

السهم الذهبى

فى

الرياضيات



55137938



الصف العاشر

الفصل الدراسى الأول



55137938

الصورة الأساسية لدالة القيمة المطلقة هي :

$$f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|$$

(المجال) (المجال المقابل)

إذا كانت $a, b, x \in \mathbb{R}$ عددين حقيقيين فإن :

$$1. |x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

$$2. |x+a| = \begin{cases} x+a & : x \geq -a \\ -x-a & : x < -a \end{cases}$$

$$3. |ax+b| = \begin{cases} ax+b & : x \geq -\frac{b}{a} \\ -ax-a & : x < -\frac{b}{a} \end{cases}$$

لاحظ أن

$$1. |x| \geq 0$$

$$2. |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$3. |a+b| \leq |a| + |b|$$

خواص القيمة المطلقة:

$$1. |a|^2 = a^2$$

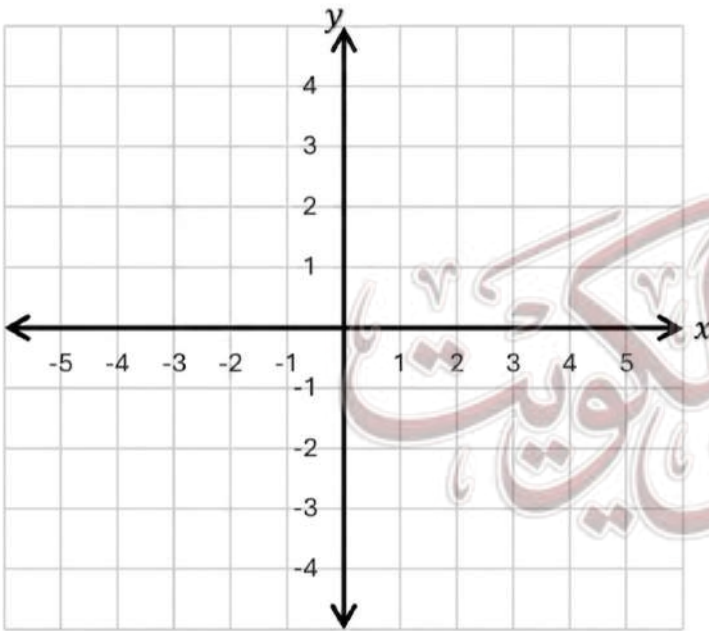
$$2. \sqrt{x^2} = |x|$$

عند رسم بيان أي
دالة اكتب مجال
الدالة أولاً.



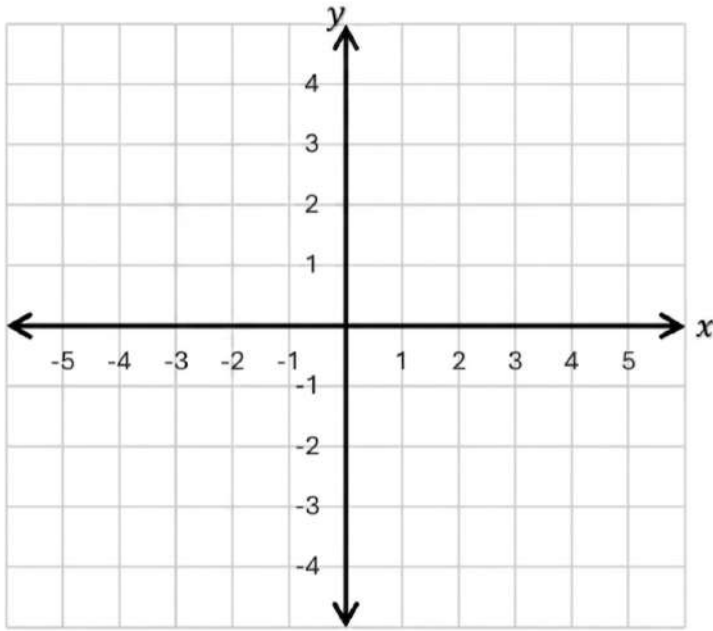
$$f(x) = |2x+4|$$

مثال 1 ارسم بيان الدالة:



ارسم بيان الدالة : $f(x) = |3x + 6|$

تحقق من فهمك 1



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

(المجال) (المجال المقابل)

الصورة القياسية لدوال القيمة المطلقة:
 $f(x) = |ax + b| + c$

مجال الدالة هو $\mathbb{R}$ ، ومجالها المقابل هو $\mathbb{R}$



انتبه

1. رأس المنحنى هو النقطة $(-\frac{b}{a}, c)$.

2. معادلة محور التماثل هو $x = -\frac{b}{a}$.

3. مدى الدالة هو $[c, \infty)$.

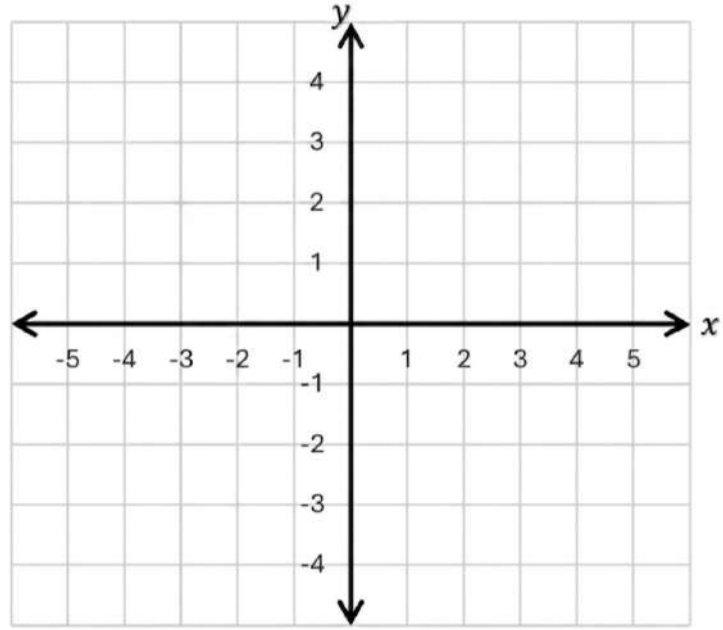
4. مدى الدالة يتغير إذا كانت الدالة على الصورة $f(x) = -|ax + b| + c$ ويصبح

$(-\infty, c]$ حيث منحنى الدالة في هذه الحالة يكون مفتوحاً للأسفل

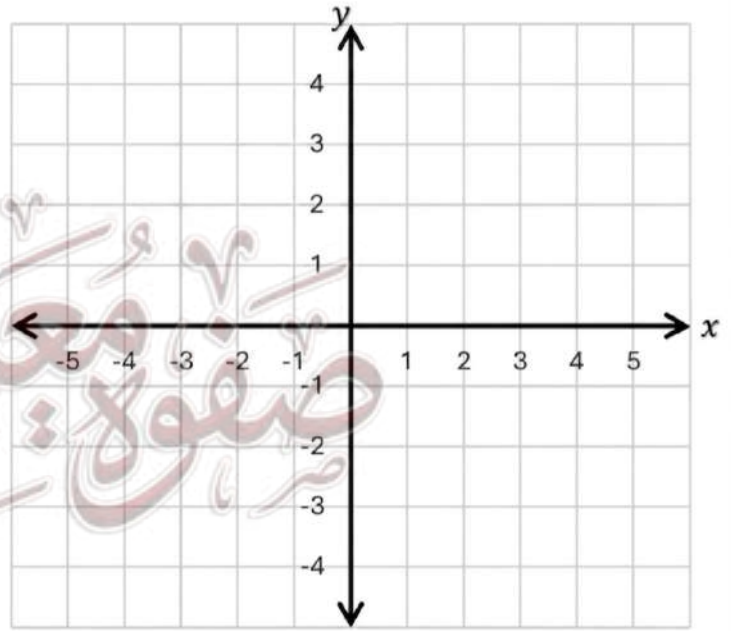
أوجد رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل ومدى كل من الدوال
التالية ثم ارسم بيان كل منها

مثال 2

a $y = |x - 2| + 1$



b $y = -|2x + 3|$

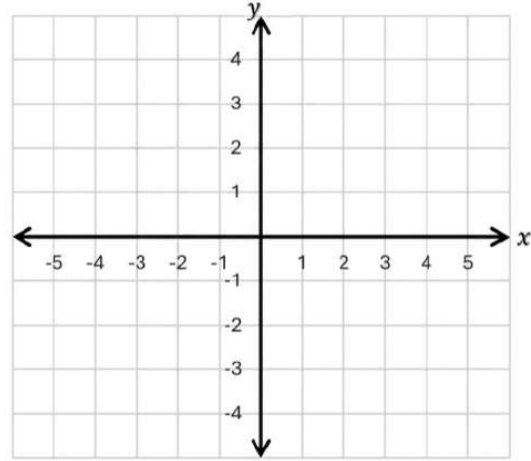


مُعَلِّمٌ كَوْنِي

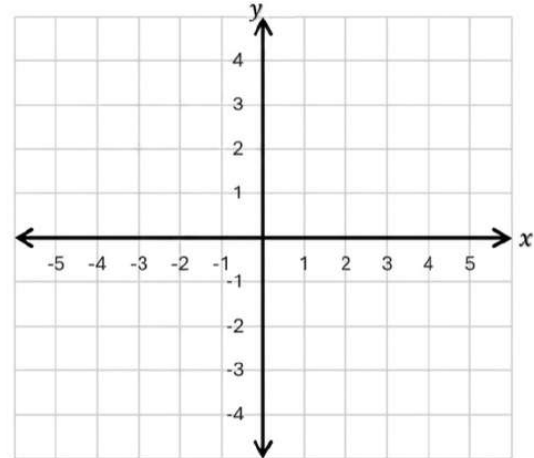
أوجد رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل ومدى كل من الدوال
التالية ثم ارسم بيان كل منها

تحقق من فهمك 2

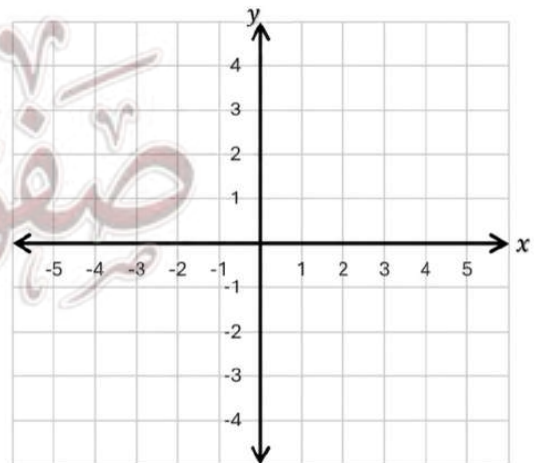
a $f(x) = |x + 1| + 3$



b $y = -|x + 1|$

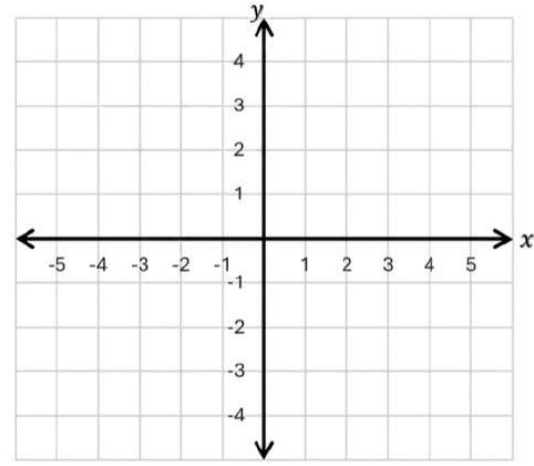


c $g(x) = \left| \frac{1}{2}x + 1 \right|$



صفوة معلمي الكويت

d $f(x) = 1 - |x - 2|$



55137938

رسم بياني دوال القيمة المطلقة باستخدام التحويلات الهندسية

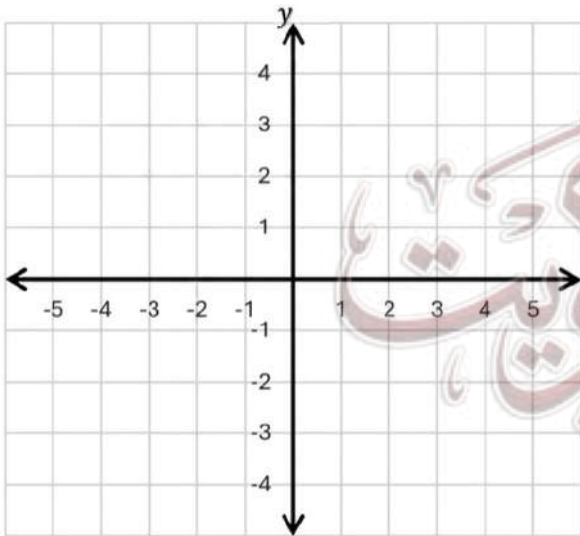
1. الانسحاب في اتجاه السينات (إزاحة أفقية)

يكون منحنى الدالة $f(x) = |x + a|$ هو نفس منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ وبإزاحة أفقية مقدارها $|a|$ وحدة في الاتجاه:

1- الموجب لمحور السينات (جهة اليمين) عندما $a < 0$

2- السالب لمحور السينات (جهة اليسار) عندما $a > 0$

مثال 3 ارسم بيان كل من الدالة $f(x) = |x - 1|$ باستخدام التحويلات الهندسية



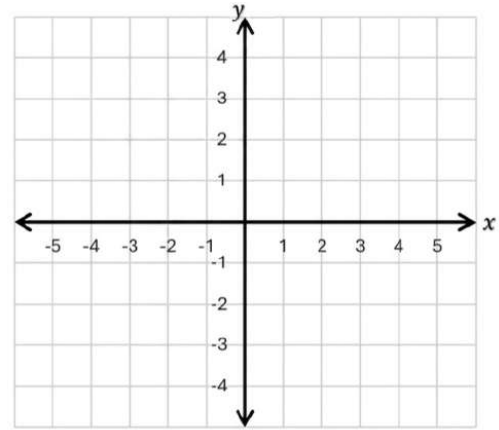
مُعَلِّمٌ كَرِيمٌ
صَفْوَةٌ مِي كَرِيمٌ

لكل من الدوال التالية حدد مسافة الانسحاب ، ثم ارسم بيان كل منها مستخدمًا الإزاحة لبيان

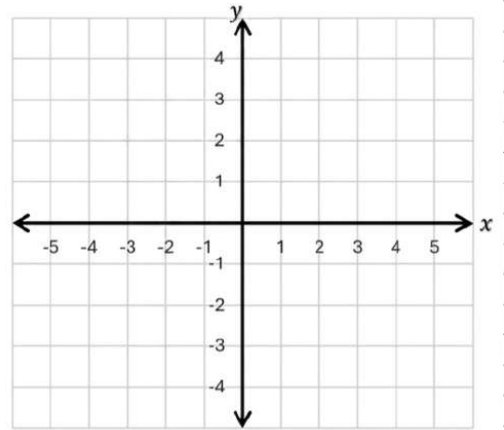
تحقق من فهمك 3

(a) $f(x) = |x - 3|$

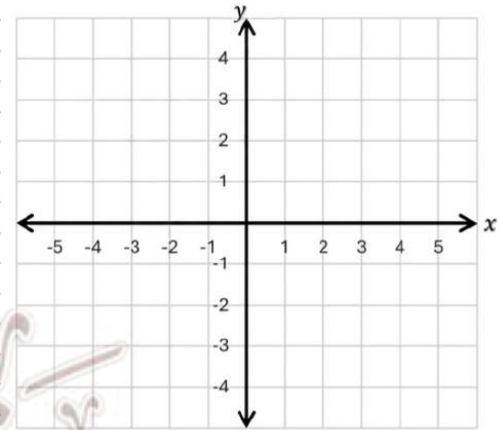
الدالة الأساسية $g(x) = |x|$:



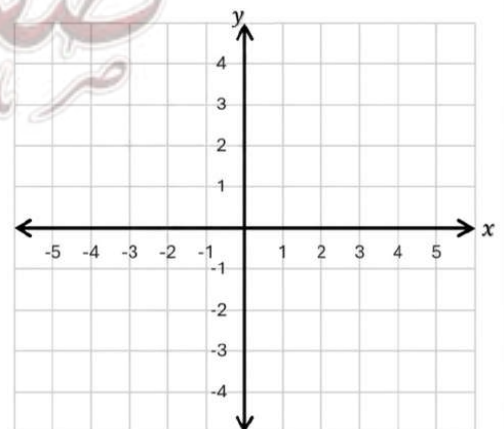
(b) $y = |x + 2|$



(c) $f(x) = |x - 3.5|$



(d) $y = |x - 1.5|$



مُعَلِّمَاتُ
صَفْوَة مَيْ يَاسِين

2. الانسحاب في اتجاه محور الصادات (إزاحة رأسية)

يكون منحنى الدالة $f(x) = |x| + a$ هو نفس منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ وبإزاحة رأسية مقدارها $|a|$ وحدة في الاتجاه:

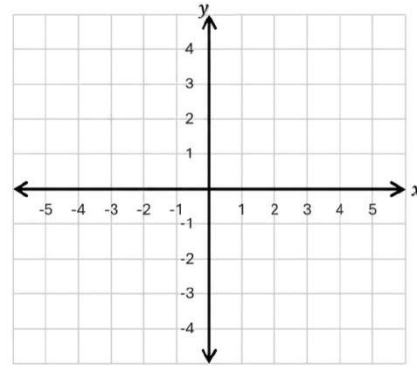
1. الموجب لمحور الصادات (رأسيًا للأعلى) عندما $a > 0$

2. السالب لمحور الصادات (رأسيًا للأسفل) عندما $a < 0$

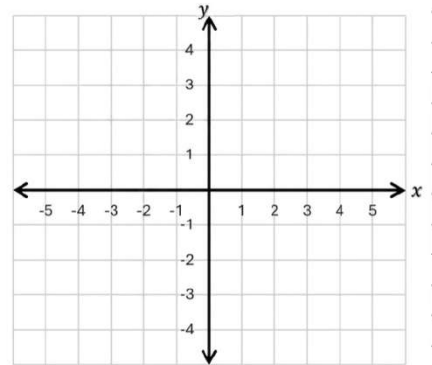
تحقق من فهمك 4

ارسم بيان كلٍّ من الدوال التالية باستخدام التحويلات الهندسية والدالة الأساسية $g(x) = |x|$:

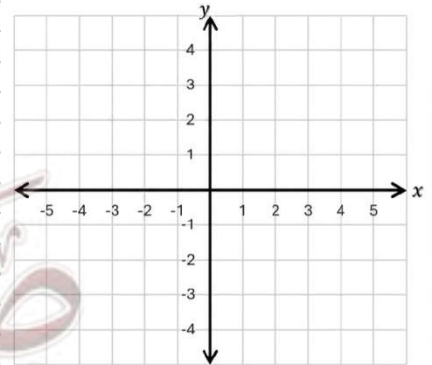
(a) $f(x) = |x| + 3$



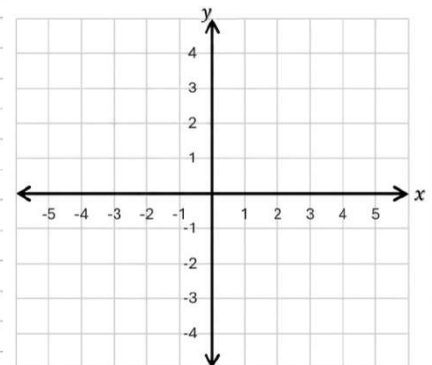
(b) $y = |x| - 2$



(c) $f(x) = |x| - 2.5$



(d) $y = |x| - 1$



مَرْفُوعَةٌ مَعَالِمُ الْكَوَيْتِ

3. الانسحاب المركب: إزاحة أفقية تليها إزاحة رأسية لمنحنى الدالة $f(x) = |x|$

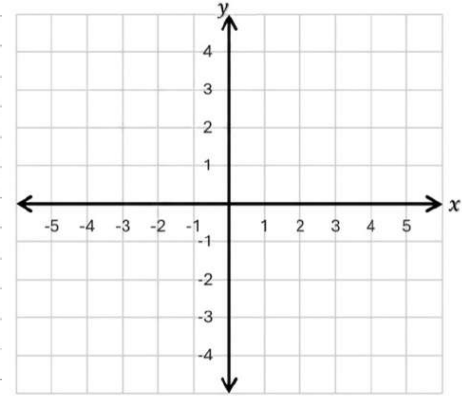
منحنى الدالة $f(x) = |x + a| + b$ هو نفس منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ بإزاحة:

1 - أفقية (محور السينات) مقدارها $|a|$ مع مراعاة الاتجاه يميناً أو يساراً.

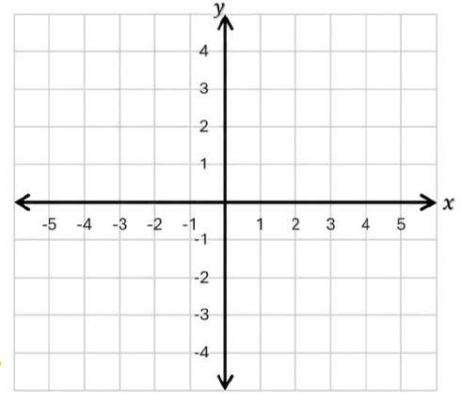
2 - رأسية (محور الصادات) مقدارها $|b|$ مع مراعاة الاتجاه للأعلى أو للأسفل.

تحقق من فهمك 5 ارسم بيان الدوال التالية باستخدام دالة المرجع والإزاحة :

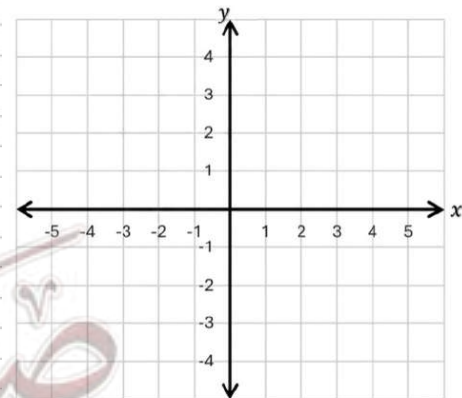
a $f(x) = |x + 3| + 2$



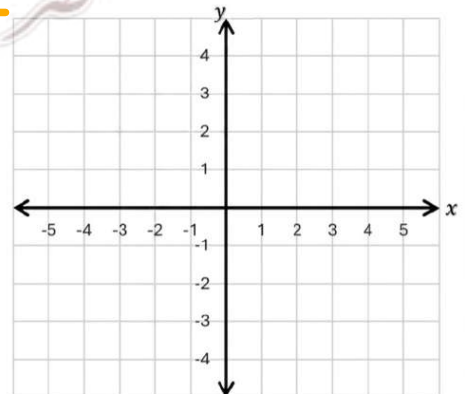
b $y = |x - 2| - 1$



c $f(x) = |x + 2| - 2$



d $y = |x - 1| + 3$



مُعَلِّمٌ كَوْنِي

الانعكاس في محور السينات للدالة الأساسية $g(x) = |x|$

• إذا كانت $g(x) = |x|$ ، $f(x) = -|x+b|$ يجب مراعاة

ترتيب التحويلات الهندسية لرسم بيان الدالة $f(x)$:

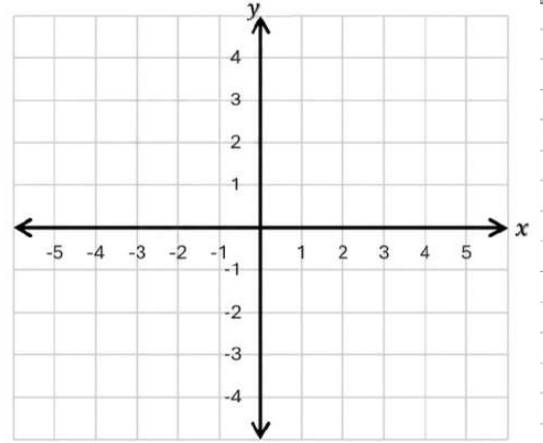
1 - انعكاس في محور السينات أولاً للدالة الأساسية.

2 - إزاحة أفقية (يميناً أو يساراً).

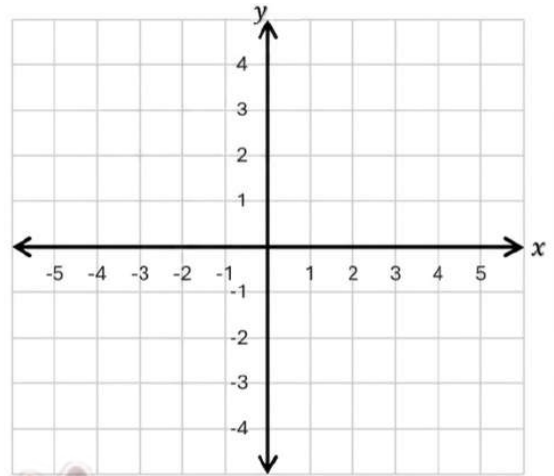
3 - إزاحة رأسية (لأعلى أو للأسفل). 4 - تحديد الرأس للمنحنى و محور التماثل.

تحقق من فهمك 6 ارسم بيانياً كلاً من الدوال التالية مستخدماً بيان منحنى الدالة الأساسية $g(x)=|x|$:

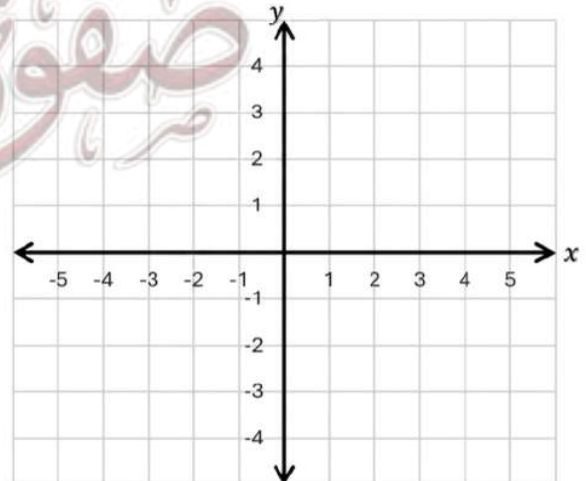
(a) $f(x) = -|x-2|+3$



(b) $g(x) = -|x+1|-2$



(f) $f(x) = |1-x|+2$



صِفْوَةٌ مَعَالِمِيَّةٌ

لحل المعادلة $|ax+b|=c$ حيث $c \geq 0$

نحل المعادلتين المرتبطتين بها وهما :

$$ax+b=c$$

أو

$$ax+b=-c$$

حل معادلات القيمة المطلقة

تذكر أن



$$|a|=|b| \iff a^2=b^2$$

$$|a|=|b| \iff a=b$$

$$\text{or } a=-b$$

خواص القيمة المطلقة

لكل $a, b \in \mathbb{R}$

$$1. |a| \geq 0$$

$$2. |a+b| \leq |a| + |b|$$

$$3. |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$4. |x-a| = |a-x|$$

$$5. \frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right|, b \neq 0$$

$$6. |x| = |-x|$$

$$7. |n|^2 = n^2$$

$$8. \sqrt{x^2} = |x|$$

حيث n عدد زوجي

لأي عدد حقيقي x يكون

أولاً : حل المعادلة على الصورة $|ax+b|=|cx+d|$

أوجد مجموعة حل المعادلة: $|x-2| = |2x-1|$

مثال 1

مَرْفُوعَةٌ مَعَالِمُ الْكُوَيْتِ

تحقق من فهمك 1 أوجد مجموعة حل المعادلة : $|x - 1| = |x + 2|$

تحقق من فهمك 2 أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية: $|y - 4| = |2y - 5|$

b $|2x - 3| = |x + 1|$

مَرْفُوعَةٌ مُعَلِّمَةٌ كَوَيْتٌ

c $|3y + 1| = |y - 2|$

d $|x - 4| = |2x - 5|$

c $|4 - 5x| + |3x + 1| = 0$

أندرب وأحل المسائل

صِفْوَةٌ مَعَالِكِيَّة



انتبه

ثانيًا: حل المعادلة على الصورة $|ax+b|=cx+d$

أوجد مجموعة حل المعادلة: $|x-3|=3x-1$

مثال 3

1. $|3x-9|=3|x-3|$

2. $|3-x|=|x-3|$

3. $\sqrt{x^2-4x+4} =$
 $\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$

4. $x^2=|x|^2$

تحقق من فهمك 3 أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية: (a) $|2x-1|=x+2$

(b) $|2x+5|=x+5$

مَرْفُوعَةٌ مَعَالِمُ الْكُتُبِ

مثال 4

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية: (a) $|4x+2|=1-2x$

(b) $|x+4|+2x+3=0$

تحقق من فهمك 4 = أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية: (a) $|2\ell-3|=|4\ell-1|$

مَرْفُوعَةٌ مُعَلِّمَةٌ
صَفْوَةُ مِي هَارِيت

b $|3x-1|+4x-13=0$

i $\frac{1}{2}|8x-2|=x+2$

أندرب وأحل المسائل

j $|x+4|+23=17$

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكَوْنِ

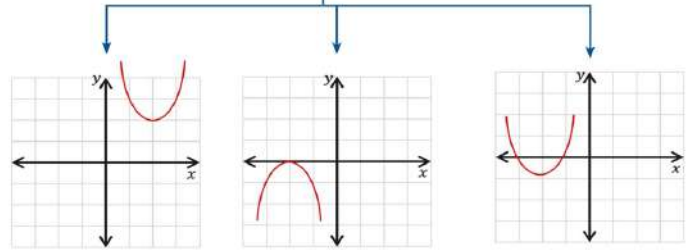
تذكر أن

* حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد (المعادلة التربيعية) بيانياً:

1. الدالة الثابتة: $f(x)=c$, $c \in \mathbb{R}$ (دالة من الدرجة الصفرية) وتمثيلها البياني يكون خط مستقيم أفقي يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات عند القيمة c .
2. الدالة الخطية: $f(x)=ax+b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ (دالة من الدرجة الأولى) وتمثيلها البياني على شكل خط مستقيم.
3. الدالة التربيعية: $f(x)=ax^2+bx+c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ (دالة من الدرجة الثانية) تمثل قطع مكافئ مفتوحاً للأعلى إذا كانت $a > 0$ ، ومفتوحاً للأسفل إذا كانت $a < 0$.

مجموعة الحل هي:
الإحداثيات السينية
لتقاطع المنحنى مع
محور السينات.

لاحظ أن

حلول المعادلة $f(x)=0$ 

المنحنى لا يقطع
محور السينات، لا
يوجد حل للمعادلة
في $\mathbb{R}$

عدد الحلول = 0

المنحنى يقطع محور
السينات في نقطة واحد،
يوجد حلان حقيقيان
متساويان للمعادلة في $\mathbb{R}$

عدد الحلول = 1 مكرر

المنحنى يقطع
محور السينات
في نقطتين، يوجد
حلان مختلفان
للمعادلة في $\mathbb{R}$

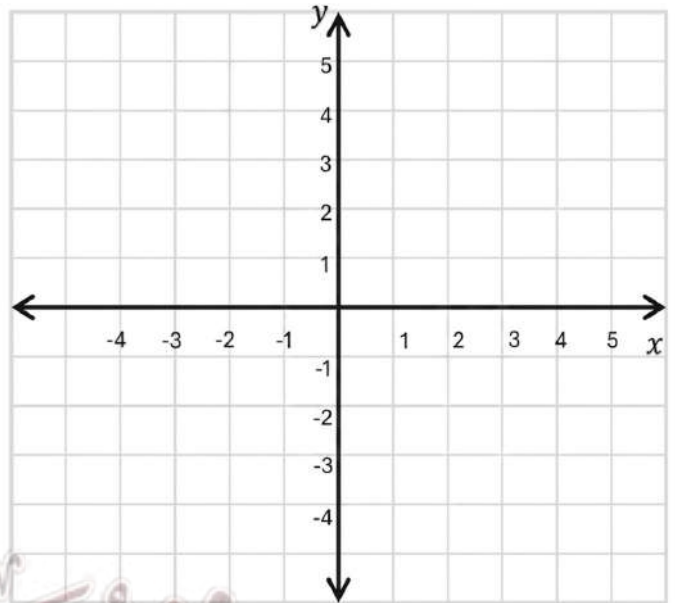
عدد الحلول = 2

أوجد بيانياً مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في $\mathbb{R}$

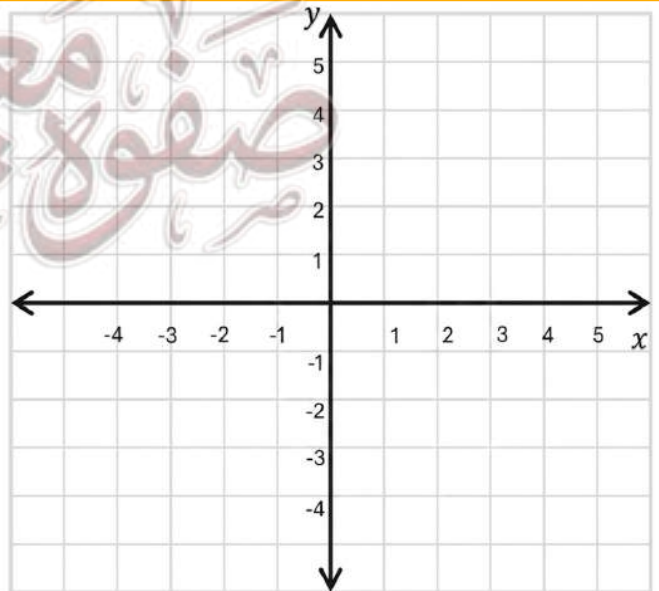
مثال 1

مستعيناً بالفترة الموضحة:

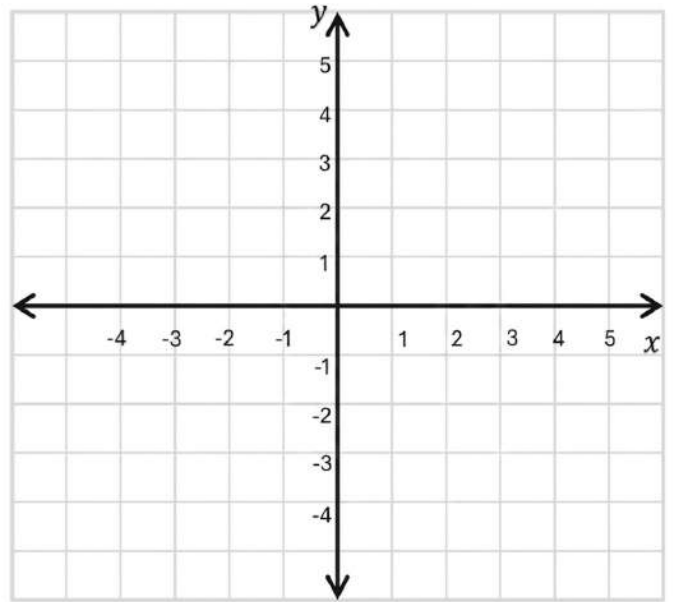
(a) $x^2 - 2x - 3 = 0$, $[-2, 4]$



(b) $-x^2 - 4x - 4 = 0$, $[-4, 0]$

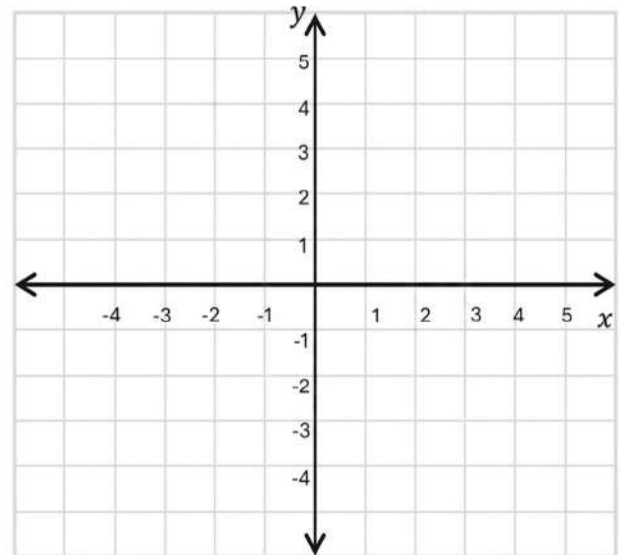


Ⓒ $x^2 + 2 = 0$, $[-2, 2]$

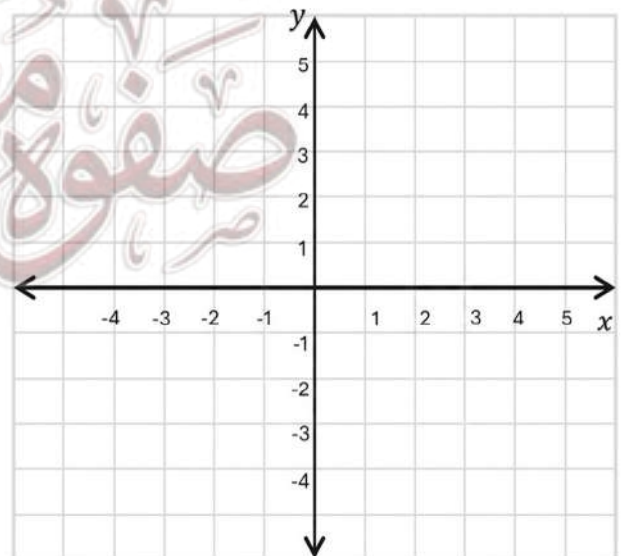


تحقق من فهمك 1 أوجد بيانياً مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في $\mathbb{R}$ مستعيناً بالفترة الموضحة :

a $x^2 - 6x + 8 = 0$, $[1, 5]$



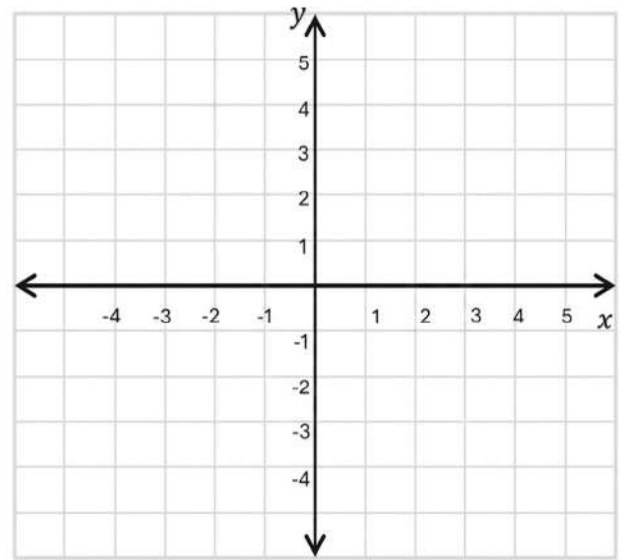
b $x^2 + 4x + 4 = 0$, $[-4, 0]$



مُعَلِّمٌ كَوْنِيٌّ
صِفْوَةٌ بِمِثْلِيَّةٍ

c $x^2 + 4x + 5 = 0$

, $[-4, 0]$



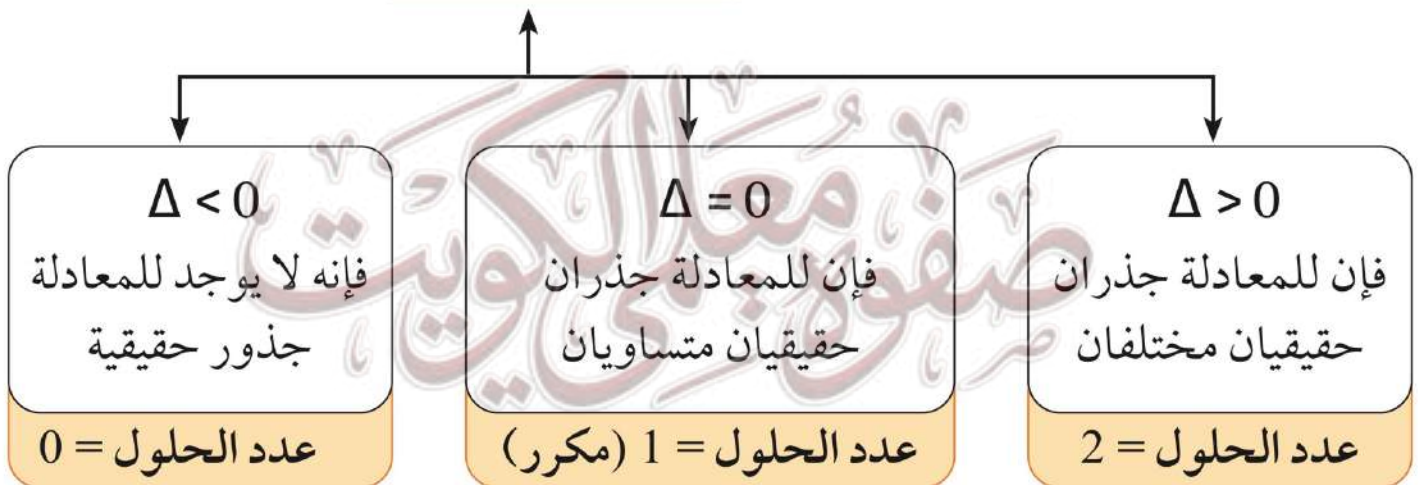
حل المعادلة التربيعية جبرياً

القانون العام لحل المعادلات التربيعية في متغير واحد وهو:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad b^2 - 4ac \geq 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

يسمى المقدار $b^2 - 4ac$ مميز المعادلة التربيعية ، ويرمز له بالرمز Δ ويقرأ (دلتا) ، والمميز هو الذي يميز نوع الجذرين ويحدد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة بدون حلها ، أي أن

$$\Delta = b^2 - 4ac$$



1. نضع المعادلة في الصورة العامة
2. نوجد قيم a, b, c
3. نوجد المميز Δ
4. نحدد نوع الجذرين
5. نوجد الجذرين باستخدام القانون

خطوات حل المعادلة التربيعية بالقانون



حدّد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة من المعادلات التالية بدون حل المعادلة:

تحقق من فهمك 2

a $2x^2 - 7x - 4 = 0$

b $x^2 - 10x + 25 = 0$

e $x^2 - x = 0$

مثال 3 أوجد مجموعة حل المعادلات التالية باستخدام القانون :

a $x^2 - x - 5 = 0$

b $x^2 - 8 = 0$

مَرْفُوعَةٌ مَعَالِمُ الْكُتُبِ

c $x^2 = x + 1$

d $x^2 - 6x + 9 = 0$

أوجد مجموعة حل المعادلات التالية باستخدام القانه ن :

تحقق من فهمك 3

a $x^2 - 4x + 2 = 0$

صِفْوَةٌ مَعَالِمُ الْكُوَيْتِ

b $4x^2 - 5x + 1 = 0$

c $x^2 - 2x + 1 = 0$

d $x^2 - 6x + 8 = 0$

حل المعادلة التالية باستخدام القانون : $x^2 - 3x = 0$

مثال 4

تحقق من فهمك 4 حل المعادلتين التاليتين باستخدام القانون . $x^2 + 7x + 10 = 0$ a

b $2x^2 - 5x - 52 = 0$

(3) أوجد حل كل معادلة من المعادلات التالية:

(a) $\frac{1}{2} x(x+6) = 8$

(b) $2x(x+1) = 2$

(3) أوجد حل كل معادلة من المعادلات التالية: $\frac{1}{2} x(x+6) = 8$ a

أندرب وأحل المسائل

صِفْوَةٌ مُعَلِّمِي الْكُوَيْتِ

(b) $2x(x+1) = 2$

a أوجد عددين زوجيين متتاليين مجموع مربعيهما 100

تحقق من فهمك 5



انتبه

- إذا كان العدد هو x فإن :
- ضعف العدد $= 2x$
- ثلاثة أمثال العدد $= 3x$
- العدد الذي يليه $= x+1$
- مربع العدد $= x^2$
- عدد فردي فإن العدد الفردي الذي يليه هو $x+2$
- عدد زوجي فإن العدد الزوجي الذي يليه هو $x+2$

b مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار $3cm$ ومساحته $40cm^2$
أوجد بعدي المستطيل .

(4) ثلاثة أعداد موجبة متتالية مربع أكبرهم يساوي مجموع مربعي العددين الآخرين، أوجد هذه الأعداد.

أندرب وأحل المسائل

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ

• مجموع جذري المعادلة التربيعية هو $-\frac{b}{a}$

• حاصل ضرب جذري المعادلة هو $\frac{c}{a}$

المعادلة التربيعية على صورة $ax^2+bx+c=0$



أولاً : إيجاد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين
للمعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ بدون حلها

إذا كان حاصل ضرب جذرا المعادلة $2x^2 - 3x + c = 0$ يساوي -1. أوجد قيمة C .

سؤال 1

إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة $3x^2 + 10x - c = 0$ يساوي $-\frac{8}{3}$ أوجد قيمة C .

تحقق من فهمك 1

إذا كان مجموع جذري المعادلة: $2x^2 + bx - 5 = 0$ هو $\frac{3}{2}$ ، فأوجد قيمة b .

سؤال 2

مَرْفُوعٌ عَلَى الْيُوتِ

تحقق من فهمك 2

إذا كان حاصل ضرب جذريّ المعادلة $ax^2 - 5x + 2 = 0$ يساوي $\frac{3}{2}$ أوجد قيمة a ، ثم حل المعادلة.

مسألة 3

إذا كان l, m هما جذريّ المعادلة $2x^2 - 8x + 5 = 0$ ، فأوجد القيم العددية لكل مما يلي:

- (a) $l^2 + m^2$ (b) $\frac{1}{l} + \frac{1}{m}$ (c) $l - m$



انتبه

$$l - m = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right|$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(a.d + c.d)}{(b.d)}$$

مَرْفُوعَةٌ مَعَالِمُ الْكَوْنِ

ثانيًا: إيجاد المعادلة التربيعية إذا عُلِمَ جذراها

إذا كان m, l هما جذرا المعادلة التربيعية فإن المعادلة التربيعية تكون على الصورة:

$$x^2 - (l + m)x + (l \cdot m) = 0$$

↓ ↓
حاصل ضرب الجذرين مجموع الجذرين



كون معادلة تربيعية في متغير واحد والتي جذراها 4 , -3 بطريقتين مختلفتين

مسألة 4

أوجد المعادلة التربيعية التي جذراها معلومان في الحالات التالية :

تحقق من فهمك 4

a) 3, 5

b) 4, $-\frac{1}{3}$

c) 2, -2

مَرْفُوعَةٌ مُعَلِّمَةٌ
صَفْوَةُ مَرْيَمِ الْكُويْتِ

كُون المعادلة التربيعية التي جذراها:

5 سال

a $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$

b $5\sqrt{3}$, $-5\sqrt{3}$

صِفْوَةٌ مَعَالِمُ الْكُوَيْتِ

تحقق من فهمك 5 كَوْنُ المعادلة التربيعية التي جذراها: $-3\sqrt{2}$ ، $3\sqrt{2}$

ثالثاً: تَكْوِينُ معادلةٍ تربيعيةٍ بمعلومية معادلةٍ أُخرى

ملحوظة هامة: في المعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ إذا علمت أن $\ell+m$ هما جذرا المعادلة:

- عند $b=0$ فإن $\ell+m=0$ والجذرين أحدهما نظير جمعيٍّ للآخر
- عند $c=a$ فإن $\ell.m=1$ والجذرين أحدهما نظير ضربيٍّ للآخر

إذا كان ℓ, m هما جذرا المعادلة التربيعية $2x^2-3x-1=0$ كون المعادلة

التربيعية التي جذراها $2\ell, 2m$

مسألة 6

صِفْوَةٌ مَعْلَمَاتُ الْكُتُبِ

إذا كان l, m هما جذرا المعادلة التربيعية $2x^2 + 15x - 8 = 0$
كون المعادلة التربيعية التي جذراها : $2l, 2m$

تحقق من فهمك 6

(7) إذا كان l, m هما جذرا المعادلة $x^2 - 4x + 1 = 0$ فما قيمة؟

أتدرب وأحل المسائل

(a) $\frac{4}{l}, \frac{4}{m}$

(b) $l - m$

صِفْوَةٌ مَعَالِمُ الْكُوَيْتِ

«خواص المتباينات في الأعداد الحقيقية» :

أولاً: حل المتباينة من الدرجة الثانية باستخدام التحليل

1. عندما : $a.b \geq 0$ فإن : $a \geq 0, b \geq 0$ or $a \leq 0, b \leq 0$ 2. عندما : $a.b \leq 0$ فإن : $a \leq 0, b \geq 0$ or $a \geq 0, b \leq 0$

حَلُّ كُلِّ مِّنَ الْمُتَبَايِنَاتِ التَّالِيَةِ جَبْرِيًّا وَمَثَلُ الْحَلِّ عَلَى خَطِّ الْأَعْدَادِ :

مسألة 1

a) $x^2 - 2x - 8 \geq 0$

b) $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

مُعَلِّمٌ لِكُلِّ تَلَامِيذٍ

حَلِّ كُلَّ مِّنَ الْمُتَبَايِنَاتِ التَّالِيَةِ جَبْرِيًّا وَمَثُلِ الْحَلِّ عَلَى خَطِّ الْأَعْدَادِ :

(a) $x^2 + x - 12 \leq 0$

(b) $x^2 + 4x - 5 \geq 0$

صِفْوَةٌ مَعَالِكِيَّةٌ

© $x^2 - x - 6 < 0$

d) $(x-3)(2x+5) < 0$

صِفْوَةٌ مَعَالِكِيَّةٌ

$$\textcircled{e} \quad x^2 - 2x + 1 > 0$$

$$\textcircled{f} \quad x^2 + 6x + 9 < 0$$

صِفْوَةٌ مَعَالِكِيَّتْ

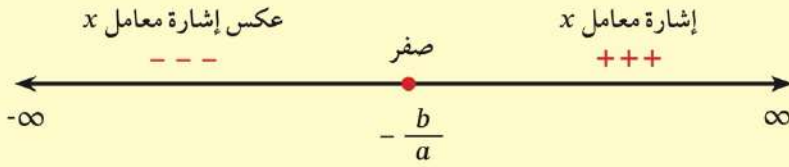
ثانيًا: حل المتباينة من الدرجة الثانية بدراسة الإشارة

لدراسة إشارة $g(x)=ax+b$, $a \neq 0$ نتبع التالي :

قاعدة هامة



$$1. \text{ نضع } 0 = g(x) \iff ax+b=0 \iff x = -\frac{b}{a}$$

2. نحدد العدد $x = -\frac{b}{a}$ على خط الأعداد3. تكون إشارة $g(x)$: • ماثلة للإشارة a على يمين العدد $-\frac{b}{a}$ • ومخالفة للإشارة a على يسار العدد $-\frac{b}{a}$ 

a $f(x) = 2x - 8$

ادرس إشارة كل من :

مثال 2

b $g(x) = -3x + 6$

مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ
صَفْوَةُ مَرْيَمَ

قاعدة هامة



انتبه

لدراسة إشارة $a \neq 0$ ، $f(x) = ax^2 + bx + c$ نتبع التالي :

1. نوجد المعادلة المناظرة: $f(x) = 0$

2. نوجد قيم x التي تجعل $f(x) = 0$ إما بالتحليل أو باستخدام المميز عندما يصعب التحليل

3. لدينا ثلاثة احتمالات:

للمعادلة $f(x)=0$ حلان حقيقيان مختلفان $x_1 < x_2$	$\Delta > 0$	
للمعادلة $f(x)=0$ حلان حقيقيان متساويان $x_1 = x_2$	$\Delta = 0$	
ليس للمعادلة $f(x)=0$ جذور حقيقية	$\Delta < 0$	

حلّ كلّاً من المتباينات التالية : (a) $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

(b) $x^2 - x \leq 5$

مُعَلِّمٌ مَرِيحٌ

© $x^2 - 10x + 25 > 0$

d) $-3x^2 + 4x - 2 \geq 0$

صَفْوَةُ مَعْلَاكَ كَيْت

حل كل من المتباينات التالية جبرياً ومثل الحل على خط الأعداد : (a) $2x^2 + 3x - 2 < 0$

(b) $-x^2 - x + 6 > 0$

(c) $x^2 - 6x + 9 \geq 0$

مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ
صَفْوَةٌ مِي

خاصية

حالة خاصة : حل المتباينة من الدرجة الثانية باستخدام القيمة المطلقة

إذا كان a, b عددين حقيقيين موجبين فإن: $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$

لاحظ أن

بصفة عامة : إذا كان a, b, c أعداداً حقيقية بحيث $a \neq 0, c < 0$ فإن :

1. مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2 < c$ هي المجموعة الخالية $\emptyset$
 2. مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2 > c$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$
 3. مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2 < 0$ هي $\emptyset$
- مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2 > 0$ هي $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$

المتباينة	مجموعة الحل
$x^2 < 0$	$\emptyset$
$x^2 \leq 0$	$\{0\}$
$x^2 \geq 0$	$\mathbb{R}$
$x^2 > 0$	$\mathbb{R} - \{0\}$

تذكر!

1. $\sqrt{x^2} = |x|$
2. $|x| \leq a, a > 0$
 $\therefore -a \leq x \leq a$
3. $|x| \geq a, a > 0$
 $\therefore x \geq a \text{ or } x \leq -a$

مسألة 4

أوجد مجموعة حل المتباينة ومثل الحل على خط الأعداد : (a) $2x^2 + 5 \geq 23$ (b) $(5x + 7)^2 + 3 < 2$

مَرْفُوعَةٌ مَعَالِمُ الْكُتُبِ

a $3x^2 - 4 \leq 8$ أوجد مجموعة حل المتباينة ومثل الحل على خط الأعداد :

تحقق من فهمك 4

b $(4x - 3)^2 + 2 > -3$

c $(2 - 3x)^2 < 1$

مُعَلِّمٌ لِكُلِّ تَلَامِيذٍ
صَفْوَةٌ مِزْمِيَّةٌ

d $(2x+1)^2 - 3 \geq 1$

أندرب وأحل المسائل

e أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية: $(3x-7)(2x+9) \leq 0$

صِفْوَةٌ مَعَالِكِيَّةٌ

التناسب: هو تساوي نسبتين أو أكثر.

النسبة: هي مقارنة بين كميتين من النوع نفسه ولهما نفس وحدة القياس ويمكن التعبير عن النسبة بصورة a إلى b ، وتكتب $a:b$ أو $\frac{a}{b}$

إذا كان a, b, c, d أعداد متناسبة فإن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ حيث $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$

إذا كان $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكانت $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فإن a, b, c, d تسمى أعدادًا متناسبة



خاصية (1): «الضرب التقاطعي»

إذا كان $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فإن $a.d = c.b$

أي إن: حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين وتسمى هذه الخاصية «قاعدة الضرب التقاطعي»

إذا كانت $2, x, 4, 6$ أعدادًا متناسبة ، أوجد قيمة x

مثال 1

أوجد الثالث المتناسب للأعداد $4, 7, \dots, 35$

تحقق من فهمك 2

أوجد العدد الذي إذا طرح من حدي النسبة $\frac{5}{6}$ أصبحت $\frac{9}{4}$

تحقق من فهمك 3



تحقق من فهمك 4 أوجد قيمة x إذا كان : $(2x+3) : (3x-5) = 3 : 4$

تحقق من فهمك 5 إذا كان : $2a=7b$ ، فأوجد $\frac{a}{b}$

خاصية (2): "عكس الخاصية 1"

إذا كان : $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكان $a.d = b.c$

فإن : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

خاصية (3): إذا كان : $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

فإن :

(1) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

(2) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

(3) $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$

خواص التناسب

تحقق من فهمك 6

أوجد $\frac{x}{y}$ في كل مما يلي حيث : $x \neq 0, y \neq 0$

a $5x=7y$

b $\frac{5x-2y}{5x+2y} = \frac{1}{4}$

صِفْوَةٌ مَعَالِمُ الْكُوَيْتِ

مثال 7

إذا كان : $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ أوجد $\frac{2a+5b}{3b+2a}$

خاصية (4): إذا كان : $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ وكان $k \in \mathbb{R}^*$ حيث k عدد ثابت $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ فإن $a = bk, c = dk$

تحقق من فهمك 7 : إذا كان : $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ ، فأوجد القيمة العددية للمقدار : $\frac{2x+3y}{5x+2y}$

خاصية (4): إذا كان : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$ وكانت $k_1, k_2, k_3, \dots \in \mathbb{R}^*$ فإن : إحدى النسب $\frac{ak_1 + ck_2 + ek_3 + \dots}{bk_1 + dk_2 + fk_3 + \dots}$

مثال 8 : إذا كانت الأعداد 3, 6, 5 متناسبة مع a, b, c ، أوجد قيمة المقدار : $\frac{a+2b+c}{3a+b+c}$

تحقق من فهمك 8 إذا كان : $\frac{a}{2} = \frac{b}{7} = \frac{c}{5}$ ، أوجد : $\frac{a+2b}{3b+c}$ (بطريقتين مختلفتين).

تعريف:

الكميات : a, b, c, d في تناسب متسلسل إذا وفقط إذا كان :

$$b^2 = ac \quad \text{أو} \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

ويسمى : a الأول المتناسب ، b الوسط المتناسب ، c الثالث المتناسب

$$b = \pm \sqrt{a \cdot c} \quad \text{حيث :}$$

التناسب المتسلسل (الهندسي)

ملحوظة : a, c إما أن يكونا موجبين معاً أو سالبين معاً

$$\frac{\text{مربع الوسط المتناسب}}{\text{الثالث المتناسب}} = \frac{\text{الأول المتناسب}}{\text{الوسط المتناسب}}$$

$$\frac{\text{مربع الوسط المتناسب}}{\text{الأول المتناسب}} = \frac{\text{الثالث المتناسب}}{\text{الوسط المتناسب}}$$

تحقق من فهمك 9 أوجد الوسط المتناسب بين العددين -27 , -3

مثال 10 إذا كان : a, b, c في تناسب متسلسل أثبت أن : $\frac{2a+3b}{2b+3c} = \frac{a}{b}$

تحقق من فهمك 10 إذا كان : a, b, c في تناسب متسلسل أثبت أن : $\frac{a+3b}{b+3c} = \frac{a-2b}{b-2c}$ حيث المقام $\neq$ صفر

صِفْوَةٌ مَعَالِمُ الْكَوْنِ

مثال 11

إذا كان : $\frac{2a+3b}{2b+3a} = \frac{2+2b}{b+2c}$ أثبت أن : b وسط متناسب بين a, c

تحقق من فهمك 11 إذا كان : $\frac{a+b}{b+c} = \frac{a}{b}$ أثبت أن b وسط بين a, c

صِفْوَةٌ مَعَالِمُ الْكَوَيْتِ

تعميم (2) :

المضلعان المتطابقان متشابهان.

تعميم (1) : يقال لمضلعين (لهما العدد نفسه من الأضلاع) انهما متشابهان إذا تحقق الشرطان التاليان معا :

1. قياسات زواياهما المتناظرة متساوية .
2. أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة .

«والعكس صحيح»

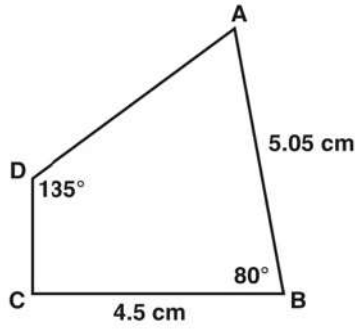
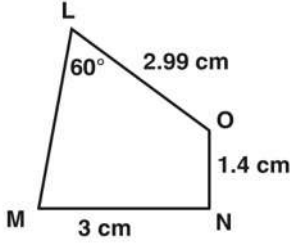
تعميم (3) : إذا كان المضلع $A \sim B, B \sim C$ فإن $A \sim C$

تحقق من فرمك 1 في الشكل المقابل :

المضلعان $LMNO, ABCD$ متشابهان

أوجد قياسات الزوايا المجهولة وأطوال

الأضلاع المجهولة في كلا من المضلعين

**نظرية :**إذا كانت نسبة التشابه لأي شكلين متشابهين هي $\frac{a}{b}$ فإن :1. النسبة بين محيطي الشكلين $= \frac{a}{b}$ وهي نسبة التشابه2. النسبة بين مساحتي الشكلين $= \left(\frac{a}{b}\right)^2$ وهي مربع نسبة التشابه**لاحظ أن**

إذا كان المضلع A يشابه المضلع B (كانت k نسبة تشابه المضلع A : المضلع B) :

(1) $k > 1$

فإن المضلع A هو تكبير للمضلع B وتسمى K معامل التكبير

(2) $0 < k < 1$

فإن المضلع A هو تصغير للمضلع B وتسمى K معامل التصغير

(3) $k = 1$

فإن المضلع A يطابق المضلع B

مثال 2

إذا كانت نسبة التشابه لمضلعين متشابهين تساوي $\frac{5}{6}$ ، وكان محيط المضلع الأصغر يساوي 14.5 cm ، أوجد محيط المضلع الأكبر .

تحقق من فهمك 2

لدينا شكلان رباعيان متشابهان ونسبة التشابه بينهما $\frac{5}{4}$ ، فإذا كانت مساحة الشكل الرباعي الأكبر هي 30 cm^2 فما مساحة الشكل الرباعي الأصغر ؟

- (3) مستطيلان متشابهان. بُعدا الأول 8 cm ، 12 cm ، ومحيط الثاني 200 cm .
- أوجد نسبة التشابه .
 - أوجد مساحة المستطيل الثاني .

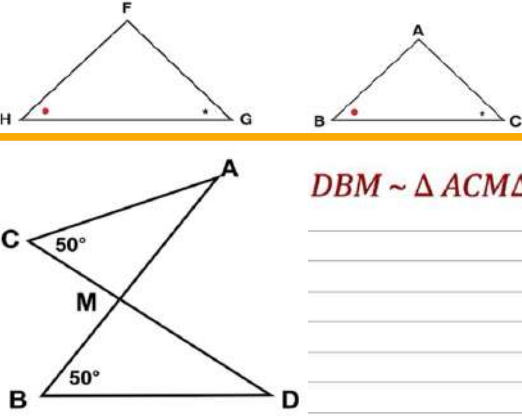
أنتدرب وأحل المسائل

صِفْوَةٌ مَعَالِمِ الْكُوَيْتِ

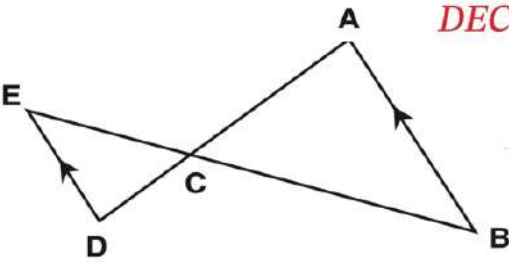
نظرية (1) :

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثين مع زاويتين في المثلث الآخر .

مثال 1

في الشكل المقابل : $m(\hat{C}) = m(\hat{B}) = 50^\circ$ أثبت أن : $\triangle DBM \sim \triangle ACM$ في الشكل المقابل : $\overline{DE} \parallel \overline{BA}$ أثبت أن المثلثين $\triangle DEC$, $\triangle ABC$ متشابهان ثم اكتب عبارة التشابه

تحقق من فهمك 1

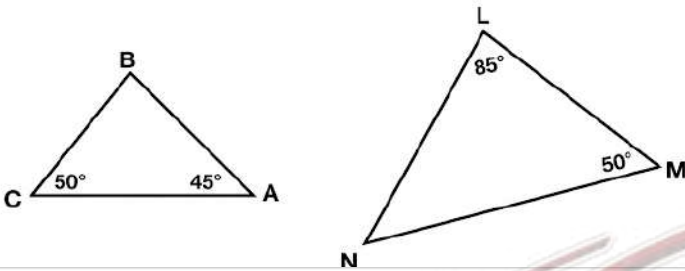


مثال 2

في الشكل المقابل :

$$m(\hat{A}) = 45^\circ , m(\hat{C}) = 50^\circ$$

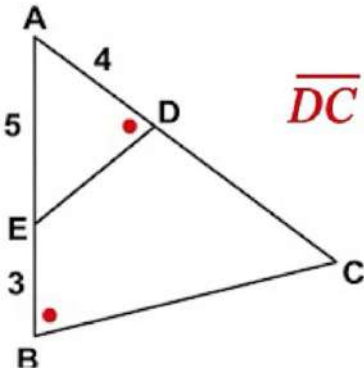
$$m(\hat{L}) = 85^\circ , m(\hat{M}) = 50^\circ$$

أثبت أن : $\triangle ABC \sim \triangle NLM$ 

مَرْفُوعَةٌ : مَعَالِمُ الْكَوَيْتِ

المثلث ABC قائم الزاوية في A فيه $m(\hat{B}) = 55^\circ$ ، والمثلث NLM قائم الزاوية في L فيه $m(\hat{M}) = 35^\circ$ ، أثبت أن المثلثين متشابهان .

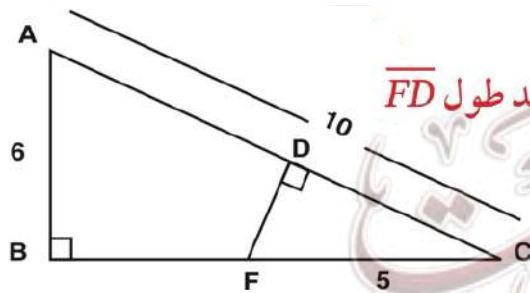
تحقق من فهمك 2



في الشكل المقابل :

مثال 3

1. أثبت أن: $\triangle AEB \sim \triangle ACB$ 2. أوجد طول $\overline{DC}$



تحقق من فهمك 3 في الشكل المقابل :

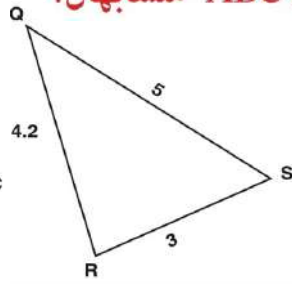
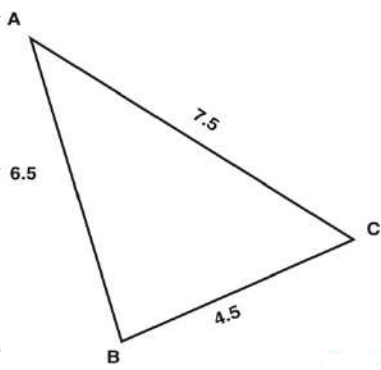
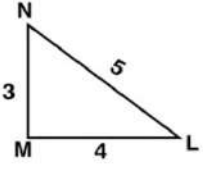
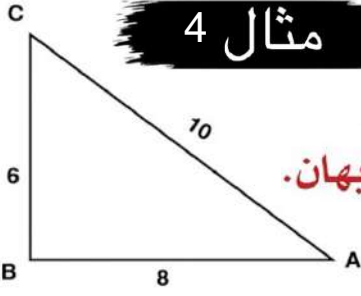
(1) أثبت أن المثلثين ABC, FDC متشابهان (2) أوجد طول $\overline{FD}$

نظرية (2) :

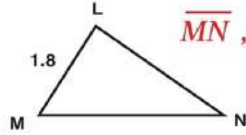
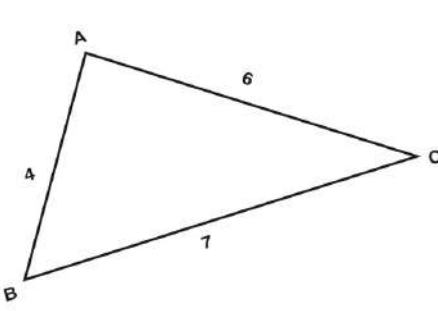
يتشابه المثلثان إذا تناسب أطوال أضلاعهما المتناظرة .

في الشكل المقابل : أثبت أن المثلثين ABC, LMN متشابهان.

مثال 4

تحقق من فرام 4 a في الشكل المقابل : أثبت أن المثلثين ABC, QRS متشابهان.

مَرْفُوعَةٌ مَعَالِمُهَا كَوَيْتٌ



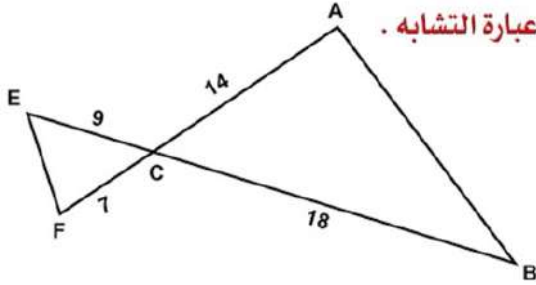
b في الشكل المقابل : المثلثان ABC, LMN متشابهان. أوجد طول كل من $\overline{MN}$, $\overline{LN}$

نظرية (3) :

يتشابه المثلثان إذا طابقت زاوية في أحدهما زاوية في المثلث الآخر، وتناسب طول الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين.

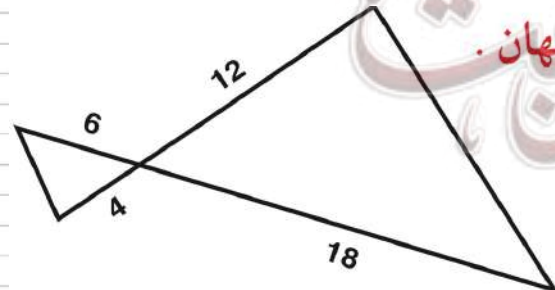
مثال 5

في الشكل المقابل : أثبت أن المثلثين FEC, ABC متشابهان. ثم اكتب عبارة التشابه.



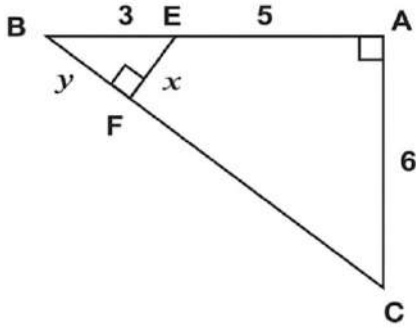
تحقق من فهمك 5

في الشكل المقابل : أثبت أن المثلثين متشابهان.



مثال 6

في الشكل المقابل: أثبت أن المثلثين BAC , BFE متشابهان. ثم أوجد كلا من x, y .

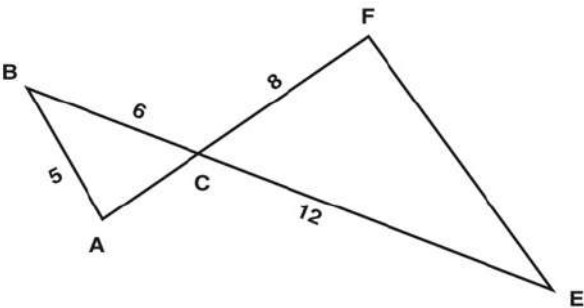


تحقق من فهمك 6

في الشكل المرسوم:

a أثبت أن $\Delta FEC \sim \Delta ABC$

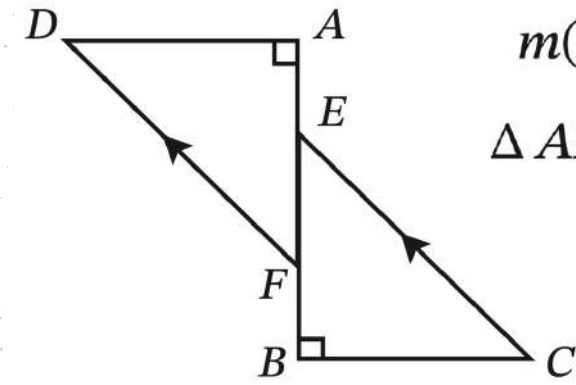
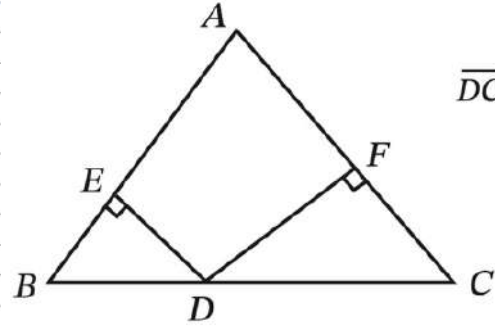
b أوجد $\overline{EF}$



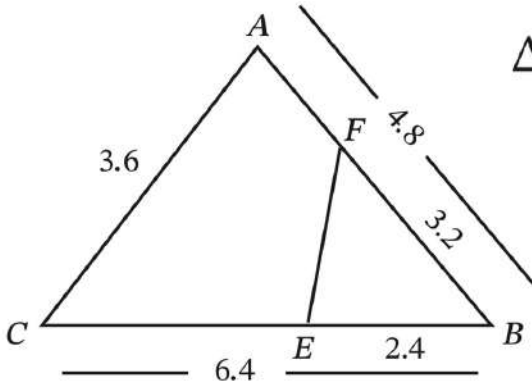
مَرْفُوعَةٌ مَعَالِيكَ

(2) في الشكل المرسوم ABC مثلث فيهأوجد طول $\overline{DC}$

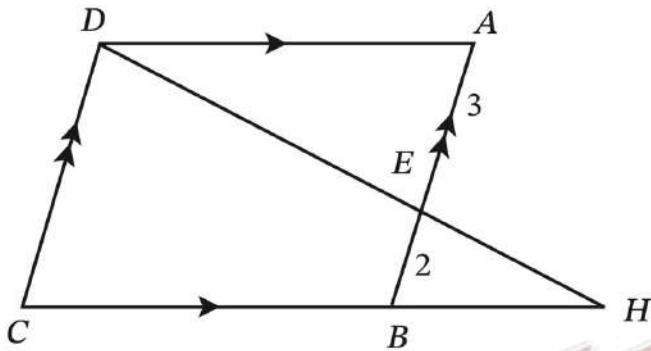
$$\frac{ED}{DF} = \frac{5}{7}, BC = 48cm, AB = AC$$

(3) في الشكل المرسوم $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = 90^\circ$ أثبت أن $\Delta ADF \sim \Delta BCE$ $\overline{DF} \parallel \overline{EC}$

مَرْفُوعَةٌ مَعَالِمُ الْكُفَيْتِ



(5) في الشكل المرسوم أثبت أن $\Delta BCA \sim \Delta BDE$



(6) في الشكل المقابل: $ABCD$ متوازي أضلاع
 $\overrightarrow{CB} \cap \overrightarrow{DE} = \{H\}$, $\frac{3}{2} = \frac{AE}{EB}$, $E \in (\overline{AB})$

(a) أثبت أن $\Delta EAD \sim \Delta DCH$

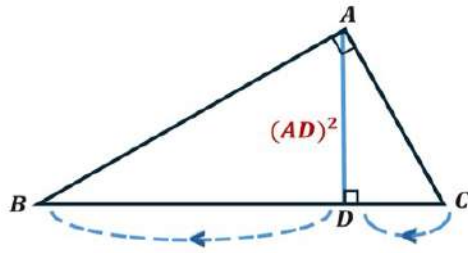
(B) أوجد : $\frac{\text{مساحة } \Delta DCH}{\text{مساحة } \Delta EAD}$

مَرْفُوعَةٌ مَعَالِمُ الْكَيْتِ



نظرية :

العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكل منهما يشابه المثلث الأصلي.



نتيجة (1) :

«نظرية إقليدس»

مربع طول العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي ناتج ضرب طولي القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما الوتر بهذا العمود.

أي أن في المثلث ABC القائم الزاوية في (A) إذا كان $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ فإن :
 $(AD)^2 = DC \cdot BD$

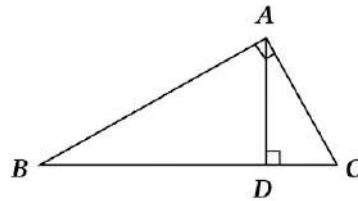


انتبه

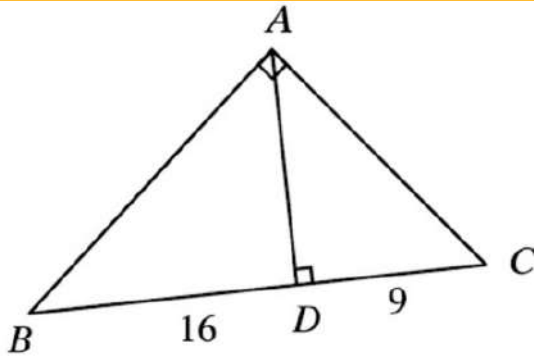
نتيجة (2) :

«نظرية إقليدس»

في المثلث القائم ABC إذا كان $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ فإن :



- ① $(AB)^2 = BD \cdot BC$
- ② $(AC)^2 = CD \cdot CB$
- ③ $(AB) \cdot (AC) = (AD) \cdot (BC)$

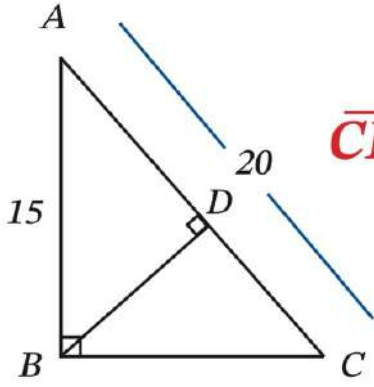


مثال 1

في الشكل المرسوم :

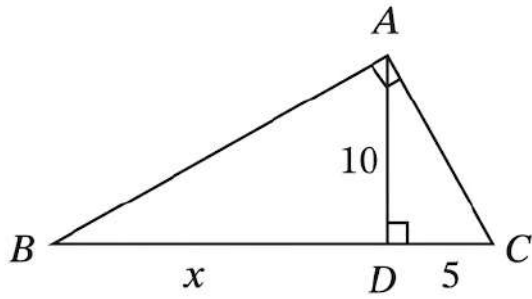
ABC مثلث قائم الزاوية في A ،
 إذا كان $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ،
 أوجد طول كل من : $\overline{AC}$ ، $\overline{AD}$

صِفْوَةٌ مَعَالِمُ الْكُوَيْتِ

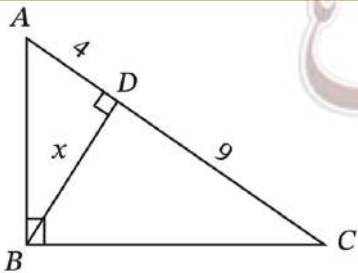


تحقق من فهمك 1 في الشكل المرسوم :

a أوجد طول $\overline{BC}$ b أوجد طول $\overline{CD}$

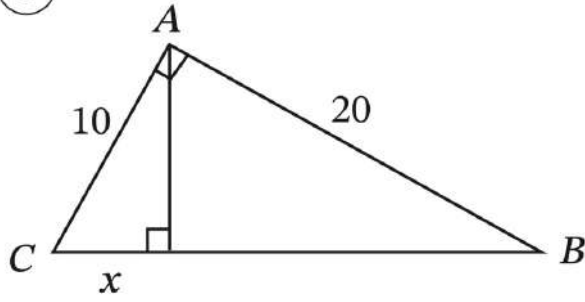
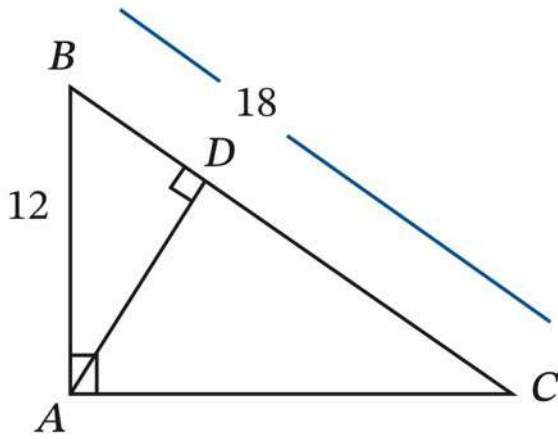
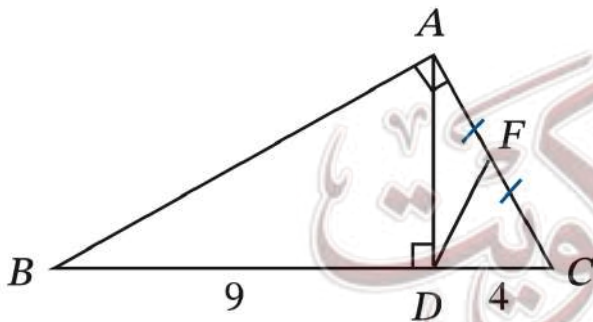
في الشكل المرسوم : أوجد قيمة x

مثال 2

في الشكل المرسوم : أوجد قيمة x

تحقق من فهمك 2

(C)

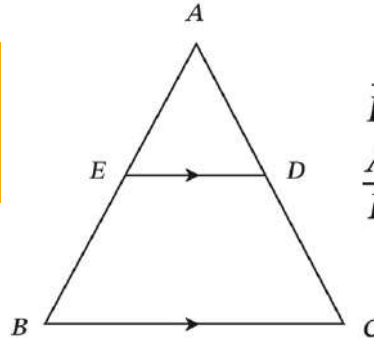
(1) أوجد قيمة x (2) في الشكل المقابل : أوجد طول $\overline{DC}$ (3) في الشكل المقابل : أوجد قيمة $\overline{DF}$ 

نظرية (1): « نظرية المستقيم الموازي » Parallel Line Theory

إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين ، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة .



عكس النظرية صحيح
أي أنه إذا كان: $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$ فإن: $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$



أي أن في المثلث ABC

$$\overline{ED} \parallel \overline{BC}$$

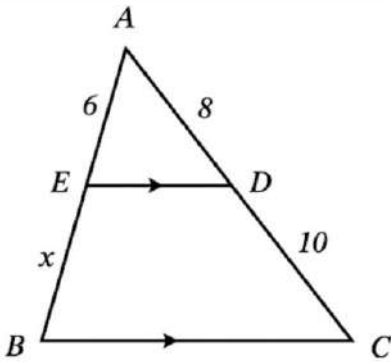
$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$$

فإن:



في الشكل المقابل : أوجد قيمة x

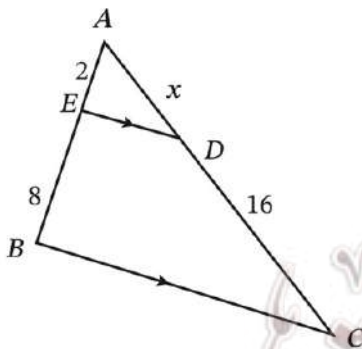
مثال 1



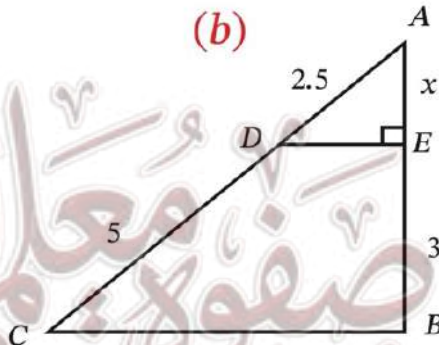
في الأشكال التالية : أوجد قيمة x

تحقق من فهمك 1

(a)



(b)



نظرية (2) : « نظرية طاليس » Thales Theory

إذا قطع مستقيمان ثلاث مستقيمتين متوازيتين أو أكثر فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر .

نظرية (2) :

« نظرية طاليس » Thales Theory



أي أن

إذا كان

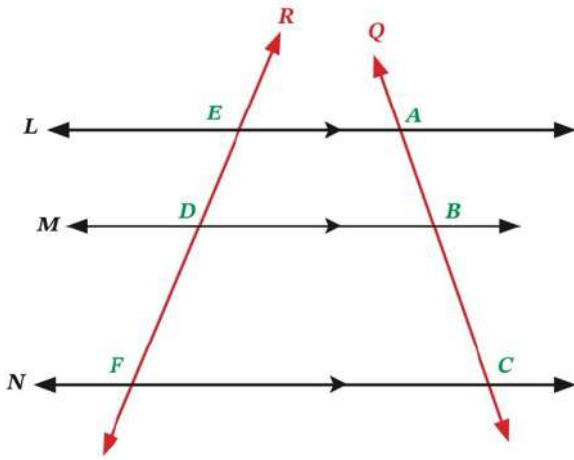
$$\vec{N} // \vec{M} // \vec{L}$$

$\vec{Q}, \vec{R}$, تقطع كلاً من

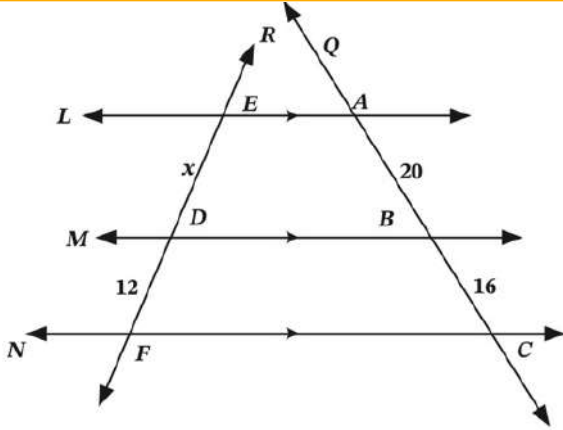
$$\vec{L}, \vec{M}, \vec{N}$$

$$\frac{ED}{DF} = \frac{AB}{BC} \quad \text{فإن :}$$

● عكس نظرية طاليس ليس بالضرورة صحيح

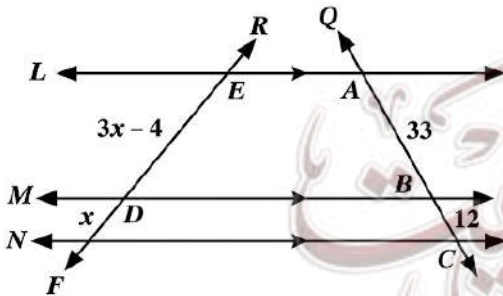


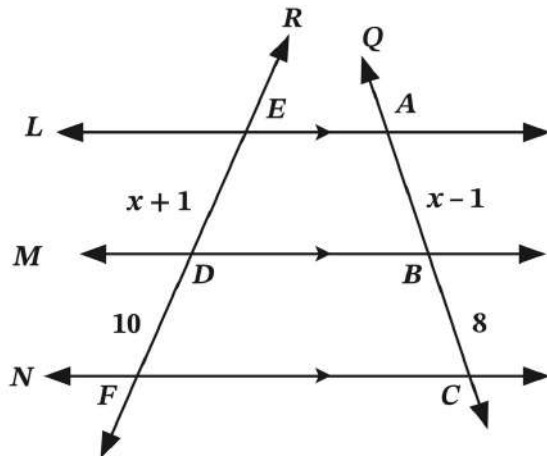
تحقق من فهمك 2 في الأشكال المقابل : أوجد قيمة x



في الشكل المقابل : أوجد قيمة x

مثال 3



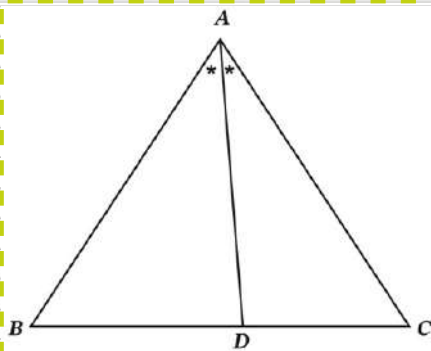


تحقق من فهمك 3 في الأشكال المرسوم : أوجد قيمة x

نظرية (3) : « نظرية منصف الزاوية في مثلث »
Angle Bisector Theorem in a Triangle

نظرية (3) : « نظرية منصف الزاوية في مثلث »

إذا نصفت زاوية رأس مثلث الداخلة أو الزاوية الخارجة عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليها يساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث.



أي أن

إذا كان $\overrightarrow{AD}$ منصف $(\hat{A})$

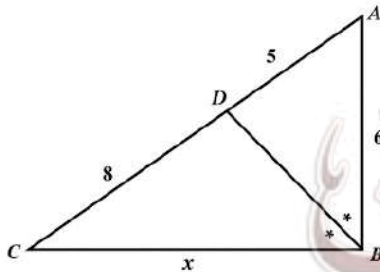
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \quad \text{فإن :}$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} \quad \text{أو :}$$

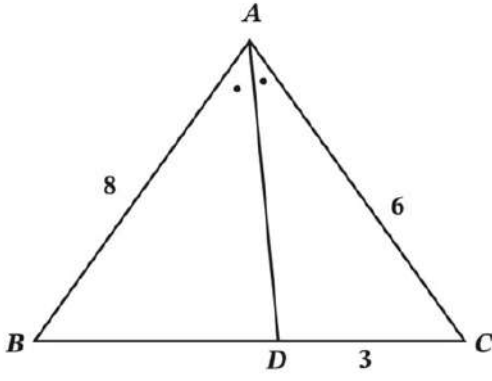


مثال 4

أوجد قيمة x في الشكل المبين حيث

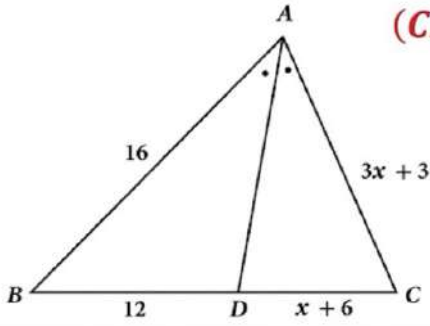


$\overrightarrow{BD}$ ينصف $\hat{ABC}$



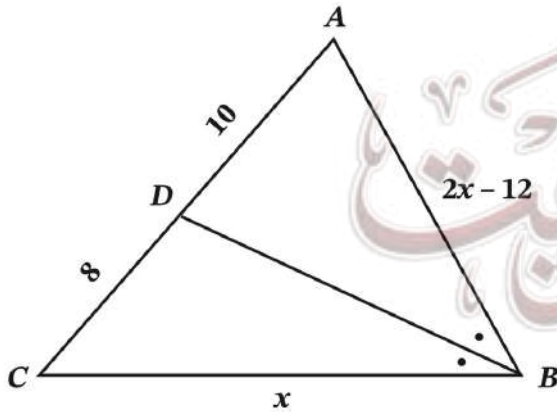
تحقق من فهمك 4

المثلث ABC فيه $AC = 6$ ،
 $AB = 8$ ، $\overline{AD}$ يُنصف $(\hat{BAC})$
 ويقطع $\overline{BC}$ في D إذا كان $BD = 3$
 أوجد CD



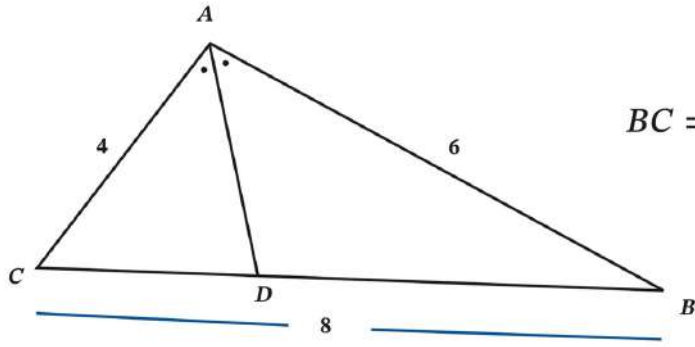
أوجد قيمة x في الشكل المبين حيث $\overline{AD}$ يُنصف $(\hat{CAB})$

مثال 5



المثلث ABC فيه $AD = 10$ ، $DC = 8$ ،
 $\overline{BD}$ يُنصف الزاوية $(\hat{ABC})$ ويقطع $\overline{AC}$
 في D ، أوجد x

تحقق من فهمك 5

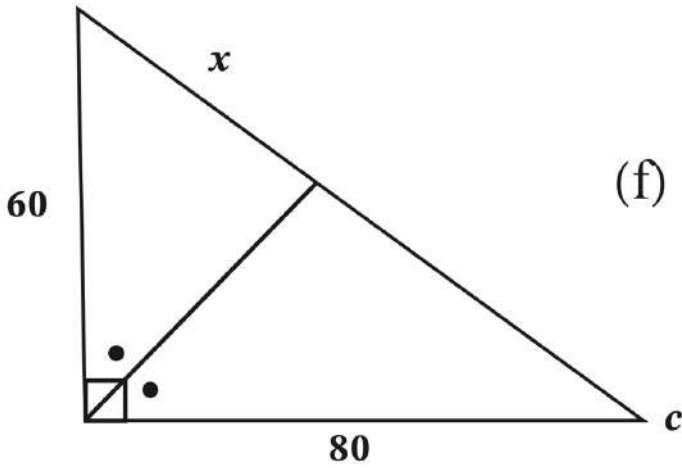


(2) في المثلث ABC ، $\overline{AD}$ نَصَفُ A

إذا كان $BC = 8$ ، $AC = 4$ ، $AB = 6$

فأوجد DB ، DC

أوجد قيمة x :



مَرْفُوعَةٌ مَعَالِمُ الْكُتُبِ

صِفْوَةٌ مَعَالِكُوتِ