x^2-25}$$

حاول 8 ص 23 : أوجد إن أمكن:

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ



مثال+حاول 9 ص 24-25: أوجد:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1}}{\sqrt[3]{x + 1}}$

صَفْوَةٌ مَعَ الْعِلْمِ الْكَوْنِيَّاتِ



مثال+حاول 9 ص 24-25: أوجد:

1) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{3 - \sqrt{x}}$

2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt[3]{x + 2}}$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$$

مثال 9 ص 24: أوجد:

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$$

حاول 9 صد 25: أوجد:

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



كراسة ص 10: (15)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}$$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 6x^2 + 2x - 3}{x + 1}$$

مثال 10 ص 25: أوجد إن أمكن:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5 + 32}{x + 2}$$

مثال 10 ص 25: أوجد إن أمكن:

صَفْوَةُ مُعَلِّمَاتِ الْكُوَيْتِ



$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x - 3}$$

حاول 10 صد 26: أوجد إن أمكن:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^5 + x^3 + x + 22}{x - 2}$$

حاول 10 صد 26: أوجد إن أمكن:

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ



الوحدة الأولى : النهايات والاتصال

نهايات تشتمل على ∞ ، $-\infty$ ، $(1-2)$

نظرية (7)

لتكن $f: f(x) = \frac{1}{x}$ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

نظرية (8)

لتكن $f: f(x) = \frac{k}{x^n}$ ، $n \in \mathbb{Z}^+$ ، $k \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{x^n} = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

فمثلاً: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{x^3} = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^4} = 0$ ، ...

حاول 1 ص 30: أوجد إن أمكن:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x^2+9}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x + 1}{x^3 + 5}$$

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ





الوحدة الأولى : النهايات والاتصال

صينغ غير معينة (3 - 1)

مثال+حاول 1 ص 37: أوجد:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - 3x + 1)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^2 + 2x - 4)$$

نظرية (11)

إذا كانت كل من f , g دالة حدودية حيث:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0 \text{ فإن:}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m} : n = m$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 : n < m$$

مثال+حاول 2 ص 39: استخدم النظرية السابقة في حساب كل من:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 3x^3}{2x^3 + 5}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 + 5x + 1}{6x^2 - x + 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{4x^3 - 2x + 3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 1}{7 - 2x^4}$$

صَفْوَةُ مُعَلِّمِي الْكُوَيْتِ



مثال 3 ص 39: إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a x^2 + b x + 3}{2x + 5} = 3$ فأوجد قيمة كل من الثابتين a, b

حاول 3 ص 40: أوجد قيمة كل من الثابتين a, b إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{a x^2 + b x - 3} = 3$

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ



مثال 4 ص 40: أوجد

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 - x}}{x+1}$$

حاول 4 ص 41: أوجد

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}$$

حاول 4 ص 41: أوجد

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



الوحدة الأولى : النهايات والاتصال

نهايات بعض الدوال المثلثية (4 - 1)

نظرية (12)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 , \quad \text{حيث } x \text{ بالراديان}$$

نتيجة (1)

إذا كان a, b عددين حقيقيين، $a \neq 0, b \neq 0$ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$$

فمثلاً:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos ax = 1 , \quad a \in \mathbb{R}$$

مثال+حاول 1 ص 43: أوجد:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x^2 - x}$$

صَفْوَةُ مُعَلِّمِي الْكُوَيْتِ



مثال+حاول 1 ص 43: أوجد:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 3}{\cos x}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x \cos x}$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



مثال+حاول 1 ص 43: أوجد:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1}$$

صَفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



كراسة ص 17 : أوجد:

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



مثال + حاول 2 ص 44 : أوجد:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \tan x}$

مثال + حاول 3 ص 44 : أوجد:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + \sin x}{x}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - x^2}{3x^2}$

صَفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ





مثال 2 + مثال 3 ص 44 : أوجد:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \tan x - 3 \sin x}{4x}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan x + x^2 \cos x}{5x}$

صِفْوَةٌ مَعَ الْعِلْمِ الْكَوْنِيَّةِ



مثال + حاول 3 ص 44 : أوجد:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \tan x - 2x \cos x}{3x}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x + 3x \cos 4x}{5x}$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ

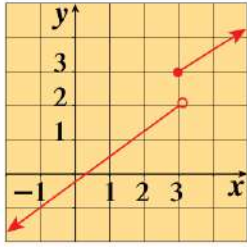


الاتصال (1 - 5)

الوحدة الأولى : النهايات والاتصال

تدريب

1

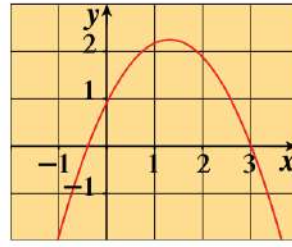


$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \dots\dots\dots$$

$$f(3) \dots\dots\dots$$

ماذا تلاحظ؟

2

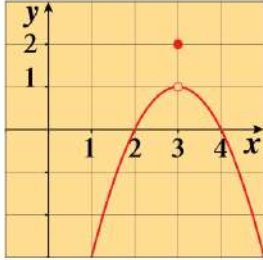


$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \dots\dots\dots$$

$$f(3) \dots\dots\dots$$

ماذا تلاحظ؟

3

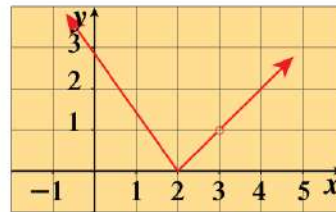


$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \dots\dots\dots$$

$$f(3) \dots\dots\dots$$

ماذا تلاحظ؟

4



$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \dots\dots\dots$$

$$f(3) \dots\dots\dots$$

ماذا تلاحظ؟

تعريف (8): الاتصال عند نقطة

تكون الدالة f متصلة عند $x = c$ في مجالها إذا كانت $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

من التعريف السابق نجد أنه لتكون f متصلة عند c يجب أن تتوافر الشروط الثلاثة التالية:

1 الدالة f معرفة عند $x = c$ أي $f(c)$ موجودة.

2 $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجودة

3 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

وإذا لم يتحقق أي شرط من الشروط السابقة فنقول إن f منفصلة (ليست متصلة) عند $x = c$.





مثال 1 ص 49: لتكن الدالة f : $x \geq 1$: $x^2 + 3x$: $x < 1$: $5x - 1$ $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & : x \geq 1 \\ 5x - 1 & : x < 1 \end{cases}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 1$

صَفْوَةٌ مَعَالِكُوتِ



حاول 1 صد 50: لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^3 + x & : x \leq 0 \\ \frac{x^2}{x+1} & : x > 0 \end{cases}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



حاول 2 صد 50: لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & : x < 2 \\ 1 & : x = 2 \\ x^2 + 1 & : x > 2 \end{cases}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



مثال 2 صد 50: لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & : x > 3 \\ 7 & : x \leq 3 \end{cases}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 3$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ





كراسة ص 17: (9) لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & : x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & : x = 1 \end{cases}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 1$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ





كراسة ص 17: (8) لتكن الدالة f : $x > 3$: $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{|x|}$: $x \leq 3$: $f(x) = 7$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 3$

مُعَلِّمُ الْكُوفَةِ
صَفْوَةُ مِيَايِي



حاول 3 ص 51: لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} \frac{|x+1|}{x+1} - 2x & : x \neq -1 \\ 2 & : x = -1 \end{cases}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = -1$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



كراسة ص 20: (10) أوجد قيمة a بحيث تصبح الدالة التالية متصلة عند $x = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & : x < 3 \\ 2ax & : x \geq 3 \end{cases}$$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



نظرية (14): خواص الدوال المتصلة

Properties of Continuous Functions

إذا كانت f, g دالتين متصلتين عند $x = c$ ، فإنّ الدوال التالية هي دوالّ متصلة عند $x = c$

- 1 الجمع: $f + g$
- 2 الطرح: $f - g$
- 3 الضرب في ثابت: $k \cdot f$, $k \in \mathbb{R}$
- 4 الضرب: $f \cdot g$
- 5 القسمة: $\frac{f}{g}$, $g(c) \neq 0$

Continuous Functions

دوال متصلة

- 1 الدالة $f: f(x) = k$ حيث k ثابت متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
- 2 الدالة كثيرة الحدود متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
- 3 الدالة الحدودية النسبية $\frac{f}{g}$ متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.
- 4 الدالة $f: f(x) = |x|$ متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
- 5 الدوال المثلثية الأساسية متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.

مثال + حاول 1 ص 55 : ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي:

1) $f(x) = x^2 + |x|$, $c = -1$ 2) $f(x) = x^2 - 4x + 3 + |x|$, $c = 3$

صَفْوَةُ مُعَلِّمِي الْكُوَيْتِ



مثال + حاول 1 ص 55 : ابحث اتصال الدالة f عند $c = x$ في كل مما يلي:

1) $f(x) = \sin x - \cos x$, $c = \frac{\pi}{2}$ 2) $f(x) = \frac{\tan x}{x+1}$, $c = \frac{\pi}{4}$

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ



مثال 2 ص 55 : ابحث اتصال الدالة $f(x) = \frac{x-2}{x^2+9} - \frac{1}{x}$ عند $x = 3$

حاول 2 ص 55 : ابحث اتصال الدالة $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{2x}{x-2}$ عند $x = 1$

صَفْوَةُ مُعَلِّمِي الْكُوَيْتِ



اتصال الدوال الجذرية عند نقطة

نظرية (15)

- a** الدالة الجذرية $y = \sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x = c : c \in \mathbb{R}^+$ ، n عدد صحيح زوجي موجب ،
ومتصلة عند كل $x = c : c \in \mathbb{R}$ ، n عدد صحيح فردي أكبر من 1 .
- b** إذا كانت g دالة متصلة عند $x = c$ وكانت $g(c) > 0$ فإن الدالة : $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x = c$

مثال 3 ص 56 : لتكن الدالة $f : f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 1$

حاول 3 ص 56 : لتكن الدالة $f : f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+4}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = -2$

صَفْوَةُ مُعَلِّمِي الْكُوَيْتِ



امتحان سابق: لتكن الدالة $f : f(x) = \sqrt{x+3}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = -1$

حاول 3 صد 56 : لتكن الدالة $f : f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = -2$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ





حاول 4 ص 58 : إذا كانت f, g معرفتان على R كما يلي: $g(x) = x^2 + 3$, $f(x) = 2x + 3$ أوجد:

- 1) $(g \circ f)(x)$ 2) $(g \circ f)(-1)$ 3) $(f \circ g)(x)$ 4) $(f \circ g)(-1)$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ





حاول 5 ص 59 : لتكن: $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $g(x) = \frac{3}{x^2+4}$ أوجد:

1) $(f \circ g)(x)$

2) $(g \circ f)(\sqrt{3})$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



اتصال الدوال المركبة عند نقطة

نظرية (16): اتصال الدوال المركبة

إذا كانت f متصلة عند c ، و g متصلة عند $f(c)$ فإن الدالة المركبة $g \circ f$ متصلة عند c .

مثال 6 ص 59: لتكن الدالة $f: f(x) = x^2 + 5$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ ، ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

كراسة ص 20: (10) لتكن الدالة $f: f(x) = 2x^2 - 3$ ، $g(x) = \sqrt{x+4}$ ،

ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

صَفْوَةُ مُعَلِّمِي الْكُوَيْتِ



حاول 6 ص 60: لتكن الدالة $f: f(x) = \frac{|x|}{x+2}$, $g(x) = 2x + 3$ ابحث اتصال الدالة $f \circ g$ عند $x = 1$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



مثال 7 ص 60: لتكن الدالة f : $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

حاول 7 ص 60: لتكن الدالة f : $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ



الاتصال على فترة

تعريف (9) الاتصال على فترة مفتوحة:

لتكن الدالة f معرفة على الفترة (a, b) فإننا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة (a, b) إذا كانت f متصلة عند كل x تنتمي إلى الفترة (a, b)

تعريف (10) الاتصال على فترة مغلقة:

لتكن الدالة f معرفة على الفترة $[a, b]$ فإننا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

1 الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة (a, b)

2 الدالة f متصلة عند $x = a$ من جهة اليمين أي أن: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

3 الدالة f متصلة عند $x = b$ من جهة اليسار أي أن: $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

$$f(x) = \begin{cases} -2 & : x = 1 \\ x^2 - 3 & : 1 < x < 3 \\ 6 & : x = 3 \end{cases}$$

مثال 1 ص 62: ادرس اتصال الدالة f على $[1, 3]$ حيث:

صَفْوَةٌ مَعَالِمُ الْكُوَيْتِ



كراسة ص 26: (5) ادرس اتصال الدالة f على $[-3, 4]$ حيث:

$$f(x) = \begin{cases} -5 & : x = -3 \\ -x^2 + 4 & : -3 < x < 4 \\ -10 & : x = 4 \end{cases}$$

صِفْوَةٌ مَعَ الْعِلْمِ الْكَوْنِيَّةِ



$$f(x) = \begin{cases} 2 & : x = 1 \\ \frac{x^2+1}{x} & : 1 < x < 5 \\ \frac{26}{5} & : x = 5 \end{cases}$$

حاول 1 ص-62: ادرس اتصال الدالة f على $[1, 5]$ حيث:

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



مثال 2 ص 63 : ادرس اتصال كل من الدوال التالية على الفترة المبينة:

$$1) f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad , \quad [-1, 5] \qquad 2) f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} \quad , \quad [0, 5]$$

حاول 2 ص 63 : ادرس اتصال كل من الدوال التالية على الفترة المبينة:

$$1) f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 2} \quad , \quad [0, 3] \qquad 2) f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \quad , \quad [0, 2]$$

صَفْوَةُ مُعَلِّمِي الْكُوَيْتِ



$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & : x \leq -1 \\ \frac{4}{x+3} & : x > -1 \end{cases}$$

مثال 3 ص 63 : ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث:

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



$$f(x) = \begin{cases} -x + 4 & : x \leq 7 \\ \frac{9}{-x+4} & : x > 7 \end{cases}$$

كراسة ص 26: (6) ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث:

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



مثال 4 ص 64 : لتكن الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a & : x < 0 \\ 2 & : x = 0 \\ ax + b & : x > 0 \end{cases}$$

متصلة على مجالها R

أوجد قيمة الثابتين a, b

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ





حاول 4 ص 65 : لتكن الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} 5 & : x = 1 \\ ax + b & : 1 < x < 4 \\ b + 8 & : x = 4 \end{cases}$$

متصلة على $[1, 4]$

أوجد قيم الثابتين a, b

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ



تعميم:

إذا كانت الدالة g متصلة على فترة ما، $g(x) \geq 0$ في هذه الفترة فإن الدالة $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة على هذه الفترة.

مثال 5 ص 65: لتكن $f: \sqrt{x^2 - 2x}$ أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-5, 0]$

صِفْوَةٌ مَعَالِكُوتِ



حاول 5 صد 66: لتكن $f: f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$ أوجد D_f (مجال الدالة f)
ثم ادرس اتصال الدالة f على $[6, 10]$

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ



مثال 6 ص 66: لتكن $f: f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ ادرس اتصال الدالة f على $[-3, 3]$

مُعَلِّمُ الْكُوفَةِ
صَفْوَةُ مِيَايَا



كراسة ص 27: (13) لتكن $f: f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ أوجد D_f ثم ادرس اتصال الدالة f على مجالها

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



حاول 6 ص 66: لتكن $f: f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$ ادرس اتصال الدالة f على $[1, 3]$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



ملاحظة:

ناتج تركيب دالتين كل منهما متصلة على $\mathbb{R}$ هو دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

مثال 7 ص 67: لتكن $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4}$ ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$

حاول 7 ص 67: لتكن $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ الدالة $f(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x + 5}$ ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$

كراسة ص 27: (16) لتكن $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ الدالة $f(x) = |3x^2 + 4x - 1|$ ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$

مُعَلِّمُ الْيَوْمِ



الوحدة الثانية : الاشتقاق

معدلات التغير وخطوط المماس (1 - 2)

نحدد ميل المماس للمنحنى عند النقطة $P(a, f(a))$ بالقيمة m إن وجد:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

حاول 1 ص 78: أوجد ميل المماس للقطع المكافئ $y = (x - 2)^2 + 2$ عند النقطة $A(1, 3)$

صَفْوَةُ مُعَلِّمِي الْكُوَيْتِ



Derivative at a Point

تعريف : المشتقة عند نقطة

مشتقة الدالة f عند $x = a$ هي $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شرط وجود النهاية.

تعريف (بديل): المشتقة عند نقطة

مشتقة دالة f عند $x = a$ هي :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

شرط وجود النهاية.

مثال 1 ص 80: باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = 2x^2 + 1$ عند $x = 1$

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ



حاول 1 ص 80: باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة $f: f(x) = 3x^2$ عند $x = -2$

كراسة ص 35: (1) باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة $f: f(x) = \frac{3}{x}$ عند $x = 3$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



حاول 2 ص 81: باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة $f: f(x) = \frac{1}{x}$ عند $b \neq 0$, $x = b$

مثال 2 ص 80: باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة $f: f(x) = \sqrt{x}$ عند $a > 0$, $x = a$

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ



حاول 5 ص 84: لتكن $f(x) = x^2 + 2$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة.

مثال 5 ص 83: لتكن $f(x) = x^3$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة إن وجدت.

مُعَلِّمُ الْكُويْتِ
صَفْوَةُ مِمْيَايَا



كراسة ص 35: (2) باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة $f: f(x) = 2x^3$ عند $x = 1$

مُعَلِّمُ الْكُوفَةِ
صَفْوَةُ مِي يَاسِين



المشتقة من جهة واحدة

إن الدالة لها مشتقة عند نقطة إذا وفقط إذا كانت المشتقتان لجهة اليمين ولجهة اليسار موجودتين ومتساويتين عند تلك النقطة.

مثال 3 ص 81: بين أن الدالة التالية لها مشتقة لجهة اليمين ومشتقة لجهة اليسار عند $x = 0$ ،

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : x \leq 0 \\ 2x & : x > 0 \end{cases} \quad \text{لكن ليس لها مشتقة عند } x = 0$$

حاول 3 ص 82: لتكن $f : f(x) = |x - 2|$. ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x = 2$

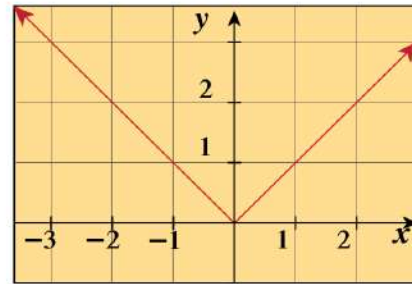
صَفْوَةُ مُعَلِّمِي الْكُوَيْتِ



متى تكون $f'(a)$ غير موجودة

a ركنًا (Corner): تكون المشتقتان من جهة اليمين ومن جهة اليسار عند التقاء الشعاعين غير متساويتين.

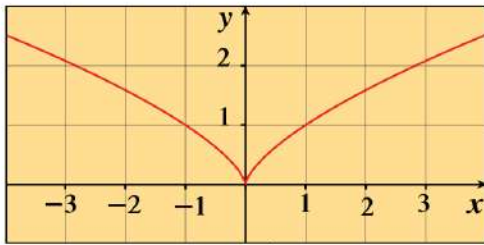
مثال: $f(x) = |x|$



شكل (3)

يوجد ركن عند $x = 0$ ، $f'(0)$ غير موجودة

b نابًا (Cusp): يكون ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطع محددة يقترب من ∞ في إحدى الجهات ويقترب من $-\infty$ في الجهة الثانية ويوجد مماس رأسي عندها. مثال: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

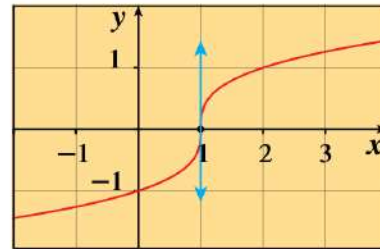


شكل (4)

يوجد ناب عند $x = 0$ ، $f'(0)$ غير موجودة ويوجد مماس رأسي عندها

c مماسًا رأسيًا: يكون المماس للمنحنى عند نقطة محددة رأسيًا.

مثال: $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

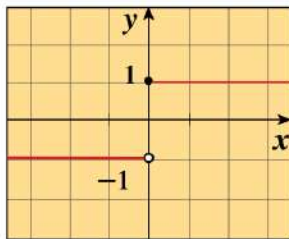


شكل (5)

يوجد مماس رأسي عند $x = 1$ ، $f'(1)$ غير موجودة

d عدم اتصال: تكون المشتقة من جهة واحدة أو كل من الجهتين غير موجودة. مثال:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$



شكل (6)

يوجد عدم اتصال عند $x = 0$ ، $f'(0)$ غير موجودة



الاشتقاق والاتصال

إذا كانت الدالة f ليست متصلة عند نقطة $(a, f(a))$ فإنها غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

مثال 6 ص 85: لتكن $f : \begin{cases} x^2 & : x < 2 \\ 2x - 1 & : x \geq 2 \end{cases}$. ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x = 2$

حاول 6 ص 85: لتكن $f : \begin{cases} x^2 - 4 & : x \leq 2 \\ 3x - 2 & : x > 2 \end{cases}$. ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x = 2$

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ



نظرية الاشتقاق والاتصال

إذا كانت الدالة f لها مشتقة عند نقطة، فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة.

معكوس النظرية ليس صحيحاً دائماً كما رأينا سابقاً:

فالدالة المتصلة قد يكون لها ركن أو ناب أو مماس رأسي، ومن ثم لا تكون قابلة للاشتقاق عند نقطة معينة.

مثال 9 ص 89: لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x + 5 & : x \leq 3 \\ x^2 - 1 & : x > 3 \end{cases}$ أوجد إن أمكن $f'(3)$

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ



حاول 9 صد 89: لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & : x \leq -1 \\ x^2 - x - 2 & : x > -1 \end{cases}$ أوجد إن أمكن $f'(-1)$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ





كراسة صد 35: (8) لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 & : x \leq 2 \\ 4x - 4 & : x > 2 \end{cases}$ أوجد إن أمكن $f'(2)$

صَفْوَةُ مُعَلِّمَاتِ الْكُوَيْتِ



كراسة صد 35: (7) لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & : x \leq 0 \\ 2x+1 & : x > 0 \end{cases}$ أوجد إن أمكن $f'(0)$

صَفْوَةُ مُعَلِّمِ الْكُويَّةِ



الوحدة الثانية : الاشتقاق

قواعد الاشتقاق (3 - 2)

قاعدة (1): مشتقة أي دالة ثابتة تساوي الصفر

قاعدة (2): إذا كان $f(x) = x$ فإن $f'(x) = 1$

قاعدة (3): إذا كان $f(x) = x^n$ فإن $f'(x) = n x^{n-1}$

تدريب ص 91: أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

1) $f(x) = x^4$

2) $g(x) = x^{10}$

3) $f(x) = x^{12}$

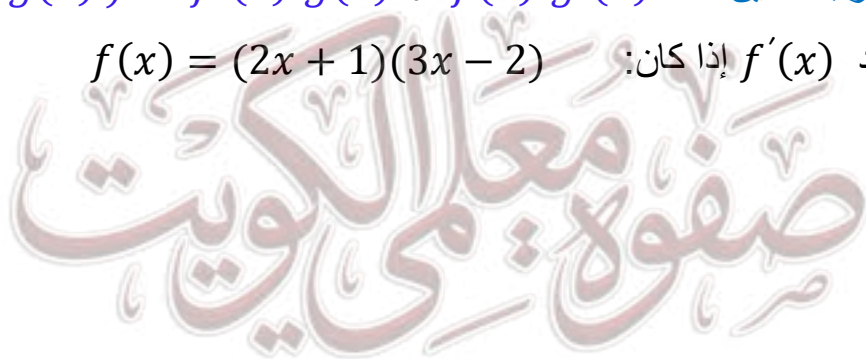
قاعدة (4): قاعدة الضرب بعدد ثابت : $(k f(x))' = k f'(x)$

قاعدة (5): قاعدة الجمع والطرح : $(f(x) \mp g(x))' = f'(x) \mp g'(x)$

حاول 1 ص 92: أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y = 5x^3 - 4x^2 + 6$

قاعدة (6): اشتقاق ضرب دالتين : $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

حاول 2 ص 93: أوجد $f'(x)$ إذا كان: $f(x) = (2x + 1)(3x - 2)$



مثال + حاول 2 ص 93 : أوجد $f'(x)$ إذا كان:

1) $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$ 2) $f(x) = 4x^2(x + 6)$ 3) $f(x) = (x^3 - 4)^2$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



قاعدة (7): اشتقاق قسمة دالتين:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

مثال 3 ص 94: أوجد مشتقة

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{5x^2 + 1}$$

مثال 3 ص 95: أوجد مشتقة

$$f(x) = \frac{4x^2 + 2x}{2x^3 + 5}$$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ أو $y - y_1 = m(x - x_1)$

معادلة النازم (العمودي): $y - f(a) = \frac{1}{f'(a)}(x - a)$ أو $y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

كراسة ص 38: (11) أوجد معادلة المماس للمنحنى $y = x^3 + x$ عند النقطة (1,2)

حاول 4 ص 96: أوجد معادلة المماس ومعادلة النازم على منحنى الدالة f حيث $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ عند النقطة (1,0)

صَفْوَةُ مُعَلِّمِي الْكُوَيْتِ



مثال 4 ص 95: أوجد معادلة المماس ومعادلة الناطم عند النقطة $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ لمنحنى الدالة f حيث $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+2}$

مُعَلِّمُ الْكُوفَةِ
صَفْوَةُ مِيَايِي



نتيجة: إذا كانت g قابلة للاشتقاق وكانت $g(x) \neq 0$ ، k عدداً ثابتاً فإن: $\left(\frac{k}{g(x)}\right)' = \frac{-k \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

مثال 5 ص 96: أوجد $f'(x)$ حيث $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$

حاول 5 ص 96: أوجد $f'(x)$ حيث $f(x) = \frac{-4}{x^2+2x+5}$

كراسة ص 38: (13) أوجد معادلة المماس ومعادلة النازم على منحنى الدالة f حيث $f(x) = \frac{8}{4+x^2}$ عند النقطة $(2,1)$

صَفْوَةُ مُعَالِمِي الْكُوَيْتِ



$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$$

قاعدة (8): قاعدة القوى للأسس الصحيحة السالبة:

مثال 6 ص 97: لتكن $y = \frac{x^2+3}{2x}$. أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$

حاول 6 ص 98: لتكن $y = \frac{3x^2+7}{8x^2}$. أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = -1$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



قاعدة (9):

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n} (x)^{\frac{m}{n}-1}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال 7 ص 98: أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, $x > 0$

حاول 7 ص 98: أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$

صَفْوَةُ مُعَلِّمِي الْكُوَيْتِ



مثال 8 ص 98: لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & : x \leq 1 \\ 2x + 1 & : x > 1 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها

أوجد $f'(x)$ إن أمكن

صِفْوَةٌ مَعَالِكُوتِ





حاول 8 ص 99: (a) أوجد المشتقة إن أمكن للدالة المتصلة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : x \leq 2 \\ 4x - 3 & : x > 2 \end{cases}$$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



حاول 8 ص 99: (b) أوجد المشتقة إن أمكن للدالة المتصلة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : x < 1 \\ 2\sqrt{x} & : x \geq 1 \end{cases}$$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ





مشتقات الدوال المثلثية (4 - 2)

الوحدة الثانية : الاشتقاق

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad , \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \tan x$$

مثال + حاول 1 ص 100 : أوجد المشتقات للدوال التالية:

1) $y = x^2 \sin x$

2) $f(x) = \sin^2 x$

3) $g(x) = \cos^2 x$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



مثال + حاول 1 ص 100 : أوجد المشتقات للدوال التالية:

$$1) \quad g(x) = \frac{x}{\cos x}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

حاول 1 ص 100 : إذا كانت $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ أثبت أن $y' = (y \cdot \csc x)^2$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



مثال + حاول 2 ص 102 : أوجد مشتقات الدوال التالية:

1) $f(x) = \tan x + \cot x$

2) $g(x) = \sec x + \csc x$

مثال 2 ص 102 : أوجد مشتقات الدوال التالية:

3) $f(x) = \sec x \cdot (1 + \sin x)$

4) $g(x) = \csc x + \sin x \cdot \tan x$

مُعَلِّمِي الْكُوَيْتِ
صَفْوَة مِصْبُوحَة



حاول 2 ص 102 : أوجد مشتقات الدوال التالية:

$$1) f(x) = \frac{1 + \tan x}{\tan x}$$

$$2) g(x) = \frac{\sec x}{\csc x}$$

كراسة ص 41: (3 + 4) أوجد مشتقات الدوال التالية:

$$3) f(x) = \frac{\cot x}{1 + \cot x}$$

$$4) g(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

مُعَلِّمُ الْكُويْتِ
صَفْوَةُ مَرْيَمُ الْكُويْتِ



مثال 3 ص 102 : أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \tan x$ عند النقطة $P(\frac{\pi}{4}, 1)$

حاول 3 ص 102 : أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \sec x$ عند النقطة $P(\frac{\pi}{3}, 2)$

مُعَلِّمُ الْكُوفَةِ
صَفْوَةُ مِيَايِي



Chain Rule**قاعدة السلسلة (التسلسل)**

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند $g(x)$ ، الدالة g قابلة للاشتقاق عند x ، فإن الدالة المركبة

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

تكون قابلة للاشتقاق عند x ، ويكون:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

مثال 1 ص 104 : لتكن: $g(x) = x^{10}$ ، $f(x) = 3x^2 + 1$

أوجد (1) باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$

(2) $(f \circ g)'(-1)$

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ



حاول 1 ص 104 : لتكن: $g(x) = x^{13}$, $f(x) = -2x^3 + 4$

أوجد (1) باستخدام قاعدة السلسلة $(g \circ f)'(x)$

(2) $(f \circ g)'(0)$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ





مثال 2 ص 104 : لتكن: $g(x) = x^2 + 1$, $f(x) = \frac{2x+1}{x}$ ($x \neq 0$)

أوجد (1) باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$

(2) $(f \circ g)'(1)$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ





حاول 2 صد 105 : لتكن: $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$, $g(x) = \sqrt{x}$

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(1)$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ





صورة أخرى لقاعدة السلسلة

إذا كانت $y = f(u)$, $u = g(x)$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

يتم حسابها عند $u = g(x)$

مثال 3 ص 105 : إذا كانت: $u = 5x^2 + 2$, $y = u^3 - 3u + 1$

فأوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

حاول 3 ص 105 : إذا كانت: $u = 2x^3 + x$, $y = u^2 + 4u - 3$

فأوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

صَفْوَةُ مُعَلِّمِي الْكُوَيْتِ



$$\frac{d}{dx}(\cos f(x)) = (-\sin f(x)) \cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\sin f(x)) = (\cos f(x)) \cdot f'(x)$$

حاول 4 ص 106 : أوجد مشتقة $y = \sin(x^2 + x)$

قاعدة سلسلة القوى

إذا كانت $f(x)$ قابلة للاشتقاق على مجالها وكان n عددًا نسبيًا فإن:

$$\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

حاول 6 ص 106 :

لتكن $y = \sqrt[4]{(2x^4 - 3x^2 + 4)^3}$ أوجد y'

مثال 6 ص 106 :

لتكن $y = \sqrt[5]{(x^2 + 3x + 5)^3}$ أوجد y'

مُعَلِّمِي الْكُوَيْتِ
صِفْوَةُ مِصْفُورٍ



مثال 7 ص 107 : أوجد ميل مماس المنحنى $y = \sin^5 x$ عند $x = \frac{\pi}{3}$

حاول 7 ص 107 : بين أن ميل أي مماس للمنحنى $y = \frac{1}{(-2x-1)^3}$ دائماً يكون موجباً عند $x = \frac{\pi}{3}$

كراسة ص 43: (16) أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \sqrt{x^2 + 5}$ عند النقطة $P(2, 3)$

مُعَلِّمَاتُ
صَفْوَةُ مِصْرِي



الوحدة الثانية : الاشتقاق

المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني (6 - 2)

مثال 1 ص 109: أوجد المشتقات حتى الرتبة الرابعة للدالة $y = 2x^7 - 4x^2 + 3x - 5$ بدلالة المتغير x .

حاول 1 ص 109: أوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة للدالة $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$ بدلالة المتغير x .

صَفْوَةُ مُعَلِّمِي الْكُوَيْتِ



مثال 2 صد 109: إذا كانت $y = \sin x$. بين أن $y^{(4)} = y$

حاول 2 صد 109: لتكن الدالة $y = \cos x$. بين أن $y^{(4)} + y'' = 0$

صَفْوَةُ مُعَلِّمِي الْكُوَيْتِ



مثال 3 ص 110: أوجد y'' حيث $y = \frac{1}{\cos x}$

حاول 3 ص 110: أوجد y'' حيث $y = \frac{1}{\sin x}$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



الاشتقاق الضمني

مثال 4 ص 111: (a) أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ حيث $y^2 + x y = 7x$

مثال 4 ص 111: (b) أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ حيث $y = x + x^2 y^5$

حاول 4 ص 112: أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ حيث $y^2 = x^2 - 2x$

صفوة معلمي الكويت



مثال 5 ص 112: أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(3, -4)$

حاول 4 ص 111: أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1,1)$

صَفْوَةُ مُعَلِّمِي الْكُوَيْتِ



حاول 6 ص 113: أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $x^2 + y^2 - 2xy = 1$ حيث $x \neq y$ عند النقطة $(2,1)$

مثال 6 ص 113: أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $2y = x^2 + \sin y$ عند النقطة $(2\sqrt{\pi}, 2\pi)$

مُعَلِّمَاتُ الْكَوَيْتِ
صَفْوَةُ مِصْبُوحٍ



مثال 7 ص 113: للمنحنى الذي معادلته: $x = 2\sqrt{y} + y$ أوجد y'
ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة (3,1)

حاول 7 ص 114: للمنحنى الذي معادلته: $x^2 + \sqrt{y} + y^2 = 3$ أوجد y'
ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة (1,1)

مُعَلِّمَاتُ
صَفْوَة مِي كُوَيْت



مثال 8 ص 114: إذا كانت $y = \sqrt{1 - 2x}$ فأثبت أن: $yy'' + (y')^2 = 0$

حاول 8 ص 114: إذا كانت $y = x \sin x$ فأثبت أن: $y'' + y' + 2 \sin x = 0$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



امتحان سابق: إذا كانت $y = x \sin x$ فأثبت أن: $y'' + y' + 2 \sin x = 0$

كراسة ص 45: (15) إذا كانت $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ فأثبت أن: $4x^2 f''(x) - 3f(x) = 0$

مُعَلِّمَاتُ الْكَوَيْتِ
صَفْوَةُ مِصْبُوحٍ



القيم القصوى (العظمى – الصغرى) للدوال (1 – 3)

الوحدة الثالثة : تطبيقات على الاشتقاق



تعريف (1): القيم القصوى المطلقة

إذا كانت f دالة مجالها D ، $c \in D$ ، فإن $f(c)$ تسمى:

a قيمة عظمى مطلقة للدالة f على D عندما:

$$f(c) \geq f(x) \quad , \quad \forall x \in D_f$$

b قيمة صغرى مطلقة للدالة f على D عندما:

$$f(c) \leq f(x) \quad , \quad \forall x \in D_f$$

مثال (1)

لتكن الدالة: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^2$ ، أوجد إن أمكن القيم القصوى للدالة f مع رسم بيانيها عندما:

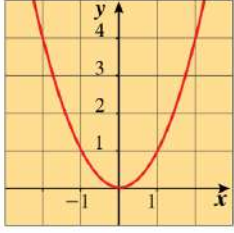
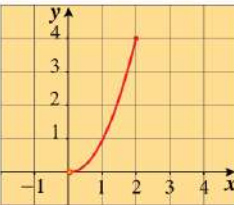
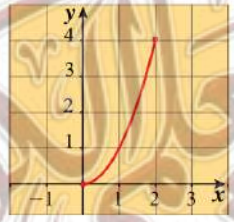
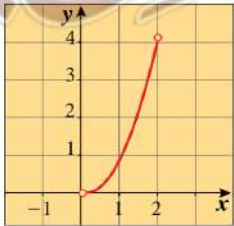
a $D = (-\infty, \infty)$

b $D = (0, 2]$

c $D = [0, 2]$

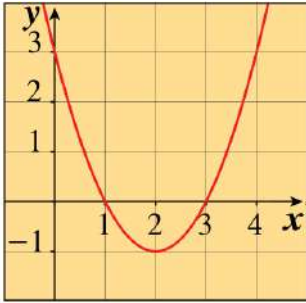
d $D = (0, 2)$

الحل:

a	بيان الدالة: $f(x) = x^2$	المجال D	القيم القصوى المطلقة للدالة f على D
	$y = x^2$ 	$(-\infty, \infty)$	لا توجد قيمة عظمى مطلقة. توجد قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x = 0$
	$y = x^2$ 	$(0, 2]$	توجد قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 عند $x = 2$ لا توجد قيمة صغرى مطلقة.
	$y = x^2$ 	$[0, 2]$	توجد قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 عند $x = 2$ قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x = 0$
	$y = x^2$ 	$(0, 2)$	لا توجد قيم قصوى مطلقة.



حاول 1 صد 124: الشكل يمثل بيان: $y = x^2 - 4x + 3$. أوجد القيم القصوى للدالة على المجالات التالية:



1) $(-\infty, \infty)$

2) $[2, 3]$

3) $(1, 3)$

4) $[3, 4]$

نظرية (1): نظرية القيمة القصوى

إذا كانت f دالة متصلة على فترة مغلقة $[a, b]$ فإن f تكون لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة.

ملاحظة: لتكن الدالة f معرفة على $[a, b]$ ، $c \in (a, b)$ فإننا نسمي:

1) نقاط طرفية. $(a, f(a))$ ، $(b, f(b))$

2) نقطة داخلية. $(c, f(c))$



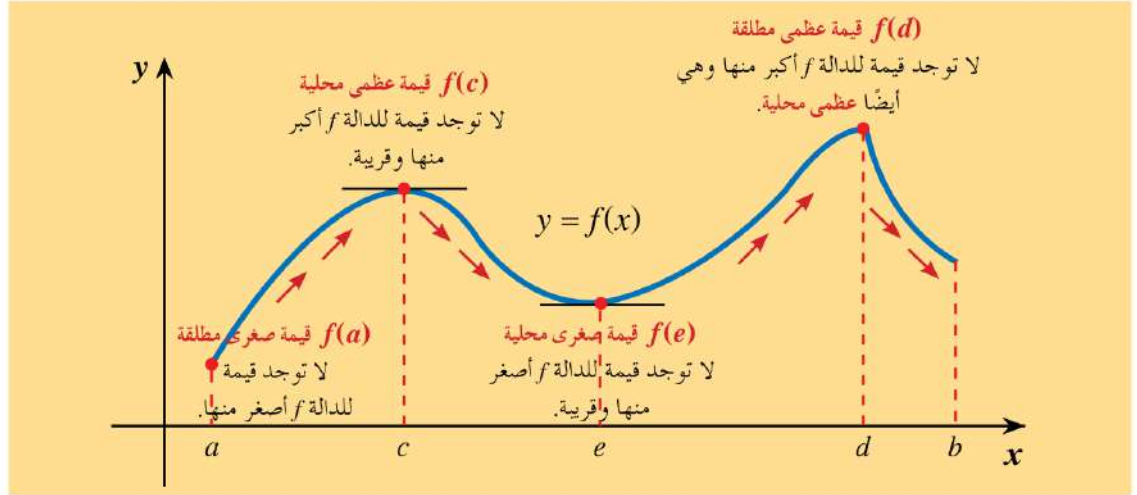
القيم القصوى المحلية

تعريف (2): القيم القصوى المحلية

لتكن $(c, f(c))$ نقطة داخلية للدالة f ، فترة مفتوحة تحوي c ، تكون $f(c)$:

a قيمة عظمى محلية عند c عندما: $f(c) \geq f(x)$, $\forall x \in D$

b قيمة صغرى محلية عند c عندما: $f(c) \leq f(x)$, $\forall x \in D$



Critical Point

تعريف (3): النقطة الحرجة

النقطة الداخلية للدالة f $(c, f(c))$ تسمى نقطة حرجة عندما $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.

مثال 2 ص 125: أوجد النقاط الحرجة للدالة المتصلة $f: f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

صَفْوَةُ مُعَلِّمِ الْكُوَيْتِ



حاول 2 صد 127: أوجد النقاط الحرجة للدالة المتصلة $f: f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 10$

نظرية (2): القيم القصوى المحلية (Fermat's Theorem)

إذا كانت للدالة f قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محلية عند $x = c$ فإن $(c, f(c))$ نقطة حرجية.

إذا كانت $(c, f(c))$ نقطة حرجية للدالة f فليس بالضرورة أن تكون $f(c)$ قيمة قصوى محلية

فمثلاً الدالة $f(x) = x^3$ لها نقطة حرجية عند $x = 0$ ولكن $f(0)$ ليست قيمة قصوى محلية.

خطوات إيجاد القيم القصوى المطلقة للدالة f المتصلة على الفترة $[a, b]$

تعلمت كيفية إيجاد النقاط القصوى المطلقة للدالة f من خلال التمثيل البياني لها وتطبيق تعريف (1) عليها.

والآن سنعرض خطوات إيجادها جبرياً على $[a, b]$:

- 1 إيجاد قيم الدالة عند النقاط الطرفية: $x = a$, $x = b$
- 2 إيجاد النقاط الحرجية للدالة f في الفترة (a, b) إن وجدت.
- 3 أكبر قيمة للدالة في الخطوتين 1 , 2 هي قيمة عظمى مطلقة في $[a, b]$ وأصغر قيمة للدالة هي قيمة صغرى مطلقة في $[a, b]$.



مثال 3 ص 128: أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة $f: f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[0, 3]$

مُعَلِّمُ الْكُوفَةِ
صَفْوَةُ مِيَايَا



حاول 3 ص 128: أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة $f: f(x) = x^3 - 3x + 1$

في الفترة $[-2, 1]$

مُعَلِّمُ الْكُوفَةِ
صَفْوَةُ مِي كُوَيْت



مثال 4 ص 129: أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة $f: f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ في الفترة $[-2, 3]$

مُعَلِّمُ الْكُوفَةِ
صَفْوَةُ مِيَايَا



حاول 4 ص 129: أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة $f: f(x) = \frac{1}{x^2}$ في الفترة $[1, 3]$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



نظرية (3): نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت f دالة:1 متصلة على الفترة $[a, b]$ 2 قابلة للاشتقاق على الفترة (a, b) فإنه يوجد على الأقل $c \in (a, b)$ بحيث $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

مثال 1 ص 133: بين أن الدالة $f: f(x) = x^2$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 2]$ ،
ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك.

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ



حاول 1 ص 133: بين أن الدالة $f: f(x) = x^2 + 2x$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3, 1]$ ، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك.

مثال 2 ص 133: بين أن الدالة $f: f(x) = x^3 + 1$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3, 3]$ ، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك.

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ



حاول 2 ص 133: بين أن الدالة $f: f(x) = x^3 - 3x + 2$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 4]$ ، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك.

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



تزايد وتنقص الدوال

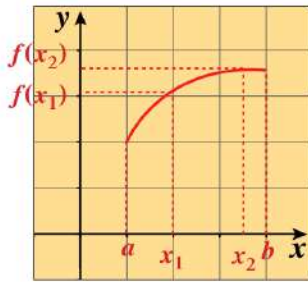
تعريف (4): تزايد وتنقص الدوال

لنكن f دالة معرفة على الفترة I . نقول إن:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \quad , \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

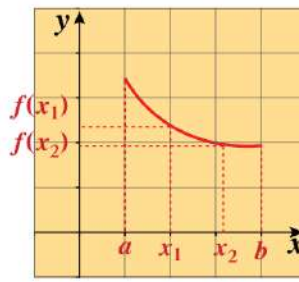
1 f دالة متزايدة على I إذا كان:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2) \quad , \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

2 f دالة متناقصة على I إذا كان:ملاحظة: تكون الدالة f ثابتة على الفترة I عندما: $\forall x_1, x_2 \in I, f(x_1) = f(x_2)$ 

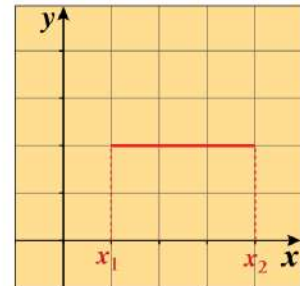
شكل (7)

دالة متزايدة



شكل (8)

دالة متناقصة



شكل (9)

دالة ثابتة

Monotonic Function

الدالة المطردة

الدالة التي تكون دائماً متزايدة على فترة أو دائماً متناقصة على فترة، يقال عنها إنها دالة مطردة على هذه الفترة.

نظرية (4): الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة والدوال الثابتة

لنكن f دالة قابلة للاشتقاق على (a, b) .

- 1 إذا كانت $f'(x) > 0$ عند كل x تنتمي إلى الفترة (a, b) ، فإن f تزايد على (a, b) .
- 2 إذا كانت $f'(x) < 0$ عند كل x تنتمي إلى الفترة (a, b) ، فإن f تناقص على (a, b) .
- 3 إذا كانت $f'(x) = 0$ عند كل x تنتمي إلى الفترة (a, b) ، فإن الدالة f ثابتة على (a, b) .



مثال 3 ص 135: أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = x^2 - 5x + 6$

حاول 3 ص 135: أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

مُعَلِّمَاتُ الْكَوَيْتِ
صَفْوَةُ مِصْبُوحٍ



مثال 4 ص 136: لتكن $f: f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ ، حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f

مُعَلِّمُ الْكُوفَةِ
صَفْوَةُ مِيَايَا



حاول 4 ص 136: لتكن $f: f(x) = x^3 - 6x$ ، حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f

مُعَلِّمُ الْكُوفَةِ
صَفْوَةُ مِي يَاسِينَ



مثال 5 ص 137: لتكن $f: f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ ، حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f

صَفْوَةُ مُعَلِّمِ الْكُويَّةِ



حاول 5 ص 137: لتكن f : $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ ، حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ



نظرية (5): اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية

لتكن f دالة متصلة على مجالها وكانت $(c, f(c))$ نقطة حرجة.

- 1 إذا كانت إشارة المشتقة f' تتغير من الموجب إلى السالب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة عظمى محلية عند c .
- 2 إذا تغيرت إشارة f' من السالب إلى الموجب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة صغرى محلية عند c .
- 3 إذا لم تتغير إشارة f' عند $x = c$ ، فإن f لا يكون لها قيمة قصوى محلية عند c .

- مثال 1 ص 139:** لتكن الدالة $f: f(x) = x^3 - 12x - 5$ أوجد كلا ما يلي:
- (1) النقاط الحرجة للدالة
 - (2) الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.
 - (3) القيم القصوى المحلية.

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ



- حاول 1 ص 140:** لتكن الدالة $f: f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$ أوجد كلا ما يلي ما يلي:
- (1) النقاط الحرجة للدالة
 - (2) الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.
 - (3) القيم القصوى المحلية.

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ

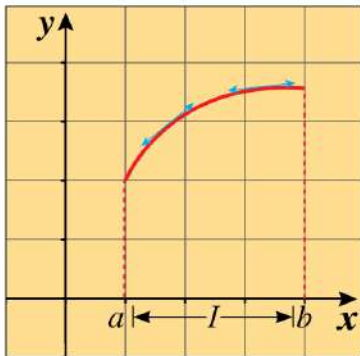


التقعر

تعريف (5): التقعر

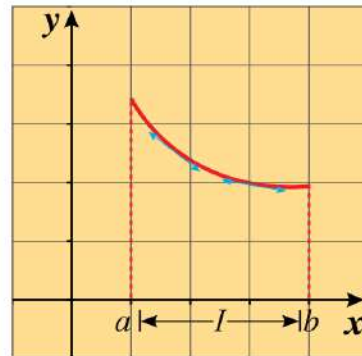
إذا وقع منحنى الدالة أعلى جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعراً لأعلى على I .
وإذا وقع منحنى الدالة أسفل جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعراً لأسفل على I .

الشكلان التاليان يوضحان التقعر:



شكل (2)

في الفترة (a, b) نلاحظ أن:
جميع نقاط المنحنى (ما عدا نقاط التماس)
تقع أسفل المماسات.
لذلك نقول المنحنى مقعر لأسفل.



شكل (1)

في الفترة (a, b) نلاحظ أن:
جميع نقاط المنحنى (ما عدا نقاط التماس)
تقع أعلى المماسات.
لذلك نقول المنحنى مقعر لأعلى.

اختبار التقعر

- a إذا كانت $f''(x) > 0$ ، $\forall x \in I$ فإن منحنى الدالة f مقعراً لأعلى على I .
- b إذا كانت $f''(x) < 0$ ، $\forall x \in I$ فإن منحنى الدالة f مقعراً لأسفل على I .



نقطة الانعطاف

تعريف (6): نقطة الانعطاف

تسمى النقطة $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f إذا كانت f دالة متصلة عند c ، ومنحنى الدالة f يغيّر تقعره عند هذه النقطة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى.

إذا كانت $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لبيان الدالة f فإن $f''(c) = 0$ أو $f''(c)$ غير موجودة.

مثال 3 ص 143: أوجد فترات التقعر ونقط الانعطاف لمنحنى الدالة $f: f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

مُعَلِّمُ الْكُويْتِ
صَفْوَةُ مِمْي الْكُويْتِ



حاول 3 ص 144: أوجد فترات التفرع ونقط الانعطاف لمنحنى الدالة $f: f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

مَعْلَمَاتُ
صَفْوَة مِي



نظرية (6): اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية

- 1 إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) < 0$ ، فإن f تكون لها قيمة عظمى محلية عند $x = c$
- 2 إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) > 0$ ، فإن f تكون لها قيمة صغرى محلية عند $x = c$

حاول 4 ص 146:

استخدم اختبار المشتقة الثانية لتجد القيم القصوى المحلية للدالة $f: f(x) = 4x^3 - 12x^2$

صِفْوَةٌ مَعَالِكُوتِ



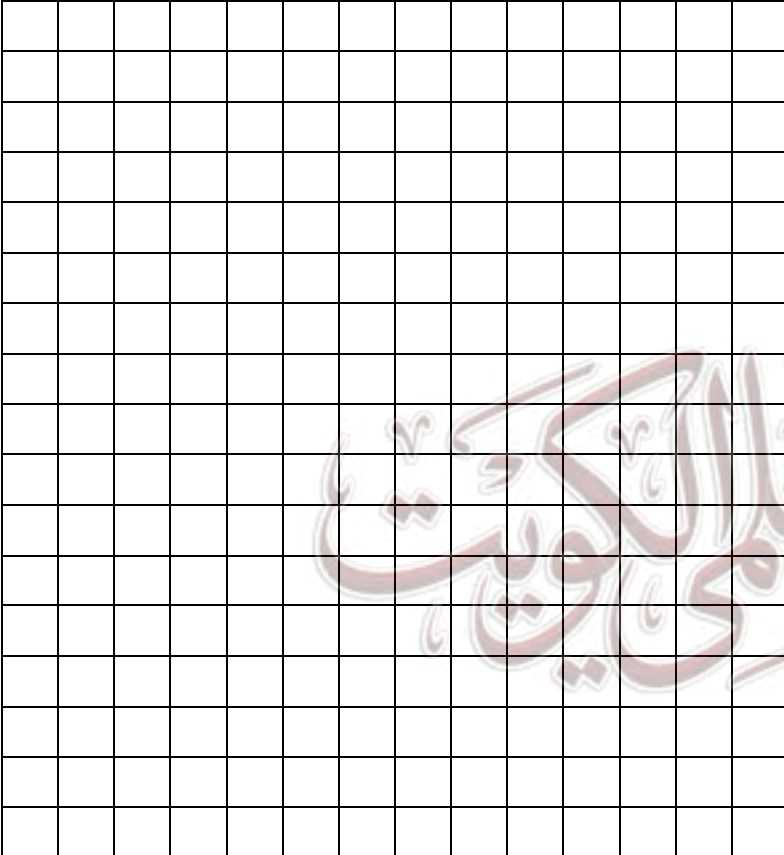
الخطوات اللازمة اتباعها في دراسة تغير الدالة كثيرة الحدود ورسم بيانها

- 1 عيّن مجال الدالة f .
مجال دالة كثيرة الحدود هو $\mathbb{R}$ ولكنه يقتصر أحياناً على فترة من $\mathbb{R}$ خاصة في المسائل الحياتية.
- 2 أوجد النهايات عند الحدود المفتوحة لمجال الدالة f .
- 3 عيّن النقاط الحرجة للدالة f .
- 4 كوّن جدولاً لدراسة إشارة f' وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية.
- 5 كوّن جدولاً لدراسة إشارة f'' وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت.
- 6 أوجد نقاطاً إضافية.
- 7 تساعد هذه النقاط على رسم بيان الدالة بدقة وأهم هذه النقاط، نقاط التقاطع مع أحد المحاور إن أمكن.
- 7 ارسم بيان الدالة f . استخدم نتائج الخطوات السابقة في الرسم.

مثال 1 ص 148: ادرس تغير الدالة $f: f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بيانها.

صَفْوَةُ مُعَلِّمِي الْكُوَيْتِ





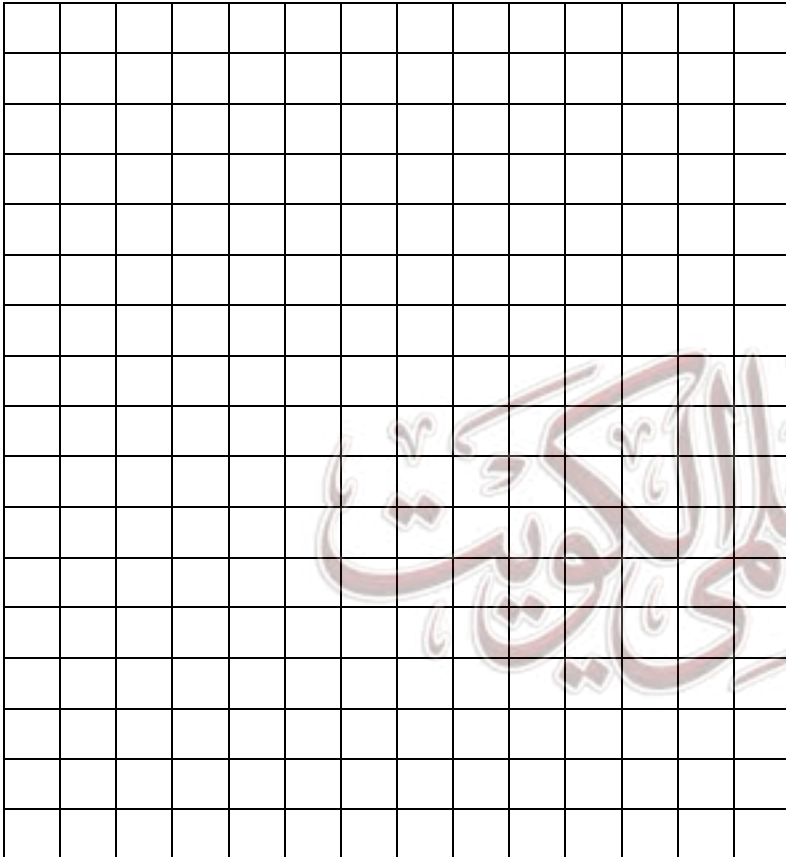
مُعَلِّمُ الْيَوْمِ
صَفْوَةُ



حاول 1 ص 149: ادرس تغير الدالة $f: f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها.

مُعَلِّمُ الْكُوفَةِ
صَفْوَةُ مِيَايَا



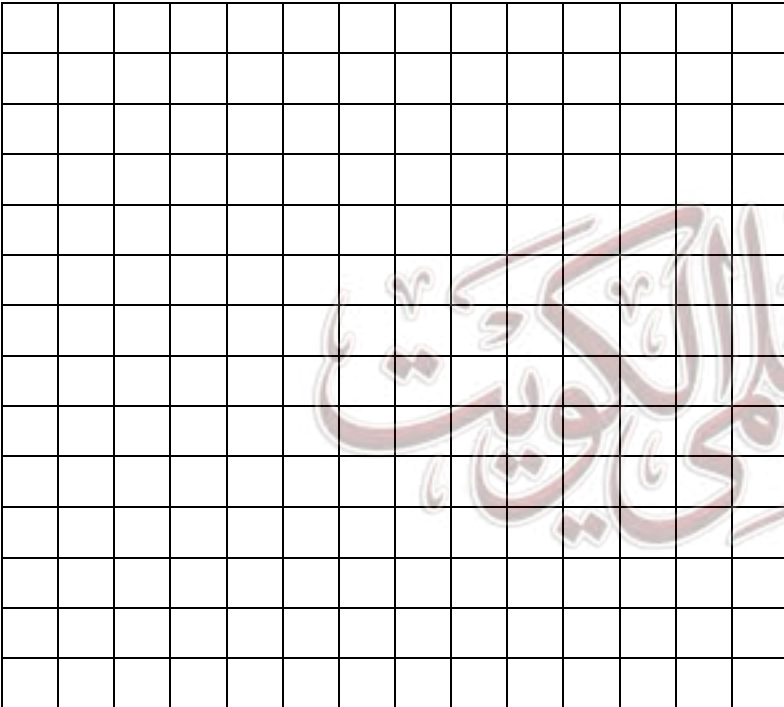


مُعَلِّمُ الْيَوْمِ
صَفْوَةُ





مثال 2 ص 149: ادرس تغير الدالة $f: f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها.

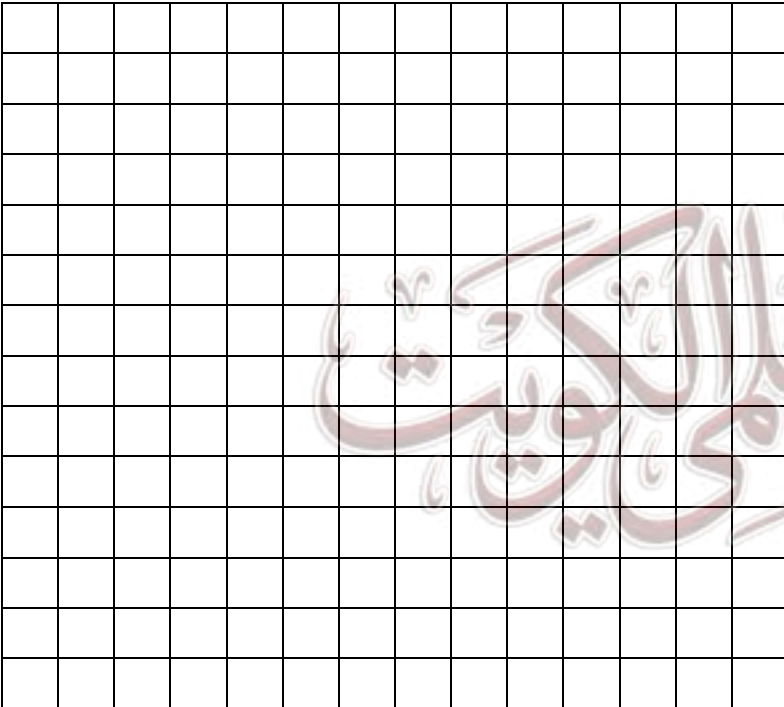


مُعَلِّمُ الْوَيْدِيَّةِ
صَفْوَةُ





حاول 2 صد 150: ادرس تغير الدالة $f: f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها.



مُعَلِّمُ الْوَكِيلِ
صَفْوَةُ



الوحدة الثالثة : تطبيقات على الاشتقاق

تطبيقات على القيم القصوى (3 – 5)

مثال 1 ص 155: عدنان موجبان مجموعهما 100 ومجموع مربعيهما أصغر ما يمكن، ما العدنان؟

صِفْوَةٌ مَعَالِ الْكَوَيْتِ



امتحان سابق: أوجد عددين موجبين مجموعهما 20 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن.

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



كراسة ص 63: (3) أثبت أن من بين المستطيلات التي محيطها m 8، واحدا منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعا.

صَفْوَةُ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ



- حاول 3 ص 158:** تعطى الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h .
- (1) أوجد الارتفاع h (cm) للحصول على أكبر حجم للأسطوانة.
 - (2) ما قيمة هذا الحجم؟

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ

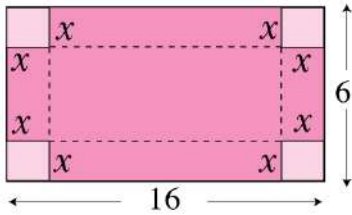


كراسة ص 63: (5) مزرعة على شكل قطعة مستطيلة من الأرض تقع على حافة نهر مستقيم . يراد وضع سياج على الجوانب الثلاثة الأخرى ، ما أكبر مساحة يمكن إحاطتها بسياج طوله 800 m ؟ وما أبعادها؟

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



مثال 2 ص 156:



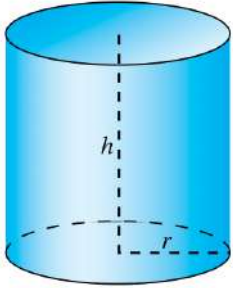
يراد صنع صندوق بدون غطاء بقصّ مربّعات متطابقة طول ضلع كلّ منها x من أركان طبقة صفيح أبعادها 16 cm , 6 cm وثني جوانبها إلى أعلى (انظر الشكل المقابل).

أوجد قيمة x بحيث يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن. وما هو حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة؟

صِفْوَةٌ مَعَالِمِيَّةٌ



مثال 3 ص 157:



طلب إليك تصميم علبة زيت تسع لترًا واحدًا تكون على شكل أسطوانة دائرية قائمة (كما في الشكل المقابل).
ما أبعادها لتكون كمية المعدن المستخدم لصنعها أقل ما يمكن؟

صَفْوَةُ مُعَلِّمِ الْكُوَيْتِ



المعلمة (Parameter): هي ثابت يصف المجتمع أو يصف توزيع المجتمع كالمتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ .

الإحصاءة (Statistic Function): هو اقتران تتعين قيمته من العينة كالمتوسط الحسابي $\bar{x}$ أو الانحراف المعياري S .

تقدير المعلمة (Parameter Estimate): هو إحصاءة تعتمد على قيم العينة وتعكس قيمة قريبة لمعلمة المجتمع ككل وتوزيعه.

التقدير بنقطة هي قيمة وحيدة محسوبة من العينة تستخدم لتقدير معلمة مجهولة من معالم المجتمع.

Confidence Interval

فترة الثقة

هي فترة طرفاها متغيران عشوائيان (أي أنها فترة عشوائية) تحوي إحدى معالم المجتمع بنسبة معينة تسمى درجة الثقة (مستوى الثقة).

التقدير بفترة الثقة

هو إيجاد فترة معينة يتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة أو احتمال معين.

مثال 1 ص 171:

أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 95% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

حاول 1 ص 171:

أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 97% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.



مثال 2 ص 173: أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهن فإذا كان حجم عينة الإناث $n = 40$ والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 12.5$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 76.3$. باستخدام مستوى ثقة 95%

- (1) أوجد هامش الخطأ
- (2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .
- (3) فسر فترة الثقة.

حاول 2 ص 173: أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهن فإذا كان حجم عينة الإناث $n = 25$ والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 3.6$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 18.4$. باستخدام مستوى ثقة 95%

- (1) أوجد هامش الخطأ
- (2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .
- (3) فسر فترة الثقة.

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ



مثال 3 ص 174:

- عينة عشوائية حجمها 36، فإذا كان المتوسط الحسابي للعينة 60 وتباينها 16، باستخدام مستوى ثقة 95% .
- (1) أوجد هامش الخطأ
 - (2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .
 - (3) فسر فترة الثقة.

حاول 31 ص 174: أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 81$ ، ومتوسطها الحسابي $\bar{x} = 50$

- وانحرافها المعياري $S = 9$ باستخدام مستوى ثقة 95% .
- (1) أوجد هامش الخطأ
 - (2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .
 - (3) فسر فترة الثقة.

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ



- مثال 4 ص 176:** أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 25$ ، فإذا كان الانحراف المعياري $S = 10$ ومتوسطها الحسابي $\bar{x} = 15$ ، باستخدام مستوى ثقة 95% .
- (1) أوجد هامش الخطأ
- (2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .

- حاول 4 ص 176:** أوجد فترة ثقة 95% للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ علماً أن العينة أخذت من مجتمع طبيعي.
- إذا كان لدينا $n = 13$ ، $S = 0.3$ ، $\bar{x} = 8.4$

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ



الوحدة الرابعة : الإحصاء

اختبارات الفروض الإحصائية (2 - 4)

Statistic Hypothesis

تعريف: الفرض الإحصائي

هو ادعاء معين مبني على حيثيات معقولة حول معلمة من معالم المجتمع مثل المتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ .

تعريف: المقياس الإحصائي

هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة تحت شروط معينة.

تعريف: اختبارات الفروض الإحصائية (اختبار المعنوية)

هي طريقة معيارية لاختبار ادعاء ما حول معلمة من معالم المجتمع.

مثال 1 ص 179: تزعم شركة أن متوسط رواتب موظفيها يساوي 4000 دينار كويتي. إذا أخذت عينة من 25 موظفاً، ووجد أن متوسط رواتب العينة هو 3950 ديناراً كويتياً فإذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع $\sigma = 125$ وضح كيفية إجراء الاختبار الإحصائي بمستوى ثقة 95%

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ



حاول 1 ص 179: بينت الدراسة أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل أسلاك معدنية هو $\mu = 1800 \text{ kg}$ مع انحراف معياري $\sigma = 150 \text{ kg}$. ويؤكد الأخصائيون في المصنع المنتج لهذه الأسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة تحمل هذه الأسلاك ، وتأكيداً على ذلك تم اختيار عينة من 40 سلكاً فتيين أن متوسط قوة تحمل هذه الأسلاك يساوي 1840 kg . هل يمكن قبول مثل هذا الفرض بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ ؟

مُعَلِّمَاتُ الْكَوَيْتِ
صَفْوَةُ مِصْبُوحٍ





مثال 2 ص 180: إذا كانت $n = 80$, $\bar{x} = 37.2$, $S = 1.79$

اختبر الفرض بأن $\mu = 37$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ



حاول 2 ص 180: متوسط العمر بالساعات لعينة من 100 مصباح كهربائي مصنعة في أحد المصانع

$\bar{x} = 1570$ بانحراف معياري $S = 120$. يقول صاحب المصنع إن متوسط العمر بالساعات $\mu = 1600$

للمصابيح المصنعة في المصنع .

اختبر صحة الفرض $\mu = 1600$ مقابل الفرض $\mu \neq 1600$ وباختيار مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

مُعَلِّمُ الْكُوفَةِ
صَفْوَةُ مِيكَائِيلَ



مثال 3 ص 181: يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة

معينة 290 ديناراً كويتياً. فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 منازل

وتبين أن متوسطها الحسابي $\bar{x} = 283$ دينار وانحرافها المعياري $S = 32$ فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟ باستخدام مستوى ثقة 95% (علماً بأن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي)

صَفْوَةُ مُعَلِّمِي الْكُوَيْتِ



حاول 3 ص 181: يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة

معينة 290 ديناراً كويتياً. فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 منازل

وتبين أن متوسطها الحسابي $\bar{x} = 296$ دينار وانحرافها المعياري $S = 5$
فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟ باستخدام مستوى ثقة 95%
(علماً بأن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي)

مُعَلِّمُ الْكُويْتِ
صَفْوَةُ مِي الْكُويْتِ

