الرياضيات

الصف العاشر

الفصل الدراسي الأول

2026 / 2027

1-1 دالة القيمة المطلقة

الصورة الأساسية لدالة القيمة المطلقة هي :

$$f : \mathbb{R} \Longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = |x|$$

(المجال) (المجال القابل)

إذا كانت $a, b, x \in \mathbb{R}$ عددين حقيقين فإن :

1. $|x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$

2. $|x+a| = \begin{cases} x+a & : x \geq -a \\ -x-a & : x < a \end{cases}$

3. $|ax+b| = \begin{cases} ax+b & : x \geq \frac{-b}{a} \\ -ax-a & : x < \frac{-b}{a} \end{cases}$

لاحظ أنّ

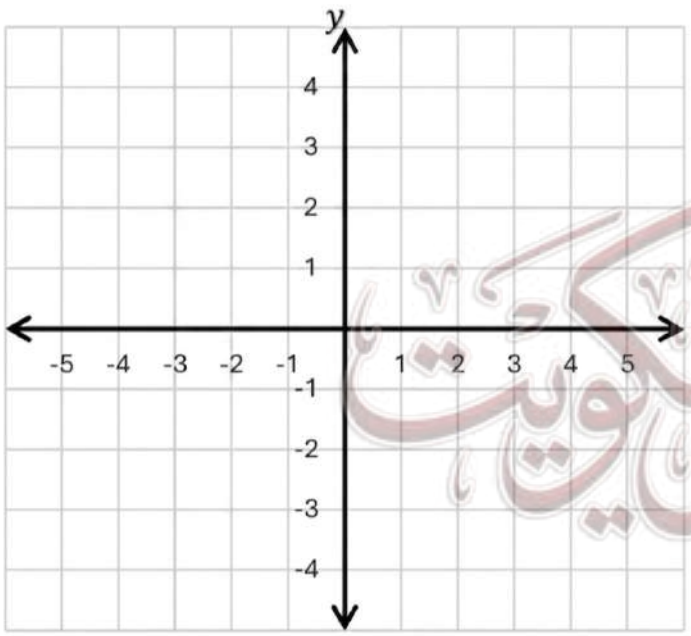
1. $|a|^2 = a^2$
2. $\sqrt{x^2} = |x|$

خواص القيمة المطلقة:

1. $|x| \geq 0$
2. $|a.b| = |a|.|b|$
3. $|a+b| \leq |a|+|b|$

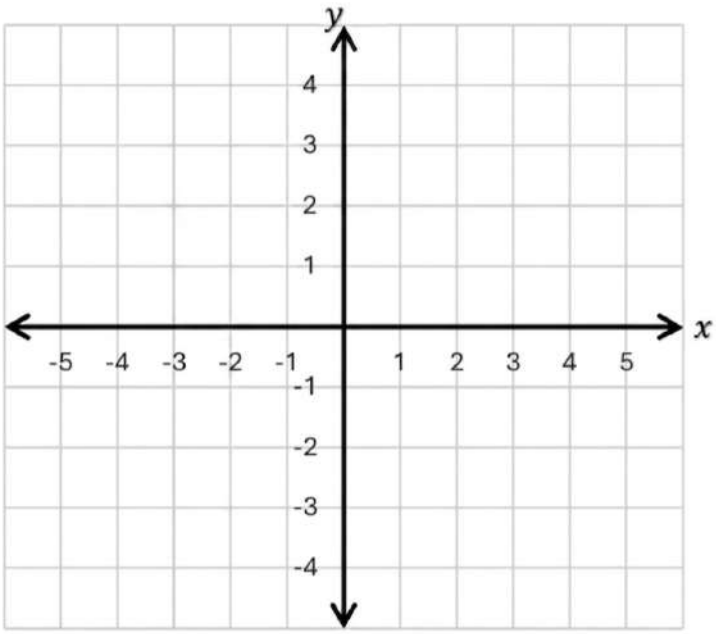
مثال 1 ارسم بيان الدالة: $f(x) = |2x+4|$

عند رسم بيان أي دالة اكتب مجال الدالة أولًا.



صفوة معلمي الكويت

تحقق من فهمك 1 ارسم بيان الدالة : $f(x) = |3x + 6|$



الصورة القياسية لدوال القيمة المطلقة:

$f(x) = |ax + b| + c$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

(المجال) (المجال المقابل)

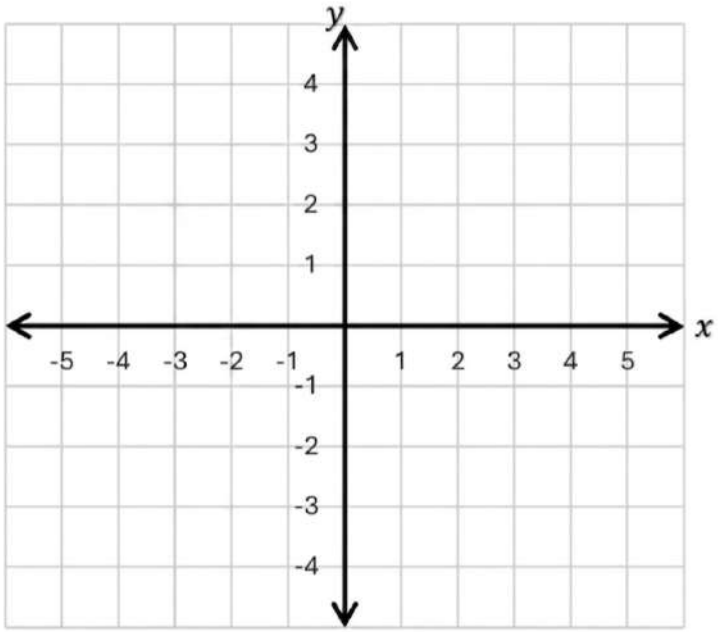
مجال الدالة هو $\mathbb{R}$، ومجالها المقابل هو $\mathbb{R}$

1. رأس المنحنى هو النقطة $\left(\frac{-b}{a} , c\right)$.
2. معادلة محور التماثل هو $x = \frac{-b}{a}$.
3. مدى الدالة هو $[c, \infty)$.
4. مدى الدالة يتغير إذا كانت الدالة على الصورة $f(x) = -|ax + b| + c$ ويصبح (∞ , c) حيث منحنى الدالة في هذه الحالة يكون مفتوحاً للأسفل

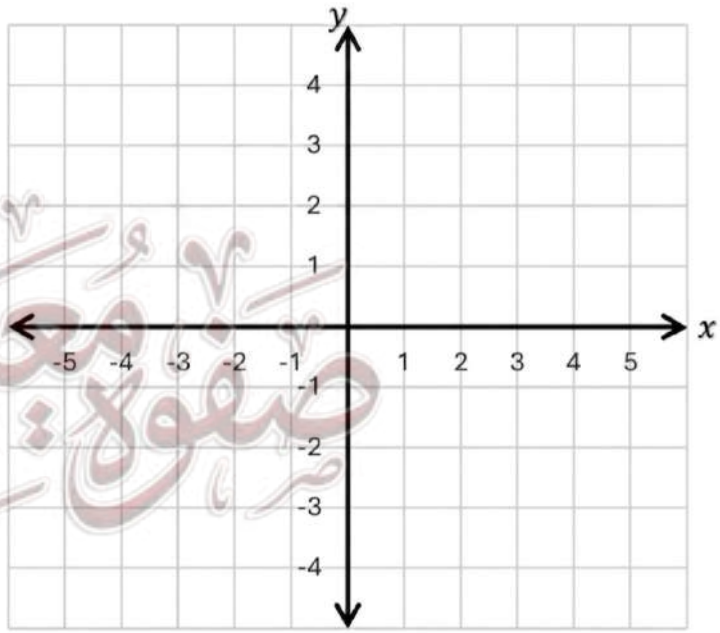
مثال 2

أوجد رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل ومدى كل من الدوال التالية ثم ارسم بيان كل منها

a $y = |x - 2| + 1$



b $y = -|2x + 3|$

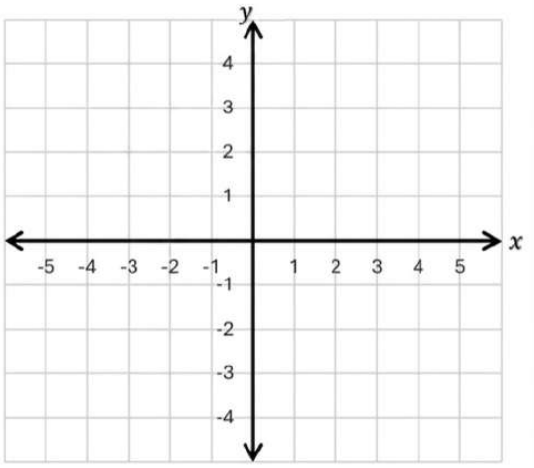


صفوة معلمي الكويت

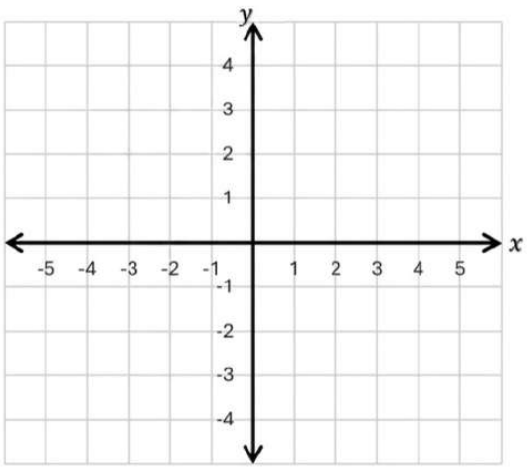
تحقق من فهمك 2

أوجد رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل ومدى كل من الدوال التالية ثم ارسم بيان كل منها

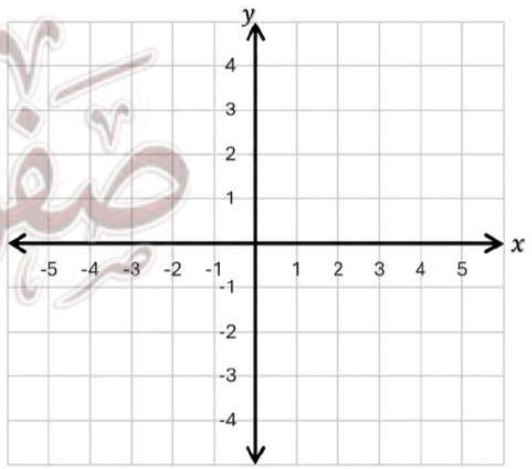
a $f(x) = |x + 1| + 3$



b $y = -|x + 1|$

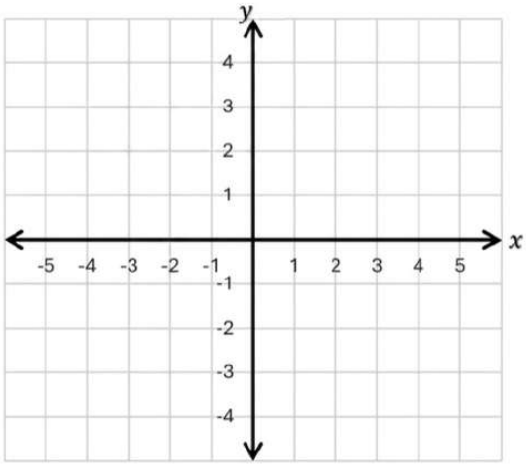


c $g(x) = \left|\frac{1}{2}x + 1\right|$



صفوة معلمي الكويت

d $f(x) = 1 - |x - 2|$



رسم بيان دوال القيمة المطلقة باستخدام التحويلات الهندسية

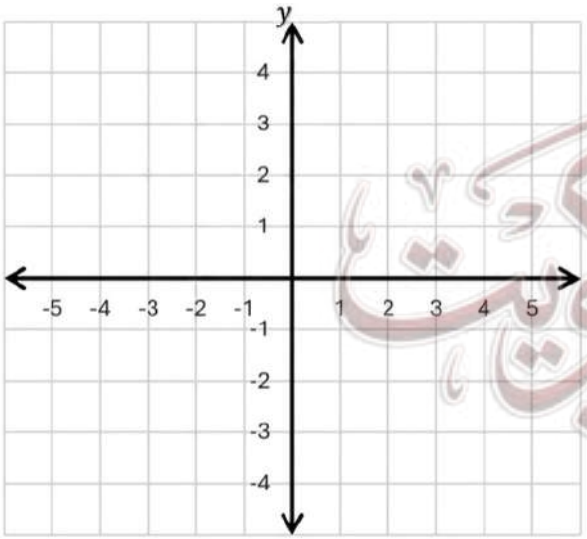
1. الانسحاب في اتجاه السينات (إزاحة أفقية)

يكون منحنى الدالة $f(x) = |x + a|$ هو نفس منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ وبإزاحة أفقية مقدارها $|a|$ وحدة في الاتجاه:

1- الموجب لمحور السينات (جهة اليمين) عندما $a < 0$

2- السالب لمحور السينات (جهة اليسار) عندما $a > 0$

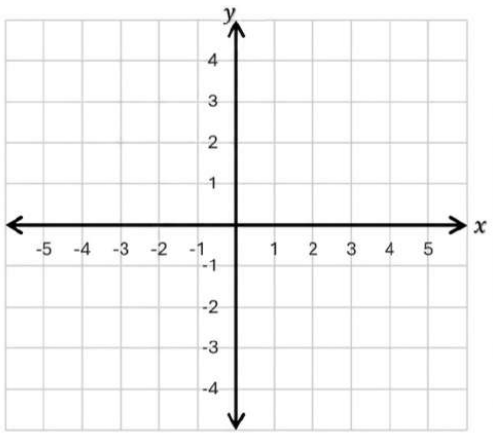
مثال 3 ارسم بيان كلٍّ من الدالة $f(x) = |x - 1|$ باستخدام التحويلات الهندسية



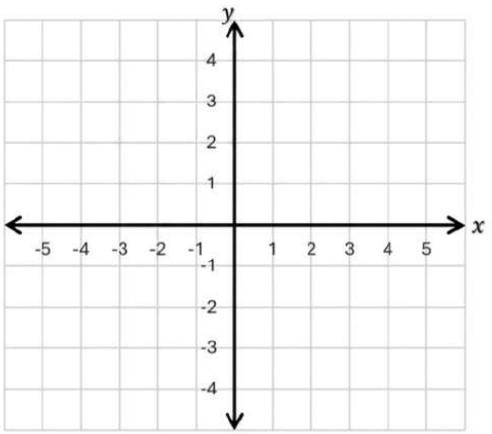
صفوة معلمي الكويت

تحقق من فهمك 3 لكل من الدوال التالية حدد مسافة الانسحاب ، ثم ارسم بيان كل منها مستخدمًا الإزاحة لبيان الدالة الأساسية $g(x) = |x|$:

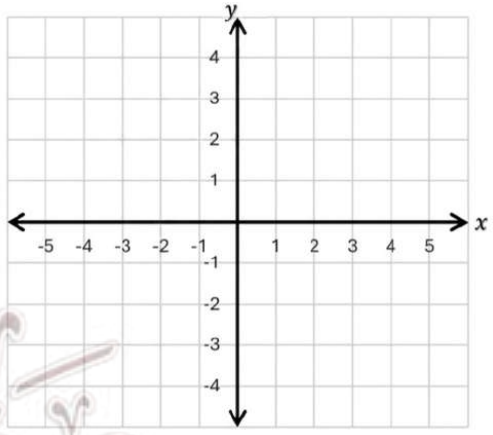
ⓐ $f(x) = |x - 3|$



ⓑ $y = |x + 2|$

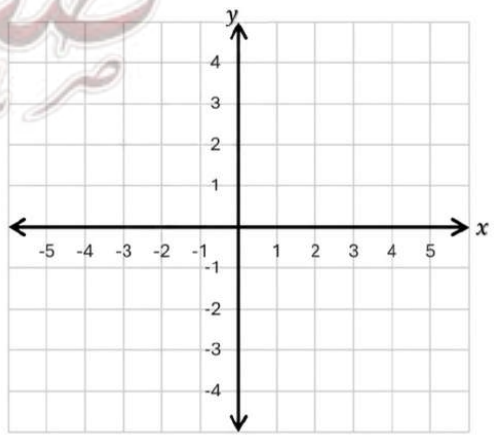


ⓒ $f(x) = |x - 3.5|$



صفوة معلمي الكويت

ⓓ $y = |x - 1.5|$



2. الانسحاب في اتجاه محور الصادات (إزاحة رأسية)

يكون منحنى الدالة $f(x) = |x| + a$ هو نفس منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ وبإزاحة رأسيّة مقدارها $|a|$ وحدة في الاتجاه:

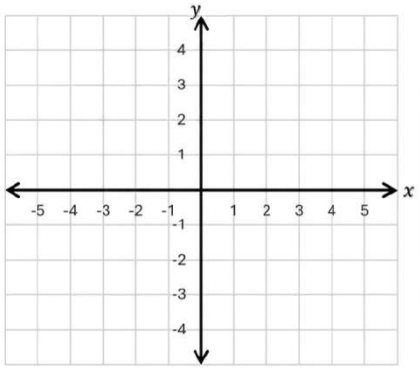
1 . الموجب لمحور االصادات (رأسيًا للأعلى) عندما $a > 0$

2 . السالب لمحور الصادات (رأسيًا للأسفل) عندما $a < 0$

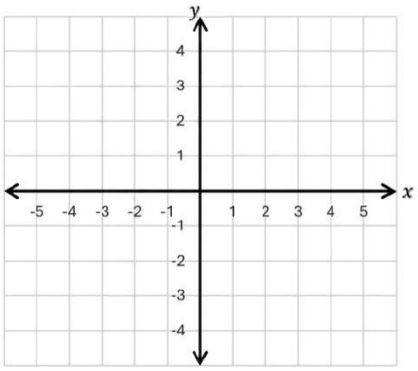
تحقق من فهمك 4

ارسم بيان كلٍّ من الدوال التالية باستخدام التحويلات الهندسية والدالة الأساسية $g(x) = |x|$:

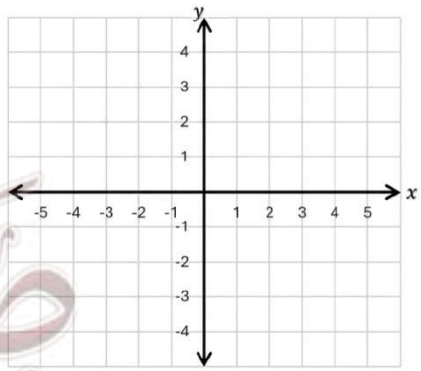
ⓐ $f(x) = |x| + 3$



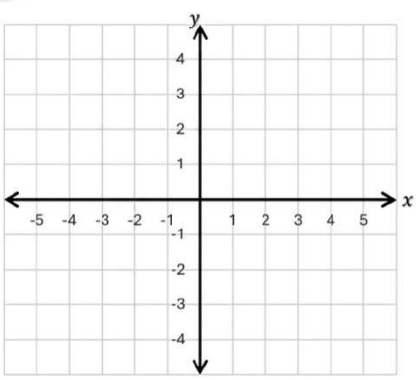
ⓑ $y = |x| - 2$



ⓒ $f(x) = |x| - 2.5$



ⓓ $y = |x| - 1$



صفوة معلمي الكويت

3. الانسحاب المركب: إزاحة أفقية تليها إزاحة رأسية لمنحنى الدالة $f(x) = |x|$

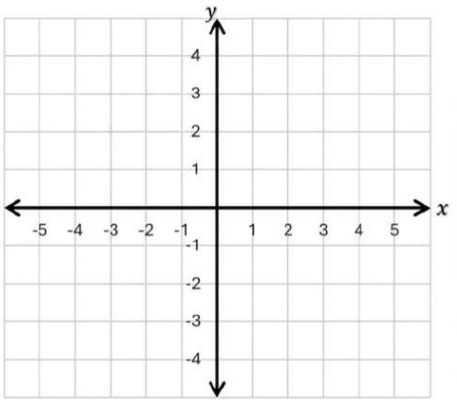
منحنى الدالة $f(x) = |x + a| + b$ هو نفس منحنى الدالة الأساسية $g(x) = |x|$ بإزاحة:

1 – أفقية (**محور السينات**) مقدارها $|a|$ مع مراعاة الإتجاه يمينًا أو يسارًا.

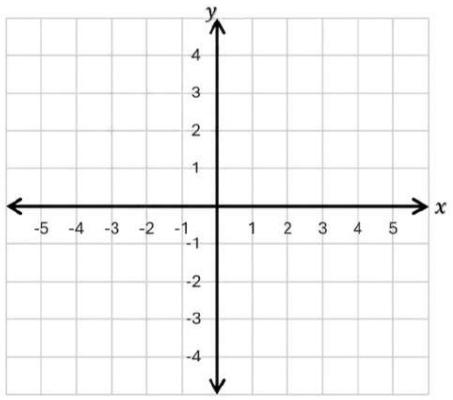
2 – رأسية (**محور الصادات**) مقدارها $|b|$ مع مراعاة الإتجاه للأعلى أو للأسفل.

تحقق من فهمك 5 ارسم بيان الدوال التالية باستخدام دالة المرجع والإزاحة :

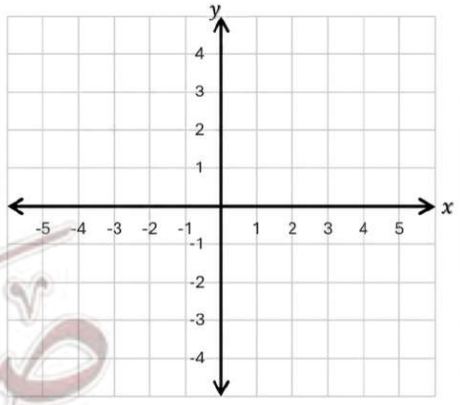
a $f(x) = |x + 3| + 2$



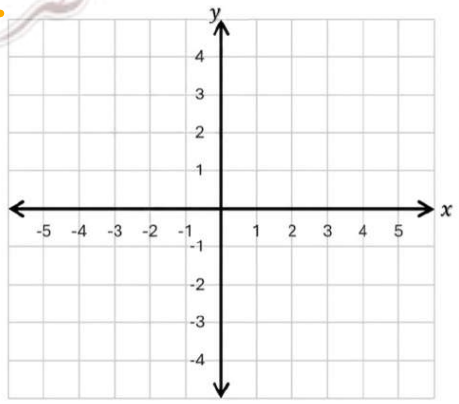
b $y = |x - 2| - 1$



c $f(x) = |x + 2| - 2$



d $y = |x - 1| + 3$



صفوة معلمي الكويت

الانعكاس في محور السينات للدالة الأساسية $g(x)=|x|$

- إذا كانت $g(x)=|x|$, $f(x)=-|x+b|$ يجب مراعاة

ترتيب التحويلات الهندسية لرسم بيان الدالة $f(x)$:

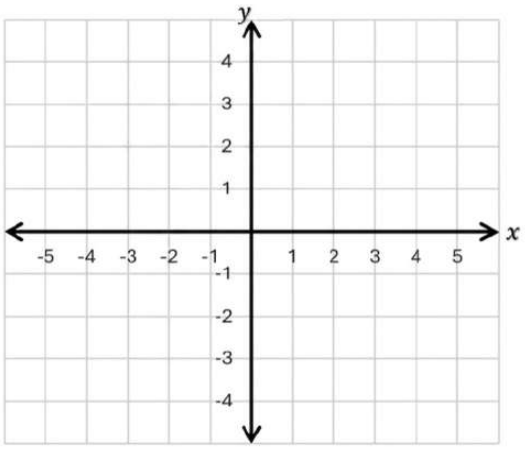
1 -انعكاس في محور السينات أولًا للدالة الأساسية.

2 -إزاحة أفقية (يمينًا أو يسارًا).

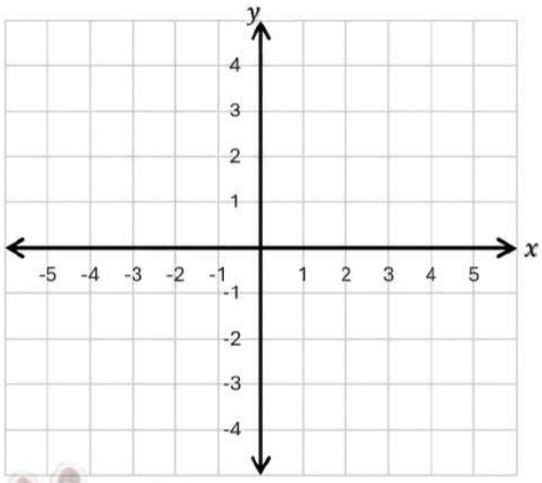
3 -إزاحة رأسية (للأعلى أو للأسفل). 4 -تحديد الرأس للمنحنى و محور التماثل.

تحقق من فهمك 6 ارسم بيانيّاً كلاً من الدوال التالية مستخدماً بيان منحنى الدالأساسية $g(x)=|x|$:

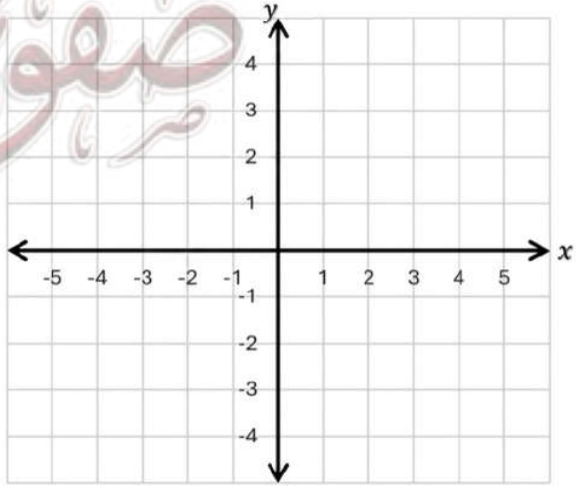
ⓐ $f(x)=-|x-2|+3$



ⓑ $y=-|x+1|-2$



ⓕ $f(x)=|1-x|+2$



صفوة معلمي الكويت

1-2 حل معادلة القيمة المطلقة

حل معادلات القيمة المطلقة

لحل المعادلة $|ax+b|=c$ حيث $c\geq 0$

نحل المعادلتين المرتبطتين بها وهما :

$ax+b=-c$ أو $ax+b=c$

1 $|x|=A$

إذا كان $A>0$ ، فإن للمعادلة حلان هما:

$x=A \quad or \quad x=-A$

$S=\{-A\ ,A\}$

2 $|x|=0$

إذا كان $A=0$ ، فإن للمعادلة حل وحيد وهو:

$x=0$

$S=\{0\}$

3 $|x|=A$

إذا كان $A<0$ ، فإن للمعادلة ليس لها حل:

$S=\emptyset$

تذكر أن

- $|a|=|b| \iff a^2=b^2$
- $|a|=|b| \iff a=b \quad or \quad a=-b$

خواص القيمة المطلقة

لكل $a,b\in R$:

1. $|a|\geq 0$
2. $|a+b|\leq|a|+|b|$
3. $|a\,.b|=|a|.|b|$
4. $|x-a|=|a-x|$
5. $\frac{|a|}{|b|}=|\frac{a}{b}|$, $b\neq 0$
6. $|x|=|-x|$
7. $|n|^2=n^2$ حيث n عدد زوجي
8. $\sqrt{x^2}=|x|$ لأي عدد حقيقي x يكون

أولاً : حل المعادلة على الصورة $|ax+b|=|cx+d|$

مثال 1 أوجد مجموعة حل المعادلة: $|x-2|=|2x-1|$

صفوة معلمي الكويت

تحقق من فهمك 1 أوجد جموعة حل المعادلة : $|x-1|=|x+2|$

تحقق من فهمك 2 أوجد مجموعة حل كلّ معادلة من المعادلات التالية:

a $|y-4|=|2y-5|$

b $|2x-3|=|x+1|$

صفوة معلمي الكويت

c $|3y+1|=|y-2|$

d $|x-4|=|2x-5|$

أتدرب وأحل المسائل

(c) $|4-5x|+|3x+1|=0$

صفوة معلمي الكويت

انتبه

1. $|3x-9|=3|x-3|$
2. $|3-x|=|x-3|$
3. $\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$
4. $x^2=|x|^2$

ثانيًا: حل المعادلة على الصورة $|ax+b|=cx+d$

مثال 3 أوجد مجموعة حل المعادلة: $|x-3|=3x-1$

تحقق من فهمك 3 أوجد مجموعة حل كلّ معادلة من المعادلات التالية:

(a) $|2x-1|=x+2$

(b) $|2x+5|=x+5$

صفوة معلمي الكويت

مثال 4

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

ⓐ $|4x+2|=1-2x$

ⓑ $|x+4|+2x+3=0$

تحقق من فهمك 4

أوجد مجموعة حل كلّ معادلة من المعادلات التالية:

a $|2\ell-3|=|4\ell-1|$

صفوة معلمي الكويت

b $|3x-1|+4x-13=0$

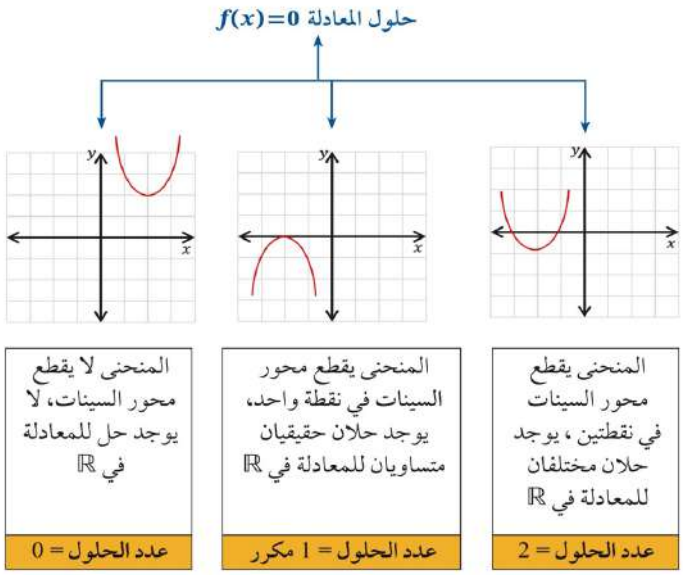
أتدرب وأحل المسائل

i $\frac{1}{2}|8x-2|=x+2$

صفوة معلمي الكويت

j $|x+4|+23=17$

* حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد (المعادلة التربيعية) بيانيًّا:



تذكر أن

1. الدالة الثابتة : $f(x)=c \ , c\in\mathbb{R}$ (دالة من الدرجة الصفرية)
وتمثيلها البياني يكون خط مستقيم أفقي يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات عند القيمة c .
2. الدالة الخطية: $a,b\in\mathbb{R} \quad ,a\neq 0 \quad f(x)=ax+b$
(دالة من الدرجة الأولى) وتمثيلها البياني على شكل خط مستقيم.
3. الدالة التربيعية: $a,b,c\in\mathbb{R} \quad ,a\neq 0 \quad f(x)=ax^2+bx+c$
(دالة من الدرجة الثانية) تمثل قطع مكافئ
مفتوحًا للأعلى إذا كانت $a>0$ ، ومفتوحًا للأسفل إذا كانت $a<0$

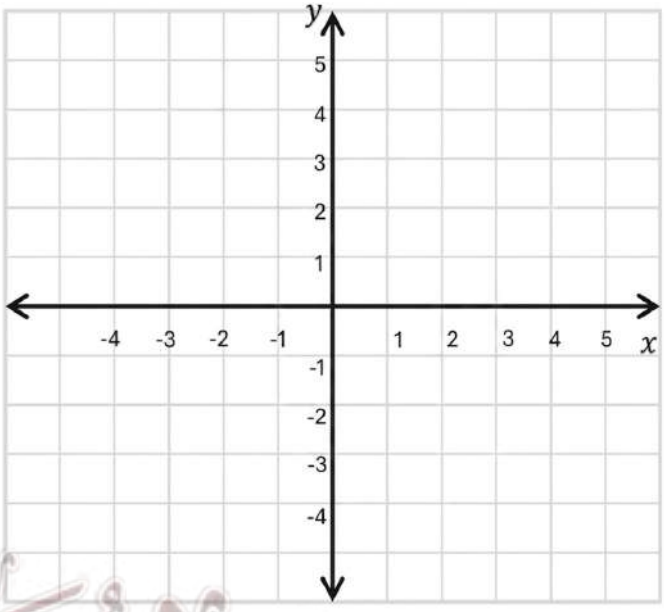
لاحظ أنّ

مجموعة الحل هي : الإحداثيات السينية لتقاطع المنحنى مع محور السينات.

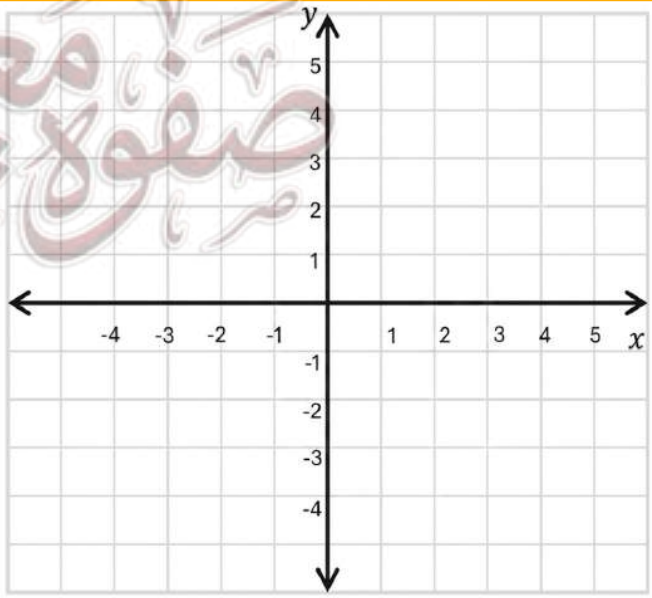
مثال 1

أوجد بيانيًّا مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في $\mathbb{R}$ مستعينًا بالفترة الموضحة:

(a) $x^2-2x-3=0 \quad ,[-2,4]$

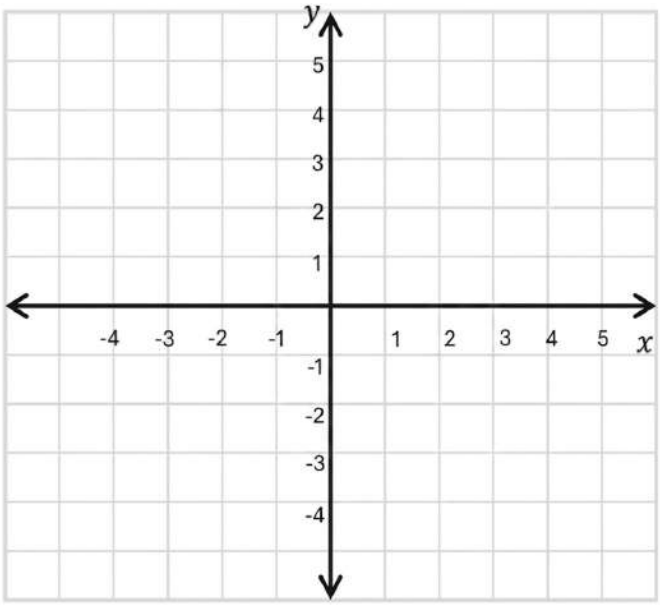


(b) $-x^2-4x-4=0 \ , [-4,0]$



صفوة معلمي الكويت

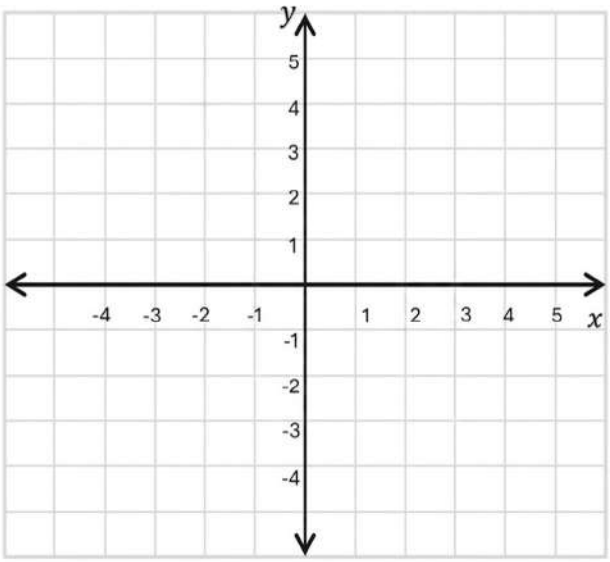
ⓒ $x^2+2=0$ $,[-2,2]$



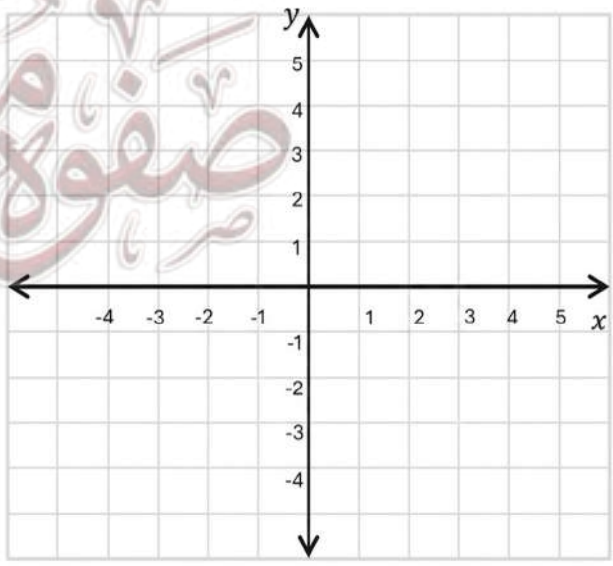
تحقق من فهمك 1

أوجد بيانيًّا مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في $\mathbb{R}$ مستعينًا بالفترة الموضحة :

a $x^2-6x+8=0$ $,[1,5]$

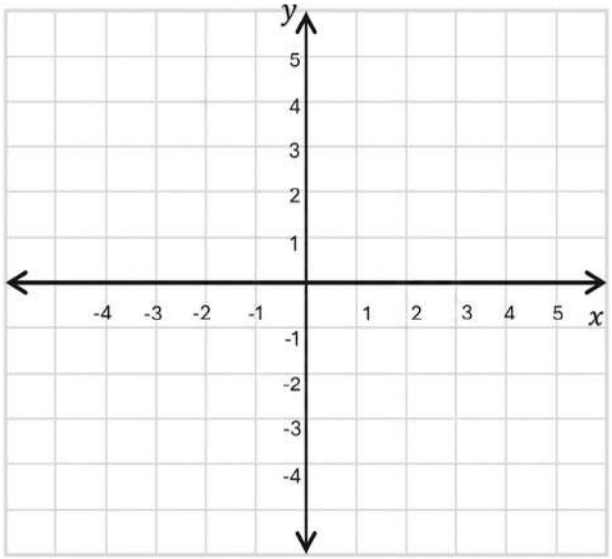


b $x^2+4x+4=0$ $,[-4,0]$



صفوة معلمي الكويت

c $x^2+4x+5=0$ $,[-4,0]$



حل المعادلة التربيعية جبريا

القانون العام لحل المعادلات التربيعية في متغير واحد وهو:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \; b^2-4ac \geq 0 \quad , \quad a,b,c \in \mathbb{R} \quad , \quad a \neq 0$$

يُسمى المقدار b^2-4ac مميّز المعادلة التربيعية ، ويرمز له بالرمز Δ ويقرأ (دلتا) ، والمميّز هو الذي يميّز نوع الجذرين ويحدد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة بدون حلها ، أي أن

$$\Delta = b^2-4ac$$

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
فإن للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان	فإن للمعادلة جذران حقيقيان متساويان	فإنه لا يوجد للمعادلة جذور حقيقية
عدد الحلول = 2	عدد الحلول = 1 (مكرر)	عدد الحلول = 0

خطوات حل المعادلة التربيعية بالقانون

1 . نضع المعادلة في الصورة العامة
2 . نوجد قيم a, b, c
3 . نوجد المميز Δ
4 . نحدد نوع الجذرين
5 . نوجد الجذرين باستخدام القانون

صفوة معلمي الكويت

تحقق من فهمك 2 حدّد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة من المعادلات التالية بدون حل المعادلة:

a $2x^2-7x-4=0$

b $x^2-10x+25=0$

e $x^2-x=0$

مثال 3 أوجد مجموعة حل المعادلات التالية باستخدام القانون :

a $x^2-x-5=0$

b $x^2-8=0$

صفوة معلمي الكويت

c $x^2 = x + 1$

d $x^2 - 6x + 9 = 0$

تحقق من فهمك 3

أوجد مجموعة حل المعادلات التالية باستخدام القانون :

a $x^2 - 4x + 2 = 0$

صفوة معلمي الكويت

b $4x^2-5x+1=0$

c $x^2-2x+1=0$

d $x^2-6x+8=0$

مثال 4 حل المعادلة التالية باستخدام القانون : $x^2-3x=0$

صفوة المعلمين الكويت

تحقق من فهمك 4 حل المعادلتين التاليتين باستخدام القانون .

a $x^2+7x+10=0$

b $2x^2-5x-52=0$

(3) أوجد حل كل معادلة من المعادلات التالية:

(a) $\frac{1}{2}x(x+6)=8$ (b) $2x(x+1)=2$

أتدرب وأحل المسائل

(3) أوجد حل كل معادلة من المعادلات التالية:

(a) $\frac{1}{2}x(x+6)=8$

صفوة معلمي الكويت

(b) $2x(x+1)=2$

تحقق من فهمك 5

a أوجد عددين زوجيين متتاليين مجموع مربعيهما 100

انتبه

إذا كان العدد هو x فإن :
- ضعف العدد = $2x$
- ثلاثة أمثال العدد = $3x$
- العدد الذي يليه= $x+1$
- مربع العدد = x^2
- عدد فردي فإن العدد الفردي الذي يليه هو $x+2$
- عدد زوجي فإن العدد الزوجي الذي يليه هو $x+2$

b مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار $3cm$ ومساحته $40cm^2$ أوجد بعدي المستطيل .

أتدرب وأحل المسائل

(4) ثلاثة أعداد موجبة متتالية مربع أكبرهم يساوي مجموع مربعي العددين الآخرين، أوجد هذه الأعداد.

صفوة معلمي الكويت

المعادلة التربيعية على صورة $ax^2+bx+c=0$

- مجموع جذريّ المعادلة التربيعية هو $\frac{-b}{a}$
- حاصل ضرب جذريّ المعادلة هو $\frac{c}{a}$

أولًا : إيجاد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين للمعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ بدون حلها

مثال 1

إذا كان حاصل ضرب جذرا المعادلة $2x^2-3x+c=0$ يساوي 1-. أوجد قيمة C .

تحقق من فهمك 1

إذا كان حاصل ضرب جذريّ المعادلة $3x^2+10x-c=0$ يساوي $\frac{-8}{3}$ أوجد قيمة c .

مثال 2

إذا كان مجموع جذريّ المعادلة: $2x^2+bx-5=0$ هو $\frac{3}{2}$ ، فأوجد قيمة b .

صفوة معلمي الكويت

تحقق من فهمك 2 إذا كان حاصل ضرب جذريّ المعادلة $ax^2-5x+2=0$ يساوي $\frac{3}{2}$ أوجد قيمة a ، ثم حل المعادلة.

مثال 3

إذا كان ℓ , m هما جذري المعادلة $2x^2-8x+5=0$ ، فأوجد القيم العددية لكل مما يلي:

ⓐ ℓ^2+m^2 ⓑ $\frac{1}{\ell}+\frac{1}{m}$ ⓒ $\ell-m$

انتبه

$$\ell-m=\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right|$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{(a.d+c.d)}{(b.d)}$$

صفوة معلمي الكويت

ثانيًا: إيجاد المعادلة التربيعية إذا عُلِم جذراها

إذا كان m , ℓ هما جذرا المعادلة التربيعية فإن المعادلة التربيعية تكون على الصورة:

$$x^2 - (\ell + m)\,x + (\ell \,.\, m) = 0$$

$(\ell + m)$ ← مجموع الجذرين

$(\ell \,.\, m)$ ← حاصل ضرب الجذرين

مثال 4

كون معادلة تربيعية في متغير واحد والتي جذراها 4 , 3- بطريقتين مختلفتين

تحقق من فهمك 4

أوجد المعادلة التربيعية التي جذراها معلومان في الحالات التالية :

(a) $3, 5$ (b) $4, \frac{-1}{3}$ (c) $2, -2$

صفوة معلمي الكويت

مثال 5 كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها:

a) $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$

b) $5\sqrt{3}$, $-5\sqrt{3}$

صفوة معلمي الكويت

تحقق من فهمك 5

كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها: $-3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$

ثالثاً: تكوينُ معادلةٍ تربيعيةٍ بمعلوميةِ معادلةٍ أُخرى

ملحوظة هامة: في المعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ إذا علمت أن $\ell+m$ هما جذرا المعادلة:

1 . عند $b=0$ فإن $\ell+m=0$ و الجذرين أحدهما نظير جمعيٌّ للآخر

2 . عند $c=a$ فإن $\ell.m=1$ والجذرين أحدهما نظير ضربيٌّ للآخر

مثال 6

إذا كان ℓ, m هما جذرا المعادلة التربيعية $2x^2-3x-1=0$ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $2\ell, 2m$

صفوة معلمي الكويت

تحقق من فهمك 6

إذا كان ℓ, m هما جذرا المعادلة التربيعية $2x^2+15x-8=0$

كون المعادلة التربيعية التي جذراها : $2\ell, 2m$

أتدرب وأحل المسائل

(7) إذا كان: ℓ, m هما جذرا المعادلة $x^2-4x+1=0$ فما قيمة؟

(a) $\frac{4}{\ell}, \frac{4}{m}$

(b) $\ell - m$

صفوة معلمي الكويت

1 - 5 حل متباينة من الدرجة الثانية

أولًا: حل المتباينة من الدرجة الثانية باستخدام التحليل

«خواص المتباينات في الأعداد الحقيقية» :

1 . عندما : $a.b\geq 0$ فإن : $a\geq 0\ ,b\geq 0$ or $a\leq 0\ ,b\leq 0$

2 . عندما : $a.b\leq 0$ فإن : $a\geq 0\ ,b\leq 0$ or $a\leq 0\ ,b\geq 0$

مثال 1 حَلَّ كُلاً منَ الْمَتباينَاتِ التّاليَةِ جبرياً وَمثِّل الحلَ علـي خَط الأَعداد :

(a) $x^2-2x-8\geq 0$

(b) $x^2-2x-8\leq 0$

صفوة معلمي الكويت

حَلَّ كُلاً منَ الْمَتباينَاتِ التّاليَةِ جبرياً وَمثُّل الحلَ علـي خَط الأَعداد :

ⓐ $x^2+x-12\leq 0$

ⓑ $x^2+4x-5\geq 0$

صفوة معلمي الكويت

ⓒ $x^2-x-6<0$

ⓓ $(x-3)(2x+5)<0$

صفوة معلمي الكويت

ⓔ $x^2-2x+1>0$

ⓕ $x^2+6x+9<0$

صفوة معلمي الكويت

ثانيًا: حل المتباينة من الدرجة الثانية بدراسة الإشارة

قاعدة هامة

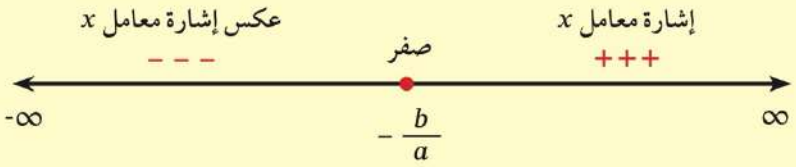
لدراسة إشارة $g(x)=ax+b \quad ,a\neq 0$ نتبع التالي :

1. نضع $g(x)=0 \Longleftarrow ax+b=0 \Longleftarrow x=-\frac{b}{a}$

2. نحدد العدد $x=-\frac{b}{a}$ على خط الأعداد

3. تكون إشارة $g(x)$: • مماثلة للإشارة a على يمين العدد $-\frac{b}{a}$

• ومخالفة للإشارة a على يسار العدد $-\frac{b}{a}$



مثال 2 ادرس إشارة كل من :

a $f(x)=2x-8$

b $g(x)=-3x+6$

صفوة معلمي الكويت

قاعدة هامة

لدراسة إشارة $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ نتبع التالي :

1. نوجد المعادلة المناظرة: $f(x)=0$
2. نوجد قيم x التي تجعل $f(x)=0$ إما بالتحليل أو باستخدام المميز عندما يصعب التحليل
3. لدينا ثلاثة احتمالات:

للمعادلة $f(x)=0$ حلان حقيقيان مختلفان $x_1<x_2$	$\Delta>0$	تبع إشارة a ، تخالف إشارة a ، تبع إشارة a على $-\infty$ ، x_1 ، x_2 ، ∞
للمعادلة $f(x)=0$ حلان حقيقيان متساويان $x_1=x_2$	$\Delta=0$	تبع إشارة a ، تبع إشارة a على $-\infty$ ، $x_1=x_2$ ، ∞
ليس للمعادلة $f(x)=0$ جذور حقيقية	$\Delta<0$	تبع إشارة a على $-\infty$ ، ∞

حلِّ كلًّا من المتباينات التالية :

ⓐ $x^2-2x-8\leq 0$

ⓑ $x^2-x\leq 5$

صفوة معلمي الكويت

ⓒ $x^2-10x+25>0$

ⓓ $-3x^2+4x-2\geq 0$

صفوة معلمي الكويت

حِل كل من المتباينات التالية جبريًا ومثل الحل على خط الأعداد :

(a) $2x^2+3x-2<0$

(b) $-x^2-x+6>0$

(c) $x^2-6x+9\geq 0$

صفوة معلمي الكويت

حالة خاصة : حل المتباينة من الدرجة الثانية باستخدام القيمة المطلقة

خاصية

إذا كان a , b عددين حقيقين موجبين فإن: $a \le b \iff a^2 \le b^2$

لاحظ أنّ

مجموعة الحل	المتباينة
$\varnothing$	$x^2<0$
$\{0\}$	$x^2\le 0$
$\mathbb{R}$	$x^2\ge 0$
$\mathbb{R}-\{0\}$	$x^2>0$

بصفة عامة : إذا كان a,b,c أعداداً حقيقية بحيث $a\neq 0, c<0$ فإن :

1 . مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2<c$ هي المجموعة الخالية $\varnothing$

2 . مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2>c$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

3 . مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2<0$ هي $\varnothing$

مجموعة حل المتباينة $(ax+b)^2>0$ هي $\mathbb{R}-\left\{\frac{-b}{a}\right\}$

تذكر!

1. $\sqrt{x^2}=|x|$
2. $|x|\le a \ , \ a>0$
   $\therefore -a\le x\le a$
3. $|x|\ge a \ , \ a>0$
   $\therefore x\ge a \text{ or } x\le -a$

مثال 4 أوجد مجموعة حل المتباينة ومثل الحل على خط الأعداد :

(a) $2x^2+5\ge 23$

(b) $(5x+7)^2+3<2$

صفوة معلمي الكويت

تحقق من فهمك 4 أوجد مجموعة حل المتباينة ومثِّل الحل على خط الأعداد :

(a) $3x^2-4\leq 8$

(b) $(4x-3)^2+2>-3$

(c) $(2-3x)^2<1$

صفوة معلمي الكويت

(d) $(2x+1)^2-3\geq 1$

أتدرب وأحل المسائل

أوْجِد مجموعة حل كلّ من المتباينات التالية:

(e) $(3x-7)(2x+9)\leq 0$

صفوة معلمي الكويت

النسبة : هي مقارنة بين كميتين من النوع نفسه ولهما نفس وحدة القياس ويمكن التعبير عن النسبة بصورة a إلى b ، وتكتب $a:b$ أو $\frac{a}{b}$

التناسب : هو تساوي نسبتين أو أكثر.

إذا كان : $a,b,c,d \in \mathbb{R}^*$

وكانت $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

فإن a,b,c,d تسمى أعدادًا متناسبة

إذا كان a,b,c,d أعداد متناسبة فإن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ حيث $a,b,c,d \in R^*$

خاصية (1): « الضرب التقاطعي »

إذا كان : $a,b,c,d \in \mathbb{R}^*$ وكان $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

فإن : $a.d = c.b$

أي إن : حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين وتسمى هذه الخاصة «قاعدة الضرب التقاطعي»

مثال 1

إذا كانت : $2, x, 4, 6$ أعدادًا متناسبة ، أوجد قيمة: x

تحقق من فهمك 2

أوجد الثالث المتناسب للأعداد : $4, 7, \ldots\ldots, 35$

صفوف معلمي الكويت

تحقق من فهمك 3

أوجد العدد الذي إذا طُرح من حدّي النسبة $\frac{5}{6}$ أصبحت $\frac{9}{4}$

تحقق من فهمك 4 أوجد قيمة x إذا كان : $(2x+3):(3x-5)=3:4$

خاصية (2): "عكس الخاصية 1"

إذا كان : $a,b,c,d \in \mathbb{R}^*$ وكان $a.d=b.c$

فإن : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

تحقق من فهمك 5 إذا كان : $2a=7b$ ، فأوجد $\frac{a}{b}$

خاصية (3): إذا كان : $a,b,c,d \in \mathbb{R}^*$ وكان $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

فإن :

خواص التناسب

(1) $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

(2) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

(3) $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$

تحقق من فهمك 6

أوجد $\frac{x}{y}$ في كل مما يلي حيث : $x\neq 0$, $y\neq 0$

(a) $5x=7y$

(b) $\frac{5x-2y}{5x+2y}=\frac{1}{4}$

صفوة معلمي الكويت

خاصية (4): إذا كان : $a,b,c,d \in \mathbb{R}^*$ وكان $k \in \mathbb{R}^*$

حيث k عدد ثابت $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

فإن $a = bk,\ c = dk$

مثال 7

إذا كان : $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ أوجد $\frac{2a+5b}{3b+2a}$

تحقق من فهمك 7

إذا كان : $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ ، فأوجد القيمة العددية للمقدار : $\frac{2x+3y}{5x+2y}$

خاصية (4): إذا كان : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\ell}{s} = \ldots$ وكانت $k_1,k_2,k_3,\ldots \in \mathbb{R}^*$

فإن: إحدى النسب $= \frac{ak_1+ck_2+\ell k_3+\ldots}{bk_1+dk_2+sk_3+\ldots}$

مثال 8

إذا كانت الأعداد $5,6,3$ متناسبة مع a,b,c ، أوجد قيمة المقدار : $\frac{a+2b+c}{3a+b+c}$

تحقق من فهمك 8 إذا كان : $\frac{a}{2}=\frac{b}{7}=\frac{c}{5}$ ، أوجد : $\frac{a+2b}{3b+c}$ (بطريقتين مختلفتين).

التناسب المتسلسل (الهندسي)

تعريف:

الكميات : a,b,c,d في تناسب متسلسل إذا وفقط إذا كان :

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \quad \text{أو} \quad b^2=ac$$

ويسمى : a الأول المتناسب ، b الوسط المتناسب ، c الثالث المتناسب

حيث : $b=\pm\sqrt{a.c}$

ملحوظة : a,c إما أن يكونا موجبين معًا أو سالبين معًا

$$\text{الأول المتناسب} = \frac{\text{مربع الوسط المتناسب}}{\text{الثالث المتناسب}}$$

$$\text{الثالث المتناسب} = \frac{\text{مربع الوسط المتناسب}}{\text{الأول المتناسب}}$$

تحقق من فهمك 9 أوجد الوسط المتناسب بين العددين -27 , -3

صفوة تعلم الكويت

مثال 10

إذا كان : a, b, c في تناسب متسلسل أثبت أن : $\frac{2a+3b}{2b+3c} = \frac{a}{b}$

تحقق من فهمك 10

إذا كان : a, b, c في تناسب متسلسل أثبت أن : $\frac{a+3b}{b+3c} = \frac{a-2b}{b-2c}$

حيث المقام $\neq$ صفر

صفوة معلمي الكويت

مثال 11

إذا كان : $\frac{2a+3b}{2b+3a} = \frac{2+2b}{b+2c}$ أثبت أن : b وسط متناسب بين a, c

---

تحقق من فهمك 11

إذا كان : $\frac{a+b}{b+c} = \frac{a}{b}$ أثبت أن b وسط بين a , c

صفوة معلمي الكويت

2-2 تشابه المضلعات

تعميم (1) : يقال لمضلعين (لهما العدد نفسه من الأضلاع) انهما متشابهان إذا تحقق الشرطان التاليان معا :

1. قياسات زواياهما المتناظرة متساوية .
2. أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة .

«والعكس صحيح»

تعميم (2) :
المضلعان المتطابقان متشابهان.

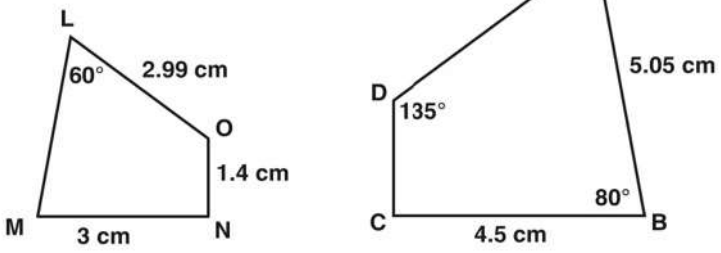
تعميم (3) : إذا كان المضلع $A\sim B, B\sim C$: فإن : $A\sim C$

تحقق من فهمك 1 في الشكل المقابل :

المضلعان $ABCD$, $LMNO$ متشابهان

أوجد قياسات الزوايا المجهولة وأطوال

الأضلاع المجهولة في كلًا من المضلعين



نظرية :

إذا كانت نسبة التشابه لأي شكلين متشابهين هي $\frac{a}{b}$ فإن :

1 . النسبة بين محيطي الشكلين $= \frac{a}{b}$ و هي نسبة التشابه

2 . النسبة بين مساحتي الشكلين $= \left(\frac{a}{b}\right)^2$ و هي مربع نسبة التشابه

لاحظ أن

إذا كان المضلع A يشابه المضلع B (كانت k نسبة تشابه المضلع A : المضلع B):

(1) $k>1$

فإن المضلع A هو تكبير للمضلع B وتسمى K معامل التكبير

(2) $0<k<1$

فإن المضلع A هو تصغير للمضلع B وتسمى K معامل التصغير

(3) $k=1$

فإن المضلع A يطابق المضلع B

مثال 2 إذا كانت نسبة التشابه لمضلعين متشابهين تساوي $\frac{5}{6}$ ، وكان محيط المضلع الأصغر يساوي $14.5\ cm$ ، أوجد محيط المضلع الأكبر .

تحقق من فهمك 2

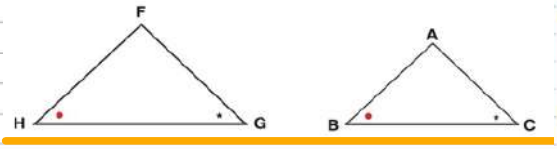
لدينا شكلان رباعيان متشابهان ونسبة التشابه بينهما $\frac{5}{4}$ ، فإذا كانت مساحة الشكل الرباعي الأكبر هى $30\ cm^2$ فما مساحة الشكل الرباعى الأصغر ؟

أتدرب وأحل المسائل

(3) مستطيلان متشابهان. بُعدا الأول $8\ cm$, $12\ cm$ ، ومحيط الثاني $200\ cm$.

- أوجد نسبة التشابه .
- أوجد مساحة المستطيل الثاني .

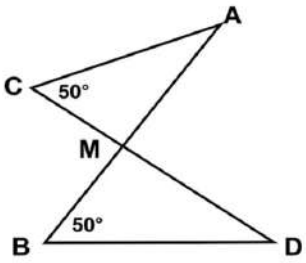
صفوة معلمي الكويت



نظرية (1) :

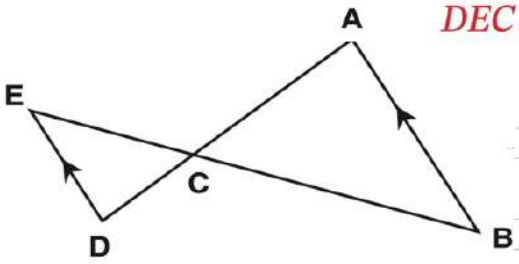
يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثين مع زاويتين في المثلث الآخر .

مثال 1



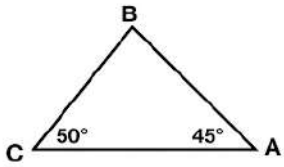
في الشكل المقابل : $m(\hat{C})=m(\hat{B})=50°$ أثبت أن: $DBM \sim \Delta ACM\Delta$

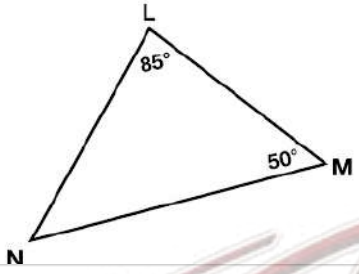
تحقق من فهمك 1



في الشكل المقابل : $\overline{DE}//\overline{BA}$ أثبت أن المثلثين $DEC\ ,\ ABC$ متشابهان ثم اكتب عبارة التشابه

مثال 2





في الشكل المقابل :

$m(\hat{A})=45°\ ,m(\hat{C})=50°$

$m(\hat{L})=85°\ ,m(\hat{M})=50°$

أثبت أن: $\Delta ABC \sim \Delta NLM$

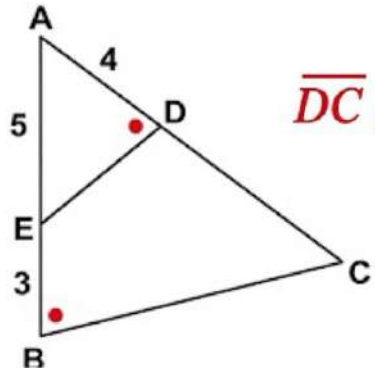
صفوة معلمي الكويت

تحقق من فهمك 2

المثلث ABC قائم الزاوية في A فيه $m(\hat{B}) = 55°$ ، والمثلث NLM قائم الزاوية في L فيه $m(\hat{M}) = 35°$ ، أثبت أن المثلثين متشابهان .

مثال 3

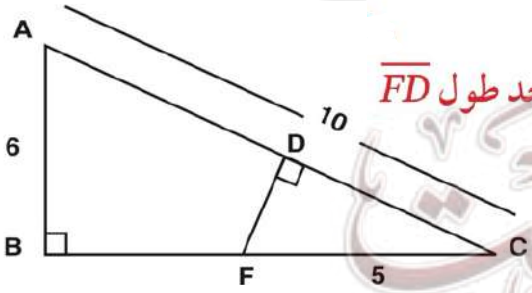
في الشكل المقابل :



1. أثبت أن: $\Delta AEB \sim \Delta ACB$ **2. أوجد طول** $\overline{DC}$

تحقق من فهمك 3

في الشكل المقابل :



(1) أثبت أن المثلثين FDC , ABC متشابهان (2) أوجد طول $\overline{FD}$

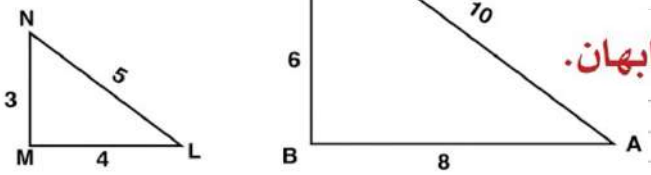
صفوة معلمي الكويت

نظرية (2) :

يتشابه المثلثان إذا تناسب أطوال أضلاعهما المتناظرة .

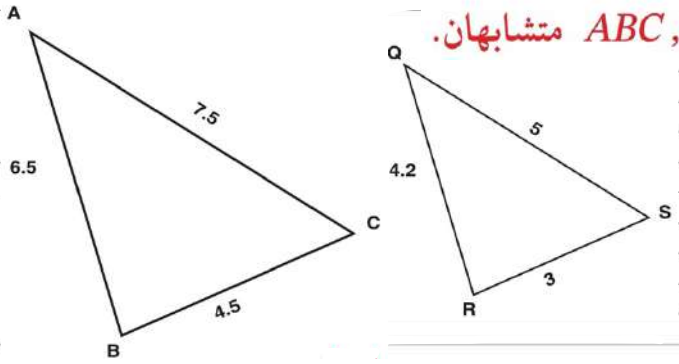
مثال 4

في الشكل المقابل : أثبت أن المثلثين ABC, LMN متشابهان.



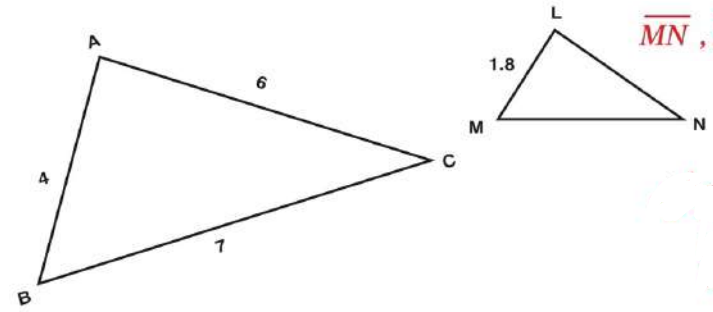
تحقق من فهمك 4

a) في الشكل المقابل : أثبت أن المثلثين ABC, QRS متشابهان.



صفوة معلمي الكويت

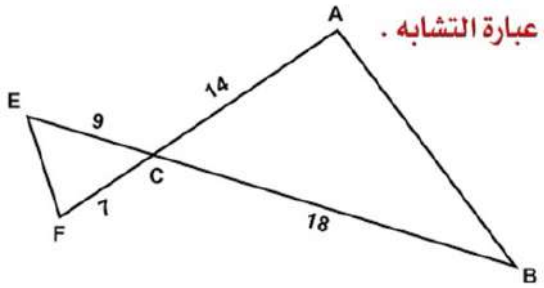
b في الشكل المقابل : المثلثان LMN, ABC متشابهان. أوجد طول كل من $\overline{LN}$, $\overline{MN}$



نظرية (3) :

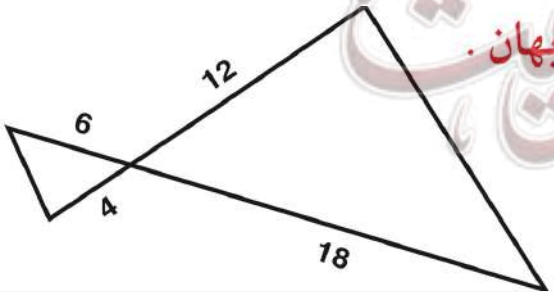
يتشابه المثلثان إذا طابقَتْ زاويةٌ في أحدهما زاويةٌ في المُثَلَّثِ الآخرِ، وتناسَبَ طولا الضِّلْعين المحدّدين لِهاتَينِ الزَّاويتينِ.

مثال 5 في الشكل المقابل : أثبت أن المثلثين ABC, FEC متشابهان. ثم اكتب عبارة التشابه .



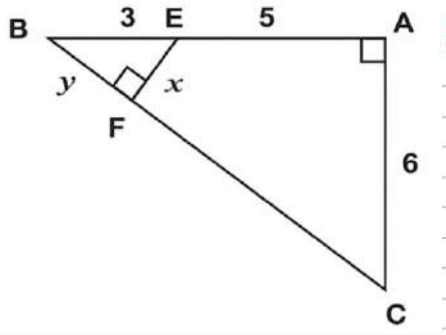
صفوة المعالي الكويت

تحقق من فهمك 5 في الشكل المقابل : أثبت أن المثلثين متشابهان .



مثال 6

في الشكل المقابل: أثبت أن المثلثين BAC , BFE متشابهان. ثم أوجد كلا من x, y

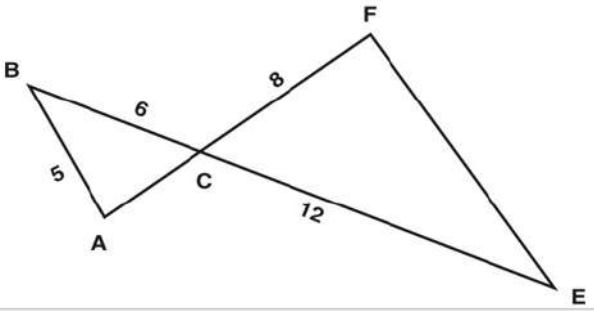


تحقق من فهمك 6

في الشكل المرسوم :

a) أثبت أن $\Delta FEC \sim \Delta ABC$

b) أوجد $\overline{EF}$

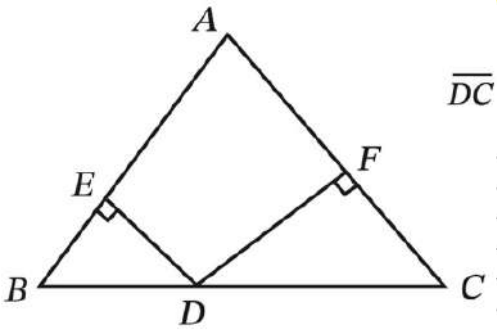


صفوة معلمي الكويت

أتدرب وأحل المسائل

(2) في الشكل المرسوم ABC مثلث فيه $AB = AC$, $BC = 48cm$, $\frac{ED}{DF} = \frac{5}{7}$

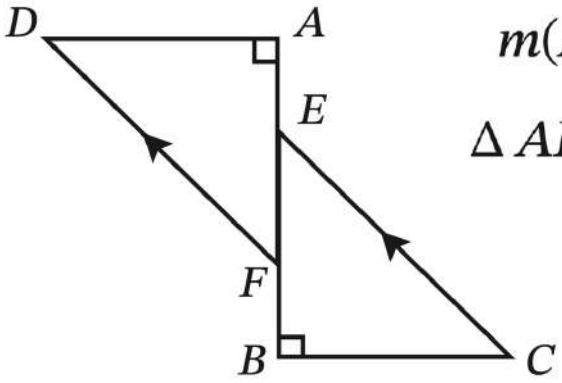
أوجد طول $\overline{DC}$



(3) في الشكل المرسوم $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = 90°$

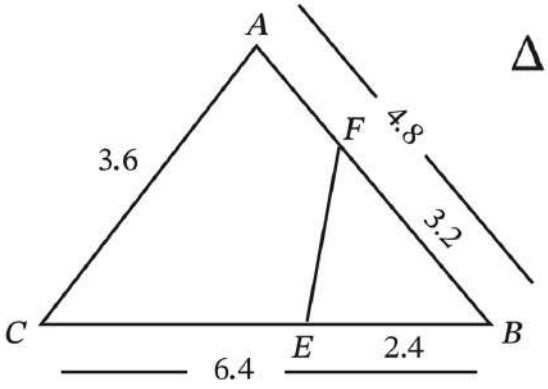
$\overline{DF} // \overline{EC}$

أثبت أن $\Delta ADF \sim \Delta BCE$



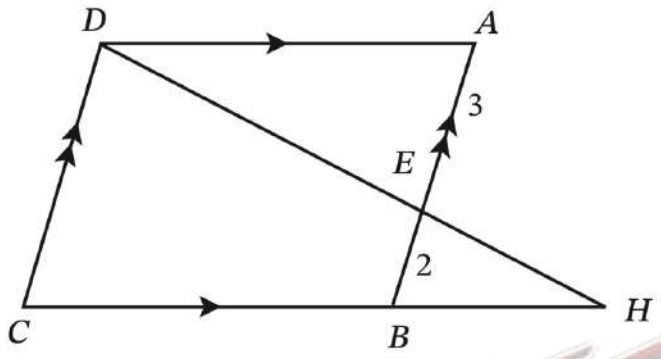
صفوة معلمي الكويت

(5) في الشكل المرسوم أثبت أن $\Delta BCA \sim \Delta BDE$



(6) في الشكل المقابل: $ABCD$ متوازي أضلاع

$\overrightarrow{CB} \cap \overrightarrow{DE} = \{H\}$, $\frac{3}{2} = \frac{AE}{EB}$, $E \in (\overline{AB})$



(a) أثبت أن $\Delta EAD \sim \Delta DCH$

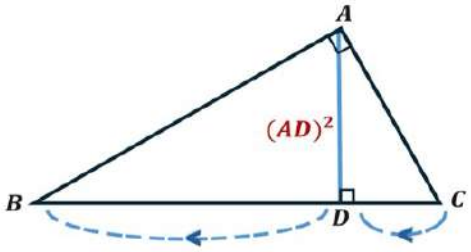
(B) أوجد : $\frac{\text{مساحة } \Delta DCH}{\text{مساحة } \Delta EAD}$

صفوة معلمي الكويت

2-4 التشابه في المثلثات قائمة الزاوية

نظرية :

العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يقسم ا لمثلث إلى مثلثين متشابهين وكل منهما يشابه المثلث الأصلي.



نتيجة (1) : «نظرية إقليدس»

مربع طول العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي ناتج ضرب طولي القطعتين المستقيمين اللتين ينقسم إليهما الوتر بهذا العمود.

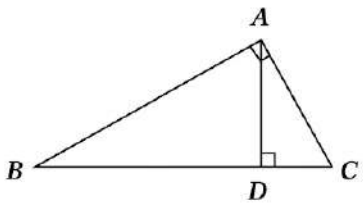
أي أن في المثلث ABC القائم الزاوية في (A) إذا كان $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ فإن :

$$(AD)^2=DC.BD$$

انتبه

نتيجة (2) : «نظرية إقليدس»

في المثلث القائم ABC إذا كان $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ فإن :



1. $(AB)^2=BD.BC$
2. $(AC)^2=CD.CB$
3. $(AB).(AC)=(AD).(BC)$

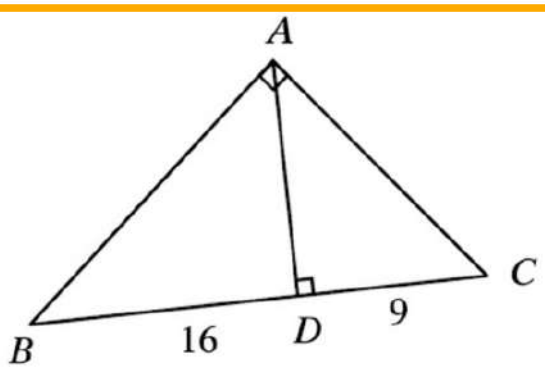
مثال 1

في الشكل المرسوم :

ABC مثلث قائم الزاوية في A ،

إذا كان $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ،

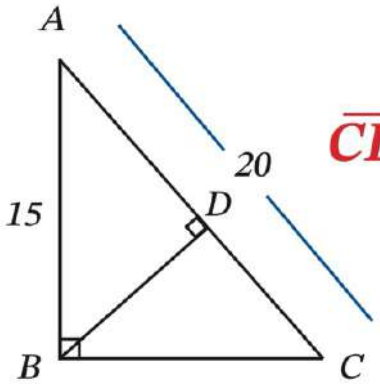
أوجد طول كلّ من : $\overline{AD}$ ، $\overline{AC}$



صفوة معلمي الكويت

تحقق من فهمك 1

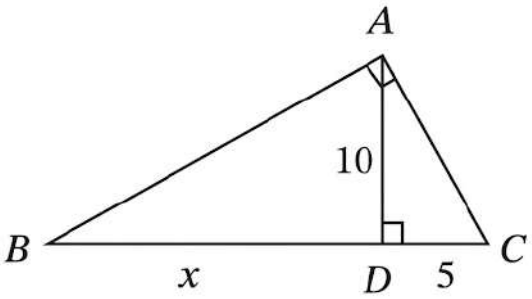
في الشكل المرسوم :



a أوجد طول $\overline{BC}$ b أوجد طول $\overline{CD}$

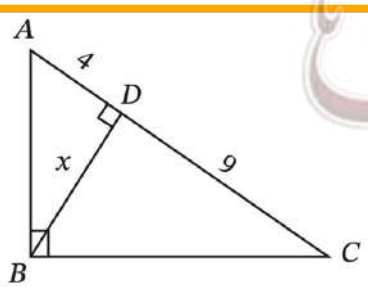
مثال 2

في الشكل المرسوم : أوجد قيمة x



تحقق من فهمك 2

في الشكل المرسوم : أوجد قيمة x

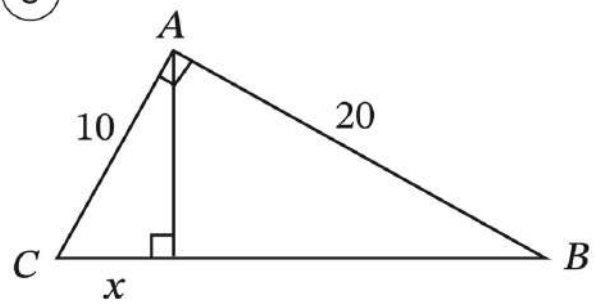


صفوة معلمي الكويت

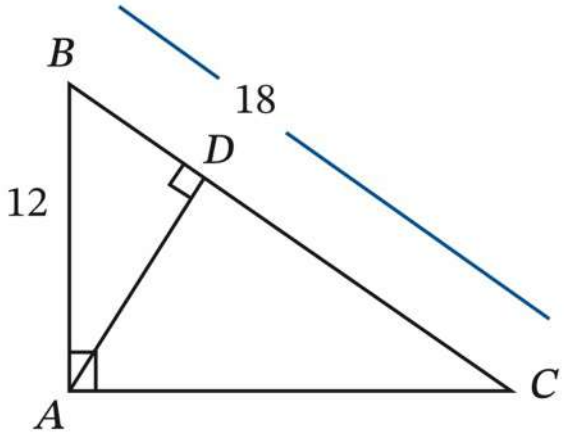
أتدرب وأحل المسائل

(1) أوجد قيمة x

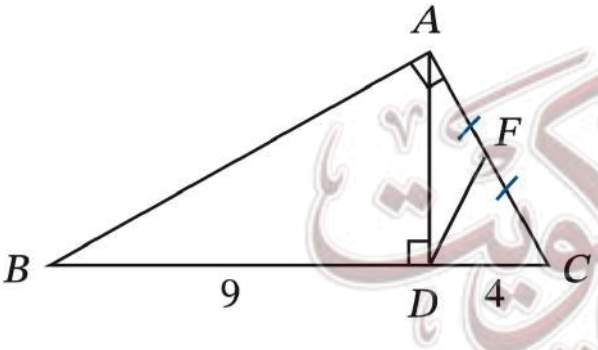
ⓒ



(2) في الشكل المقابل : أوجد طول $\overline{DC}$



(3) في الشكل المقابل : أوجد قيمة $\overline{DF}$



صفوة معلمي الكويت

نظرية (1) : « نظرية المستقيم الموازي » Parallel Line Theory

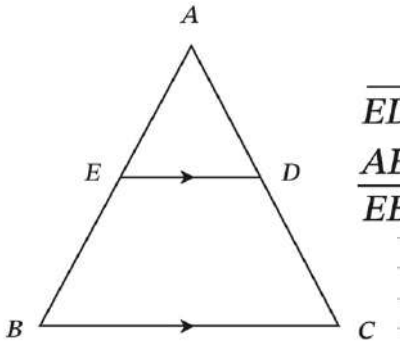
إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين ، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة .

أي أن في المثلث ABC

$\overline{ED} // \overline{BC}$

فإن :

$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$

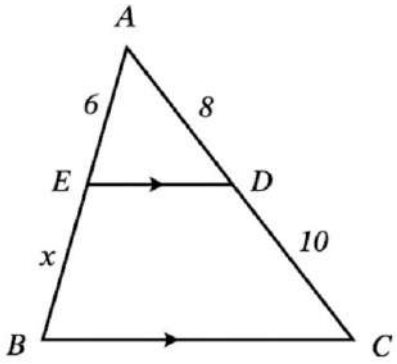


عكس النظرية صحيح

أي أنه إذا كان : $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$ فإن : $\overline{ED} // \overline{BC}$

مثال 1

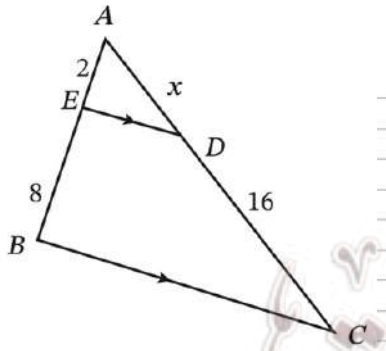
في الشكل المقابل : أوجد قيمة x



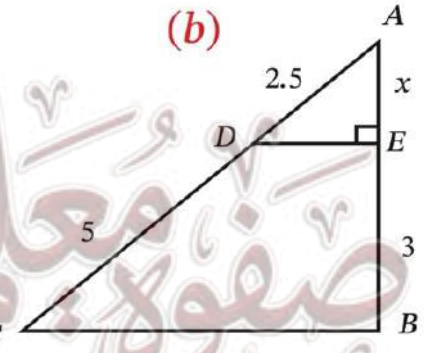
تحقق من فهمك 1

في الأشكال التالية : أوجد قيمة x

(a)



(b)



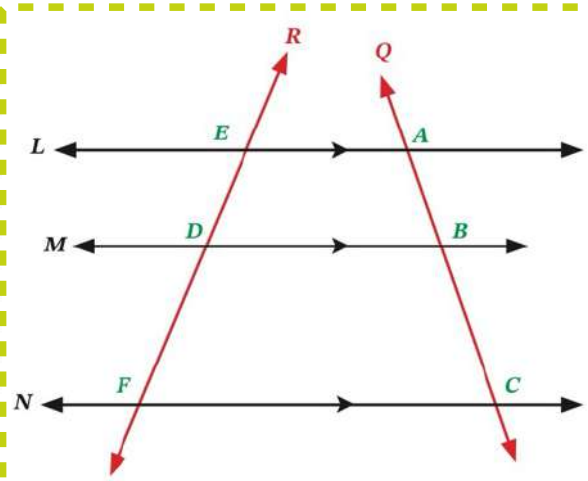
صفوة معلمي الكويت

نظرية (2) :
« نظرية طاليس » Thales Theory

نظرية (2) : « نظرية طاليس » Thales Theory

إذا قطع مستقيمان ثلاث مستقيمات متوازية أو أكثر فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر .

● عكس نظرية طاليس ليس بالضرورة صحيح



أي أن

إذا كان $\overleftrightarrow{N} // \overleftrightarrow{M} // \overleftrightarrow{L}$

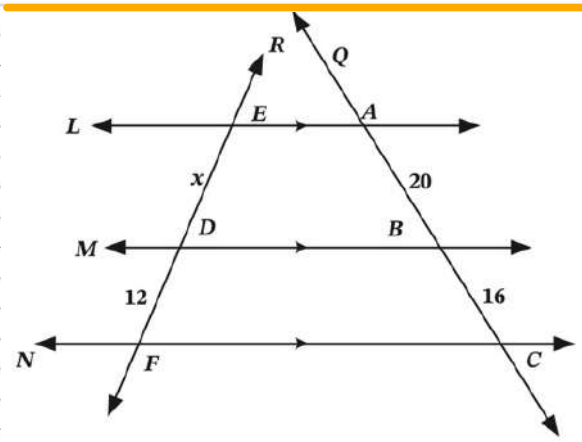
$\overleftrightarrow{Q}, \overleftrightarrow{R},$ تقطع كلًا من

$\overleftrightarrow{L}, \overleftrightarrow{M}, \overleftrightarrow{N}$

فإن : $\frac{ED}{DF} = \frac{AB}{BC}$

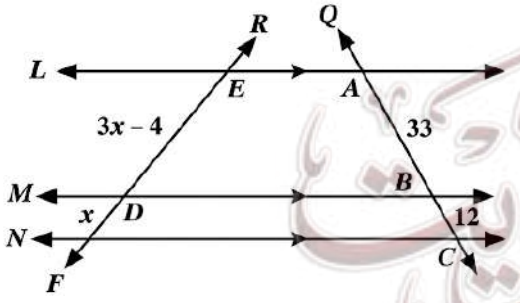
تحقق من فهمك 2

في الأشكال المقابل : أوجد قيمة x



مثال 3

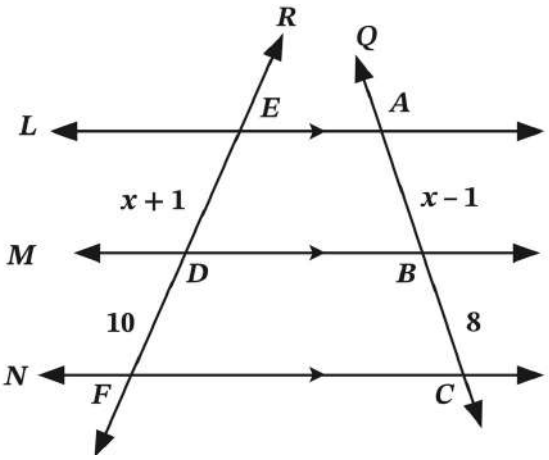
في الشكل المقابل : أوجد قيمة x



صفوة معلمي الكويت

تحقق من فهمك 3

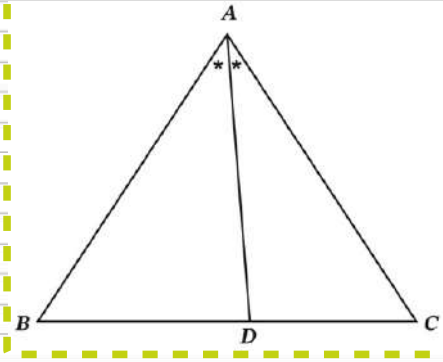
في الأشكال المرسوم : أوجد قيمة x



نظرية (3) : « نظرية منصف الزاوية في مثلث»
Angle Bisector Theoremina Triangle

نظرية (3) : « نظرية منصف الزاوية في مثلث »

إذا نَصّفَتْ زاوية رأس مثلث الداخلة أو الزاوية الخارجة عند هذا الرأس، قسم المُنصّف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليهما يساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث .



أي أن

إذا كان $\overrightarrow{AD}$ مُنَصفْ $(\hat{A})$

فإن : $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

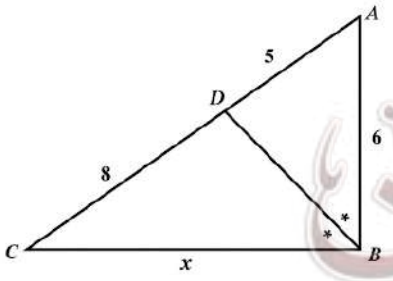
أو: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$

التركيز
يحوّل الحلم لحقيقة

مثال 4

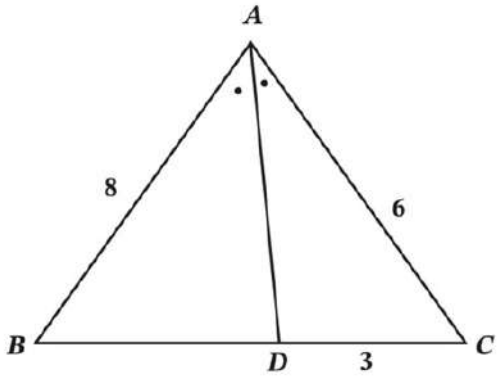
أوجد قيمة x في الشكل المبين حيث

$\overline{BD}$ يُنَصّفْ $A\hat{B}C$



صفوة معلمي الكويت

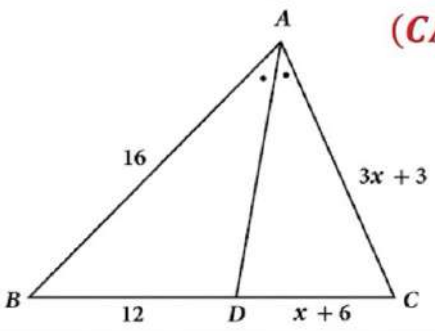
تحقق من فهمك 4



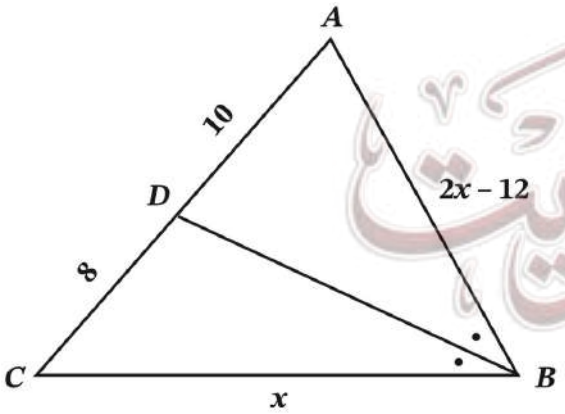
المثلث ABC فيه $AC = 6$ ،
$\overline{AD}$, $AB=8$ يُنَصّف $(B\hat{A}C)$
ويقطع $\overline{BC}$ في D إذا كان $BD = 3$
أوجد CD

مثال 5

أوجد قيمة x في الشكل المبين حيث $\overrightarrow{AD}$ يُنَصّفْ $(C\hat{A}B)$



تحقق من فهمك 5



المثلث ABC فيه $AD = 10$ ، $DC = 8$
$\overline{BD}$ يُنَصّف الزاوية $(A\hat{B}C)$ ويقطع $\overline{AC}$
في D ، أوجد x

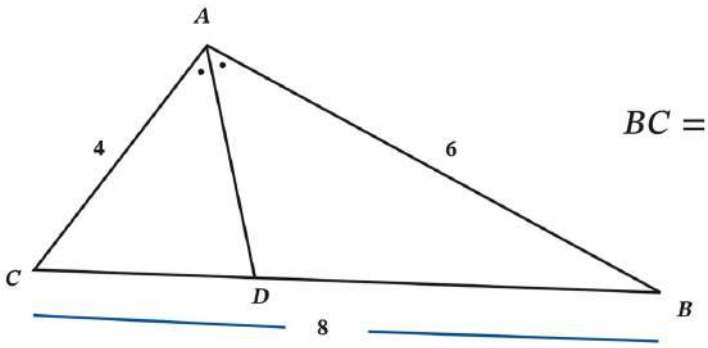
صفوة معلمي الكويت

أتدرب وأحل المسائل

(2) في المثلث ABC ، $\overline{AD}$ نَصّفْ A

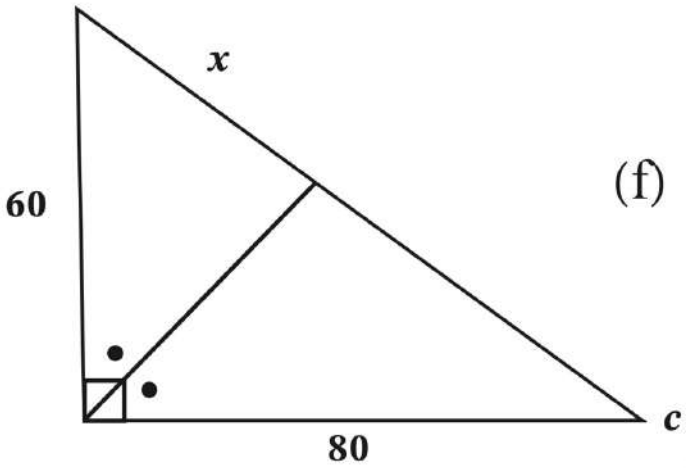
إذا كان $AB = 6$ ، $AC = 4$ ، $BC = 8$

فأوجد DB , DC



أوجد قيمة x :

(f)



صفوة معلمي الكويت

صفوة معلمي الكويت