

السهم الذهبي

في

الرياضيات



55137938



الصف الثاني عشر علمي

الفصل الدراسي الأول



تعريف (1)

لتكن x كمية متغيرة، c عدداً حقيقياً.

نقول إن x تقترب من c باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكمية $|x - c|$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب.

الفترة المفتوحة $(c - a, c + a)$ تسمى جواراً للعدد c وفقاً للمعيار $a > 0$ حيث

نهاية دالة عند نقطة

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

وتقرأ كالتالي: نهاية $f(x)$ عندما x تؤول إلى 2 تساوي 4.

تعطينا النهايات لغة لوصف سلوك الدالة عندما تقترب مدخلات الدالة من قيمة معينة.



كلمة تؤول إلى c تعني تقترب

باطراد من العدد c (أي تكون قريبة جداً من c سواء من اليمين أو اليسار)

تعريف (2)

ليكن c, L عددين حقيقيين، f دالة حقيقية معرفة في جوار أو جوار ناقص للعدد c نكتب:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

وتعني أنه عندما تقترب x من c باطراد، فإن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L .



النهاية من جهة واحدة أو من جهتين

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L_1 \quad \text{النهاية من جهة اليسار}$$

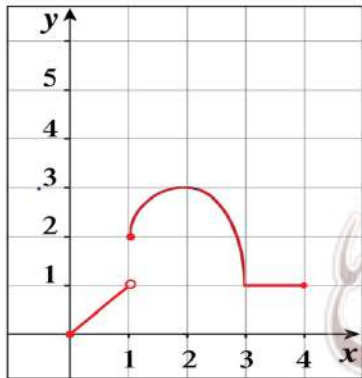
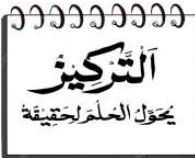
$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L_2 \quad \text{النهاية من جهة اليمين}$$

نظرية (1)

يفرض أن c, L عددين حقيقيين

يكون للدالة f نهاية عندما تقترب x من c إذا وفقط إذا كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة اليسار

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \quad \text{ويعبر عن ذلك:}$$



تدريب (1)

الشكل المقابل يمثل بيان الدالة: $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$

أكمل ما يلي:

1 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \dots$

2 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \dots$

3 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \dots$

4 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \dots$

5 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \dots$

6 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \dots$

7 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \dots$

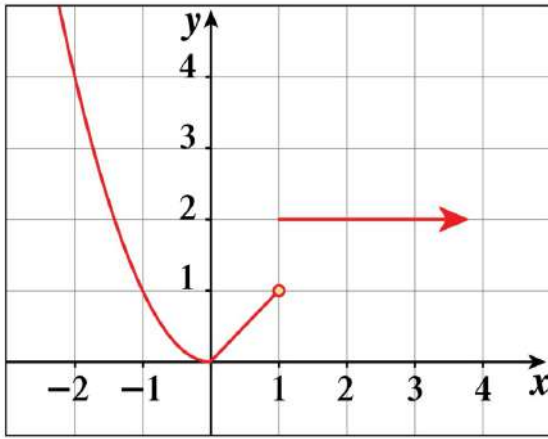
8 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \dots$

9 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \dots$

10 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \dots$

11 $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \dots$

مثال 1

الشكل المقابل ، يمثل بيان الدالة f . أوجد إن أمكن:

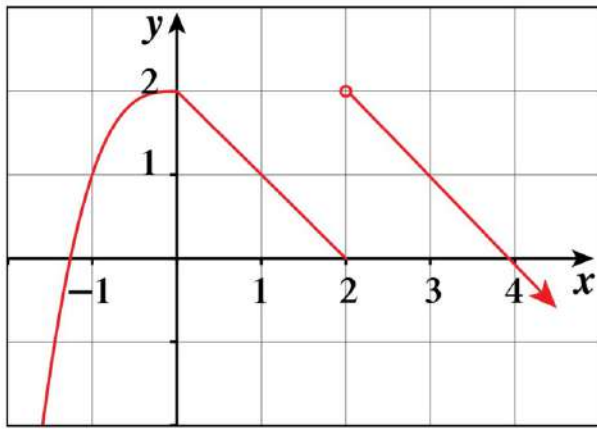
1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

3) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

4) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

حاول ان تحل

الشكل المقابل ، يمثل بيان الدالة f . أوجد إن أمكن:

1) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

3) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

4) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

حساب النهايات

نظرية (3)

إذا كانت f دالة: $f(x) = x$ وكان c عددًا حقيقيًا فإن:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} x = c$$

نظرية (2)

إذا كانت f دالة: $f(x) = k$ وكانا k, c عدداً حقيقيين فإن:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} k = k$$

نظرية (4)

إذا كانت k, c, M, L أعداداً حقيقية، $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ ، $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L + M$$

a قاعدة الجمع:

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L - M$$

b قاعدة الطرح:

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \cdot M$$

c قاعدة الضرب:

$$\lim_{x \rightarrow c} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \rightarrow c} f(x) = k \cdot L$$

d قاعدة الضرب في ثابت:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \frac{L}{M}, M \neq 0$$

e قاعدة القسمة:

مثال 2

بفرض أن: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 5$
أوجد:

a $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x))$

b $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)}{g(x)}$

c $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) + 4}{f(x) \cdot g(x)}$

2 بفرض أن: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -3$
أوجد:

حاول ان تحل

a $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x))$

b $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) \cdot g(x))$

c $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{8f(x) \cdot g(x)}{f(x) + g(x)} \right)$

مُعَلِّمَاتُ
صَفْوَة مَعْلُومَات

نظرية (5): دوال كثيرات الحدود ودوال الحدوديات النسبية

a إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ دالة كثيرة الحدود، c عدداً حقيقياً، فإن:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0$$

b إذا كانت $f(x), g(x)$ كثيرتي حدود، c عدداً حقيقياً، فإن:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}, \quad g(c) \neq 0$$

مثال 3 أوجد:

a $\lim_{x \rightarrow -1} (x^4 - 2x^3 + 5)$

b $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$

c $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2(2 - x))$

b أوجد:

1 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 3x^2 - 2x - 17)$

2 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

حاول ان تحل

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & : x < 1 \\ 5 & : x = 1 \\ \frac{5}{x} & : x > 1 \end{cases}$$

إذا كانت الدالة f :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

فأوجد إن أمكن

مثال 4

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & : x < 2 \\ x - 1 & : x > 2 \end{cases}$$

4 إذا كانت الدالة f :

حاول ان تحل

فأوجد إن أمكن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & : x \leq 0 \\ 1 - 2x & : x > 0 \end{cases}$$

5 مثال إذا كانت الدالة g :

فأوجد إن أمكن $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + x & : x > 1 \\ \frac{x}{x^2 + 1} & : x \leq 1 \end{cases}$$

5 إذا كانت الدالة g :

فأوجد إن أمكن $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

حاول ان تحل

مُعَلِّمٌ مَعْلَمٌ

مثال 6

لتكن: $f(x) = |x - 3| + 2x$ a اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.b أوجد $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ c هل للدالة f نهاية عندما $x \rightarrow 3$ ؟

حاول ان تحل

6 لتكن $f : f(x) = x^2 - |x + 2|$ a اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.b أوجد: $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ c هل للدالة f نهاية عندما $x \rightarrow -2$ ؟مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ
صَفْوَةٌ مِائِيَّةٌ

قاعدة القوة

نظرية (6)

بفرض أن $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجودة وكانت n عددًا صحيحًا موجبًا فإن:

a $\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right)^n$

b $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$

c $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$

(في حالة n عددًا زوجيًا يشترط أن يكون $c > 0$)

(في حالة n عددًا زوجيًا يشترط أن تكون $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$)

مثال 7

أوجد:

a $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 3x - 1)^5$

b $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x - 3}$

c $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x^2 - 2}}{x - 2}$

مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ
صَفْوَةُ مِصْرِي

حاول ان تحل

7 أوجد:

a $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x^2 - 5}$

b $\lim_{x \rightarrow 4} (x + \sqrt{x})^4$

c $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 4x + 5}}{x - 2}$

إلغاء العامل الصفري

ملاحظات:

- 1 عند التعويض المباشر لقيمة x في كل من البسط والمقام وحصلنا على $\frac{0}{0}$ فإنها تسمى صيغة غير معينة
- 2 يمكن استخدام التحليل أو القسمة أو الضرب بالمرافق أو غيرها لإيجاد الصيغة المبسطة.



إذا كانت $x \rightarrow c$ فإن $(x - c)$ عامل صفري مشترك بين البسط والمقام

مثال 8

أوجد إن أمكن:

أولاً: التحليل

a $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$

b $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^3 - 8}{x}$

c $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x^2-1}$

مُعَلِّمُ الْكُتُبِ
صَفْوَةُ بِنْتِ مِصْرٍ

حاول ان تحل

8 أوجد إن أمكن:

a $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$

b $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{(x + 4)^2 - 9}{x^2 + 7x}$

امتحان final

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 1)^2 - 9}{x^2 - 2x}$$

c $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x + 2| - 7}{x^2 - 25}$

مُعَلِّمٌ كَوْنِي
صَفْوَةُ مِي كَوْنِي

كراسة التمارين

أوجد:

(11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4+x)^2 - 16}{x}$

(13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x)^3 - 27}{x}$

امتحان final

مُعَلِّمٌ لِكُلِّ تَلَامِيذٍ



امتحان final

$$(14) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x+2|}{x^2+3x+2}$$

امتحان final

مثال 9

أوجد إن أمكن:

ثانياً: الضرب في المرافق

مُعَلِّمُ الكَوَيْتِ

b $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

c $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}$

a $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$ 9 أوجد إن أمكن:

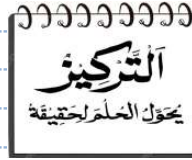
حاوله تحل

مُعَلِّمَاتُ
صَفْوَة مِي كَوَيْت

b $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1}}{\sqrt[3]{x + 1}}$

c $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{3 - \sqrt{x}}$

مُعَلِّمٌ كَوْنِي



كراسة التمارين

$$(15) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{x^2 - 4x + 3}$$

مثال 10

أوجد إن أمكن:

ثالثاً: القسمة

$$a \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 6x^2 + 2x - 3}{x + 1}$$

مُعَلِّمُ الْكُوَيْتِ

b $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5 + 32}{x + 2}$

b $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^5 + x^3 + x + 22}{x - 2}$

10 أوجد إن أمكن:

حاول ان تحل

امتناه final

(19) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^3 - 5x^2 - 12}{x - 2}$

كراسة التمارين

أولاً: نهايات محددة عندما $x \rightarrow \pm\infty$

نظرية (7)

لتكن $f: f(x) = \frac{1}{x}$ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

نظرية (8)

لتكن $f: f(x) = \frac{k}{x^n}$ ، $n \in \mathbb{Z}^+$ ، $k \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{x^n} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

حاول ادهل

1 أوجد النهايات التالية إن أمكن:

a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-2}$

b $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x^2+9}$

c $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x + 1}{x^3 + 5}$

مُعَلِّمٌ كَوْنِي



لتكن: $f(x) = ax^n, n \in \mathbb{Z}^+, a \in \mathbb{R}^*$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n = \begin{cases} \infty & : a > 0 \\ -\infty & : a < 0 \end{cases}$$

(1) إذا كان n عدد زوجي فإن:

(2) إذا كان n عدد فردي فإن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = \begin{cases} -\infty & : a > 0 \\ \infty & : a < 0 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = \begin{cases} \infty & : a > 0 \\ -\infty & : a < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^5) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^3 =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^7) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-4x^4) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (5x^2) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^4) =$$



انتبه

ملاحظة: إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, a_n \in \mathbb{R}^*$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n \quad \text{فإن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - 3x + 1) \quad \text{أوجد:}$$

مثال 1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^2 + 2x - 4) \quad \text{1 أوجد:}$$

حاول ان تحل

نظرية (11)

إذا كانت كل من f, g دالة حدودية حيث:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$$

a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m} : n = m$ درجة البسط = درجة المقام

b $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 : n < m$ درجة البسط اصغر من درجة المقام

استخدم النظرية السابقة في حساب كل من:

a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 3x^3}{2x^3 + 5}$

b $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^4 - x}$

b $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{4x^3 - 2x + 3}$

c $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 1}{7 - 2x^4}$

a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 5x + 1}{6x^2 - x + 1}$

مثال 3

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + 3}{2x + 5} = 3$ فأوجد قيمة كل من الثابتين a, b

إذا كانت النهاية $0 \neq$
فان درجة البسط = درجة المقام

3 أوجد قيمة كل من الثابتين a, b إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{ax^2 + bx - 3} = -1$

حاول ان تحل

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{|x|-3} = 2$

(a)

(b)

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|-3}{x+3} = -1$

(a)

(b)

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x}{2x^2 - 5x - 3} = -\infty$

(a)

(b)

(5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|2x-3|} = \frac{1}{2}$

(a)

(b)

في التمارين (13 - 6)، ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|}{|x|+1} =$

(a) 0

(b) 1

(c) ∞

(d) $\frac{1}{2}$

(7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+3} =$

(a) ∞

(b) $-\infty$

(c) 1

(d) 0

(8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x} + 1 \right) \left(\frac{5x^2 - 1}{x^2} \right) =$

(a) 0

(b) 5

(c) 1

(d) $-\infty$

(9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-|x+3|}{2x} =$

(a) $\frac{1}{2}$

(b) $-\frac{1}{2}$

(c) ∞

(d) $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x}-4}$$

أوجد:

امتحان final

مثال 4

امتحان final

كراسة التمارين

$$(9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+5}{\sqrt{x^2+2x}+7}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{\sqrt{4x^2+2x}-1}$$

أوجد

مُعَلِّمٌ لِكُلِّ تَلَامِيذٍ

a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 - x}}{x + 1}$

امتحان final

4 أوجد:

حاول ان تحل

امتحان final

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 5}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$$

مُعَلِّمٌ كَوْنِي

b $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 5}{\sqrt{x^2 - 9}}$

النتيجة final

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - 5x + 1}}{3x - 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{x - 3}$$

مُعَلِّمٌ كَوْنِي

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0$$

نظرية (12)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \text{حيث } x \text{ بالراديان}$$

نتيجة (1)

إذا كان a, b عددين حقيقيين، $a \neq 0, b \neq 0$ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$$

نتيجة (2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

نتيجة (3)

إذا كان $a, b \in \mathbb{R}^*$ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

مثال 1

$$a \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x}$$

أوجد:

$$b \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{\cos x}$$

$$c \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$$

امتحان final

مُعَلِّمُ الْكُتُبِ
صَفْوَةُ بِنْتِ مَرْيَمَ

1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x^2 - x}$

أوجد:

حاول ان تحل

2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x \cos x}$

3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1}$

final امتحان

صِفْوَةٌ مَعَالِكُوتِ

مثال 2

b $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \tan x - 3 \sin x}{4x}$

2 أوجد:

حاول ان تحل

a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \tan x}$

b $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan x + x^2 \cos x}{5x}$

أوجد:

مثال 3

a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + \sin x}{x}$

b $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \tan x - 2x \cos x}{3x}$

a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - x^2}{3x^2}$

3 أو جلد:

حاول ان تحل

b $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x + 3x \cos 4x}{5x}$

امتحان final

كراسة التمارين

أوجد النهاية في كل مما يلي:

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \tan x}{\sin x - \cos x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos 2x}$

مُعَلِّمٌ لِكُلِّ تَلَامِيذٍ

(8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$

امتحان final

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$

كأس التمارين

امتحان final

(11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\tan 2x}$

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = 0$

(a)

(b)

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin 2x}{2 \cos 2x} = \frac{1}{2}$

(a)

(b)

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin x} =$

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(a) 2

(b) -2

(c) 0

(d) ∞

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 5 \sin^2 x}{3x^2} =$

(a) 3

(b) 9

(c) 0

(d) ∞

تعريف (8): الاتصال عند نقطة

تكون الدالة f متصلة عند $x = c$ في مجالها إذا كانت $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

الاتصال عند نقطة

لتكون f متصلة عند c يجب أن تتوافر الشروط الثلاثة التالية:

انتبه

1 الدالة f معرفة عند $x = c$ أي $f(c)$ موجودة.2 $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجودة3 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ وإذا لم يتحقق أي شرط من الشروط السابقة فنقول إن f منفصلة (ليست متصلة) عند $x = c$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & : x \geq 1 \\ 5x - 1 & : x < 1 \end{cases} \quad \text{لتكن } f$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 1$.

مثال 1

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x & : x \leq 0 \\ \frac{x^2}{x+1} & : x > 0 \end{cases} \quad \text{1 لتكن الدالة } f$$

ابحث اتصال f عند $x = 0$

حاول ان تحل

امتحان final

مثال 2

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & : x > 3 \\ 7 & : x \leq 3 \end{cases} \quad \text{لتكن } f$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 3$.

2 ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & : x < 2 \\ 1 & : x = 2 \\ x^2 + 1 & : x > 2 \end{cases}$$

حاول ان تحل

مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ
صَفْوَةٌ مِى كَوَيْتٍ

مثال 3

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{|x-2|} & : x \neq 2 \\ 1 & : x = 2 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x+1|}{x+1} - 2x & : x \neq -1 \\ 2 & : x = -1 \end{cases}$$

3 ابحث اتصال الدالة f عند $x = -1$ حيث

حاول ان تحل

مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ
صَفْوَةٌ مِي كَوَيْتٌ

كراسة التمارين

ابحث اتصال كل من الدوال التالية عند $x = c$:

$$(7) \quad h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} & : x \neq -1 \\ -1 & : x = -1 \end{cases}, \quad x = -1$$

$$(8) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x}{|x|} & : x \neq 0 \\ -3 & : x = 0 \end{cases}, \quad x = 0$$

امتحان final

مُعَلِّمُ الْكَلِمَاتِ
صَفْوَةُ مِي كَلِيمَات

$$(9) \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & : x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & : x = 1 \end{cases}, \quad x = 1$$

$$(10) \quad \text{أوجد قيمة } a \text{ بحيث تصبح الدالة التالية متصلة عند } x = 3 : f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \quad x < 3 \\ 2ax & , \quad x \geq 3 \end{cases}$$

مُعَلِّمٌ لِكُلِّ تَلَامِيذٍ

نظرية (14): خواص الدوال المتصلة

إذا كانت f, g دالتين متصلتين عند $x = c$ ، فإن الدوال التالية هي دوال متصلة عند $x = c$

- | | | |
|---|----------------------------------|----------------|
| 1 | $f + g$ | الجمع: |
| 2 | $f - g$ | الطرح: |
| 3 | $k \cdot f$, $k \in \mathbb{R}$ | الضرب في ثابت: |
| 4 | $f \cdot g$ | الضرب: |
| 5 | $\frac{f}{g}$, $g(c) \neq 0$ | القسمة: |

دوال متصلة

- 1 الدالة $f: f(x) = k$ حيث k ثابت متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
- 2 الدالة كثيرة الحدود متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
- 3 الدالة الحدودية النسبية $\frac{f}{g}$ متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.
- 4 الدالة $f: f(x) = |x|$ متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
- 5 الدوال المثلثية الأساسية متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.

ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي:

مثال 1

a $f(x) = x^2 + |x|$, $c = -1$

b $f(x) = \sin x - \cos x$, $c = \frac{\pi}{2}$

1 ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي:

حاول ان تحل

a $f(x) = x^2 - 4x + 3 + |x|$, $c = 3$

b $f(x) = \frac{\tan x}{x+1}$, $c = \frac{\pi}{4}$

مثال 2

ابحث اتصال الدالة $f(x) = \frac{x-2}{x^2+9} - \frac{1}{x}$ عند $x = 3$

2 ابحث اتصال الدالة $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{2x}{x-2}$ عند $x = 1$ حاول ان تحل

مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ
صَفْوَةٌ مِائِيَّةٌ

نظرية (15)

اتصال الدوال الجذرية
عند نقطة

a الدالة الجذرية $y = \sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x = c : c \in \mathbb{R}^+$ ، n عدد صحيح زوجي موجب،

ومتصلة عند كل $x = c : c \in \mathbb{R}$ ، n عدد صحيح فردي أكبر من 1.

b إذا كانت g دالة متصلة عند $x = c$ وكانت $g(c) > 0$

فإن الدالة: $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x = c$

شروط اتصال دالة الجذر التربيعي $\sqrt{g(x)}$

• يجب أن تكون $g(x)$ دالة متصلة عند $x=c$

• يجب أن يكون $g(c) > 0$

ابحث اتصال كل من الدالتين التاليتين عند العدد المبين:

مثال 3

a $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 1}$ ، $x = 1$

b $f(x) = \sqrt{x+3}$ ، $x = -1$

حاول ان تحل

3 ابحث اتصال كل من الدالتين التاليتين عند $x = -2$

a $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 4}$

b $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

معلمة الكويت

الدالة المركبة

4 إذا كانت g , f معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 3$, $f(x) = 2x + 3$ أوجد:

a $(g \circ f)(x)$

b $(g \circ f)(-1)$

c $(f \circ g)(x)$

d $(f \circ g)(-1)$

حاول ان تحل

مُعَلِّمٌ كَوْنِيٌّ
صَفْوَةُ مِي كَوْنِيَّة

نظرية (16): اتصال الدوال المركبة

إذا كانت f متصلة عند c ، و g متصلة عند $f(c)$ فإن الدالة المركبة $g \circ f$ متصلة عند c .

اتصال الدوال المركبة عند نقطة

● لبحث اتصال الدالة $(g \circ f)$ عند $x = c$ يجب تحقق الشروط الآتية

1 نبحث متصلة الدالة f عند $x = c$

2 التعويض المباشر $f(c)$

3 نبحث اتصال الدالة $g(x)$ عند ناتج التعويض المباشر $f(c)$



لتكن: $f(x) = x^2 + 5$ ، $g(x) = \sqrt{x}$. ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

مثال

امتحان final

6 لتكن: $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$ ، $g(x) = 2x + 3$. ابحث اتصال الدالة $f \circ g$ عند $x = 1$

حاول ان تحل

مُعَلِّمٌ لِكُلِّ تَلَامِيذٍ



7. لتكن: $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

كراصة التمارينه (9) لتكن: $f(x) = 2x^2 - 3$ ، $g(x) = \sqrt{x+4}$ ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

(10) ابحث اتصال الدالة f : $f(x) = |\sqrt{x} - 3|$ عند $x = 4$

مُعَلِّمٌ كَوْنِيٌّ

لتكن الدالة $f : f(x) = x^2 - 3x$ ، الدالة $g : g(x) = \sqrt{x}$
 إبحث إتصال الدالة $(g \circ f)$ عند $x = -1$

امتحان final

1-7 الاتصال على فترة



استاذ نادر الصباغ

تعريف (9) الاتصال على فترة مفتوحة:

لتكن الدالة f معرفة على الفترة (a, b) فإننا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة (a, b) إذا كانت f متصلة عند كل x تنتمي إلى الفترة (a, b)

تعريف (10) الاتصال على فترة مغلقة:

لتكن الدالة f معرفة على الفترة $[a, b]$ فإننا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

1 الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة (a, b) 2 الدالة f متصلة عند $x = a$ من جهة اليمين أي أن: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ 3 الدالة f متصلة عند $x = b$ من جهة اليسار أي أن: $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

ملاحظات:

أولاً: إذا تحقق الشرطان (2)، (1) من التعريف (10) نقول إن الدالة f متصلة على $[a, b]$.ثانياً: إذا تحقق الشرطان (3)، (1) من التعريف (10) نقول إن الدالة f متصلة على $[a, b]$.

ثالثاً: تبقى النظرية (14) صحيحة إذا استبدلنا النقطة بفترة بحيث تكون هذه الفترة مجموعة جزئية من مجال الدالة.

رابعاً: إذا كانت الدالة متصلة على فترة ما فإنها متصلة على أي فترة جزئية منها.

خامساً: إذا كانت الدالة متصلة على كل من الفترتين $[a, c]$ ، $[c, b]$ فإن الدالة متصلة على $[a, b]$.سادساً: يبقى التعريف (10) صحيحاً في حالة الفترات على الصورة $(-\infty, b]$ ، $[a, \infty)$.

انتبه



$$f(x) = \begin{cases} -2 & : x = 1 \\ x^2 - 3 & : 1 < x < 3 \\ 6 & : x = 3 \end{cases}$$

ادرس إتصال الدالة f على $[1, 3]$ حيث:

امتحان final

مثال 1

ادرس إتصال الدالة f على $[1, 3]$ حيث :

$$f(x) = \begin{cases} -2 & : x = 1 \\ x^2 - 3 & : 1 < x < 3 \\ 5 & : x = 3 \end{cases}$$

مُعَلِّمُ الكَوَيْتِ
صَفْوَةُ مِي كَوَيْتِ

حاول ان تحل

1 ادرس اتصال الدالة f على $[1, 5]$ حيث:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & : x = 1 \\ \frac{x^2 + 1}{x} & : 1 < x < 5 \\ \frac{26}{5} & : x = 5 \end{cases}$$

مُعَلِّمُ الْكُتُبِ
صَفْوَةُ بِنْتِ مَيْمُون

كراسة التمارين

$$(5) \quad f(x) = \begin{cases} -5 & : x = -3 \\ -x^2 + 4 & : -3 < x < 4 \\ -10 & : x = 4 \end{cases}, [-3, 4]$$

ادرس اتصال كل دالة مما يلي على الفترة المبيية.

مُعَلِّمُ الْكُتُبِ
صَفْوَةُ مِي كَوَيْت

حاول ان تحل

2 ادرس اتصال f على الفترة المبيّنة:

a $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$, $[0, 3]$

b $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$, $[0, 2]$

اتصال الدالة على مجالها

مثال 3

امتحان final

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & : x \leq -1 \\ \frac{4}{x+3} & : x > -1 \end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث:مُعَلِّمُ الكَوَيْتِ
صَفْوَةُ مِي كَوَيْتِ

دراسة التمارين

(6) الدالة f معرفة كما يلي: $f(x) = \begin{cases} -x+4 & : x \leq 7 \\ \frac{9}{-x+4} & : x > 7 \end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

مُعَلِّمُ الْكُتُبِ
صَفْوَةُ مِي كَوَيْت

مثال 4

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a & : x < 0 \\ 2 & : x = 0 \\ ax + b & : x > 0 \end{cases}$$

متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

لتكن الدالة f :
أوجد قيمة الثابتين a, b

امتحان final

أوجد قيمة a, b بحيث تكون الدالة f متصلة على مجالها حيث :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : x < 1 \\ 3x + a & : x > 1 \\ b & : x = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 5 & : x = 1 \\ ax + b & : 1 < x < 4 \\ b + 8 & : x = 4 \end{cases}$$

4 لتكن الدالة f :

حاول ان تحل

متصلة على $[1, 4]$. أوجد قيم الثابتين a, b

مُعَلِّمٌ كَوْنِي



انتبه

لبحث اتصال الدالة $f(x) = \sqrt{g(x)}$ على $[a, b]$

يجب ان يكون ① $g(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$

② $g(x)$ متصلة على $[a, b]$

اتصال الدالة الجذرية على فترة



استاذ نادر الصباغ

لو طريقك صعب
أعرف النهاية حلوة

لتكن $f: \sqrt{x^2 - 2x}$

مثال 5

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-5, 0]$.

مُعَلِّمٌ كَوْنِي



5 لتكن $f: f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[6, 10]$.

مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ
صَفْوَةُ مِيسَرِيَّةٍ

امتحان final

(لتكن $f: f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

أوجد مجال الدالة f ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-1, 1]$

مثال 6

ادرس اتصال الدالة f على $[-3, 3]$. لتكن $f: f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

امتحان final

لتكن $f: f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
ادرس اتصال الدالة f على $[-2, 2]$ 6 لتكن $f: f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$ ادرس اتصال الدالة f على $[1, 3]$.

حاول ان تحل

مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ
صَفْوَةُ مِي كَوَيْت

حاول ان تحل

7 لتكن: $f(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x + 5}$ ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

ملاحظة:

ناتج تركيب دالتين كل منهما متصلة على $\mathbb{R}$ هو دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$$

ادرس اتصال كل من الدوال التالية على مجالها:

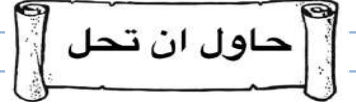
كدراسة التمارين

مُعَلِّمٌ لِكُلِّ تَلَامِيذٍ

ميل المماس للمنحنى عند النقطة $P(a, f(a))$ بالقيمة m إن وجد:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

1 أوجد ميل المماس للقطع المكافئ $y = (x-2)^2 + 2$ عند النقطة $A(1, 3)$



مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ
صَفْوَةٌ مِى كَوَيْتٍ



تعريف: المشتقة عند نقطة

مشتقة الدالة f عند $x = a$ هي $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شرط وجود النهاية.

تعريف (بديل): المشتقة عند نقطة

مشتقة دالة f عند $x = a$ هي:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

شرط وجود النهاية.

مثال 1

باستخدام التعريف، أوجد مشتقة الدالة f : عند $x = 1$ $f(x) = 2x^2 + 1$ 1 باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f : عند $x = -2$ $f(x) = 3x^2$

حاول اذكر

مُعَلِّمُ الْكِتَابِ
صَفْوَةُ بَنِي الْكُوَيْتِ

حاول ان تحل

2 أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = \frac{1}{x}$ عند $x = b$, $b \neq 0$

المشتقة من جهة واحدة

مشتقة الدالة f من اليمين يرمز لها بالرمز $f'_+(a)$ وهي:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (\text{إن وجدت})$$

ومشتقة الدالة f من اليسار يرمز لها بالرمز $f'_-(a)$ وهي:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (\text{إن وجدت})$$

إن الدالة لها مشتقة عند نقطة إذا وفقط إذا كانت المشتقتان لجهة اليمين ولجهة اليسار موجودتين ومتساويتين عند تلك النقطة.

بين أن الدالة التالية لها مشتقة لجهة اليمين ومشتقة لجهة

مثال 3

اليسار عند $x = 0$ ، لكن ليس لها مشتقة عند $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : x \leq 0 \\ 2x & : x > 0 \end{cases}$$

حاول ان تحل

3 لتكن $f : f(x) = |x - 2|$ ، ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x = 2$.

ملاحظات:

- إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق عند كل $x \in (a, b)$ ، فإننا نقول إن الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a, b) .
- إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق عند كل $x \in (-\infty, \infty)$ ، فإننا نقول إن الدالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ مثل كثيرة الحدود.
- إذا وضعنا x بدلاً من a في تعريف المشتقة عند النقطة نحصل على $f'(x)$ حيث $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ويمكن أن نرمز للمشتقة بأحد الرموز التالية: $\frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}(f(x)), f'(x), y'$.
- لأي دالة f تكون f' دالة أخرى مجالها مكوّن من جميع قيم x التي يكون للدالة مشتقة عندها أي $(D_{f'} \subseteq D_f)$ أي أن f' دالة مستخلصة من f .

حاول ان تحل

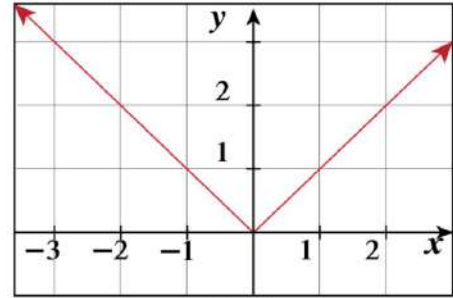
5 لتكن $f(x) = x^2 + 2$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة.

مُعَلِّمُ الْكُوَيْتِ

متى تكون $f'(a)$ غير موجودة؟

a ركنًا (Corner): تكون المشتقتان من جهة اليمين ومن جهة اليسار عند التقاء الشعاعين غير متساويتين.

مثال: $f(x) = |x|$



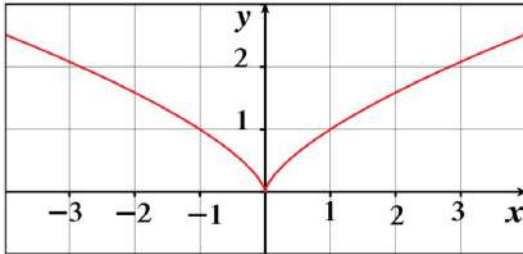
شكل (3)

يوجد ركن عند $x = 0$ ، $f'(0)$ غير موجودة

b نابًا (Cusp): يكون ميل المماس للمنحنى عند نقطة

تقاطع محددة يقترب من ∞ في إحدى الجهات ويقترب من $-\infty$ في الجهة الثانية ويوجد مماس رأسي عندها.

مثال: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$



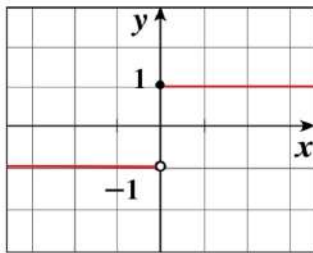
شكل (4)

يوجد ناب عند $x = 0$ ، $f'(0)$ غير موجودة ويوجد مماس رأسي عندها

d عدم اتصال: تكون المشتقة من جهة واحدة

أو كل من الجهتين غير موجودة. مثال:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

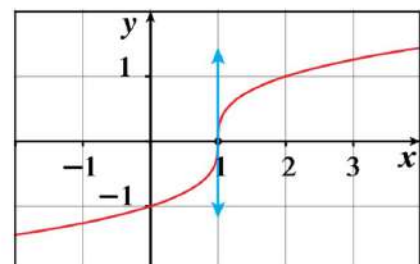


شكل (6)

يوجد عدم اتصال عند $x = 0$ ، $f'(0)$ غير موجودة

c مماسًا رأسيًا: يكون المماس للمنحنى عند نقطة محددة رأسيًا.

مثال: $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$



شكل (5)

يوجد مماس رأسي عند $x = 1$ ، $f'(1)$ غير موجودة

اختتامه final

كراسة التمارين

إن الدالة $f: f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2}$ ليست قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ والسبب هو:

(c) مماس عمودي

(a) ناب

(d) غير متصلة

(b) ركن

الاشتقاق والاتصال



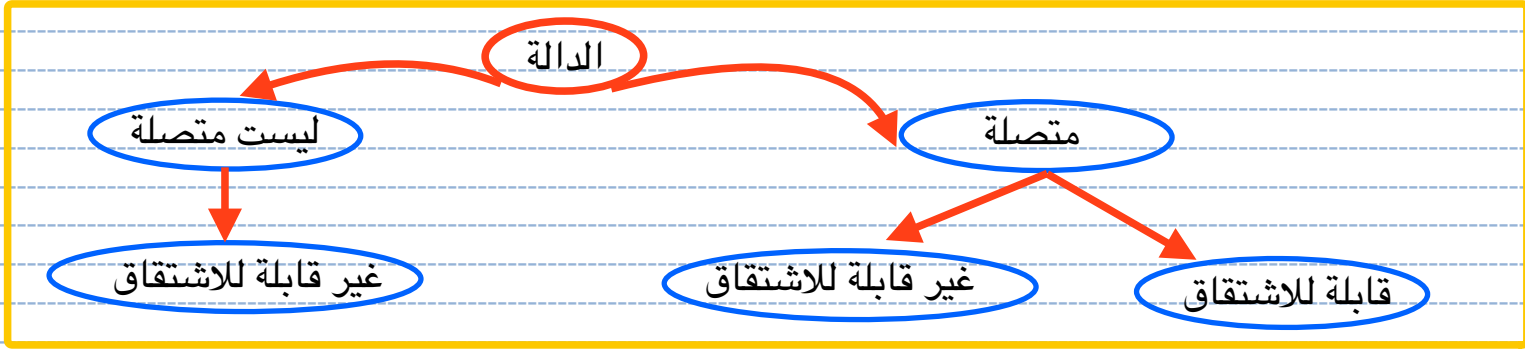
● إذا كانت الدالة f ليست متصلة عند نقطة $(a, f(a))$ فإنها غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

نظرية الاشتقاق والاتصال

إذا كانت الدالة f لها مشتقة عند نقطة، فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة.

● معكوس النظرية ليس صحيحاً دائماً كما رأينا سابقاً:

فالدالة المتصلة قد يكون لها أو ناب أو مماس رأسي، ومن ثم لا تكون قابلة للاشتقاق عند نقطة معينة.



نبحث الاتصال بالنظر أولاً من جهة اليمين واليسار

● إذا كانت الدالة متصلة نبحث الاشتقاق

● إذا كانت الدالة ليست متصلة نبحث الاتصال



استاذ نادر الصباغ

لو طريقك صعب
أعرف النهاية حلوة

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 2x - 1, & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{لتكن } f :$$

مثال 6

ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x = 2$.

مُعَلِّمٌ كَوْنِيٌّ

حاول اءءءل

6 ءءن f : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & : x \leq 2 \\ 3x - 2 & : x > 2 \end{cases}$ ، اءء قاءبلة الاشتقاق للءالة f عءء $x = 2$.

مءال 9

ءءن الءالة f : $f(x) = \begin{cases} x + 5 & : x \leq 3 \\ x^2 - 1 & : x > 3 \end{cases}$

أوءء إن أمكن $f'(3)$

مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ
صَبِيحَةٌ مِى كَوَيْتٍ



9 لتكن الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & : x \leq -1 \\ x^2 - x - 2 & : x > -1 \end{cases}$$

أوجد إن أمكن $f'(-1)$.

حاول ان تحل

امتحانه final

مُعَلِّمٌ لِكُلِّ تَلَامِيذٍ

كراسة التمارين

$$(4) \text{ لتكن } f: \begin{cases} x^2 + 2x & : x \leq 1 \\ 4x - 1 & : x > 1 \end{cases}$$

ابحث قابلية اشتقاق الدالة f عند $x = 1$.

$$(7) \text{ لتكن الدالة } g: \begin{cases} (x+1)^2 & , x \leq 0 \\ 2x+1 & , x > 0 \end{cases} \text{ أوجد } g'(0).$$

مُعَلِّمُ الْكُتُبِ
صَفْوَةُ مِي الْكُتُبِ

$$g(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & , \quad x \leq 1 \\ 3x-2 & , \quad x > 1 \end{cases} : \text{ لتكن الدالة } g$$

أوجد إن أمكن $g'(1)$.

امتحاه final

رجاءً رج المخ
جيداً قبل الحل
Please Shake The Brain
Well Before Solving.

مُعَلِّمٌ كَوْنِي

كراسة التمارين

(8) لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 & : x \leq 2 \\ 4x - 4 & : x > 2 \end{cases}$ أوجد $f'(2)$.

(9) لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^3 & , x \leq 1 \\ 3x + k & , x > 1 \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x = 1$ ، فأوجد قيمة k .

مُعَلِّمٌ لِكُلِّ تَلَامِيذٍ



قاعدة (1): مشتقة أي دالة ثابتة تساوي الصفر

قاعدة (2): إذا كان $f(x) = x$ فإن $f'(x) = 1$

قاعدة (3): إذا كان $f(x) = x^n$ فإن $f'(x) = n x^{n-1}$

قاعدة (4): قاعدة الضرب بعدد ثابت: $(k f(x))' = k f'(x)$

قاعدة (5): قاعدة الجمع والطرح: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

قاعدة (6): اشتقاق ضرب دالتين: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

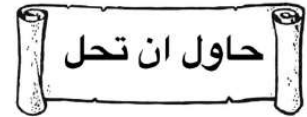
قاعدة (7): اشتقاق قسمة دالتين: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$



1 أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y = 5x^3 - 4x^2 + 6$



مثال 1 أوجد $f'(x)$ إذا كان: $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$

1 $f(x) = (2x + 1)(3x - 2)$

2 $f(x) = 4x^2(x + 6)$

حاول ان تحل

3 $f(x) = (x^3 - 4)^2$

$f(x) = \frac{x^3 - 1}{5x^2 + 1}$ أوجد مشتقة

مثال 3

3 $f(x) = \frac{4x^2 + 2x}{2x^3 + 5}$ أوجد مشتقة

حاول ان تحل

مُعَلِّمٌ لِكُلِّ كَلِمَةٍ



انتبه

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

● معادلة المماس

$$y - y_1 = \frac{-1}{m} (x - x_1) \quad \text{● معادلة الناظم (العمودي)}$$

$$m = y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \text{(الميل)}$$

أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم عند النقطة $(1, \frac{2}{3})$ لمنحنى الدالة f حيث $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 2}$

مثال 4

امتحان final

مُعَلِّمُ الْكُتُبِ
صَفْوَةُ بَرِّمِي الْكُتُبِ

حاول ان تحل

4 أوجد معادلة المماس ومعادلة الناطم على منحنى الدالة f حيث $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ عند النقطة $(1, 0)$

حاول ان تحل

5 أوجد $f'(x)$ حيث $f(x) = \frac{-4}{x^2 + 2x + 5}$

أوجد $f'(x)$ حيث $f(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$

مثال 5

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $y = \frac{8}{4+x^2}$ عند النقطة $(2, 1)$

كراسة التمارين

امتحان final

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $y = \frac{8}{4+x^2}$ عند $x = 2$

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x) = \frac{5x-7}{x^2-2}$:

امتحان final

عند النقطة $A(1, 2)$

مُعَلِّمُ الْكُتُبِ
صَفْوَةُ مِصْبُوحِي

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة f : $f(x) = \frac{3x-4}{x+2}$ عند $x = 0$

امتحان final

مُعَلِّمٌ لِكُلِّ تَلَامِيذٍ

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$$

قاعدة (8): قاعدة القوى للأسس الصحيحة السالبة:

لتكن: $y = \frac{x^2+3}{2x}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$

مثال 6

6 لتكن: $y = \frac{3x^2+7}{8x^2}$ ، أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = -1$

حاول ان تحل

$$(x^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n}(x)^{\frac{m}{n}-1}$$

قاعدة (9):

7 أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$

حاول ان تحل

لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & : x \leq 1 \\ 2x + 1 & : x > 1 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها.
أوجد $f'(x)$ إن أمكن

مثال 8

الاشتقاق على المجال

مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ
صَفْوَةٌ مِائِيَّةٌ

8 أوجد المشتقة إن أمكن لكل من الدوال المتصلة التالية:

a $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : x \leq 2 \\ 4x - 3 & : x > 2 \end{cases}$

حاول ان تحل

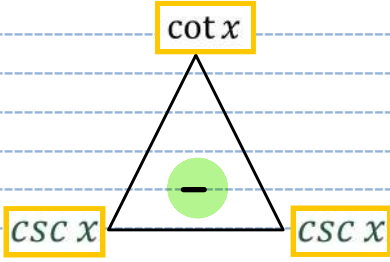
امتحان final

مُعَلِّمٌ لِكُلِّ تَلَامِيذٍ

b $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : x < 1 \\ 2\sqrt{x} & : x \geq 1 \end{cases}$

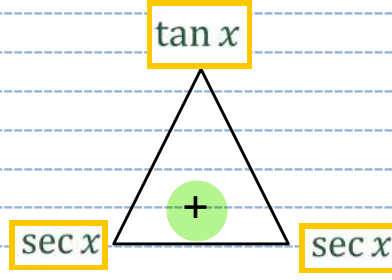
امتحان final

مُعَلِّمٌ لِكُلِّ تَلَامِيذٍ



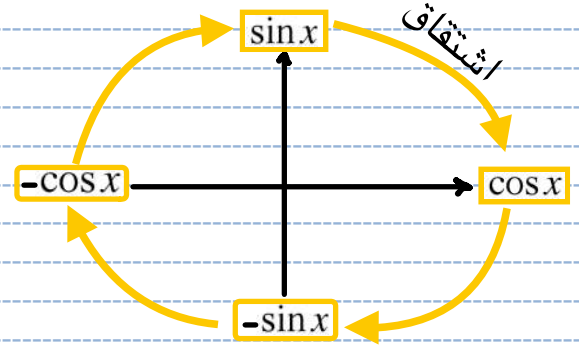
$$\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$$



$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$$



$$\frac{d}{dx} (\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} (\cos x) = -\sin x$$



استاذ نادر الصباغ

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$



$$\text{a } y = x^2 \sin x$$

أوجد المشتقات للدوال التالية:

مثال 1

$$\text{b } u = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

$$\text{c } f(x) = \sin^2 x$$

مُعَلِّمٌ كَمِيَّتْ
صَفْحَةٌ مِنْ كِتَابِ

$$\text{a } h(x) = \cos^2 x$$

أوجد المشتقات للدوال التالية:

1

حاول ان تحل

$$\text{b } g(x) = \frac{x}{\cos x}$$

c $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

a $f(x) = \tan x + \cot x$

أوجد المشتقات للدوال التالية:

مثال 2

b $g(x) = \sec x \cdot (1 + \sin x)$ امتحان final

c $h(x) = \csc x + \sin x \cdot \tan x$

a $f(x) = \frac{1 + \tan x}{\tan x}$

2 أوجد مشتقات الدوال التالية:

حاول ان تحل

b $g(x) = \sec x + \csc x$

c $h(x) = \frac{\sec x}{\csc x}$

مثال 3

أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \tan x$ عند النقطة $P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

حاوله أنت

3 أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \sec x$ عند النقطة $F\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$

مُعَلِّمُ الْكُتُبِ
صَفْوَةُ مِي الْكُتُبِ

أوجد مشتقة الدالة g حيث $g(x) = \frac{x}{\cos x}$

امتحان final

$$y' = (y \cdot \csc x)^2$$

اثبت أن

$$y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$$

إذا كانت:

امتحان final

مُعَلِّمٌ لِكُلِّ تَلَامِيذٍ

قاعدة السلسلة (التسلسل)

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند $g(x)$ ، والدالة g قابلة للاشتقاق عند x ، فإن الدالة المركبة

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

تكون قابلة للاشتقاق عند x ، ويكون:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

صورة أخرى لقاعدة السلسلة

إذا كانت $y = f(u)$ ، $u = g(x)$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

يتم حسابها عند $u = g(x)$

مثال 1

إذا كان $g(x) = x^{10}$ ، $f(x) = 3x^2 + 1$ ، فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة

a $(f \circ g)'(x)$

b $(g \circ f)'(-1)$

مُعَلِّمٌ لِكُلِّ تَلَامِيذٍ

حاول ان تحل 1 b لتكن: $g(x) = x^{13}$, $f(x) = -2x^3 + 4$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$, $(g \circ f)'(0)$

لتكن: $g(x) = x^2 + 1$, $f(x) = \frac{2x+1}{x}$ ($x \neq 0$)

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$

مثال 2

امتهنه final

مُعَلِّمُ الْكُتُبِ
صَفْوَةُ مِي كَوَيْت

حاول ان تحل

2 لتكن: $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(1)$

مثال 3

إذا كانت: $y = u^3 - 3u + 1$, $u = 5x^2 + 2$ فأوجد: $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل

مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ
صَفْوَةٌ مِائِيَّةٌ

3 حاول ان تحل : لتكن : $y = u^2 + 4u - 3$, $u = 2x^3 + x$ أوجد : $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

امتحان final

4 حاول ان تحل : أوجد مشتقة $y = \sin(x^2 + x)$ بالنسبة إلى المتغير x .

مُعَلِّمُ الْكُتُبِ
صَفْوَةُ بِنْتِ مَيْمُونِ

إذا كانت : $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^3$

امتحان final

(1) أوجد $(g \circ f)'(x)$ (2) أوجد معادلة المماس للدالة $(g \circ f)(x)$ عند النقطة $A(0, 1)$

مُعَلِّمٌ كَوْنِي

قاعدة سلسلة القوى

إذا كانت $f(x)$ قابلة للاشتقاق على مجالها وكان n عددًا نسبيًا فإن:

$$\frac{d}{dx} (f(x))^n = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

مثال 6

لتكن: $y = \sqrt[5]{(x^2 + 3x + 5)^3}$ ، أوجد: y'

حاول ان تحل

6

لتكن:

أوجد: y' ، $y = \sqrt[4]{(2x^4 - 3x^2 + 4)^3}$

مُعَلِّمُ الْكُتُبِ
صَفْوَةُ مِصْرِي

مثال 7

أوجد ميل مماس المنحنى $y = \sin^5 x$ عند $x = \frac{\pi}{3}$

7 حاول ان تحل بين أن ميل أي مماس للمنحنى $y = \frac{1}{(-2x-1)^3}$ دائماً يكون موجباً حيث $x \neq -\frac{1}{2}$

مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ
صَفْوَةٌ مِي كَوَيْتٌ

كراسة التمارين

امتحان final

(16) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة f حيث $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ عند النقطة $(2, 3)$ (17) أوجد معادلة الخط العمودي على المماس لمنحنى الدالة f حيث $f(x) = (x^3 + 1)^8 + 2x$ عند النقطة $(0, 1)$.

امتحان final

مُعَلِّمٌ لِكُلِّ تَلَامِيذٍ

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

المشتقة من الرتبة الأولى

أولاً: المشتقات ذات الرتب العليا

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

المشتقة من الرتبة الثانية

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{d^3 y}{dx^3}$$

المشتقة من الرتبة الثالثة

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx} (y^{(n-1)}) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

المشتقة من الرتبة



انتبه

ملاحظة:

لا يجب الخلط بين رتبة
مشتقة الدالة $y^{(n)}$ و y^n من
قوى y .

1 إذا كانت: $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$ فأوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة.

حاول ان تحل

إذا كانت $y = \sin x$. بين أن $y^{(4)} = y$.

مثال 2

حاول ان تحل

2

لتكن الدالة: $y = \cos x$.بيّن أن $y^{(4)} + y'' = 0$.

مثال 3

أوجد y'' حيث $y = \frac{1}{\cos x}$

حاول ان تحل

3

أوجد y'' حيث $y = \frac{1}{\sin x}$



استاذ نادر الصباغ

تتم عملية الاشتقاق الضمني وفق الخطوات التالية على الترتيب:

- 1 اشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير x .
- 2 تجميع الحدود التي تحتوي $\frac{dy}{dx}$ أو y' في أحد طرفي المعادلة.
- 3 إخراج $\frac{dy}{dx}$ أو y' كعامل مشترك.
- 4 كتابة المعادلة على الصورة $\frac{dy}{dx}$ أو y' بدلالة x, y .

ثانيا : الاشتقاق الضمني



انتبه

مثال 4

a $y^2 + xy = 7x$

أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ في الحالات التالية:

b $y = x + x^2 y^5$

4 لتكن: $y^2 = x^2 - 2x$ ، أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$.

حاول ان تحل

مثال 5

أوجد ميل المماس للمنحنى (الدائرة) الذي معادلته $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(3, -4)$.5 أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1, 1)$

حاول ان تحل

امتحان final

مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ
صَفْوَةٌ مِي كَوَيْتٌ

مثال 6

أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $2y = x^2 + \sin y$ عند النقطة $(2\sqrt{\pi}, 2\pi)$

6 أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $x^2 + y^2 - 2xy = 1$ حيث $x \neq y$ عند النقطة $(2, 1)$

حاول ان تحل

مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ
صَفْوَةٌ مِي كَوَيْتٌ



النهائية final

للمنحنى الذي معادلته $x = y + 2\sqrt{y}$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة (1, 3)

7 للمنحنى الذي معادلته: $x^2 + \sqrt{y} + y^2 = 3$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة (1, 1)

حاول ان تحل

مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ
صَبِيحَةٌ مِى كَوَيْتٍ

إذا كانت $y = \sqrt{1 - 2x}$ فأثبت أن: $yy'' + (y')^2 = 0$

مثال 8

8 إذا كانت $y = x \sin x$ فأثبت أن $y''' + y' + 2 \sin x = 0$

حاول ان تحل

امتحان final

مُعَلِّمٌ لِكُلِّ تَلَامِيذٍ

امتناء final

أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته :
 $2y = x^2 - \cos y$ عند النقطة $A(1, 0)$

كراسة التمارين

أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y = \frac{\cos x}{1 + \tan x}$ واكتب معادلة المماس على منحنى الدالة عند $A(0, 1)$.

صِفْهُ مَعَ الْكُتُبِ

كُراسة التمارين أوجد معادلة المماس ومعادلة الخط العمودي على المماس على منحنى الدالة

$$(12) \quad 2xy + \pi \sin y = 2\pi, \quad \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$4x^2 f''(x) - 3f(x) = 0 \quad \text{فأثبت أن:}$$

كُراسة التمارين

مُعَلِّمُ الْكُتُبِ
صَفْوَةُ بِنْتِ مِصْرٍ

3-1 القيم القصوى (العظمى والصغرى) للدوال



تعريف (1): القيم القصوى المطلقة

إذا كانت f دالة مجالها D ، $c \in D$ ، فإن $f(c)$ تسمى:

a قيمة عظمى مطلقة للدالة f على D عندما:

$$f(c) \geq f(x) \quad , \quad \forall x \in D_f$$

b قيمة صغرى مطلقة للدالة f على D عندما:

$$f(c) \leq f(x) \quad , \quad \forall x \in D_f$$



استاذ نادر الصباغ

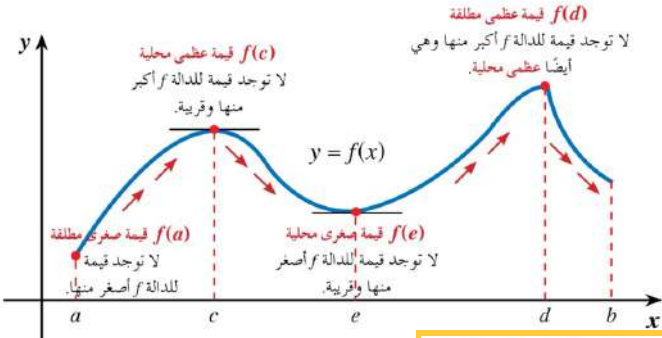
نظرية (1): نظرية القيمة القصوى

إذا كانت f دالة متصلة على فترة مغلقة $[a, b]$ فإن f تكون لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة.

ملاحظة: لتكن الدالة f معرفة على $[a, b]$ ، $c \in (a, b)$ فإننا نسمي:

1 $(a, f(a))$ ، $(b, f(b))$ نقاط طرفية.

2 $(c, f(c))$ نقطة داخلية.



تعريف (2): القيم القصوى المحلية

لتكن $(c, f(c))$ نقطة داخلية للدالة f ، D فترة مفتوحة تحوي c ، تكون $f(c)$:

a قيمة عظمى محلية عند c عندما: $f(c) \geq f(x)$ ، $\forall x \in D$

b قيمة صغرى محلية عند c عندما: $f(c) \leq f(x)$ ، $\forall x \in D$

تعريف (3): النقطة الحرجة

النقطة الداخلية للدالة f $(c, f(c))$ تسمى نقطة حرجة عندما $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.

خطوات إيجاد النقاط الحرجة لكثيرة الحدود

① نوجد $f'(x)$

② نضع $f'(x) = 0$ ونوجد قيم x وليكن x_1, x_2

③ نعوض بـ x_1, x_2 في الدالة الأصلية $f(x)$

فيكون $(x_1, f(x_1))$ ، $(x_2, f(x_2))$ نقاط حرجة

تذكر:

تكون $f'(c)$ غير موجودة إذا كان للدالة f عند c ركن أو ناب أو مماس رأسي.



انتبه



التكرير
يحول الحلم لتحقيقه



مثال 2

أوجد النقاط الحرجة لكلّ من الدوال المتصلة التالية: $g(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

a

حاول ان تحل

أوجد النقاط الحرجة لكلّ من الدوال المتصلة التالية: $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 10$

a

مُعَلِّمٌ كَوْنِي

نظرية (2): القيم القصوى المحلية

إذا كانت للدالة f قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محلية عند $x = c$ فإن $(c, f(c))$ نقطة حرجية.

● إذا كانت $(c, f(c))$ نقطة حرجية للدالة f فليس بالضرورة أن تكون $f(c)$ قيمة قصوى محلية



انتبه

خطوات إيجاد القيم القصوى المطلقة للدالة f المتصلة على الفترة $[a, b]$

- 1 إيجاد قيم الدالة عند النقاط الطرفية: $x = a$, $x = b$
- 2 إيجاد النقاط الحرجية للدالة f في الفترة (a, b) إن وجدت.
- 3 أكبر قيمة للدالة في الخطوتين 1 , 2 هي قيمة عظمى مطلقة في $[a, b]$ وأصغر قيمة للدالة هي قيمة صغرى مطلقة في $[a, b]$.

مثال 3

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة $f : f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[0, 3]$.

حاول ان تحل

3 أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f : f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[-2, 1]$.

مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ

مثال 4

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ في الفترة $[-2, 3]$

حاول ان تحل

4 أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ في الفترة $[1, 3]$

مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ
صَفْوَةٌ مِائِيَّةٌ

إذا كانت الدالة f متصلة علي $[1, 4]$ $f(x) = x + \frac{4}{x}$

امتحان final

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة في الفترة $[1, 4]$

مُعَلِّمٌ لِكُلِّ تَلَامِيذٍ

نظرية القيمة المتوسطة

نظرية (3): نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت f دالة:1 متصلة على الفترة $[a, b]$ 2 قابلة للاشتقاق على الفترة (a, b) فإنه يوجد على الأقل $c \in (a, b)$ بحيث $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

مثال 1

بين أن الدالة $f: x^2$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 2]$ ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك.

امتحان final

حاول ان تحل

1 بين أن الدالة $f(x) = x^2 + 2x$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3, 1]$ ،ثم أوجد قيمة c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك.مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ
صَفْوَةُ بِنْتِ كَوَيْتٍ

مثال 2

بَيِّن أن الدالة $f : f(x) = x^3 + 1$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3, 3]$ ،
ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك.

حاوله أنت

2

بَيِّن أن الدالة $f : f(x) = x^3 - 3x + 2$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 4]$ ، ثم أوجد c الذي تنبئ به
النظرية وفسر إجابتك.

امتحان final

مُعَلِّمٌ لِكُلِّ تَلَامِيذٍ

(2) بين أن الدالة $f: x \mapsto x + \frac{1}{x}$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $[\frac{1}{2}, 2]$. ثم أوجد قيمة c التي تنبئ بها النظرية. فسر إجابتك.

تزايد وتنافص الدوال

نظرية (4): الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة والدوال الثابتة

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على (a, b) .

- 1 إذا كانت $f'(x) > 0$ عند كل x تنتمي إلى الفترة (a, b) ، فإن f تزايد على (a, b) .
- 2 إذا كانت $f'(x) < 0$ عند كل x تنتمي إلى الفترة (a, b) ، فإن f تناقص على (a, b) .
- 3 إذا كانت $f'(x) = 0$ عند كل x تنتمي إلى الفترة (a, b) ، فإن الدالة f ثابتة على (a, b) .



استاذ نادر الصباغ

خطوات ايجاد فترات التزايد والتناقص



النتيجة

	$-\infty$	x_1	x_2	∞
الفترات	$(-\infty, x_1)$	(x_1, x_2)	(x_2, ∞)	
إشارة f'	+	-	+	
	تزايد	تناقص	تزايد	
		عظمى محلية	صغرى محلية	

① نوجد $f'(x)$

② نضع $f'(x) = 0$ ونوجد قيم x وليكن x_1, x_2

③ ندرس إشارة $f'(x)$ عند x_1, x_2 من خلال الجدول

④ فتكون فترات التزايد التي تحتوي على + وفترات التناقص التي تحتوي على -

لايجاد القيم القصوى المحلية

- 1 إذا كانت إشارة المشتقة f' تتغير من الموجب إلى السالب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة عظمى محلية عند c .
- 2 إذا تغيرت إشارة f' من السالب إلى الموجب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة صغرى محلية عند c .

حاول ان تحل

3 أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة $f: f(x) = -x^2 + 4x - 3$

لتكن $f: f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

مثال 4

حدّد الفترات حيث تكون f متزايدة والفترات حيث تكون f متناقصة.

مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ
صَفْوَةٌ مِى كَوَيْتٍ

حاول ان تحل

4

إذا كانت $f : f(x) = x^3 - 6x$. حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f .

مثال 5

إذا كانت f الدالة: $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة.مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ
صَفْوَةُ مِي كَوَيْت

حاول ان تحل

5 حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ

مثال 1

امتحان final

لتكن الدالة f : $f(x) = x^3 - 12x - 5$

- أوجد كلاً مما يلي:
- a النقاط الحرجة للدالة.
- b الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.
- c القيم القصوى المحلية.

مُعَلِّمُ الْكُتُبِ
صَفْوَةُ بِنْتِ مِصْبُوحٍ

حاول ان تحل

1 لتكن الدالة $f : f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$. أوجد كلاً مما يلي:

a النقاط الحرجة للدالة.

b الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.

c القيم القصوى المحلية.

مُعَلِّمٌ كَوْنِيٌّ
صَبَّوْنٌ مِي كَوْنِيٌّ



انتبه

خطوات إيجاد فترات التقعر لـ أعلى أو لأسفل

التقعر

	$-\infty$	x_3	∞
الفترات	$(-\infty, x_3)$	(x_3, ∞)	
إشارة f''	+	-	
بيان الدالة	لأعلى	لأسفل	

① نوجد $f'(x)$ ومنها نوجد $f''(x)$ ② نضع $f''(x) = 0$ ونوجد قيم x وليكن x_3 ③ ندرس إشارة $f''(x)$ عند x_3 من خلال الجدول

④ فتكون فترات التقعر لأعلى تحتوي على + وفترات التقعر لأسفل تحتوي على -

إذا كانت $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لبيان الدالة f فإن $f''(c) = 0$ أو $f''(c)$ غير موجودة.

a

b

(3) إذا كانت $f''(c) = 0$ ، فإن لمنحنى الدالة f نقطة انعطاف هي $(c, f(c))$.

a

b

(4) إذا كان لمنحنى الدالة f نقطة انعطاف هي $(c, f(c))$ فإن $f''(c) = 0$.(10) إذا كانت f دالة كثيرة حدود، $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لها فإن:a $f''(c) = 0$ b $f'(c) = 0$ c $f(c) = 0$ d $f''(c)$ غير موجودة

انتبه

أوجد فترات التقعر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة $f: f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

مثال 3

امتحان final

نظرية (6): اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية

1 إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) < 0$ ، فإن f تكون لها قيمة عظمى محلية عند $x = c$

2 إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) > 0$ ، فإن f تكون لها قيمة صغرى محلية عند $x = c$

مثال 4 استخدم اختبار المشتقة الثانية لتجد القيم القصوى المحلية للدالة $f: f(x) = x^3 - 12x - 5$

4 استخدم اختبار المشتقة الثانية لتجد القيم القصوى المحلية للدالة $f: f(x) = 4x^3 - 12x^2$

حاول ان تحل

مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ
صَفْوَةٌ مِائِيَّةٌ

خطوات رسم بيان الدالة



انتبه

- 1 عيّن مجال الدالة f .
مجال دالة كثيرة الحدود هو $\mathbb{R}$ ولكنه يقتصر أحياناً على فترة من $\mathbb{R}$ خاصة في المسائل الحياتية.
- 2 أوجد النهايات عند الحدود المفتوحة لمجال الدالة f .
- 3 عيّن النقاط الحرجة للدالة f .
- 4 كوّن جدولاً لدراسة إشارة f' وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية.
- 5 كوّن جدولاً لدراسة إشارة f'' وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت.
- 6 أوجد نقاطاً إضافية.
- 7 تساعد هذه النقاط على رسم بيان الدالة بدقة وأهم هذه النقاط، نقاط التقاطع مع أحد المحاور إن أمكن.
- 7 ارسم بيان الدالة f . استخدم نتائج الخطوات السابقة في الرسم.



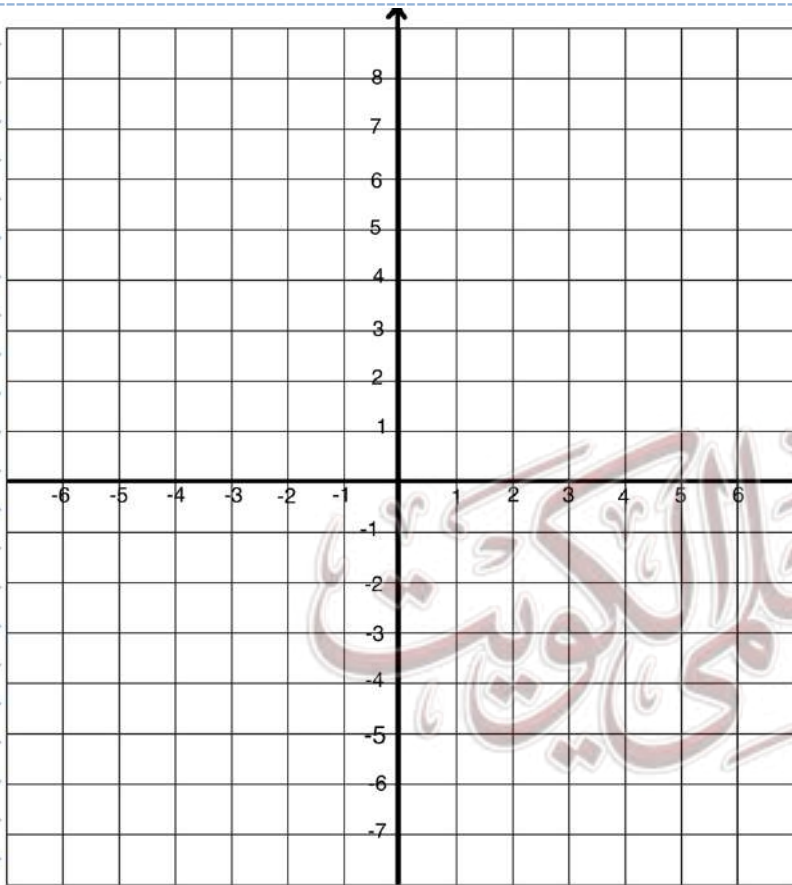
استاذ نادر الصباغ

ادرس تغير الدالة $f: f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بيانها.

مثال 4

مُعَلِّمٌ كَوْنِي

صَفْوَةُ مِثْلِي

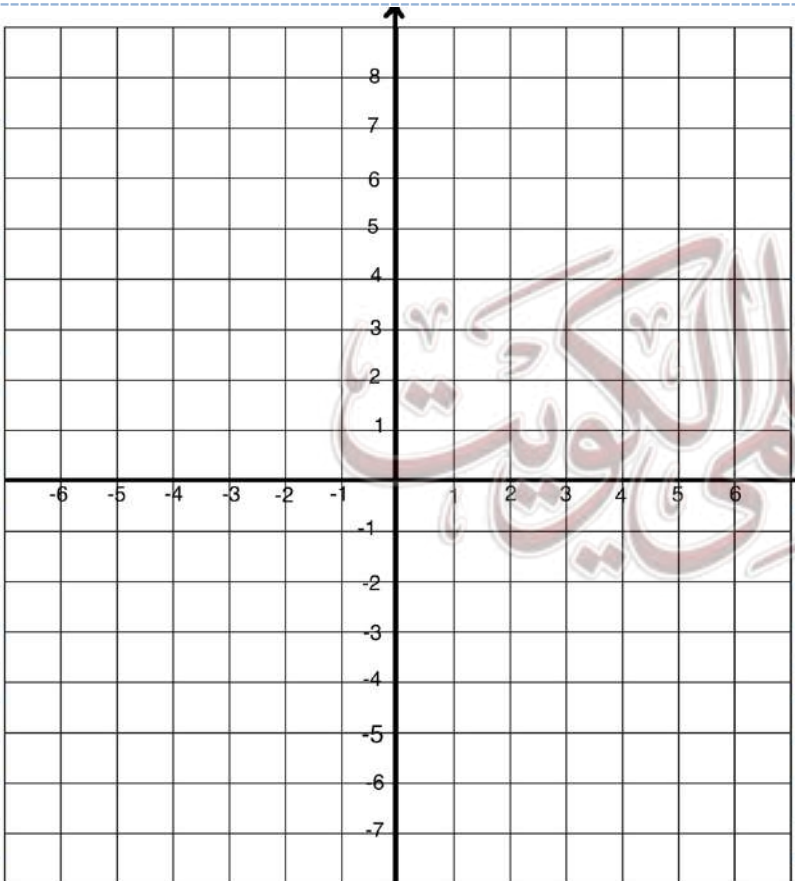


حاول ان تحل

1

ادرس تغير الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها.

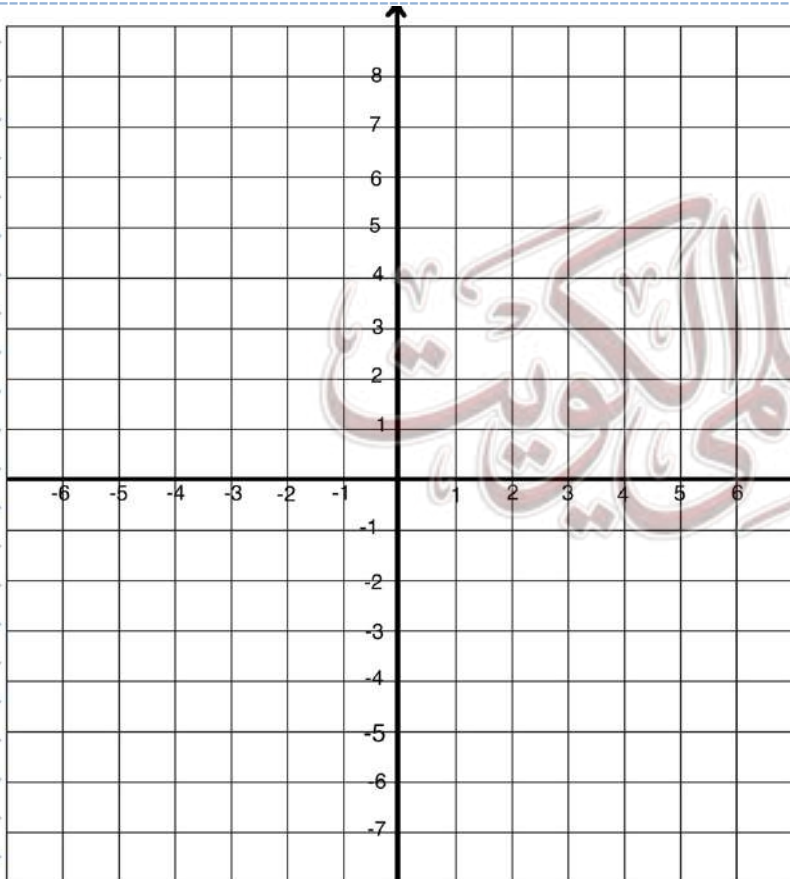
امتنحه final

نادر الد إدرس تغير الدالة $f : f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ ثم ارسم بيانها

مثال 2

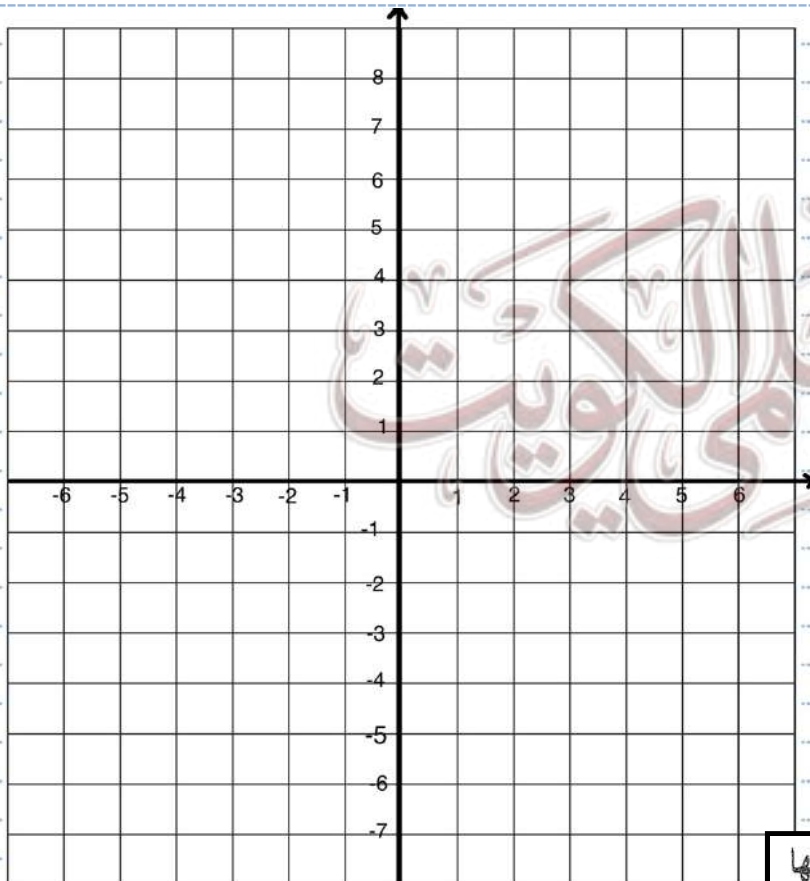
ادرس تغير الدالة f : $f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها.

امتحان final



حاول ان تحل

2

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها.

مثال 1

امتحان final

عدداً موجبان مجموعهما 100 ومجموع مربعيهما أصغر ما يمكن، ما العدداً؟

حاول ان تحل

امتحان final

1 أوجد عددين مجموعهما 14 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن.

صِفْوَةٌ مَعَالِي الْكُتُبِ

مثال 2

يراد صنع صندوق بدون غطاء بقص مربعات متطابقة طول ضلع كل منها x من أركان طبقة صفيح أبعادها 16 cm , 6 cm وثني جوانبها إلى أعلى (انظر الشكل المقابل).
أوجد قيمة x بحيث يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن. وما هو حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة؟

صِفْهُ مَعَ الْكَيْفِ

حاول ان تحل

امتحانه final

3

تعطي الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h .

a أوجد الارتفاع $h(\text{cm})$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة.

b ما قيمة هذا الحجم؟

أثبت أن من بين المستطيلات التي محيطها 8 cm واحداً منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعاً

كراسة التمارين

امتحانه final

صِفْوَةٌ مَعَ الْكُتُبِ

كُراسة التمارين

مزرعة على شكل قطعة مستطيلة من الأرض تقع على حافة نهر مستقيم. يراد وضع سياج على الجوانب الثلاثة الأخرى، ما أكبر مساحة يمكن إحاطتها بسياج طوله 800 m؟ وما أبعادها؟

كُراسة التمارين

علبة من الصفائح على شكل أسطوانة قائمة مفتوحة من أعلى حجمها 1000 cm^3 أوجد أبعاد العلبة بحيث يكون وزنها أقل ما يمكن.

مُعَلِّمُ الْكُتُبِ
صَفْوَةُ بَرِّمِي الْكُتُبِ

القيمة الحرجة

مثال 1

أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 95% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

حاول ان تحل

1

أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 97% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

صِفْوَةٌ مَعَالِي الْكُتُبِ

التقدير بفترة الثقة

التقدير بفترة ثقة

 σ معلوم

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{هامش الخطأ}$$



استاذ نادر الصباغ

 σ غير معلوم $n \leq 30$ تستخدم جدول t درجة الحرية: $n - 1$ نوجد: $t_{\frac{\alpha}{2}}$ من جدول

$$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \quad \text{هامش الخطأ}$$

 $n > 30$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \quad \text{هامش الخطأ}$$

فترة الثقة $(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$

أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهم فإذا كان حجم عينة الإناث $n = 40$ والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 12.5$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 76.3$. باستخدام مستوى ثقة 95%

مثال 2

1 أوجد هامش الخطأ.

2 أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي.

3 فسّر فترة الثقة.

امتحان final

مُعَلِّمُ الْكُتُبِ
صَفْوَةُ مِصْرِي

مثال 3

امتحان final

عينة عشوائية حجمها 36، فإذا كان المتوسط الحسابي للعينة 60 وتباينها 16، باستخدام مستوى ثقة 95%:

- 1 أوجد هامش الخطأ.
- 2 أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .
- 3 فسّر فترة الثقة.

3 أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 81$ ومتوسطها الحسابي $\bar{x} = 50$ وانحرافها المعياري $S = 9$ ، باستخدام مستوى ثقة 95%.

- 1 أوجد هامش الخطأ.
- 2 أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .
- 3 فسّر فترة الثقة.

حاول ان تحل

امتحان final

مُعَلِّمٌ لِكَلِمَاتٍ
صَفِيَّةٌ مِى الْكَلِمَاتِ

مثال 4

أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 25$ ، فإذا كان الانحراف المعياري للعينة (S) يساوي 10 ومتوسطها الحسابي ($\bar{x}$) يساوي 15، استخدم مستوى ثقة 95% لإيجاد:

1 هامش الخطأ.

2 فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ .

امتحان final

حاول ان تحل

4

أوجد فترة ثقة 95% للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ علماً أن العينة أخذت من مجتمع طبيعي.

إذا كان لدينا $n = 13$ ، $S = 0.3$ ، $\bar{x} = 8.4$

مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ
صَفْوَةٌ مِائِيَّةٌ

خطوات ايجاد اختبار الفروض

1 صياغة الفروض

الرقم $H_0: \mu =$ مقابل الرقم $H_1: \mu \neq$

2 المقياس الإحصائي

غير معلوم σ
 $n < 30$
 $n > 30$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

3 مستوى الثقة (القيمة الجدلية)
 $t_{\frac{\alpha}{2}}$ من الجدول عند درجته الحرة (n-1)
 $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$
 $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ من الجدول $t_{\frac{\alpha}{2}}$
a
b
 $(-t_{\frac{\alpha}{2}}, t_{\frac{\alpha}{2}})$ $(-1.96, 1.96)$ 4 منطقة القبول
 $(-1.96, 1.96)$

5 القرار

- ① إذا كان المقياس الاحصائي $\Rightarrow$ لمنطقة القبول فإننا نقبل الفرض H_0
- ② إذا كان المقياس الاحصائي $\neq$ لمنطقة القبول فإننا نقبل الفرض H_1



مثال 1 تزعم شركة أن متوسط رواتب موظفيها يساوي 4 000 دينار كويتي. إذا أخذت عينة من 25 موظفًا، ووجد أن متوسط رواتب العينة

هو 3 950 دينارًا كويتيًّا فإذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع (دينارًا) $\sigma = 125$

وضّح كيفية إجراء الاختبار الإحصائي بمستوى ثقة 95%

مُعَلِّمٌ كَوَيْتِي

صَفُوحٌ مَعَالِي كَوَيْتِي



حاول ان تحل

1

بيّنت الدراسة أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل أسلاك معدنية هو

$$\mu = 1800 \text{ kg} \text{ مع انحراف معياري } \sigma = 150 \text{ kg}$$

ويؤكد الأخصائيون في المصنع المنتج لهذه الاسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة تحمل هذه الأسلاك، وتأكيداً على ذلك تم اختبار عينة من 40 سلكاً

فتبين أن متوسط قوة تحمل هذه الأسلاك يساوي 1840 kg

هل يمكن قبول مثل هذا الفرض بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ ؟

مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ
صَفْوَةٌ مِائِيَّةٌ

مثال 2

امتحان final

إذا كانت $n = 80$, $\bar{x} = 37.2$, $S = 1.79$
 اختبر الفرض بأن $\mu = 37$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

حاول ان تحل

2 متوسط العمر بالساعات لعينة من 100 مصباح كهربائي مصنعة في أحد المصانع $\bar{x} = 1570$ بانحراف معياري $S = 120$.
 يقول صاحب المصنع إن متوسط العمر بالساعات $\mu = 1600$ للمصابيح المصنعة في المصنع.
 اختبر صحة الفرض $\mu = 1600$ مقابل الفرض $\mu \neq 1600$ وباختيار مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

مُعَلِّمٌ كَوَيْتٌ
 صَفْوَةٌ بَرِيَّةٌ

مثال 3

امتحان final

يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة يساوي 290 ديناراً كويتيًّا.

فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 منازل تبين أن متوسطها الحسابي (ديناراً) $\bar{x} = 283$ وانحرافها المعياري (ديناراً) $S = 32$.

فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟

استخدم مستوى ثقة 95% (علمًا بأن المجتمع يتبع توزيعاً طبيعيًّا).

مُعَلِّمُ الْكُتُبِ
صَفْوَةُ بَرِّمِي الْكُتُبِ

إذا كانت : $n = 20$, $\bar{x} = 40$, $S = 7$

امتحان final

اختبر الفرض بأن $\mu = 35$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

مُعَلِّمٌ كَوْنِي