



# الرياضيات

الصف التاسع

الفصل الدراسي الثاني - القسم الثاني





# الرياضيات

الصف التاسع

الفصل الدراسي الثاني - القسم الثاني

تأليف

أ. دلال مبارك فلاح الحجرف (رئيسًا)

أ. نوره عبد الله أبورقبة العتيبي

أ. ساره زايد شينان العجمي

أ. وسميه بادي هادي الرشيدي

أ. عصام عبد الهادي السيد حسن

أ. عفاف عبد العزيز يعقوب الصانع

الطبعة الأولى

١٤٤٧ هـ

٢٠٢٥ - ٢٠٢٦ م

حقوق التأليف والطبع والنشر محفوظة لوزارة التربية - الإدارة العامة للتوجيه والبحوث والمناهج

إدارة البحوث التربوية والمناهج

معلمي الكويت  
صفوة

الطبعة الأولى: ٢٠٢٥ / ٢٠٢٦ م

المراجعة العلمية



أ. سمير عبدالله أحمد مرسي



ذات السلاسل - الكويت

أودع بمكتبة الوزارة تحت رقم (٩٢) بتاريخ ١٦/١/٢٠٢٦ م

صفوة معلمي الكويت

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ







حضرة صاحب السمو الشيخ مشعل بن أحمد الجابر الصباح  
أمير دولة الكويت

H.H. Sheikh Meshal AL-Ahmad AL-Jaber AL-Sabah  
Amir Of The State Of Kuwait





صفوة معلمي الكويت



شمو الشيخ صباح خالد الحمد الصباح  
ولي عهد دولة الكويت

H. H. Sheikh Sabah Khaled Al-Hamad Al-Sabah  
Crown Prince Of The State Of Kuwait





الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيد المرسلين محمد بن عبدالله وصحبه أجمعين.

إنطلاقاً من التوجيهات السامية لحضرة صاحب السمو أمير البلاد الشيخ مشعل الأحمد الجابر الصباح ، حفظه الله ورعاه ، بضرورة الإسراع في تنفيذ كافة مشاريع الدولة التنموية ومن ضمنها على وجه الخصوص المشاريع التعليمية ، وتماشياً مع رؤية الكويت ٢٠٣٥ والتي تنادي بكويت جديدة فقد شرعت وزارة التربية في تطوير مناهجها التعليمية مستندة ، في ذلك إلى أهمية رأس المال البشري كعنصر أساسي في تنمية الوطن ورفعته.

ولأن المناهج التعليمية هي قاعدة الهرم التعليمي إلى جانب المعلم والمتعلم ، وتعدّ أحد الروافد المهمة في خلق جيل متعلم وواع ، قادر على المشاركة في بناء المجتمع ، ولأنّ المناهج عبارة عن كمّ الخبرات التربوية والتعليمية التي تُقدّم للمتعلم ، فقد أولت الوزارة أهمية بتطوير المناهج حسب المعايير العلمية وذلك لتحقيق نقلة نوعية في الشكل والمضمون ، وإيماناً بأهميتها وإنطلاقاً من أنّها ذات صفة عالمية مع الأخذ في الاعتبار خصوصية المجتمع الكويتي وبيئته المحلية ، ملتزمة بأن تصبّ جميعها في تعزيز الهوية الوطنية وبعقلية منفتحة على الآخرين مع احترام حقوق الإنسان وحرّياته الأساسية والتمسك بمبادئ الإسلام والتسامح من جهة ، وغزيرة بمهارات القرن الواحد والعشرين لتعزيز المفاهيم الرياضية لجميع المتعلمين من جهة أخرى لكي يكونوا في طليعة المنافسين في المسابقات العلمية والدولية ، وذلك عبر بناء الخطط التعليمية المعتمدة من قطاع المناهج مؤكّدين على أهمية التكامل بين الجوانب العلمية والتطبيقية حتى تكون ذات طبيعة وظيفية مرتبطة بحياة المتعلم ، متضمّنة في الكثير من بنودها التمارين ذات المستويات العليا في التفكير والفهم والتحليل والتركيب .

وقد تمّت صياغة وترتيب الكتاب المدرسي في منهجية خاصة ذات هيكل ومجالات معينة تتمحور حول العدّ والجبر والهندسة والقياس ، وأخيراً الإحصاء والاحتمال .

فقد تمّ بناء الكتاب وفق منهجية تربوية حديثة تراعي التدرّج المنطقي في المفاهيم والمهارات لبناء معرفة رياضية تراكمية تراعي الفروق الفردية بين المتعلمين وتعزّز التفكير الرياضي العميق .

كما ويحوي الكتاب على وحدات تعليمية وموضوع محوري يتمّ إبرازه في مقدمة كلّ وحدة ، تساعد على تنمية الفهم البنائي وربط المفاهيم الجديدة مع سياقات من واقع الحياة .



وحرصنا على إدراج التمارين المتنوعة مع نهاية كل درس ، والتي تنوّعت بين الأسئلة المباشرة والمسائل الحياتية وأسئلة مهارات تفكير عليا ، مثل التبرير والنقد وتعدّد طرق الحلّ والاستنتاج .

تنتهي كل وحدة بقسم خاصّ للتقويم لقياس مدى تحقيق الأهداف متضمّنة أسئلة شاملة للمفاهيم والمهارات التي تمّ تناولها ، حتّى تكون أداة تمكّنا من تحديد الاحتياجات التعليمية لاحقاً .

مما سبق من معطيات وغيرها من الجوانب التعليمية والتربوية ، فقد تمّت صياغة وإعداد كتب الرياضيات لتحقق نقلة نوعية ذات جودة عالية تلبي الطموحات المطلوبة وتكون نافذة واسعة تُطلّ على آمالنا وتطلّعاتنا في المستقبل لما نهدف إليه من تأسيس فكر رياضي في عقول أجيالنا القادمة تنهض بها أمّتنا وتضعها في مكانها المناسب في الصفوف المتقدّمة ، ويُشار إليها بالبنان مع كلّ محفل.



# المحتويات

## الجزء الأول :

الأعداد الحقيقية والعمليات عليها	الوحدة التعليمية الأولى :
التحليل والمعادلات	الوحدة التعليمية الثانية :
الحدوديات النسبية - الهندسة الإحداثية	الوحدة التعليمية الثالثة :
هندسة التحويلات - الإحصاء والاحتمال	الوحدة التعليمية الرابعة :

## الجزء الثاني :

العلاقات والدوال	الوحدة التعليمية الخامسة :
المعادلات الخطية والمتباينات الخطية	الوحدة التعليمية السادسة :
هندسة المثلث	الوحدة التعليمية السابعة :
النسبة المئوية - الهندسة والقياس	الوحدة التعليمية الثامنة :



# الوحدة التعليمية السابعة

## هندسة المثلث

رقم الصفحة	المحتوى
١٣٦	معايير المنهج ومؤشرات الأداء للوحدة التعليمية السابعة
١٣٧	مخطّط تنظيمي للوحدة التعليمية السابعة
١٣٨	هل أنت مستعدّ؟ للوحدة التعليمية السابعة
١٤٠	(٧ - ١) القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفَي ضلعين في مثلث .....
١٥٣	(٧ - ٢) القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر .....
١٦١	(٧ - ٣) محاور أضلاع المثلث .....
١٦٨	(٧ - ٤) منصّفات الزوايا الداخلة للمثلث .....
١٧٨	(٧ - ٥) الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه .....
١٨٣	(٧ - ٦) القطع المتوسطة للمثلث .....
١٩١	تقويم الوحدة التعليمية السابعة .....



# الوحدة التعليمية الثامنة

النسبة المئوية - الهندسة والقياس

رقم الصفحة	المحتوى
٢٠٢	معايير المنهج ومؤشرات الأداء للوحدة التعليمية الثامنة
٢٠٣	مخطّط تنظيمي للوحدة التعليمية الثامنة
٢٠٤	هل أنت مستعدّ؟ للوحدة التعليمية الثامنة
٢٠٨	(٨ - ١) تقدير النسبة المئوية.....
٢١٢	(٨ - ٢) النسبة المئوية للتزايد والنسبة المئوية للتناقص.....
٢١٨	(٨ - ٣) تطبيقات على تغيير النسبة المئوية.....
٢٢٣	(٨ - ٤) المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم.....
٢٢٨	(٨ - ٥) حجم الهرم القائم.....
٢٣٢	(٨ - ٦) حجم الكرة.....
٢٣٧	تقويم الوحدة التعليمية الثامنة.....
٢٤٢	المشروع الرابع.....



# الوحدة التعليمية السابعة



# هندسة المثلث

## العلوم الهندسية والجسور

على الرغم من بساطة شكل المثلث ، فإنه يُخفي في داخله نظامًا هندسيًا بالغ الدقة ، لا زال العلماء والمهندسون يعتمدون عليه في تصميم التقنيات الحديثة .

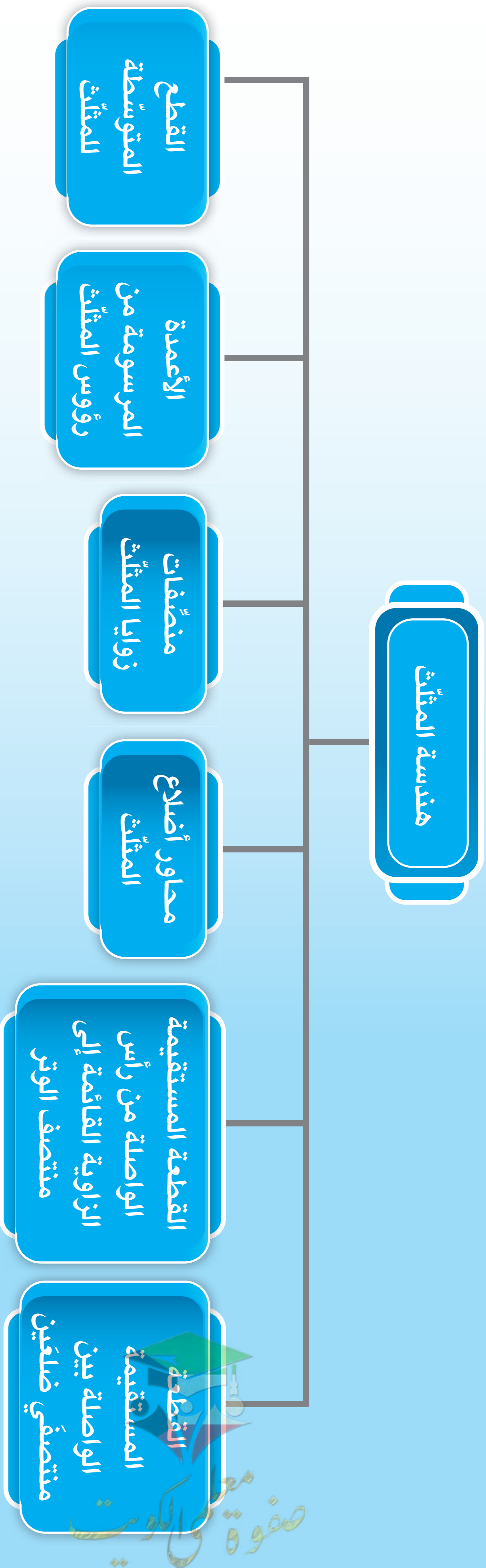
فعندما نرسم منصفًا لزاوية ، أو متوسطًا لضلع ، أو ارتفاعًا من رأس ، فإنّ هذه الخطوط لا تعمل بمعزل عن بعضها ، بل تتجه دائمًا نحو نقطة توازن ثابتة ، وكأنّ المثلث يمتلك نظامًا داخليًا يوجّه عناصره نحو مركز واحد . هذه النقاط الخاصة ليست مجرد نهايات لتقاطع خطوط ، بل هي مفاتيح فهم الثبات الهندسي في الروبوتات ، واستقرار الطائرات المسيّرة ، وتوزيع القوى في الجسور والأبراج المعاصرة .

في هذه الوحدة ، سنقترب من هذا العالم الدقيق ، ونكتشف كيف تتلاقى هذه الخطوط المختلفة في نقطة واحدة داخل كلّ مثلث ، وما الذي يجعل هذه الحقيقة الهندسية أساسًا لفهم التوازن في العلوم الحديثة .

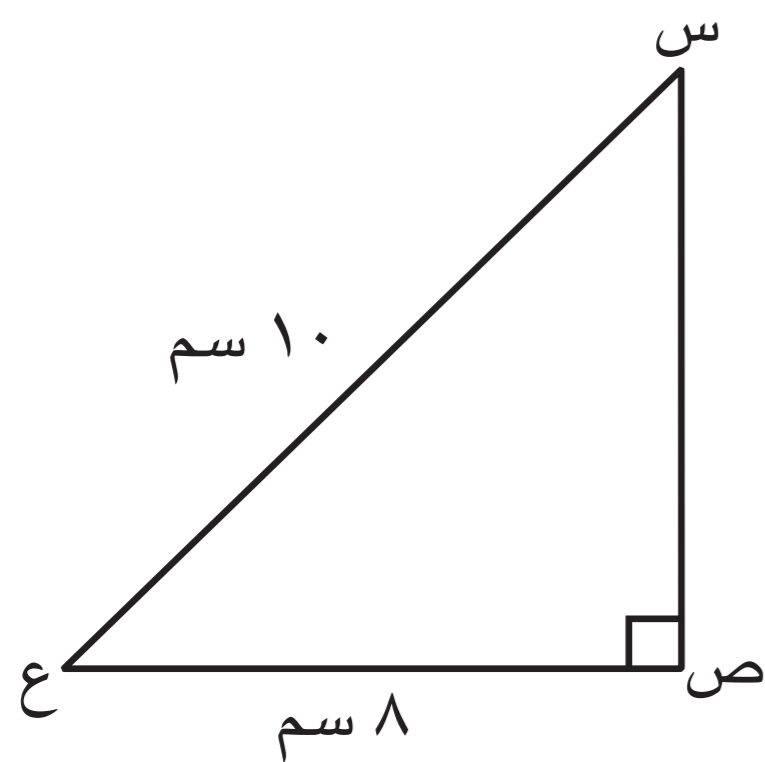


المجال	معايير المنهج	مؤشر الأداء
الهندسة والقياس	إستخدام التصوّر البصري والتعليل المكاني والنمذجة الهندسية لتمثيل عالمه المادّي ووصفه وحلّ مشكلاته .	التذكّر - التعرّف - الفهم - التعاون - العمل الجماعي - الاستكشاف والتقصّي - المقارنة والتمييز - العلاقات - التعليل - الاستدلال - الاستنتاج - التقويم - حلّ المشكلات - القوانين - التخطيط - الوسائط
	تحليل صفات وخصائص الأشكال الهندسية ثنائية وثلاثية الأبعاد ، وتنمية التفكير الرياضي حول العلاقات الهندسية ، والمقارنة بين الأشكال وتصنيفها .	

## مخطط تنظيمي للوحدة التعليمية السابعة



## هل أنت مستعد؟



١ في الشكل المقابل :

أوجد بالبرهان طول س ص ،  
ثم أوجد مساحة المثلث .

$$(س ص) = (س ع) - (ص ع)$$

$$= (10) - (8)$$

$$= 2$$

$$س ص = \sqrt{2^2} = 2$$

٢ حل المعادلة التالية :  $س = 2(س + 3)$  حيث  $س \in \mathbb{C}$

$$س = 2س + 6$$

$$س - 2س = 6$$

٣ أوجد ناتج كل مما يلي في أبسط صورة :

أ  $15 \times \frac{1}{2} = \frac{15 \times 1}{1 \times 2} = \frac{15}{2}$

$\frac{15}{2} = 7 \frac{1}{2}$

ب  $\sqrt{144} = 12$

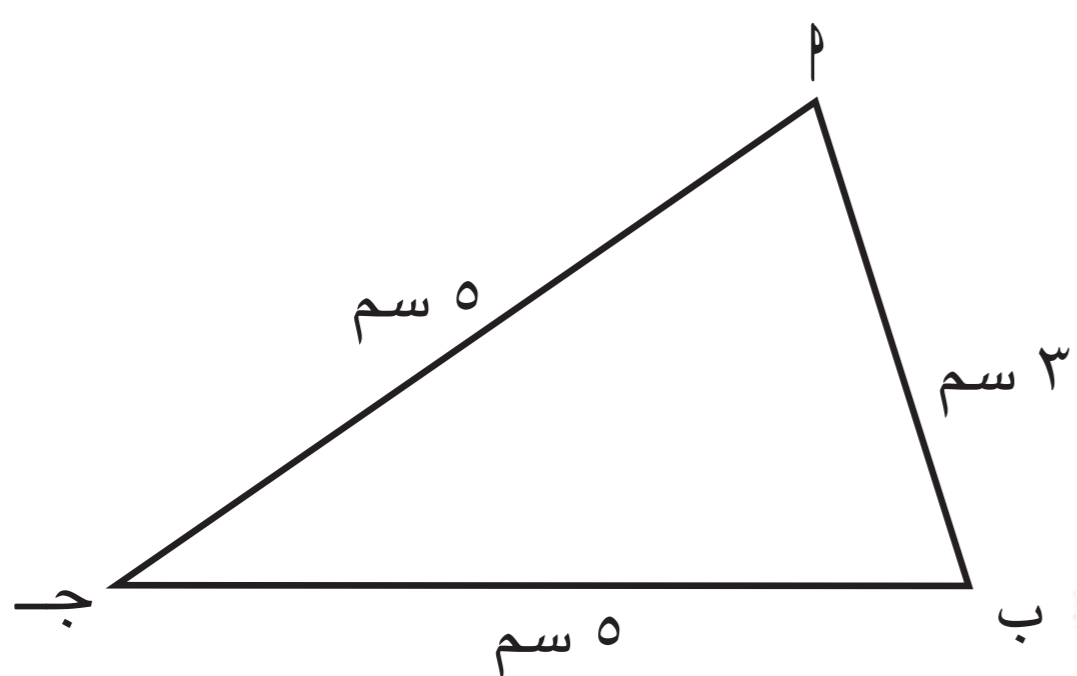
د  $27 \times \frac{2}{3} = \frac{27 \times 2}{1 \times 3} = \frac{54}{3} = 18$

و  $39 \times \frac{1}{3} = \frac{39 \times 1}{1 \times 3} = \frac{39}{3} = 13$

ج  $\sqrt{9} = 3$

هـ  $18 \times \frac{3}{2} = \frac{18 \times 3}{1 \times 2} = \frac{54}{2} = 27$

ز  $\sqrt{100} = 10$



٤ في الشكل المقابل ، أكمل :

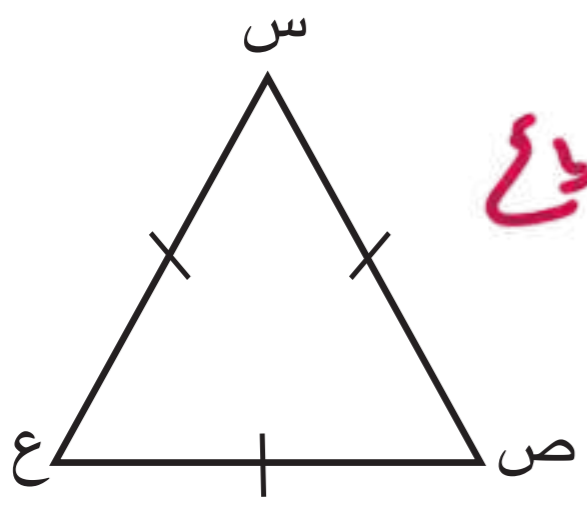
أ نوع المثلث ب ج بالنسبة إلى أضلاعه

مثلث متساوي الأضلاع

ب محيط المثلث ب ج = مجموع أطوال أضلاعه

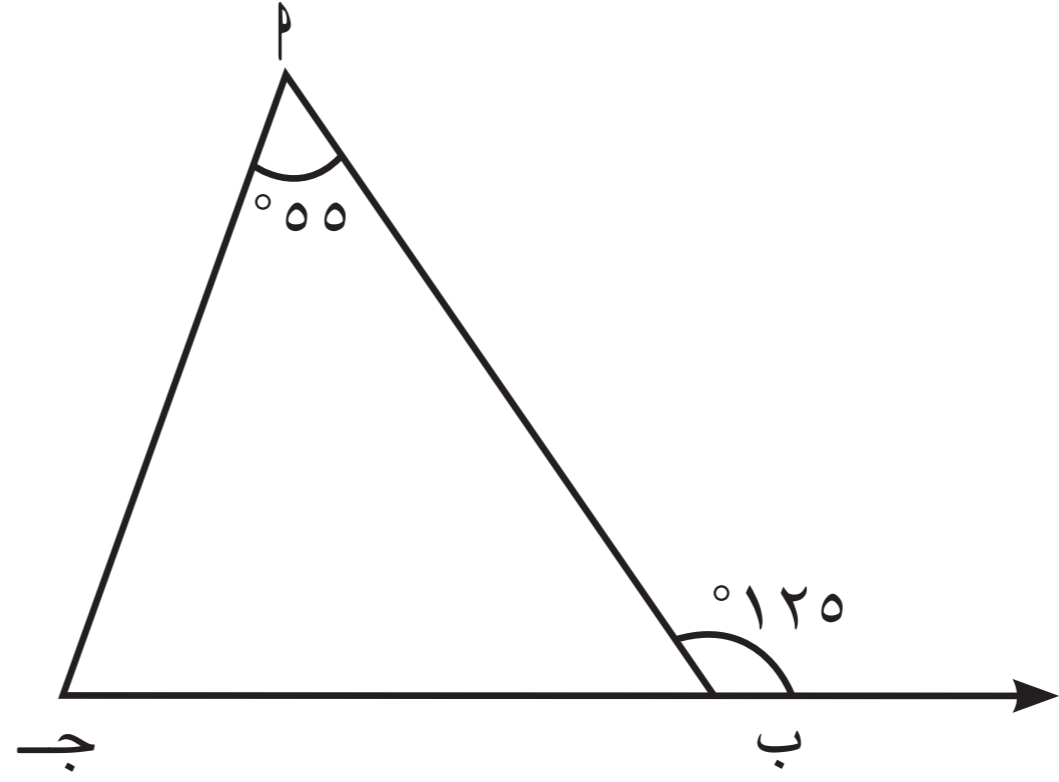
$$= 3 + 5 + 5 = 13$$

٥ في الشكل المقابل ، أكمل :



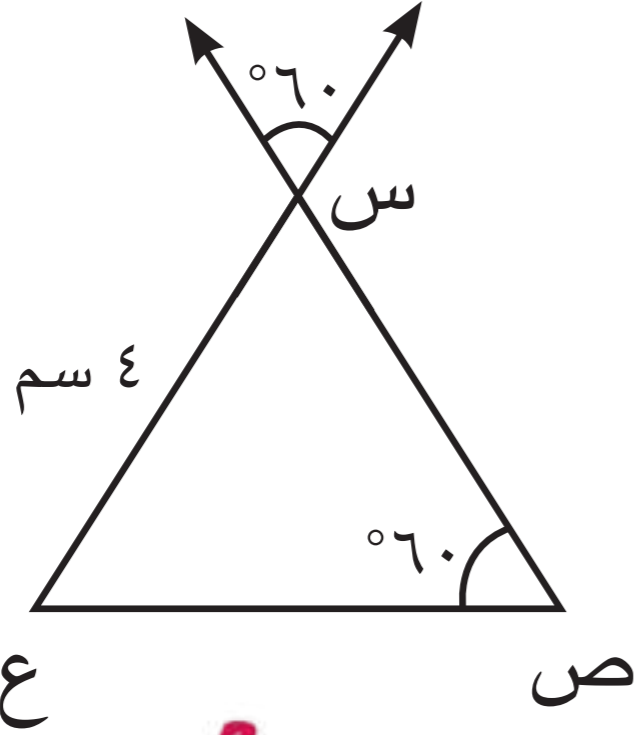
١ نوع المثلث س ص ع بالنسبة إلى أضلاعه  
 ٢  $\hat{ص} = \hat{ع} = \hat{س} = 60^\circ$

٦ أكمل ما يلي :



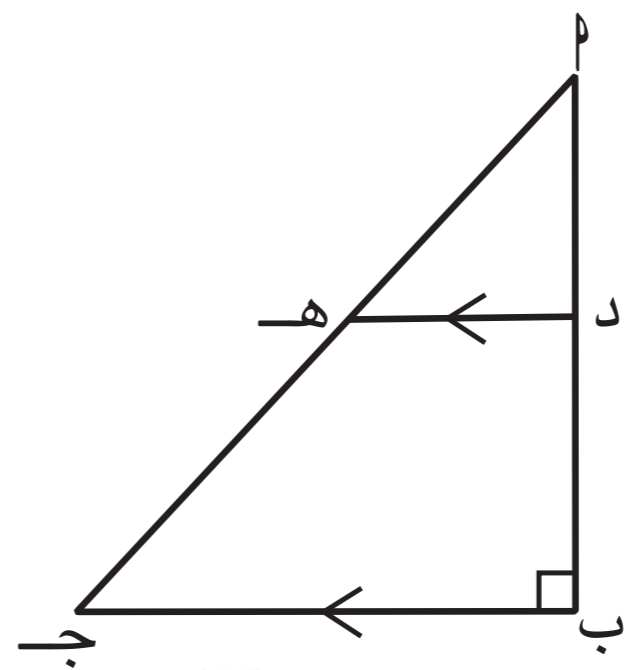
١  $\hat{ج} = 180 - 125 = 55$   
 السبب = قياس الزاوية التي ردها المثلث به  
 مجموع قياسات الزاويتين الداخليتين  
 على الجوارر 180

٢



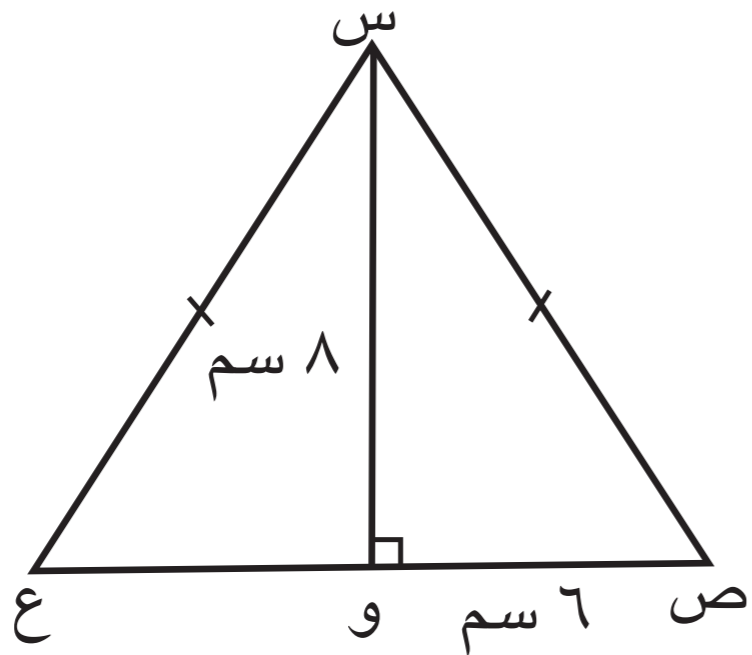
١  $\hat{ص} = \hat{س} = 60$  = السبب = بالتقابل بالرأس  
 ٢  $\hat{ع} = 60$  = السبب = مجموع قياسات زاويتي المثلث  
 ٣  $ص = 4$  = السبب = خواص المثلث  
 المتطابقين الأضلاع

٣



١  $\hat{د ه} = 90$   
 السبب = بالتبادل والتوازي مع (ب)

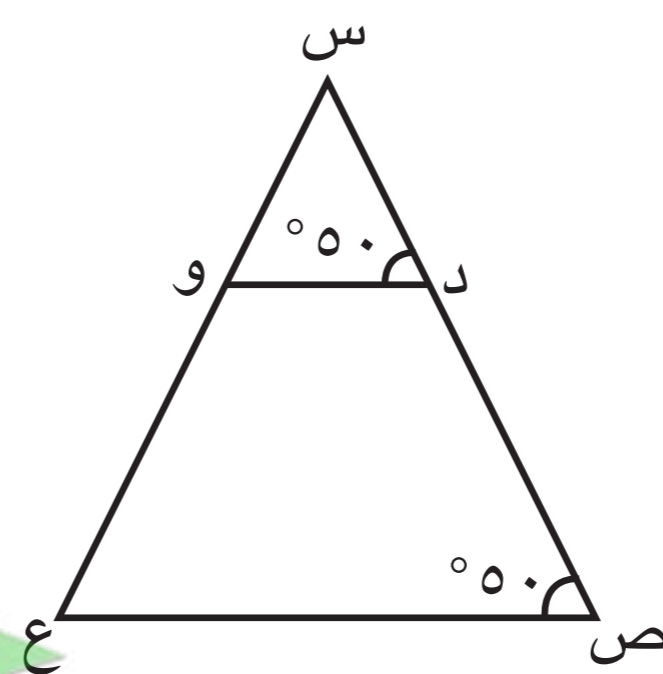
٤



١  $و = 36$  = السبب = خواص المثلث المتطابقين  
 ٢  $ص = 38$  = السبب = خواص المثلث المتطابقين الضلعين

٧ في الشكل التالي :

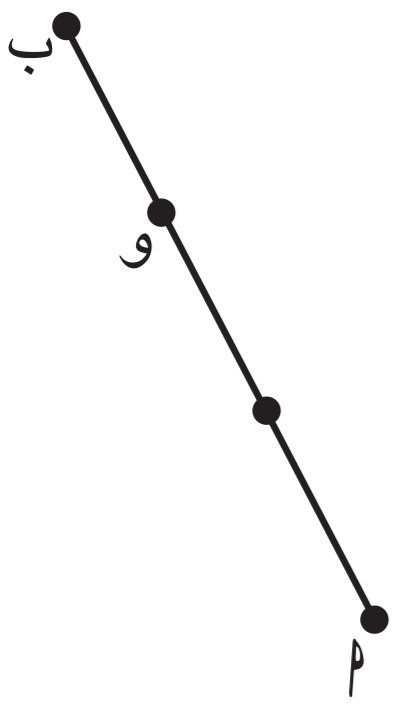
أثبت أن : د و // ص ع



١  $\hat{د و} = \hat{ص ع} = 50$   
 وهما زاويتان متناظرتان  
 ∴ د و // ص ع

٨ في الشكل المقابل : النقطة و

تقسم أ ب بنسبة ٢ : ١ من جهة أ  
 أكمل ما يلي :



١ أ و = و ب  
 و ب = أ و  
 ٢ أ ب = أ و  
 أ و = أ ب  
 ٣ أ ب = و ب  
 و ب = أ ب

# القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفَي ضلعين في مثلث

٧ - ١

## The Midsegment of a Triangle

سوف تتعلم : توظيف نظرية القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفَي ضلعين في مثلث لحلّ تمارين هندسية .

### العبارات والمفردات :

Segment

قطعة مستقيمة

Triangle

مثلث

### استكشاف (١)



#### اللازم

أدوات هندسية .

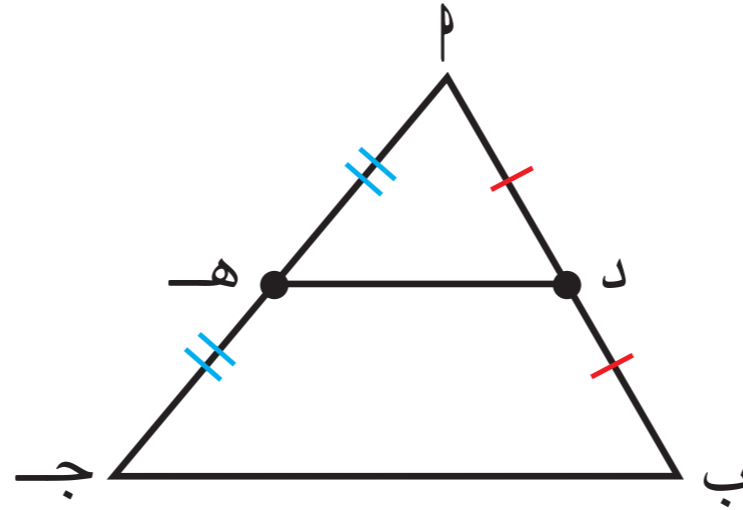
#### تذكر

من خواص متوازي الأضلاع القطران ينصف كل منهما الآخر

في المثلث  $ABC$  جـ :

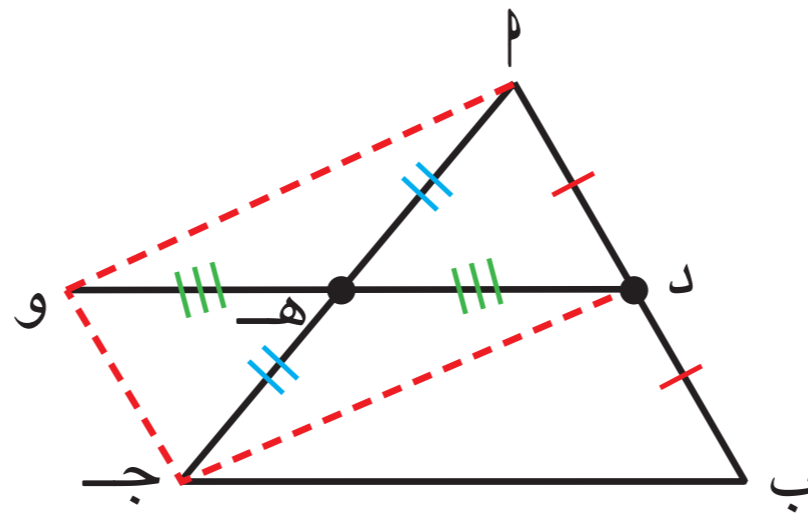
$D$  منتصف  $AB$  ،  $E$  منتصف  $AC$

ما العلاقة بين  $DE$  ،  $BC$  ؟



العمل : نمدد  $DE$  إلى  $F$  ، حيث  $DE = EF$  و

ثم نصل  $F$  و  $C$  ،  $DF$  ، و  $BC$  .



١ هل الشكل  $DFCE$  متوازي أضلاع ؟ لماذا ؟

نعم ، القطران ينصف كل منهما الآخر

٢  $DF \parallel EC$  ،  $DF = EC$

٣ هل الشكل  $DFCE$  متوازي أضلاع ؟ لماذا ؟

نعم ، ضلعان متقابلان متوازيان ومتساويان

٤  $DF \parallel EC$  ،  $DF = EC$

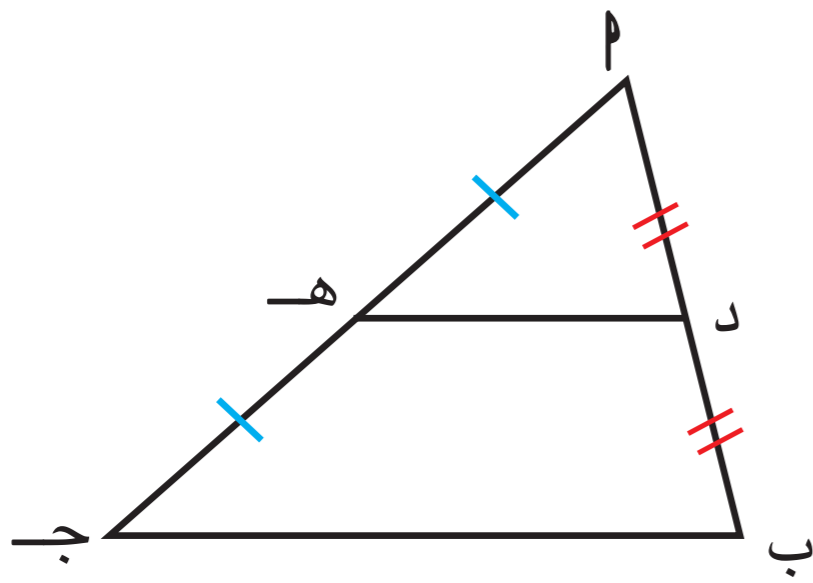
٥  $DE \parallel BC$  ،  $DE = \frac{1}{2} BC$

#### نظرية :

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفَي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث ، وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع .

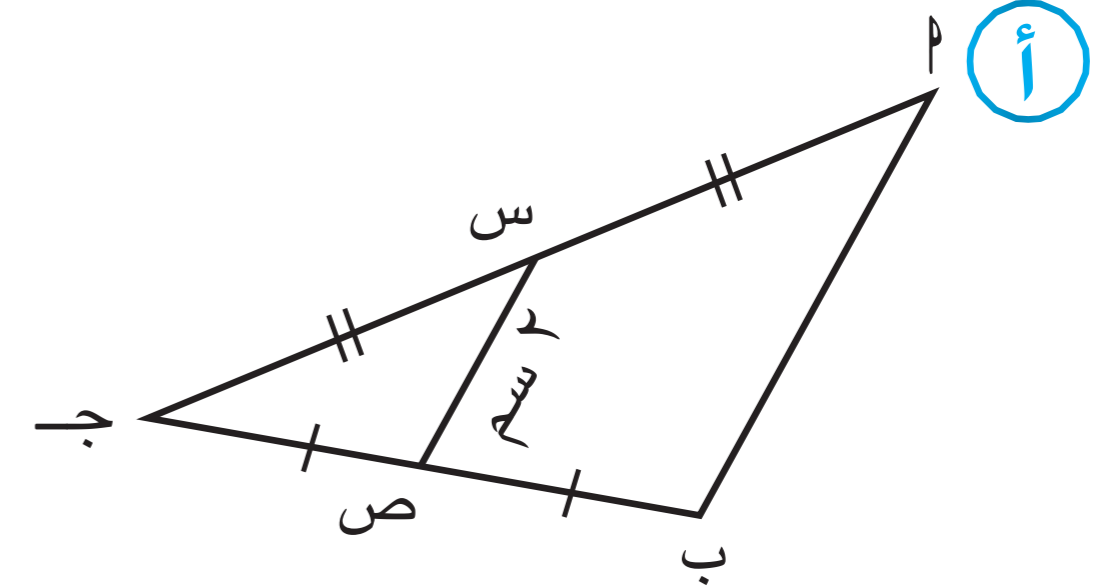


في المثلث  $ABC$  :  
 إذا كان  $D$  منتصف  $AB$  ،  $E$  منتصف  $AC$   
 فإن  $DE \parallel BC$  ،  $DE = \frac{1}{2} BC$

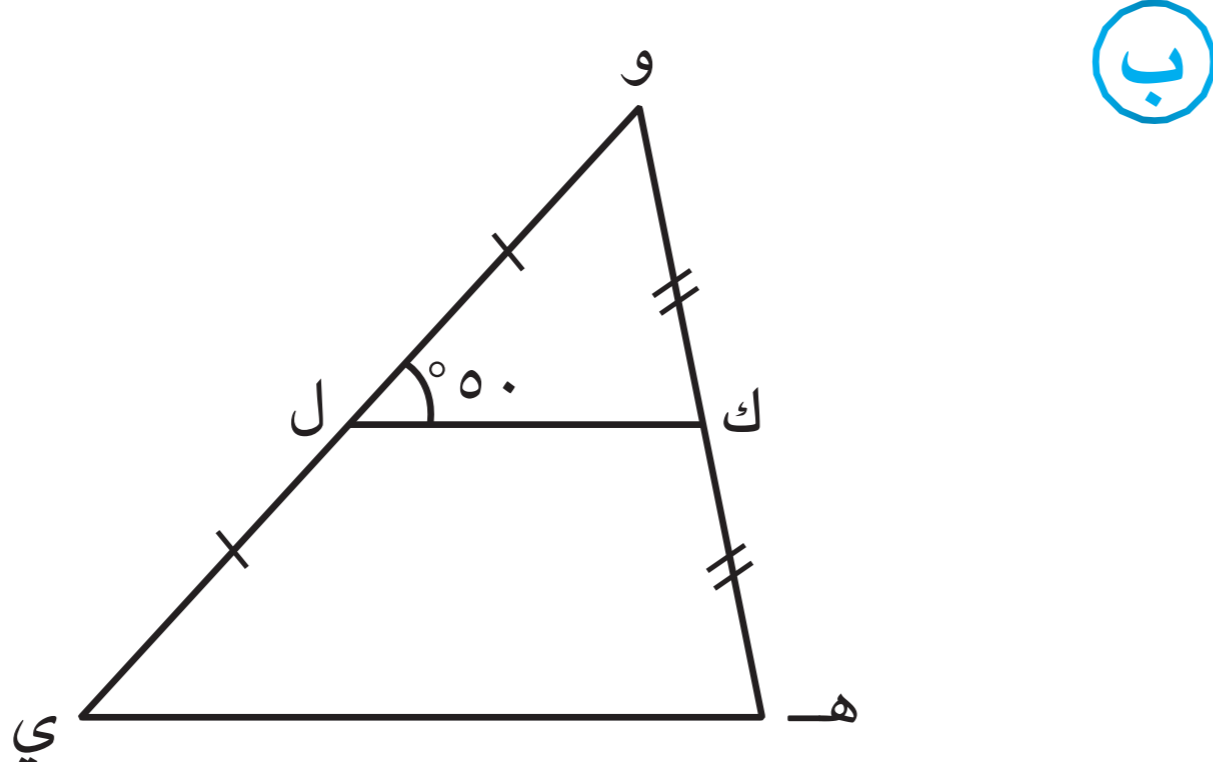


### دورك الآن (١)

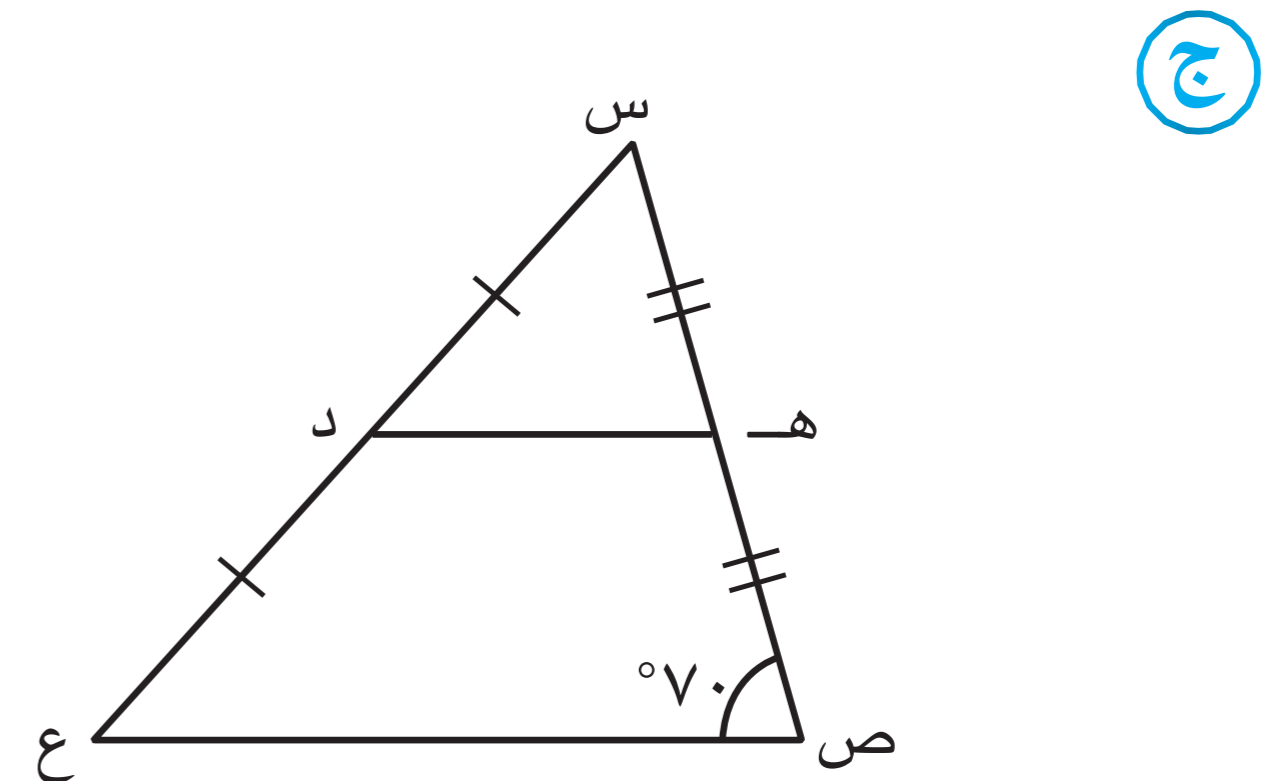
في كل من المثلثات التالية ، أكمل ( دون استخدام الأدوات الهندسية ) :



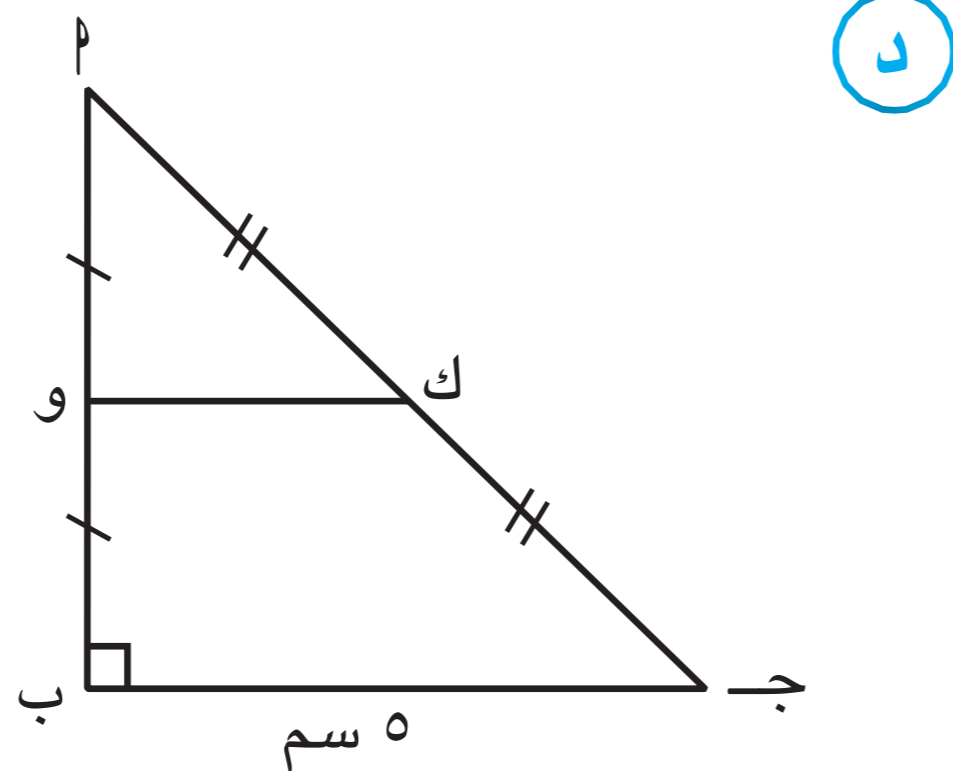
$AB = 2 \times DE = 2 \times 4 = 8$  سم



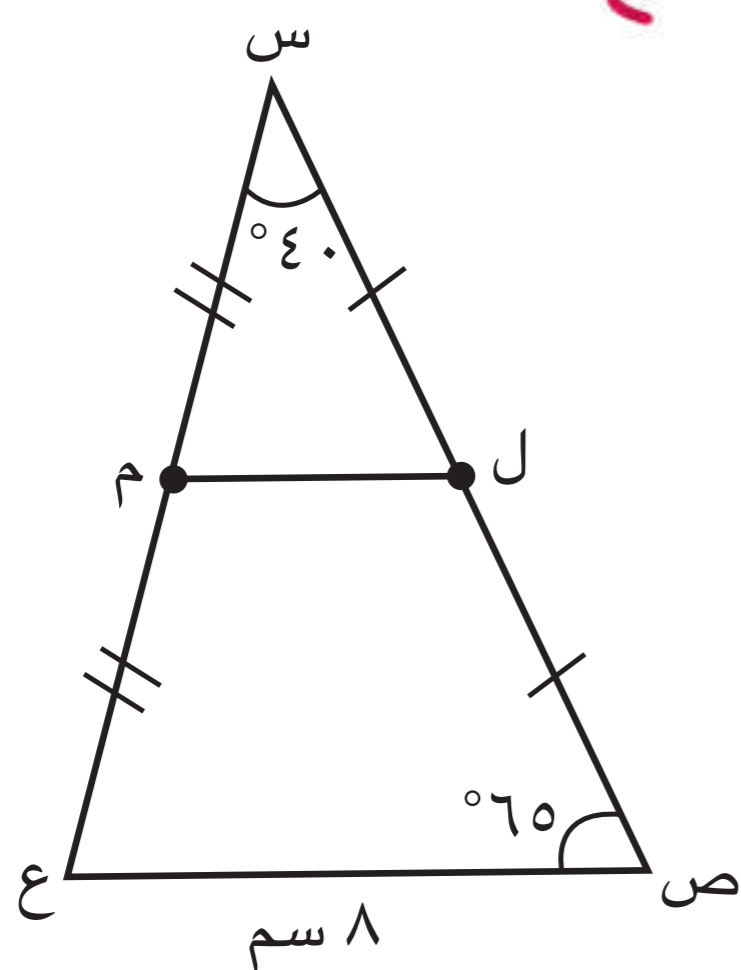
$\angle C = 50^\circ$



$\angle C = 70^\circ$



$\angle C = 50^\circ$



### مثال (١) :

في الشكل المقابل  $DE \parallel BC$  مثلث فيه :

$D$  منتصف  $AB$  ،  $E$  منتصف  $AC$  ،

$BC = 8$  سم ،  $\angle C = 40^\circ$  ،  $\angle B = 65^\circ$  .

أوجد بالبرهان : (١) طول  $DE$

(٢)  $\angle ADE$

(٣)  $\angle AED$



الحل:

المعطيات:  $\overline{ل}$  منتصف  $\overline{س ص}$  ،  $\overline{م}$  منتصف  $\overline{س ع}$  ،  $\overline{ص} = ٨$  سم ،

$$\angle (ص س ع) = ٤٠^\circ ، \angle (س ص ع) = ٦٥^\circ$$

المطلوب: إيجاد: (١) طول  $\overline{ل م}$  (٢)  $\angle (س ل م)$  (٣)  $\angle (س م ل)$

البرهان: في  $\Delta س ص ع$ :

$\therefore$   $\overline{ل}$  منتصف  $\overline{س ص}$  ،  $\overline{م}$  منتصف  $\overline{س ع}$  (معطى)

$\therefore$   $\overline{ل م} = \frac{١}{٢} \overline{ص ع}$  ،  $\overline{ل م} \parallel \overline{ص ع}$  (نظرية)

$\therefore$   $\overline{ص} = ٨$  سم (معطى)

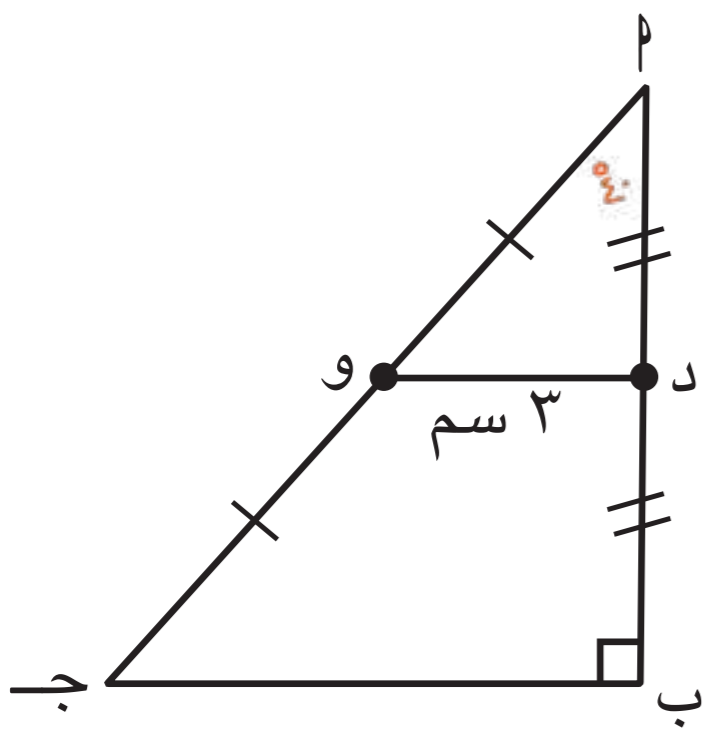
$$\therefore \overline{ل م} = ٨ \times \frac{١}{٢} = ٤ \text{ سم}$$

$\therefore \angle (س ل م) = \angle (ص) = ٦٥^\circ$  (بالتناظر والتوازي)

$\therefore$  مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة =  $١٨٠^\circ$

$$\therefore \angle (س م ل) = ١٨٠^\circ - (\angle (س ل م) + \angle (س م ل)) = ١٨٠^\circ - (٦٥^\circ + ٤٠^\circ) = ٧٥^\circ$$

دورك الآن (٢)



في الشكل المقابل،  $\overline{أ ب ج}$  مثلث قائم الزاوية في  $\overline{ب}$

$\overline{د}$  منتصف  $\overline{أ ب}$  ، و  $\overline{و}$  منتصف  $\overline{أ ج}$  ،

$$\angle (أ) = ٤٠^\circ ، \overline{د و} = ٣ \text{ سم}$$

أوجد بالبرهان: (١) طول  $\overline{ب ج}$

$$(٢) \angle (أ د و)$$

$$(٣) \angle (أ و د)$$

المعطيات:  $\overline{ب ج د}$  مثلث قائم الزاوية في  $\overline{ب}$

$\overline{د}$  منتصف  $\overline{أ ب}$  ، و  $\overline{و}$  منتصف  $\overline{أ ج}$  ،  $\overline{د و} = ٣$  سم ،  $\angle (أ) = ٤٠^\circ$

المطلوب:

١ إيجاد طول  $\overline{ب ج}$

٢ إيجاد  $\angle (أ د و)$

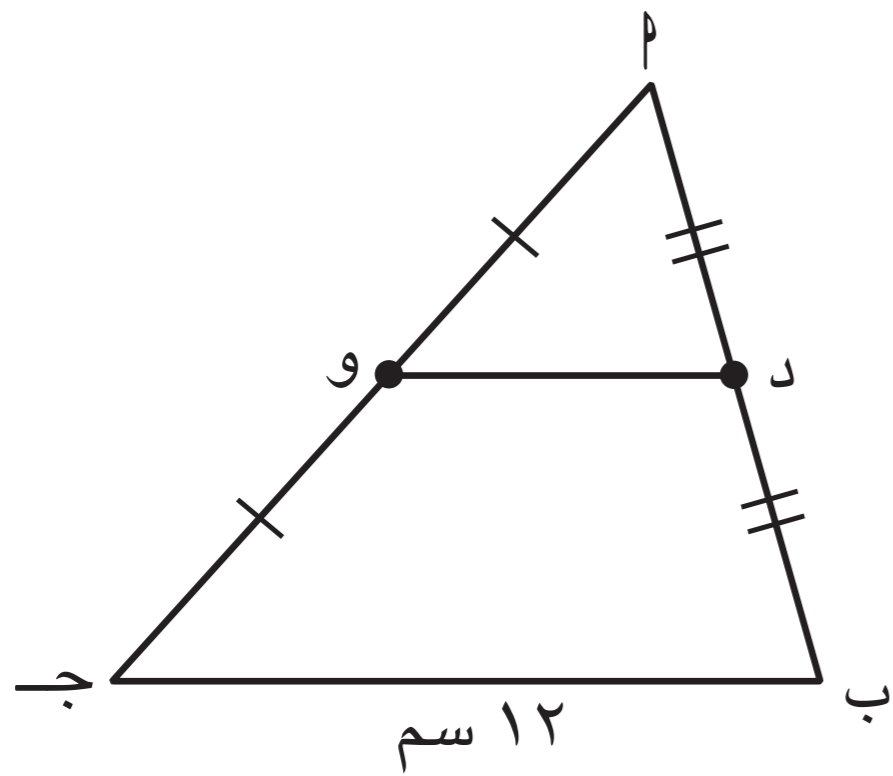
٣ إيجاد  $\angle (أ و د)$



البرهان:  $\Delta$  في  $AB$  ح القاعم الزاوية في  $B$   
 د منتصف  $AB$  (مفرض)  
 ومنتصف  $AC$  ح (مفرض)  
 $\therefore DO = \frac{1}{2} BC$   
 $DO \parallel AB$  (نظرية)  
 $\therefore \angle B = \angle CDO$   
 $2 \times 6 =$   
 $12 =$

٣) من  $\Delta ADO$  :  
 $\angle ADO = 90^\circ$   
 $\angle A = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$   
 $120^\circ - 180^\circ =$   
 $0^\circ =$   
 (مجموع قياسات الزوايا الداخلية لثلاث =  $180^\circ$ )

مثال (٢):



$AB$  ح مثلث فيه:

د منتصف  $AB$ ، و منتصف  $AC$

$AB = 10$  سم،  $AC = 13$  سم،  $BC = 12$  سم.

أوجد بالبرهان: (١) طول  $DO$

(٢) محيط  $\Delta ADO$ .

الحل:

المعطيات:  $AB$  ح مثلث فيه د منتصف  $AB$ ، و منتصف  $AC$   
 $AB = 10$  سم،  $AC = 13$  سم،  $BC = 12$  سم.

المطلوب: إيجاد (١) طول  $DO$

(٢) محيط  $\Delta ADO$

البرهان: في  $\Delta ABC$  ح:

$\therefore$  د منتصف  $AB$ ، و منتصف  $AC$  (معطى)

$\therefore DO \parallel AB$  ح،  $DO = \frac{1}{2} BC$  (نظرية)

$$\therefore DO = 12 \times \frac{1}{2} = 6 \text{ سم}$$

$$AD = \frac{1}{2} AB = 10 \times \frac{1}{2} = 5 \text{ سم}$$

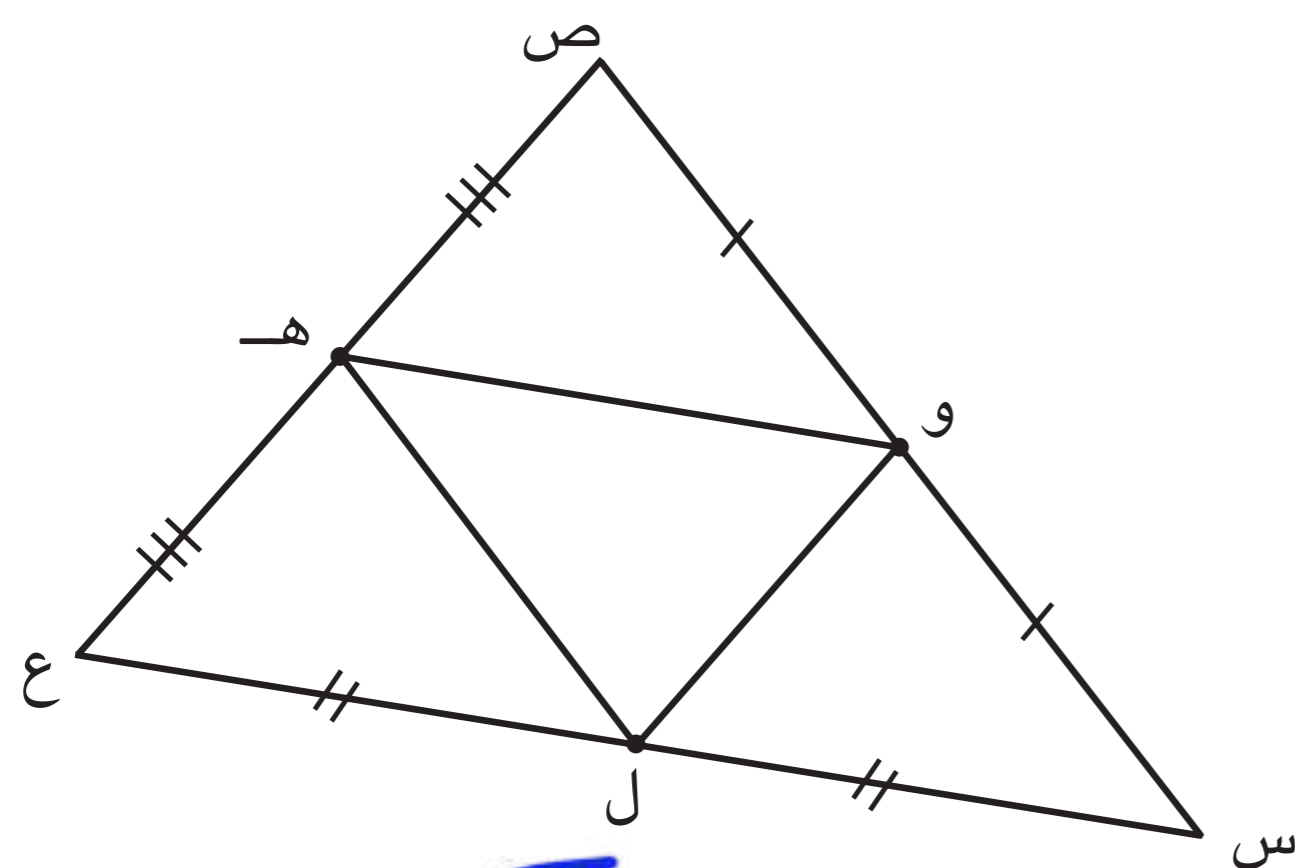
$$AO = \frac{1}{2} AC = 13 \times \frac{1}{2} = 6,5 \text{ سم}$$

$\therefore$  محيط  $\Delta ADO$  = مجموع أطوال أضلاعه

$$= 5 + 6,5 + 6 =$$

$$= 17,5 \text{ سم}$$





المثلث س ص ع فيه :

س ص = ٢٠ سم ، ع ص = ١٦ سم ،

س ع = ٢٤ سم ، و ، هـ ، ل منتصفات

س ص ، ع ص ، س ع على الترتيب .

أوجد بالبرهان محيط المثلث ل هـ و .

المعطيات : س ص = ٢٠ سم ، ع ص = ١٦ سم ، س ع = ٢٤ سم ، و ، هـ ، ل منتصفات س ص ، ع ص ، س ع على الترتيب

المطلوب : إيجاد محيط  $\Delta$  ل هـ و

البرهان : في المثلث س ص ع :

∴ و منتصف س ص ، هـ منتصف ع ص ( معطى )

∴ و هـ =  $\frac{1}{2}$  س ع =  $\frac{1}{2} \times ٢٤$  سم = ١٢ سم ( نظرية )

∴ ل منتصف س ع ، هـ منتصف هـ و

∴ ل هـ =  $\frac{1}{2}$  س هـ =  $\frac{1}{2} \times ١٠$  سم = ٥ سم ( نظرية )

∴ و ل منتصف س هـ ، ل منتصف س ع

∴ ل و =  $\frac{1}{2}$  س ع =  $\frac{1}{2} \times ١٦$  سم = ٨ سم ( نظرية )

محيط  $\Delta$  ل و هـ = ١٢ + ٥ + ٨ = ٢٥ سم

مثال (٣) :

في الشكل المقابل ، أ ب ج د مستطيل فيه :

س ، ص ، ع ، ل منتصفات أضلاعه

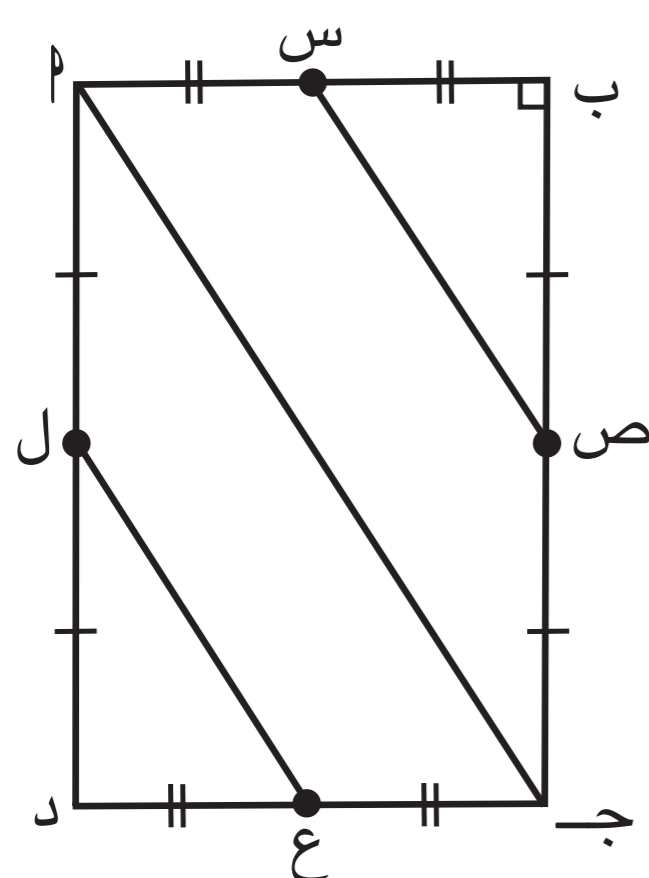
أثبت أن س ص = ع ل

الحل :

المعطيات : أ ب ج د مستطيل

س ، ص ، ع ، ل منتصفات أضلاع المستطيل

المطلوب : إثبات أن س ص = ع ل .



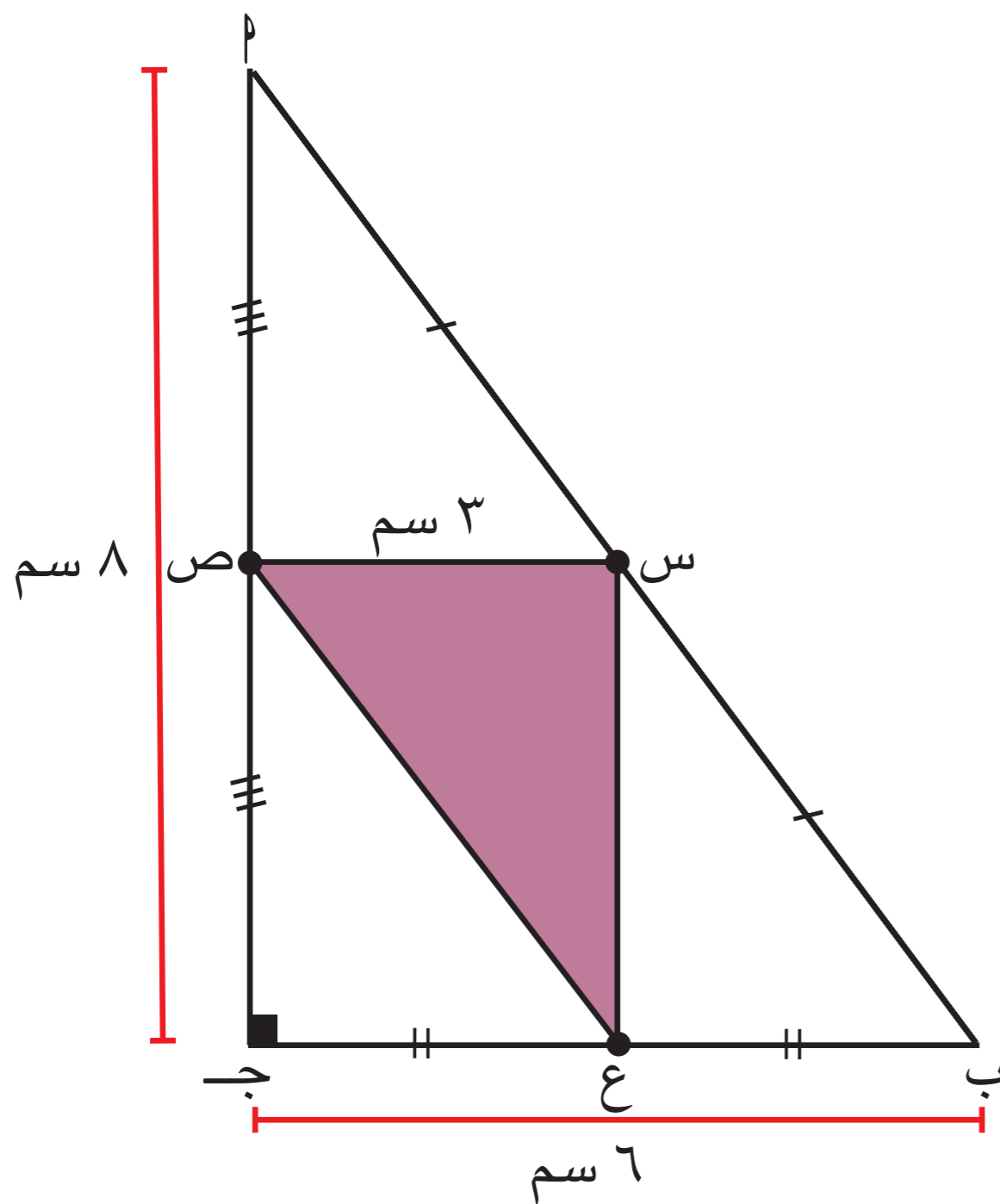
تذكر

من خواص المساواة  
إذا كان  $أ = ب$  ،  $ب = ج$  ،  
فإن  $أ = ج$



**البرهان:** في  $\Delta$   $أ ب ج$   
 $\therefore$   $س$  منتصف  $أ ب$  ،  $ص$  منتصف  $ب ج$   
 $س ص = \frac{1}{2} أ ج$  ( ١ ) ( نظرية )  
 في  $\Delta ج د أ$  :  
 $\therefore$   $ع$  منتصف  $ج د$  ،  $ل$  منتصف  $أ د$   
 $\therefore$   $ع ل = \frac{1}{2} أ ج$  ( ٢ ) ( نظرية )  
 من ( ١ ) ، ( ٢ )  
 $\therefore$   $س ص = ع ل$   
 ( من خواص المساواة )

دورك الآن (٤)



في الشكل المقابل ،  $\Delta$   $أ ب ج$  قائم الزاوية في  $ج$   
 $س$  منتصف  $أ ب$  ،  $ص$  منتصف  $أ ج$  ،  $ع$  منتصف  $ب ج$  .  
 أوجد بالبرهان : ( ١ ) محيط المثلث  $س ع ص$  .  
 ( ٢ ) مساحة المثلث  $س ع ص$  .  
**المعطيات:** المثلث  $أ ب ج$  قائم الزاوية في  $ج$  ،  
 $س$  منتصف  $أ ب$  ،  $ص$  منتصف  $أ ج$  ،  
 $ع$  منتصف  $ب ج$   
**المطلوب:** إيجاد ( ١ ) محيط المثلث  $س ع ص$  .  
 ( ٢ ) مساحة المثلث  $س ع ص$  .

**البرهان:** في  $\Delta$   $أ ب ج$  قائم الزاوية في  $ج$   
 ( باستخدام نظرية فيثاغورث )

$$^2(أ ب) = ^2(أ ج) + ^2(ب ج)$$

$$\therefore أ ب = \sqrt{^2(٦) + ^2(٨)}$$

$$= \sqrt{٣٦ + ٦٤}$$

$$= \sqrt{١٠٠} = ١٠ \text{ سم}$$

$\therefore$   $س$  منتصف  $أ ب$  ،  $ع$  منتصف  $ب ج$

$\therefore$   $س ع = \frac{1}{2} أ ب$  ( نظرية )

$$س ع = \frac{1}{2} \times ١٠ = ٥ \text{ سم}$$

تذكر

نظرية فيثاغورث

في المثلث القائم الزاوية ، يكون مربع طول الوتر مساوياً لمجموع مربعي طولَي الضلعين الآخرين .

بالمثل :

$\therefore$   $ع$  منتصف  $ب ج$  ،  $ص$  منتصف  $أ ج$

$\therefore$   $ع ص = \frac{1}{2} أ ب$  ( نظرية )

$$= \frac{1}{2} \times ١٠$$

$$= ٥ \text{ سم}$$

$\therefore$  محيط  $\Delta$   $س ع ص = ٤ + ٥ + ٥ = ١٤ \text{ سم}$

تذكر



عكس نظرية فيثاغورث

إذا كان مربع طول الضلع الأطول في مثلث مساوياً لمجموع مربعي طولَي الضلعين الآخرين، فإن هذا المثلث يكون قائم الزاوية والزاوية القائمة هي المقابلة للضلع الأطول.

في  $\Delta$  س ع ص :

$$(ص ع)^2 = 25 = 2(5) = 2(ص ع)$$

$$25 = 16 + 9 = 2(4) + 2(3) = 2(ع س) + 2(ص س)$$

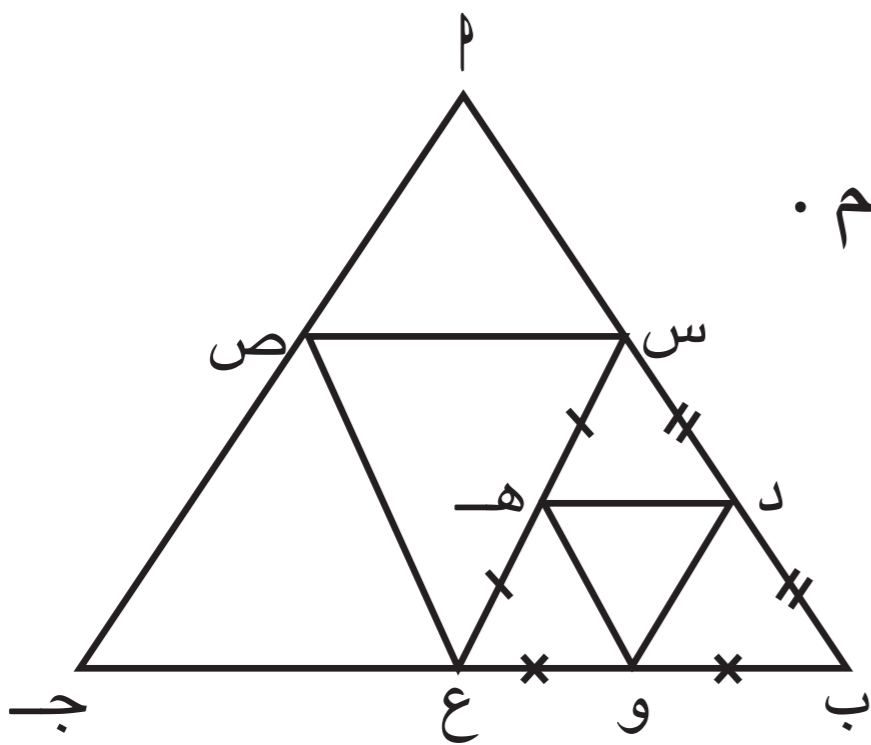
$$\therefore (ص ع)^2 = 2(ص س) + 2(ع س)$$

$\Delta$  س ص ع قائم الزاوية في س (عكس نظرية فيثاغورث)

$$\therefore \text{مساحة المثلث س ص ع} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$$

$$6 = \frac{1}{2} \times 2 \times 12 = 12 \text{ سم}^2$$

عبّر عن فهمك



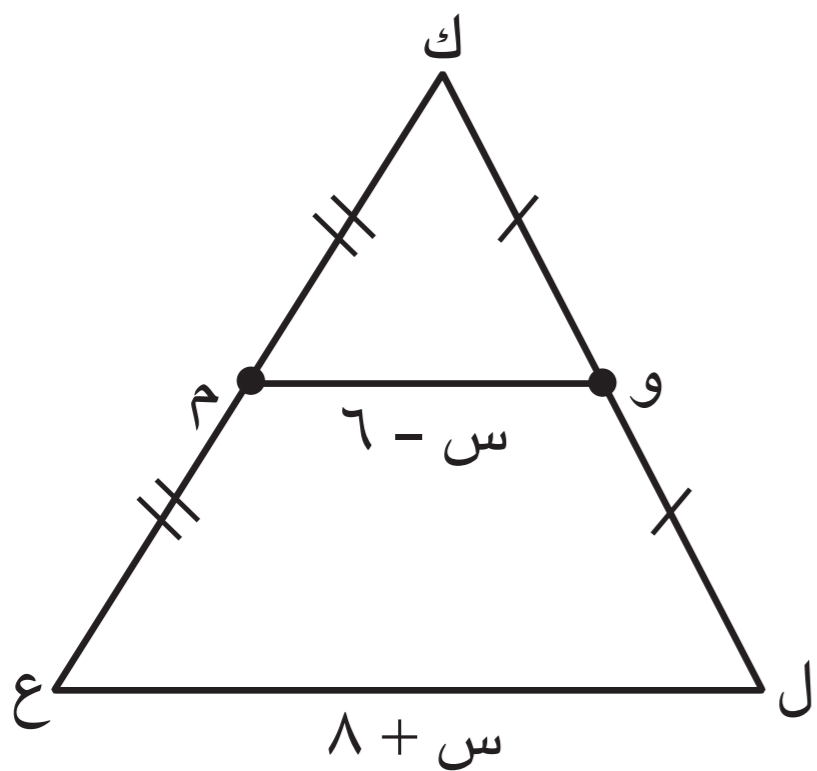
إذا كان س، ص، ع منتصفات أضلاع المثلث ا ب ج، د، هـ، و منتصفات أضلاع المثلث س ب ع، كما هو موضح في الرسم. فما العلاقة بين محيط المثلث د هـ و محيط المثلث ا ب ج؟

$$\text{محيط } \Delta س ص ع = \frac{1}{2} \text{ محيط } \Delta ا ب ج$$

$$\text{محيط } \Delta د هـ و = \frac{1}{2} \text{ محيط } \Delta س ب ع$$

$$\therefore \text{محيط } \Delta د هـ و = \frac{1}{2} \text{ محيط } \Delta ا ب ج$$

مثال (٤) :



المثلث ك ل ع فيه و منتصف ك ل، م منتصف ك ع.

أوجد بالبرهان قيمة س.

الحل :

المعطيات : ك ل ع مثلث فيه و منتصف ك ل، م منتصف ك ع.

المطلوب : إيجاد قيمة س.

البرهان : في  $\Delta$  ك ل ع

$\therefore$  و منتصف ك ل، م منتصف ك ع (معطى)

$\therefore$  و م // ل ع، و م =  $\frac{1}{2}$  ل ع (نظرية)

$$\therefore س - 6 = \frac{1}{2} (8 + س)$$

$$2س - 12 = 8 + س$$

$$2س - س = 8 + 12$$

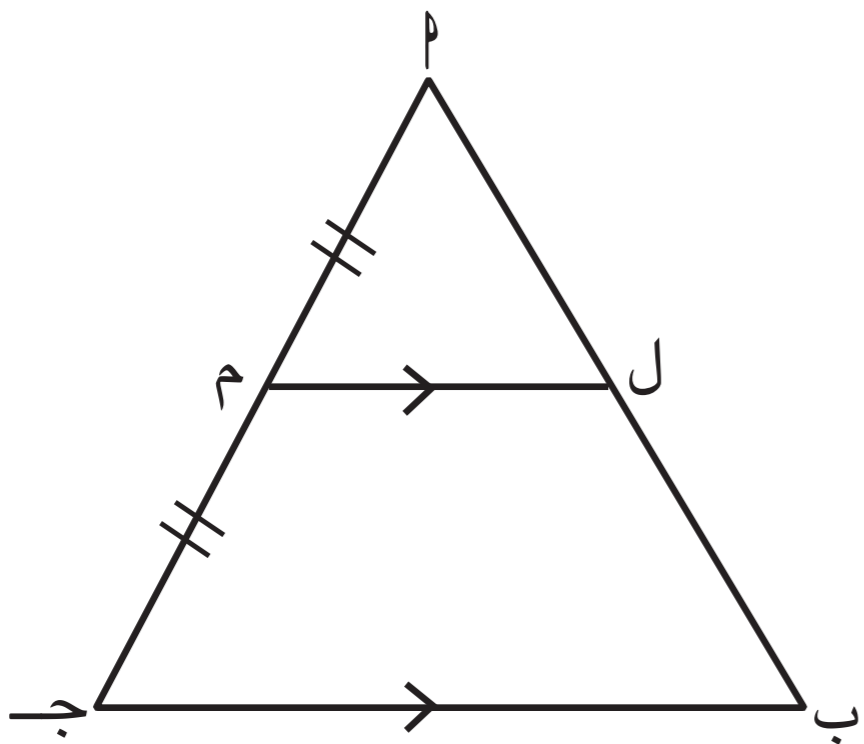
$$\therefore س = 20$$

(بالضرب في العدد 2 لكلا الطرفين)





في الشكل المقابل، المثلث  $\triangle PAB$  فيه :  
 $\overline{PM} \parallel \overline{AB}$  ،  $M$  منتصف  $\overline{PA}$  ،  
 هل  $L$  منتصف  $\overline{PB}$  ؟



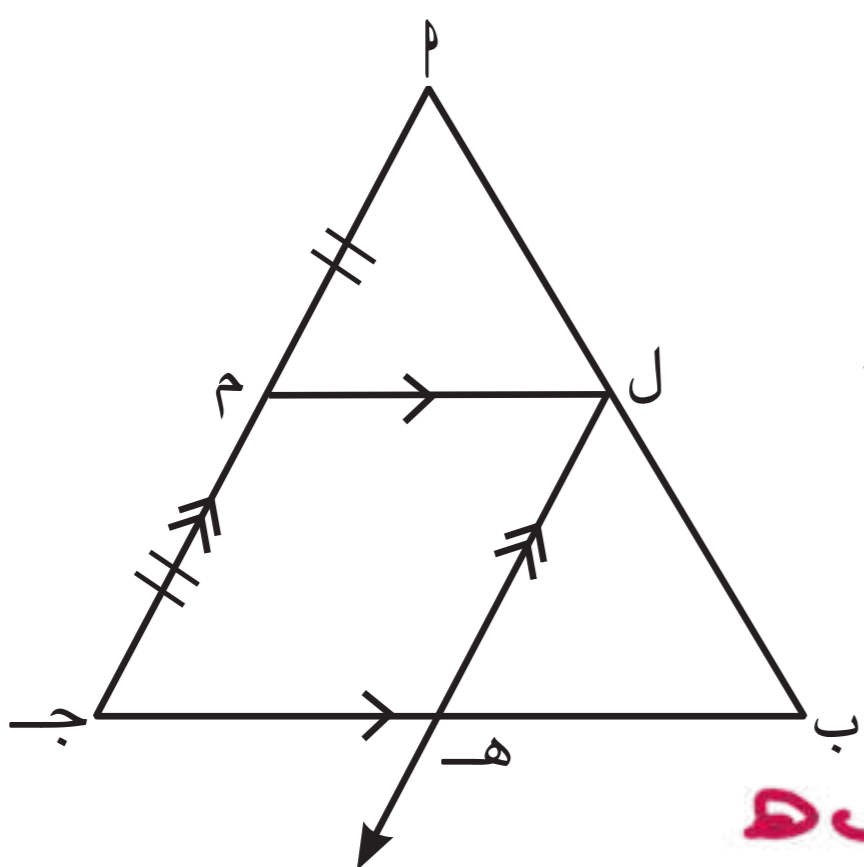
**العمل :**

نرسم  $\overline{LH} \parallel \overline{PA}$  ويقطع  $\overline{AB}$  في  $H$ .

أجب عن الأسئلة التالية :

١ هل الشكل  $LHAB$  يمثل متوازي أضلاع ؟ وضح ذلك .

نعم كل ضلعيه متقابليه متوازيين



٢ هل  $\triangle PAM \cong \triangle LHB$  ؟ وضح ذلك .

نعم  $(\angle MPA = \angle LHB)$  (بالتوازي)  $\angle PAM = \angle LHB$   
 $\angle PMA = \angle LHB$  (زاوية قائمه)  
 وينتج من التطابق أن  $\overline{PA} \cong \overline{LB}$   
 $\therefore L$  منتصف  $\overline{PB}$

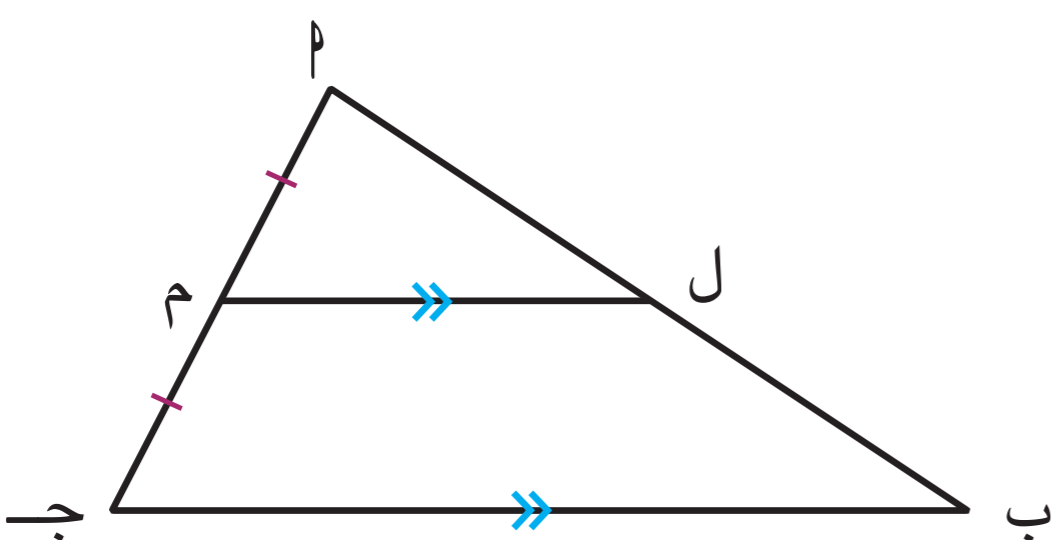
**نظرية :**

إذا رُسم مستقيم من منتصف أحد أضلاع مثلث موازيًا ضلعًا آخر فيه ، فإنه ينصف الضلع الثالث .

في المثلث  $\triangle PAB$  جـ :

$M$  منتصف  $\overline{PA}$  ،  $\overline{ML} \parallel \overline{AB}$  ،

$L$  منتصف  $\overline{PB}$  .



دورك الآن (٥)

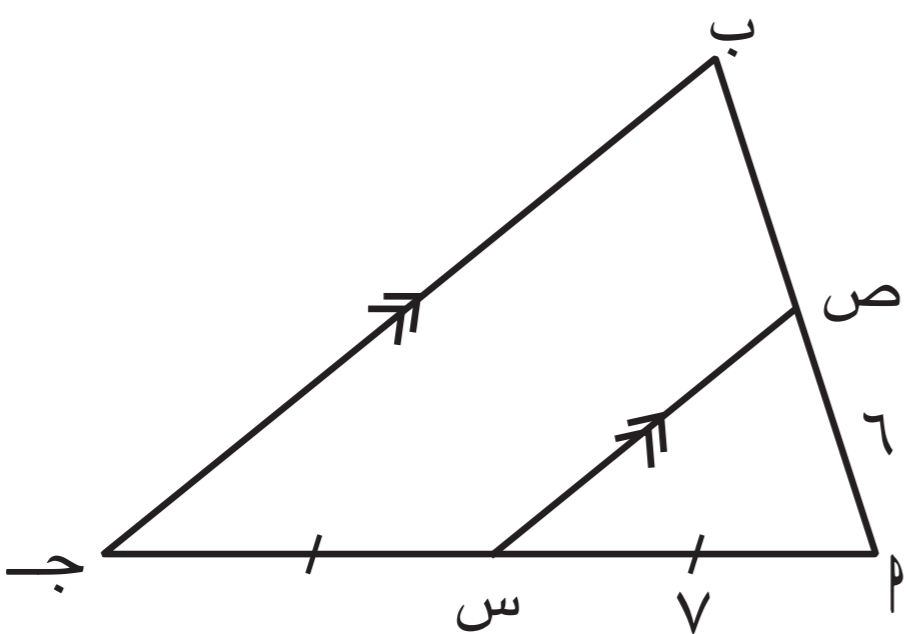


في الشكل المقابل ، أكمل ما يلي :

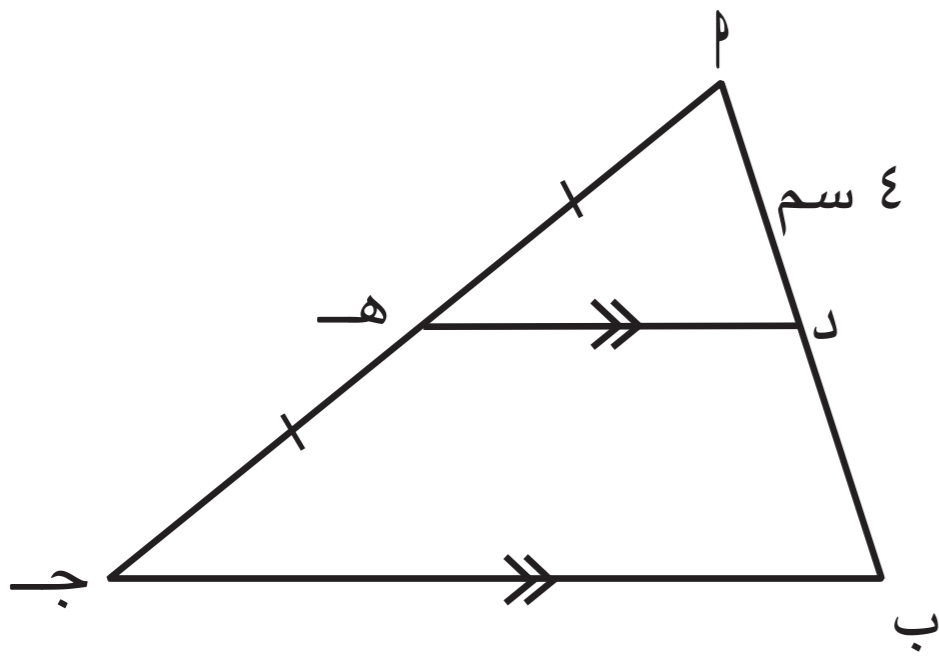
أ ص منتصف  $\overline{AB}$

ب طول  $\overline{AB} = 12 \times 2 = 24$

$6 \times 2 = 12$  وحدة طول



مثال (٥):



أ ب ج د مثلث فيه : هـ منتصف  $\overline{أ ج}$  ،  
 د هـ //  $\overline{ب ج}$  ،  $د = ٤$  سم .  
 أوجد بالبرهان طول  $\overline{أ ب}$  .

الحل :

المعطيات : أ ب ج د مثلث ، هـ منتصف  $\overline{أ ج}$  ،  
 د هـ //  $\overline{ب ج}$  ،  $د = ٤$  سم .

المطلوب : إيجاد طول  $\overline{أ ب}$  .

البرهان : في المثلث أ ب ج :

∴ هـ منتصف  $\overline{أ ج}$  ، د هـ //  $\overline{ب ج}$

∴ د منتصف  $\overline{أ ب}$

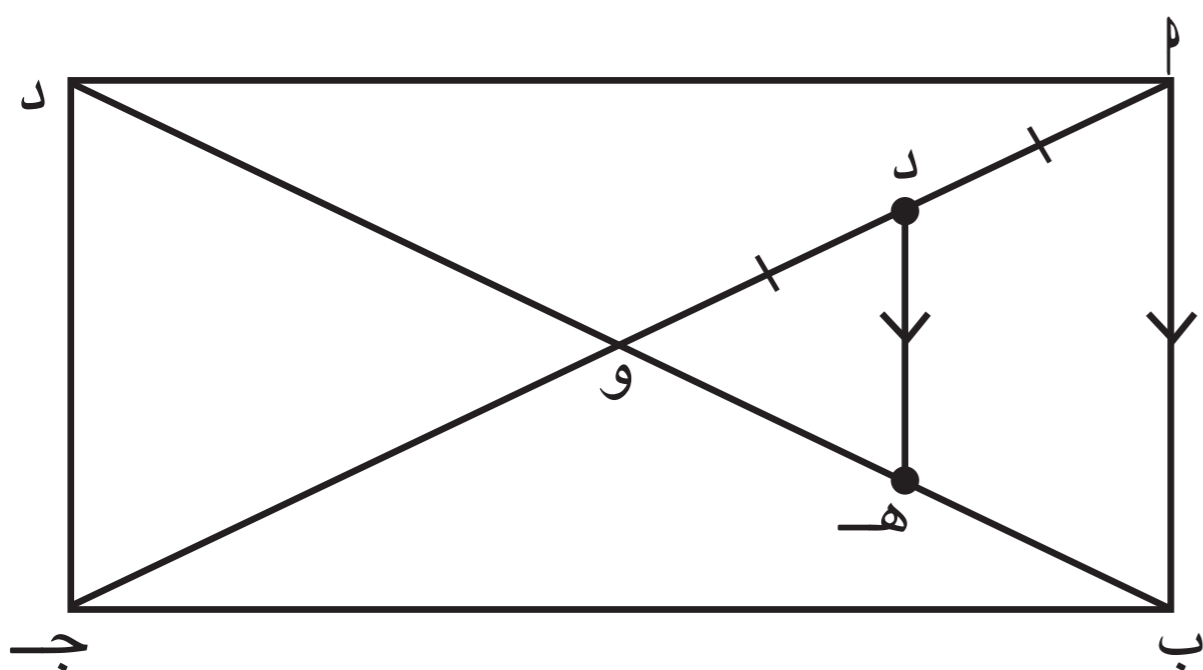
∴  $د = ب = ٤$  سم

∴  $أ ب = ٨$  سم

( معطى )

( نظرية )

مثال (٦):



أ ب ج د مستطيل فيه :  $د = ٦$  سم ،  
 د هـ //  $\overline{أ ب}$  ، د منتصف  $\overline{أ و}$  .  
 أوجد بالبرهان طول  $\overline{ب هـ}$  .

الحل :

المعطيات : أ ب ج د مستطيل ،  $د = ٦$  سم ،  
 د هـ //  $\overline{أ ب}$  ، د منتصف  $\overline{أ و}$  .

المطلوب : إيجاد طول  $\overline{ب هـ}$  .

البرهان : ∴ أ ب ج د مستطيل

∴ قطراه متطابقان وينصف كل منهما الآخر ( خواص المستطيل )

∴  $أ ج = ب د = ١٢$  سم

$أ و = ب و = ٦$  سم

في  $\Delta أ و ب$  :

∴ د منتصف  $\overline{أ و}$  ، د هـ //  $\overline{أ ب}$

∴ هـ منتصف  $\overline{و ب}$

∴  $ب هـ = ٦ \times \frac{١}{٢} = ٣$  سم

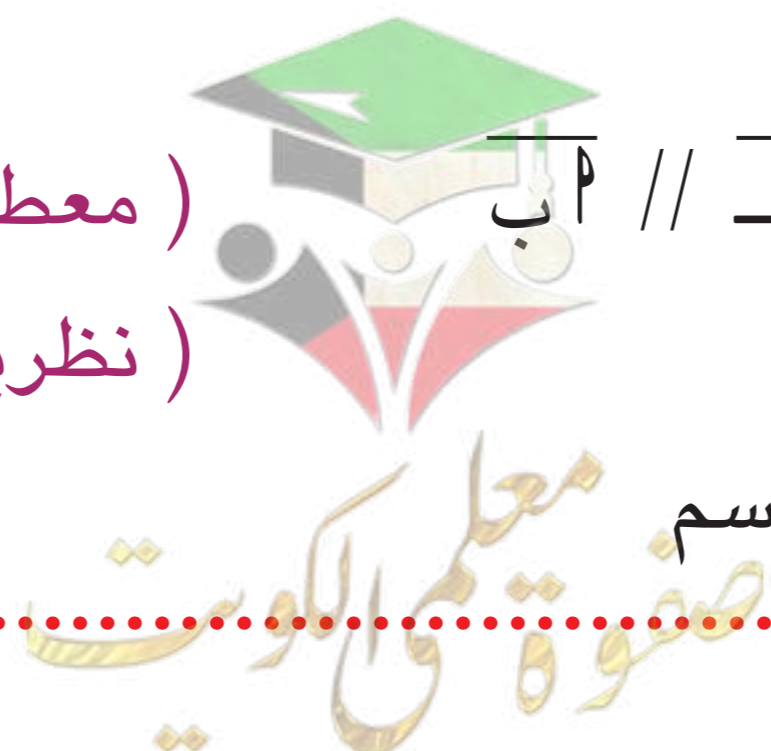
( معطى )

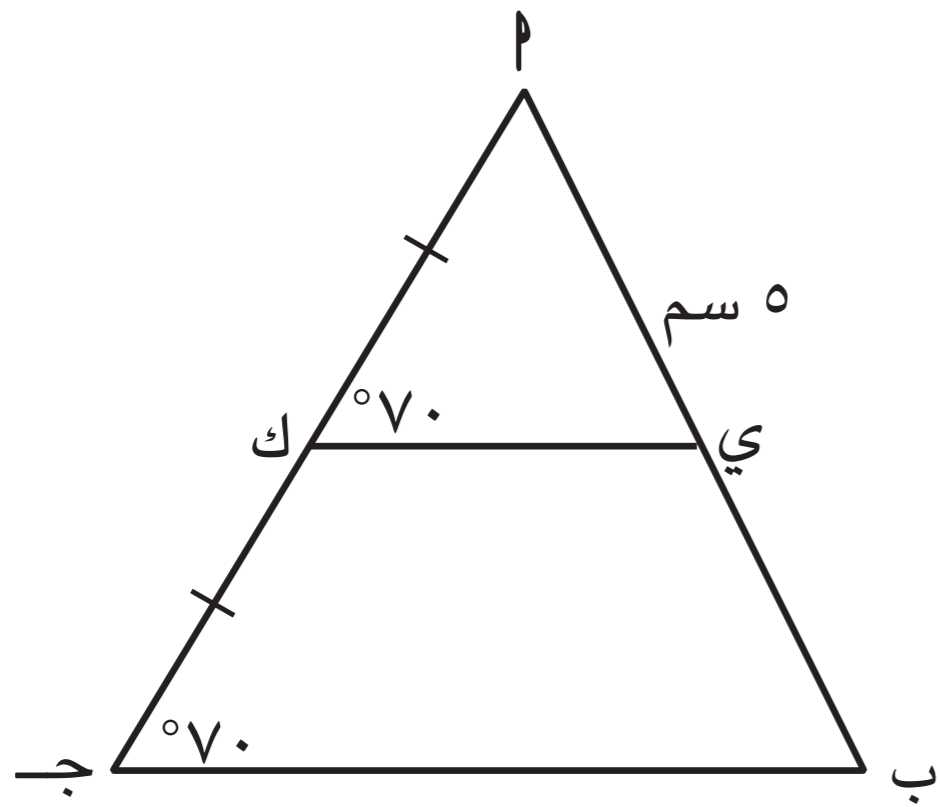
( نظرية )

تذكر



من خواص المستطيل : القطران  
 متطابقان وينصف كل منهما الآخر .





أ ب ج مثلث فيه :

ك منتصف  $\overline{AB}$  ،  $\angle C = \angle B = \angle A = 70^\circ$  ،

$PG = 5$  سم .

أوجد بالبرهان طول  $\overline{AB}$  .

المعطيات : ك منتصف  $\overline{AB}$  ،  $PG = 5$  سم ،  $\angle C = \angle B = \angle A = 70^\circ$

المطلوب : لـ  $\overline{AB}$

البرهان : في  $\triangle PGB$  :

$\angle C = \angle B = 70^\circ$

ك منتصف  $\overline{AB}$  (معطى) ٥

$\angle C = \angle B$

$PG = 5$

$\angle C = \angle B = 70^\circ$  (معطى)

رضائي وضع تناظر

$PG = 5$

$\angle C = \angle B$  //

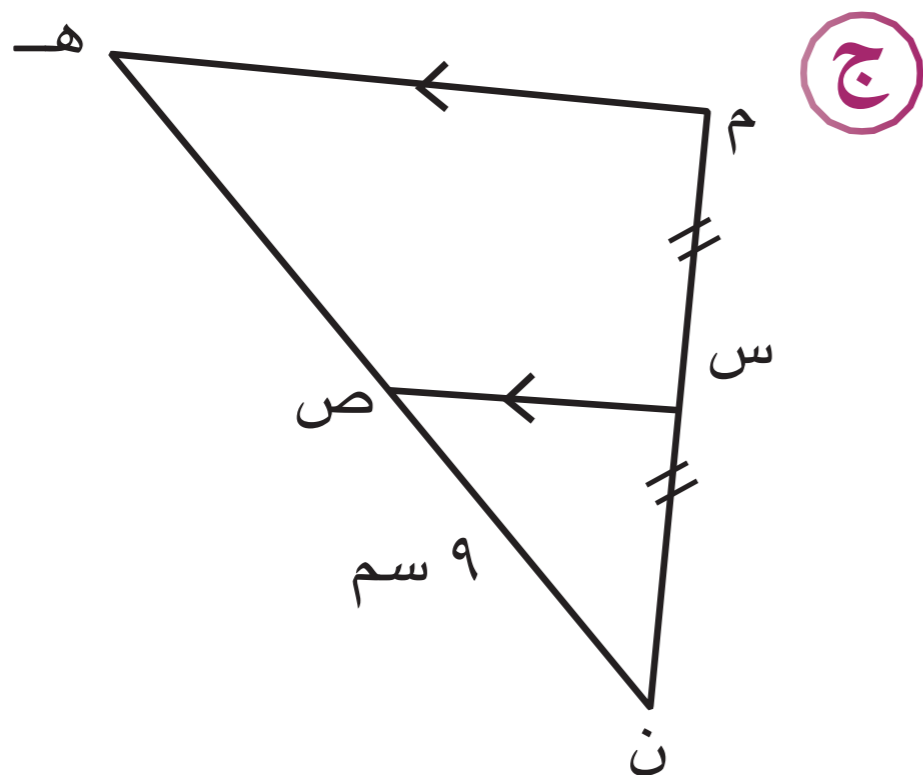
بأنه يتبع أنه :

$PG = PB$  (نظرية)

تمارين ذاتية :



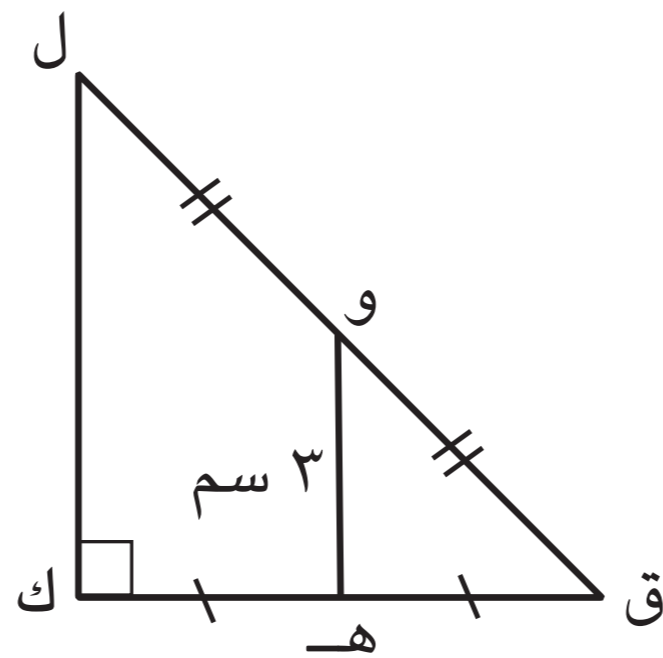
١ في كل من المثلثات التالية ، أكمل ( دون استخدام الأدوات الهندسية ) :



$\angle C = \angle B = 90^\circ$

$PG = 9$

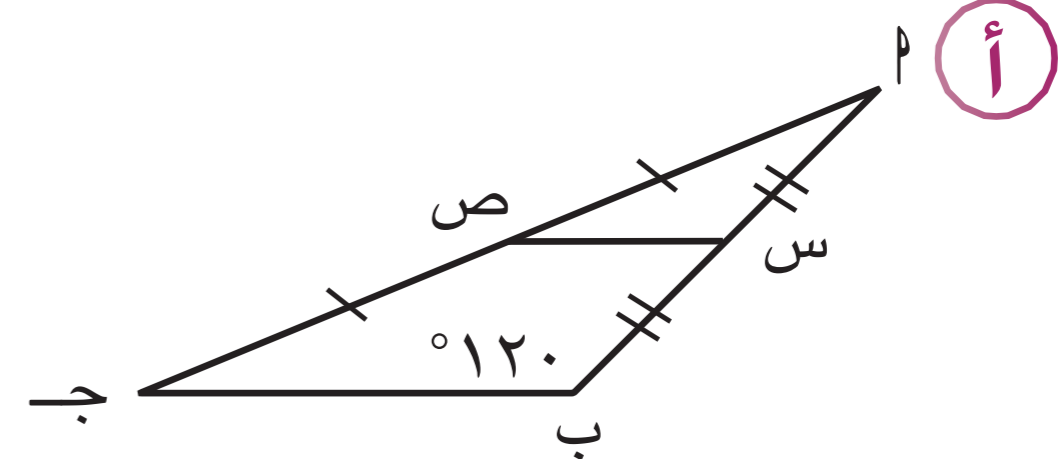
$PG = 9$



$\angle C = \angle B = 90^\circ$

$PG = 3$

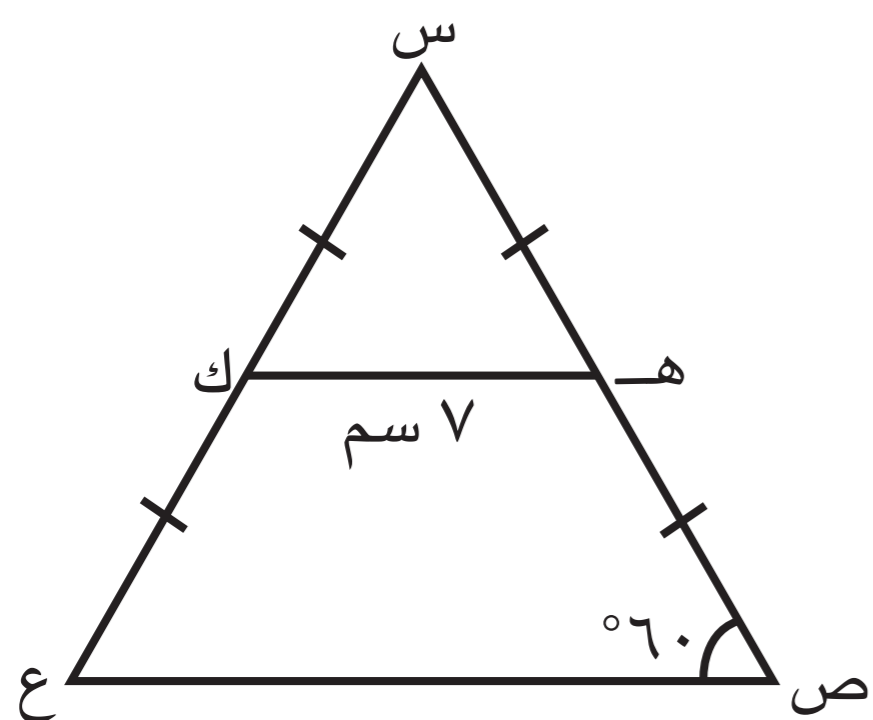
$PG = 3$



$\angle C = \angle B = 120^\circ$

$PG = 120$





٢ في  $\Delta$  س ص ع : س هـ = هـ ص = س ك = ك ع

$\angle$  ص =  $60^\circ$  ، هـ ك = ٧ سم .

أوجد بالبرهان : (١) طول ص ع .

(٢)  $\angle$  ع

(٣) طول س ع .

**البرهان :**

١ في  $\Delta$  س هـ ك :

هـ منتصف س هـ (مفرض)

ك منتصف س ع (مفرض)

$\therefore$  هـ ك // ص ع ،

هـ ك =  $\frac{1}{2}$  ص ع (نظرية)

$\therefore$  ص ع = ١٤

$٧ \times ٢ =$

$١٤ =$

**تذكر**



إذا كان المثلث متطابق الضلعين وقياس إحدى زواياه  $60^\circ$  ، فإن المثلث يكون متطابق الأضلاع .

٢ في  $\Delta$  س هـ ك : س هـ = هـ ص = س ك = ك ع (مفرض)

$\therefore$  س هـ = س ع (مفروض المبرهن)

$\angle$  هـ =  $\angle$  ك =  $60^\circ$

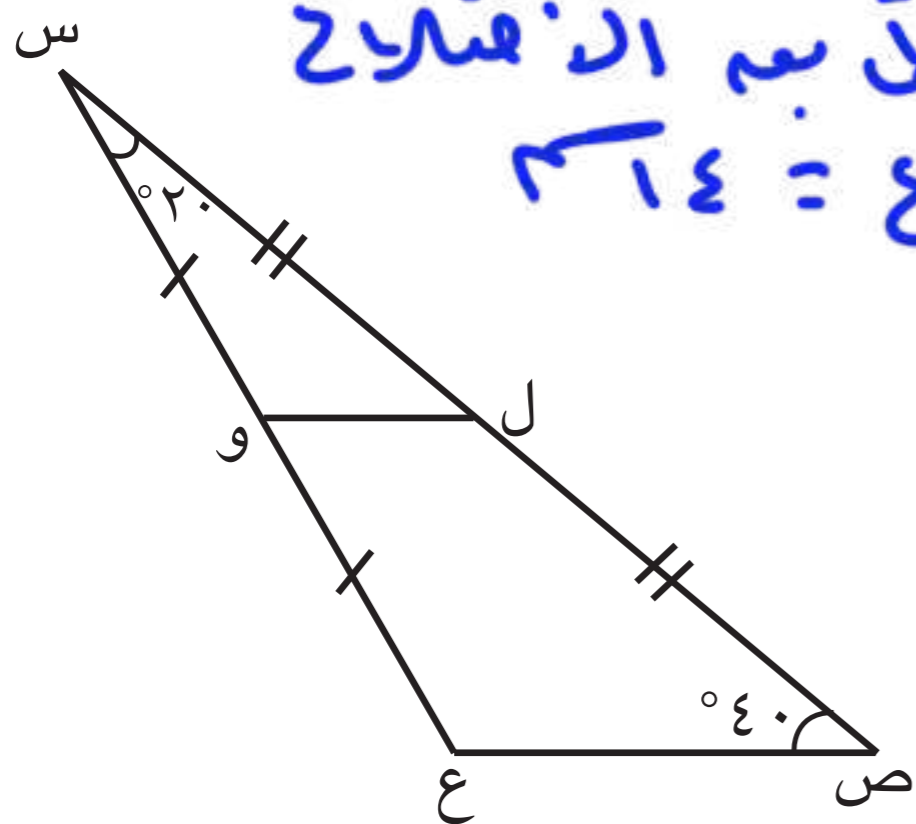
(مفروض المثلث المتطابق الضلعين)

٣ في  $\Delta$  س هـ ك :  $180^\circ = (\angle$  هـ +  $\angle$  ك) +  $\angle$  س

$180^\circ = 60^\circ + 60^\circ + \angle$  س

$\therefore$   $\angle$  س =  $60^\circ$

$\therefore$  س هـ = س ع = ١٤



٣ س ص ع مثلث فيه ،

ل منتصف س ص ، و منتصف س ع

$\angle$  ص =  $40^\circ$  ،  $\angle$  س =  $20^\circ$

أوجد بالبرهان  $\angle$  و (س و ل) .

**البرهان :**

في  $\Delta$  س هـ ل :

$180^\circ = (\angle$  هـ +  $\angle$  ل) +  $\angle$  س

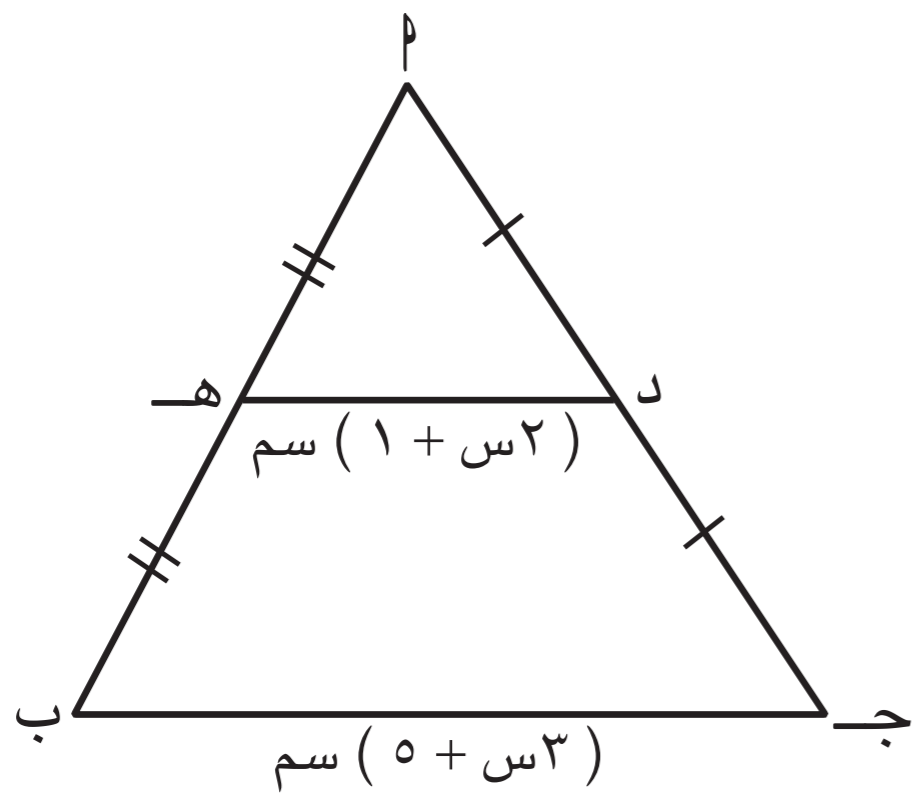
$180^\circ = 20^\circ + \angle$  ل

$\angle$  ل =  $160^\circ$

(مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية =  $180^\circ$ ) (بالتفاضل بين الطرفين مع  $\angle$  س)

ل منتصف س هـ ، و منتصف س ع (مفرض)

$\therefore$  ل و =  $\frac{1}{2}$  هـ ع (نظرية)



٤ أب ج مثلث فيه :

د منتصف  $\overline{أج}$  ، ه منتصف  $\overline{أب}$

حيث د ه =  $(1 + 2س)$  سم ، ج ب =  $(5 + 3س)$  سم .  
أوجد بالبرهان قيمة س .

**البرهان :**

في ه  $\overline{أب}$  ج :

د منتصف  $\overline{أج}$  (معطى)

ه منتصف  $\overline{أب}$  (معطى)

∴ د ه =  $\frac{1}{2}$  ج ب

ل ه // ج ب (نظرية)

$$5 + 3س = 2 + 4س$$

$$2 - 5 = 4س - 3س$$

$$س = 3$$

$$د ه = \frac{1}{2} ج ب$$

$$2 + 4س = \frac{1}{2} (5 + 3س)$$

$$2 + 4س = \frac{5 + 3س}{2}$$

٥ س ص ع مثلث فيه : ه منتصف س ص ،

$$\angle (ص) = \angle (س ه د) = 90^\circ$$

أثبت أن : د منتصف س ع .

**البرهان :**

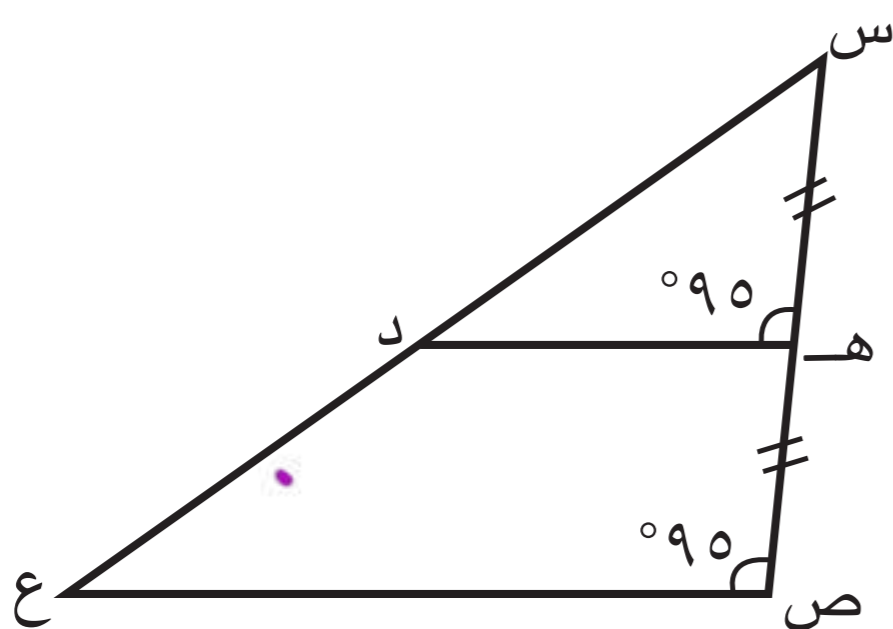
ه منتصف س ص (معطى) — ①

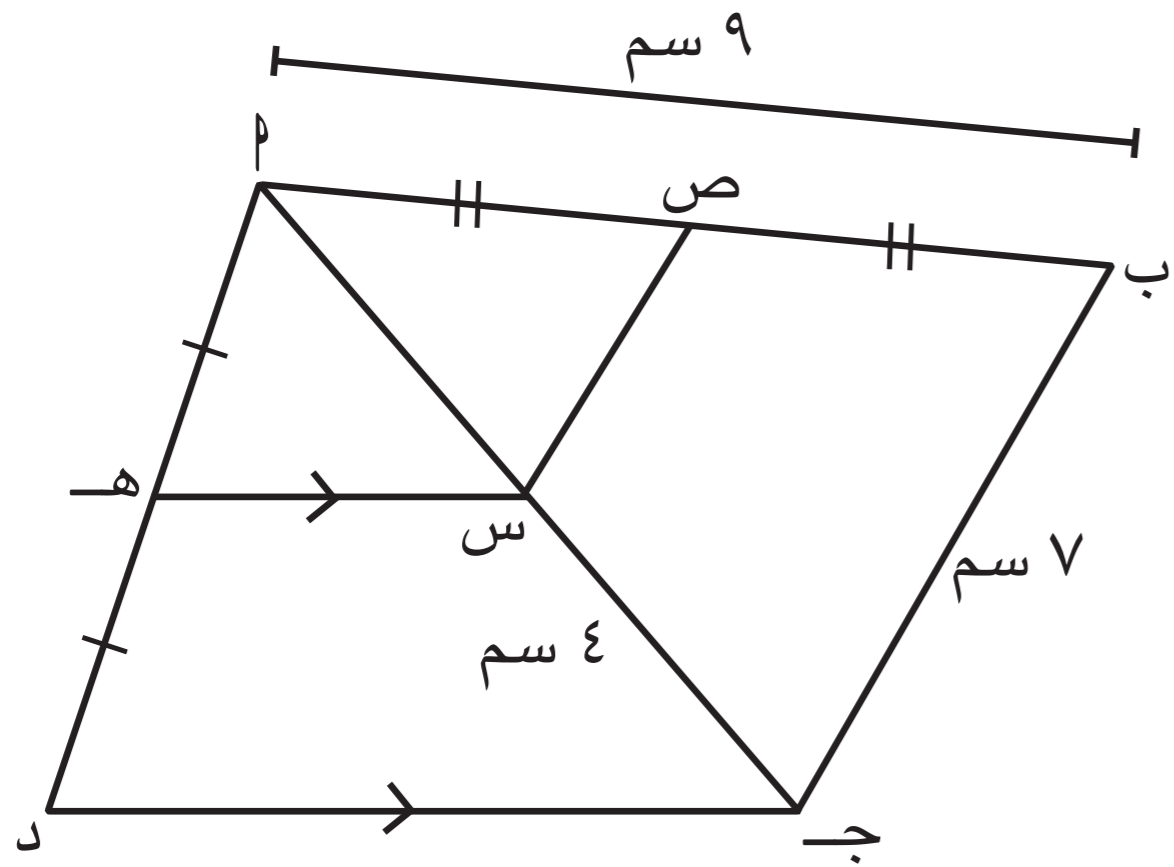
$$\angle (س ه د) = \angle (ق ه د) = 90^\circ \text{ (معطى)}$$

و ص ه نى و ه نى تناظر

∴ ه د // س ع — ②

س ه نى و ه نى تناظر  
∴ ه د // س ع (نظرية)





٦ في الشكل المقابل :  $\overline{ا ب ج د}$  شكل رباعي فيه :  
 هـ ، ص منتصفا  $\overline{ا د}$  ،  $\overline{ا ب}$  على الترتيب  
 س  $\exists$   $\overline{ا ج}$  بحيث س هـ //  $\overline{ج د}$  ،  $ج س = ٤$  سم .  
 إذا كان  $ب ج = ٧$  سم ،  $ا ب = ٩$  سم ،  
 أوجد : (١) طول  $\overline{ا س}$  .  
 (٢) محيط  $\Delta ا س ص$  .

البرهان :-

١ في  $\Delta ا ج د$  :

هـ منتصف  $\overline{ا د}$  (معطى)

س هـ //  $\overline{ج د}$  (معطى)

∴ س منتصف  $\overline{ا ج}$  (نظرية)

∴  $ا س = س ج$

$ا س = ٣$

٢ في  $\Delta ا ب ج$  :

ص منتصف  $\overline{ا د}$  (معطى)

س منتصف  $\overline{ا ج}$

∴  $س هـ = \frac{1}{2} ب ج$  ،  $س هـ // ا د$  (نظرية)

$س هـ = \frac{1}{2} \times ٧ = \frac{٧}{٢} = ٣,٥$

محيط  $\Delta ا س ص$  = مجموع أطوال أضلاعه

$٤ + ٣,٥ + ٣ =$

$= ١٠,٥$

$= ١٠ سم$

مهارات تفكير عليا :



٧ في الشكل المقابل :

س ص //  $\overline{د هـ}$  ،  $و هـ = ٤$  سم ،

$ا هـ = هـ ص = ص ب$

أوجد بالبرهان : طول  $\overline{و د}$  .

البرهان :-

في  $\Delta ا ب ج$  :

هـ هـ = ب هـ (معطى)

و هـ //  $\overline{س هـ}$  (معطى)

∴  $و هـ = \frac{1}{2} س هـ$  (نظرية)

$س هـ = ٤ \times ٢ =$

$٨ \times ٢ =$

$= ١٦ سم$

في  $\Delta هـ ب د$  :

هـ منتصف  $\overline{هـ ب}$  (معطى)

د هـ //  $\overline{س هـ}$  (معطى)

∴ س منتصف  $\overline{د ب}$  (نظرية)

$س هـ = \frac{1}{2} د هـ$

$د هـ = ٤ \times ٢ =$

$٨ \times ٢ =$

صفوة معلم الكويت

$و د = د هـ - و هـ$

$= ١٦ - ٤ =$

$= ١٢ سم$

# القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر

٧ - ٢

## The Segment Joining the Vertex of Right Angle to the Midpoint of the Hypotenuse

سوف تتعلم : توظيف نظرية القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة فيه المثلث القائم الزاوية إلى منتصف الوتر لحل تمارين هندسية .

### العبارات والمفردات :

Hypotenuse

وتر المثلث

Vertex

رأس

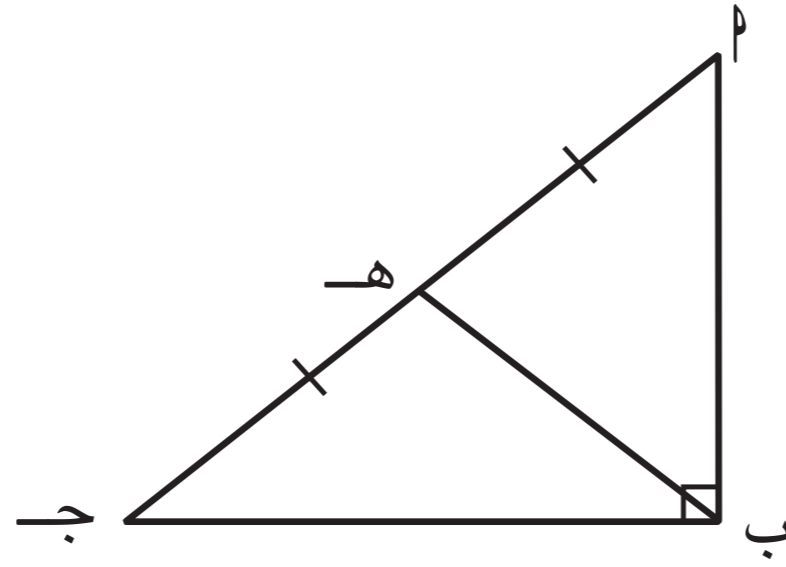
Right Angle

زاوية قائمة

### استكشاف (١)

#### اللوازم

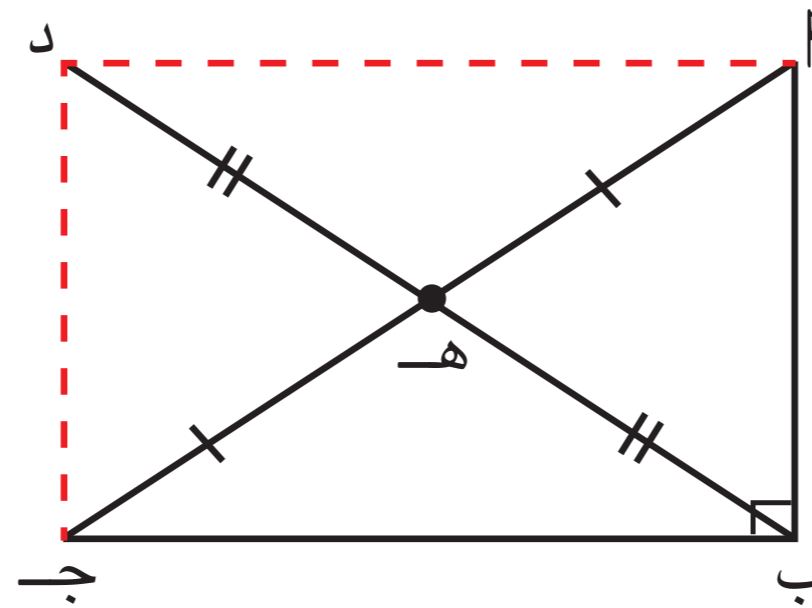
أدوات هندسية .



١ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ، هـ منتصف الوتر أ ج .

ما العلاقة بين طول ب هـ ، طول أ ج ؟

العمل :



١ نأخذ نقطة د  $\Rightarrow$  ب هـ بحيث تكون

ب هـ = هـ د

٢ أرسم أ د ، ج د ليكون شكلاً رباعياً .

أجب عما يلي :

أ هل أ ب ج د متوازي أضلاع ؟ لماذا ؟

نعم ، لأن العُضْرَانِ يَنْصِفُ كُلَّ مِنْهُمَا الْآخَرَ .

ب هل أ ب ج د مستطيل ؟ لماذا ؟

نعم ، لأنهُ مِتْرَانِ فِي أَضْلَاحِهِ زَاوِيَةٌ قَائِمَةٌ

ج هل ب هـ = هـ د = أ هـ = هـ ج ؟ لماذا ؟

نعم ، قطر المستطيل ينصف قطريه

د ما العلاقة بين ب هـ ، أ ج ؟

ب هـ =  $\frac{1}{2}$  أ ج

#### تذكر

في المثلثات القائمة الزاوية ضلعا القائمة هما الضلعان اللذان يحددان الزاوية القائمة ، والوتر هو أطول ضلع في المثلث وهو الضلع المقابل للزاوية القائمة .

#### معلومة مفيدة :

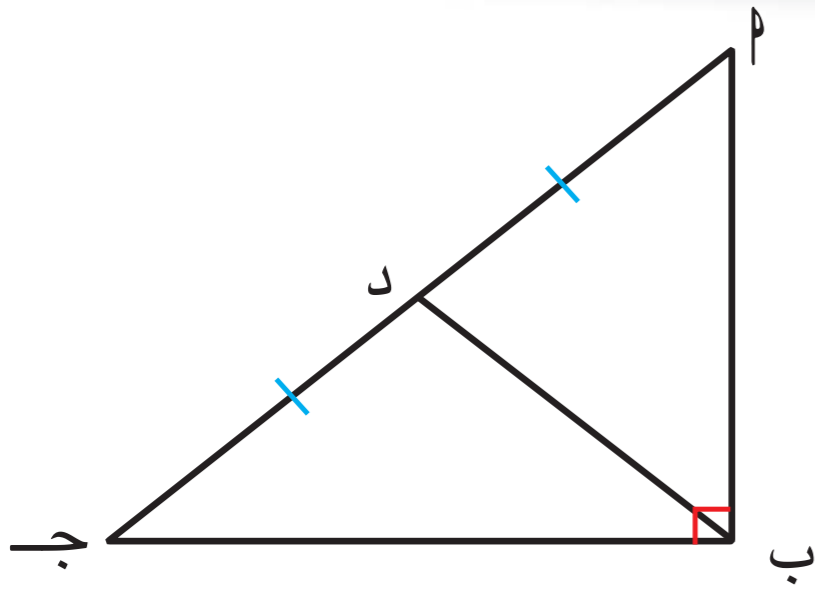
يستخدم المهندسون نظرية القطعة

المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة في مثلث إلى منتصف الوتر ، لمعرفة طول الدعائم الحديدية المستخدمة في الجسور .



نظرية :

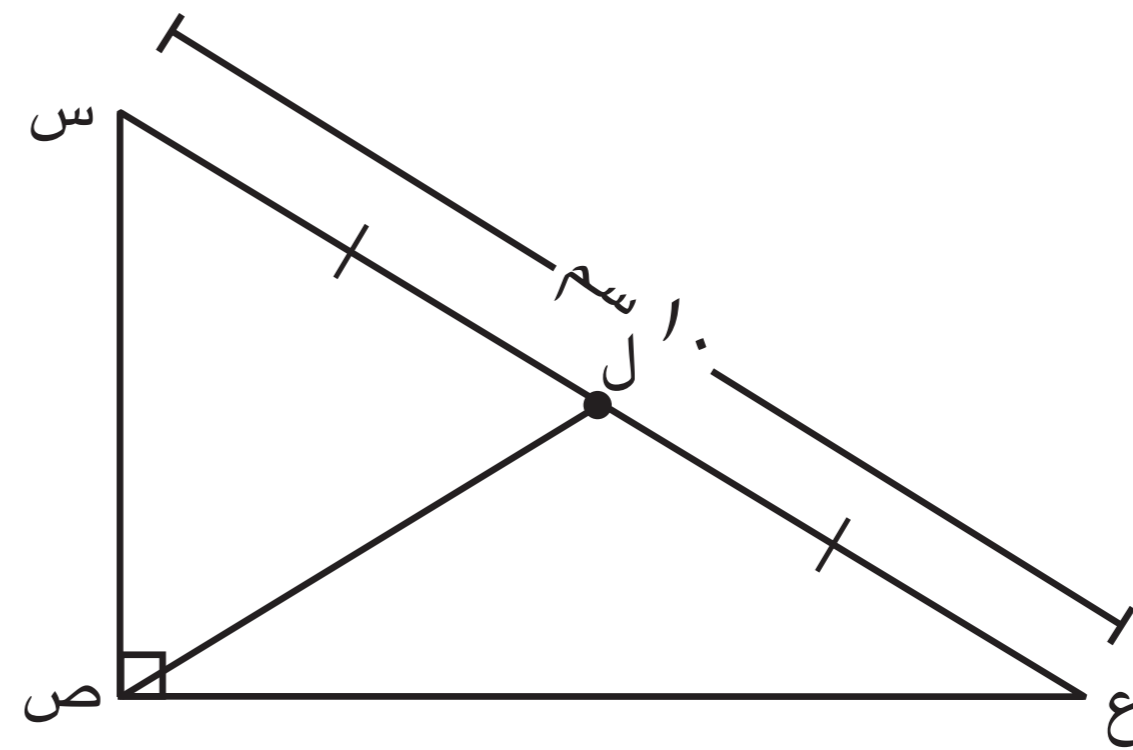
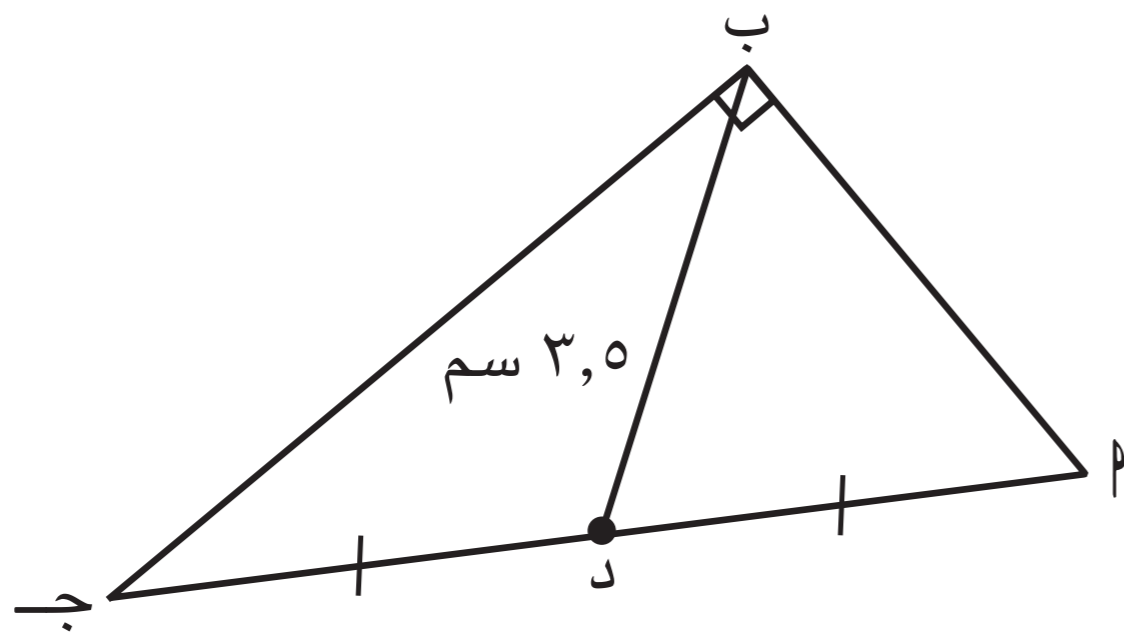
طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر .



في المثلث  $\triangle ABC$  :  
 $\angle B = 90^\circ$  ،  $D$  منتصف  $\overline{AC}$   
 $\therefore BD = \frac{1}{2} AC$

دورك الآن (١)

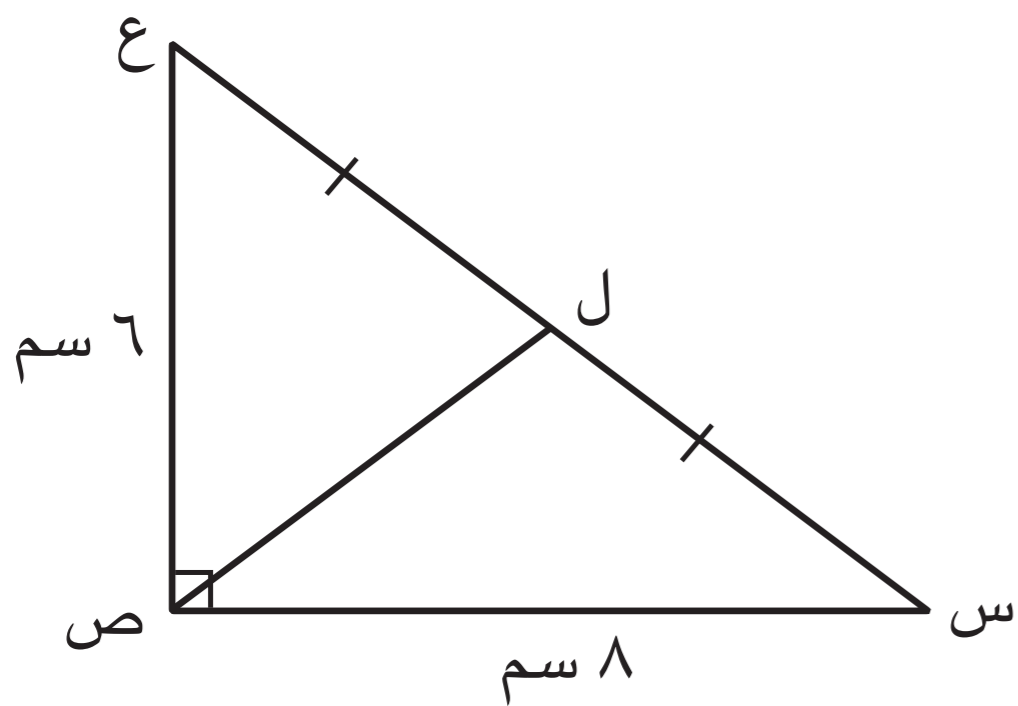
أكمل ما يلي ( دون استخدام الأدوات الهندسية ) :



$$\begin{aligned} AC \times BD &= AB \\ 3.5 \times AC &= AB \\ AC &= \frac{AB}{3.5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{طول } \overline{CL} &= \frac{1}{2} \overline{AB} \\ 10 &= \frac{1}{2} \overline{AB} \end{aligned}$$

مثال (١) :



في الشكل المقابل ،  $\triangle ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $C$  ،  
 $AC = 6$  سم ،  $BC = 8$  سم ،  $L$  منتصف  $AB$  .  
 أوجد بالبرهان طول  $CL$  .

الحل :

المعطيات :  $\triangle ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $C$  ،  $AC = 6$  سم ،  $BC = 8$  سم ،  $L$  منتصف  $AB$  .  
 المطلوب : إيجاد طول  $CL$  .

البرهان :  $\triangle ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $C$

(١)  
 (نظرية فيثاغورث)

$$\begin{aligned} \therefore (AC)^2 + (BC)^2 &= (AB)^2 \\ (6)^2 + (8)^2 &= \end{aligned}$$

$$100 = 36 + 64 =$$

(٢)

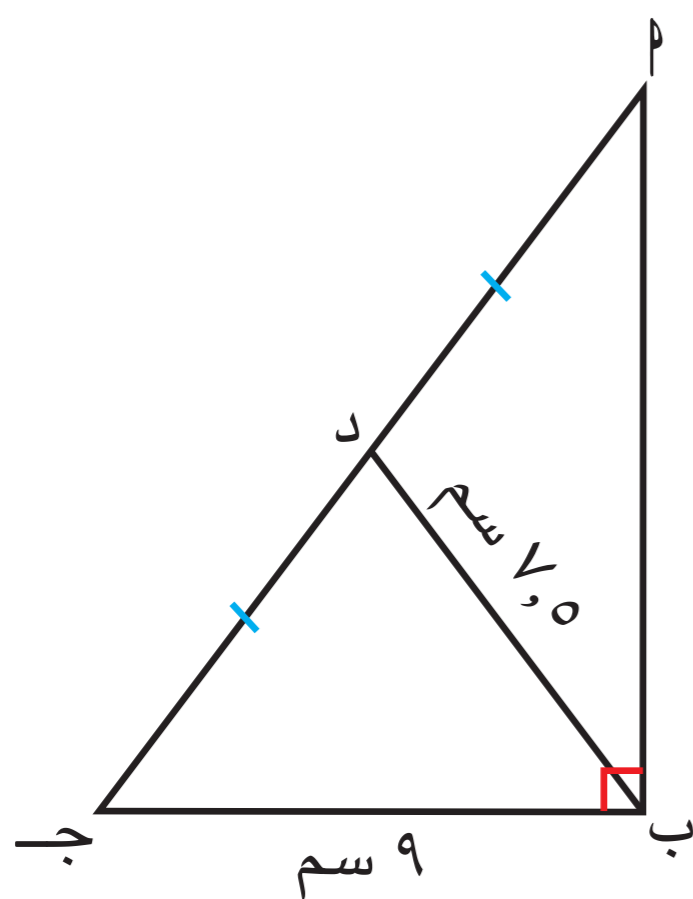
$$\therefore AC = \sqrt{100} = 10 \text{ سم}$$

$\therefore L$  منتصف  $AB$

من (١) ، (٢)

(نظرية)

$$\therefore CL = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 10 = 5 \text{ سم}$$



في الشكل المقابل،  $AB \perp BC$ ، مثلث قائم الزاوية في  $B$ ،  $D$  منتصف  $AC$ ،  
 $BC = 9$  سم،  $BD = 7,5$  سم

أوجد بالبرهان: (١)  $AD = DC$  (٢)  $BD = \frac{1}{2} AC$

المعطيات:  $AB \perp BC$  قائم الزاوية في  $B$   
 $D$  منتصف  $AC$ ،  $BC = 9$  سم،  $BD = 7,5$  سم  
 المطلوب: (١)  $AD = DC$  (٢)  $BD = \frac{1}{2} AC$

البرهان:  $AB \perp BC$  مثلث قائم الزاوية في  $B$

$\therefore D$  منتصف  $AC$

$$\therefore BD = \frac{1}{2} AC$$

$$AC = 2 \times BD$$

$$AC = 2 \times 7,5 = 15 \text{ سم}$$

من نظرية فيثاغورث

$$AB^2 = AC^2 - BC^2$$

$$AB^2 = 15^2 - 9^2 = 225 - 81 = 144$$

$$AB^2 = 144$$

$$AB = \sqrt{144} = 12 \text{ سم}$$

### عبّر عن فهمك



إذا كان طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس مثلث إلى منتصف الضلع المقابل له يساوي نصف طول هذا الضلع، فهل المثلث قائم الزاوية؟ فسّر إجابتك.

نعم المثلث قائم الزاوية

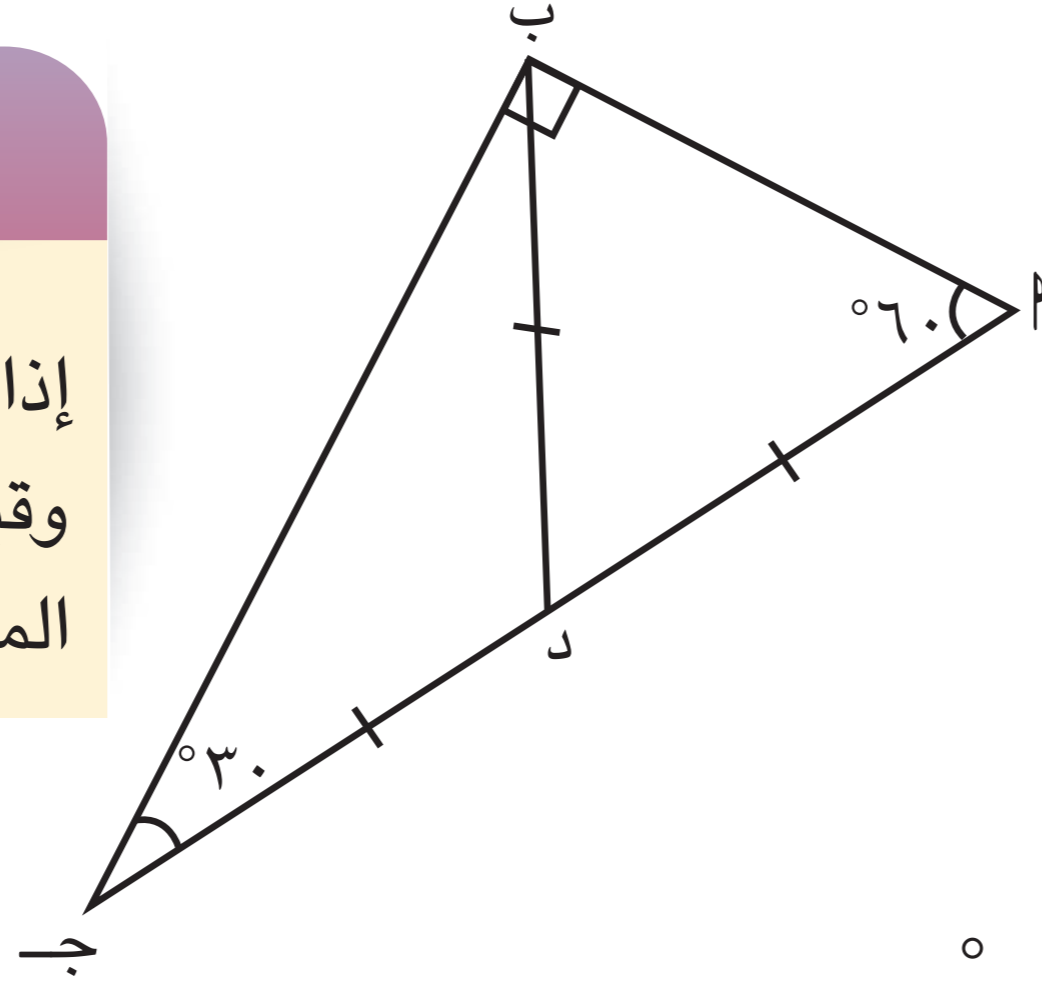
لأنه الضلع الواصل من الرأس إلى منتصف الضلع المقابل يساوي نصف طول هذا الضلع هو الوتر وبالتالي زاوية الرأس قائمة



تذكر



إذا كان المثلث متطابق الضلعين وقياس إحدى زواياه  $60^\circ$ ، فإن المثلث يكون متطابق الأضلاع.



أ ب ج مثلث ثلاثيني ستيني،

$$\text{و } (\hat{ج}) = 30^\circ, \text{ و } (\hat{ب}) = 60^\circ$$

$$\text{نلاحظ أن: ب د} = \frac{1}{2} \text{ ج}$$

في  $\Delta$  أ ب د:

$$\therefore \text{ب د} = \text{د ب}$$

$$\therefore \text{و } (\hat{ب}) = (\hat{د}) = 60^\circ$$

هل  $\Delta$  أ ب د متطابق الأضلاع؟

$$\text{أ ب} = \text{ب د} = \text{د أ}$$

$$\therefore \text{أ ب} = \frac{1}{2} \text{ ج}$$

نتيجة (١):

في المثلث الثلاثيني الستيني، يكون طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها  $30^\circ$  مساوياً نصف طول الوتر.

لاحظ أن

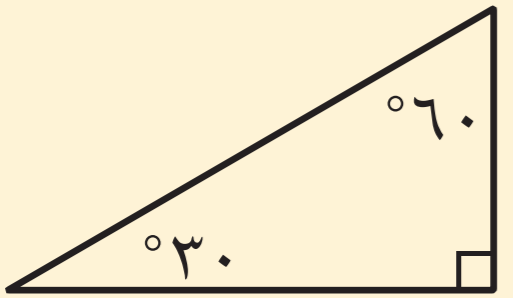


المثلث التالي

يُسمى:

مثلثاً ثلاثينياً

ستينياً



$$\therefore \text{أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب، و } (\hat{ج}) = 30^\circ$$

$$\therefore \text{أ ب} = \frac{1}{2} \text{ ج}$$

وعكس ذلك أيضاً صحيح:

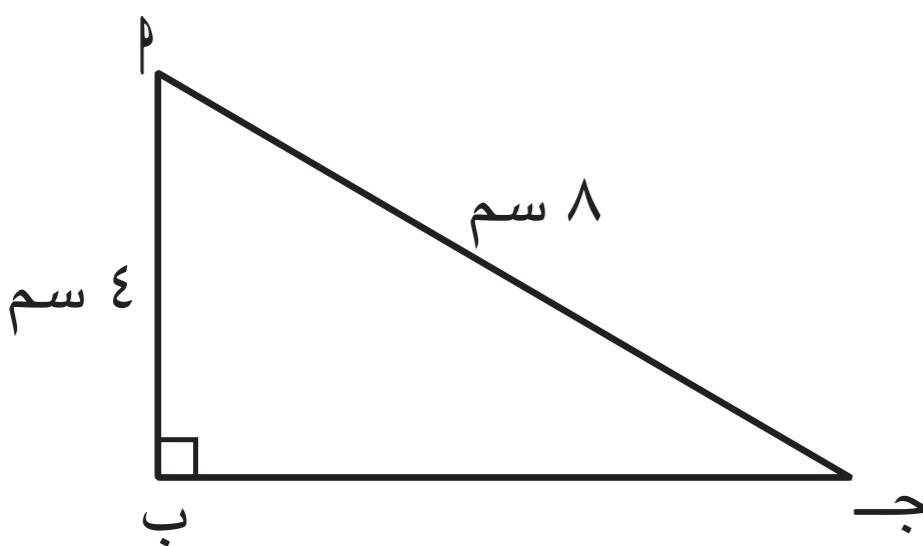
نتيجة (٢):

في المثلث القائم الزاوية، إذا كان طول أحد ضلعي الزاوية القائمة مساوياً نصف طول الوتر، فإن قياس الزاوية المقابلة لهذا الضلع  $30^\circ$  ويُسمى المثلث ثلاثينياً ستينياً.

$$\therefore \text{أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب، و } \text{أ ب} = \frac{1}{2} \text{ ج}$$

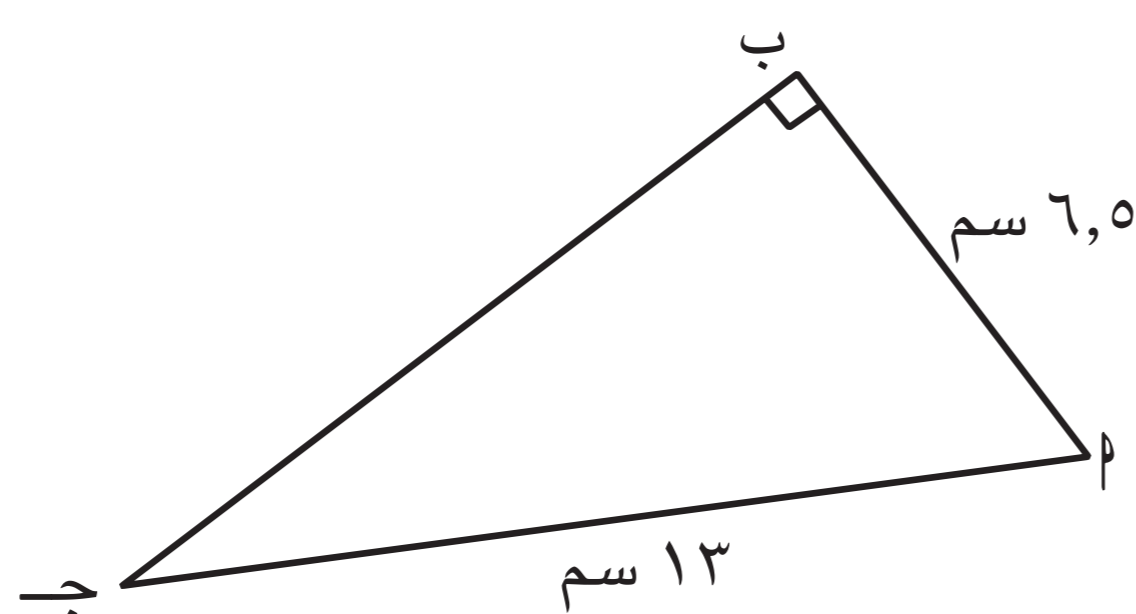
$$\therefore \text{و } (\hat{ج}) = 30^\circ$$

$\therefore$  المثلث أ ب ج ثلاثيني ستيني

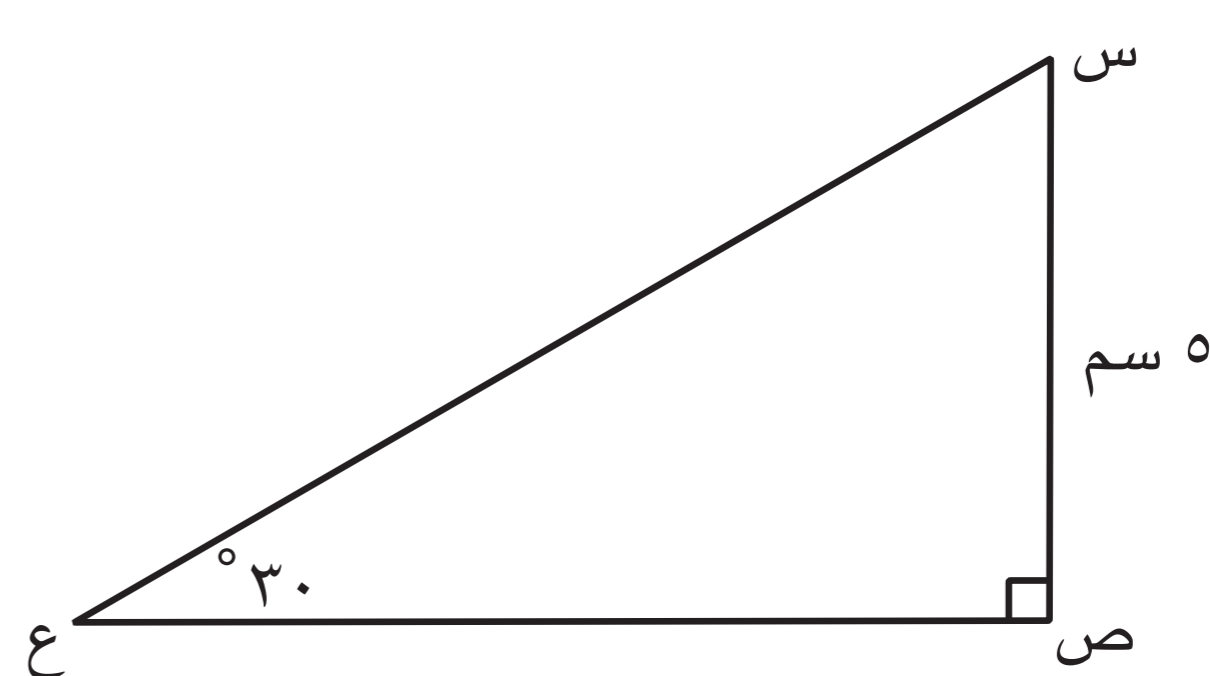




أكمل ما يلي ( دون استخدام الأدوات الهندسية ) :



$\angle ج = 30^\circ$



س ع =  $5 \times 2 = 10$  سم

### مثال (٢) :

في الشكل المقابل : د و هـ مثلث قائم الزاوية في و ،

د و = و ك = ٣ سم ، ك منتصف د هـ

أوجد بالبرهان : (١)  $\angle هـ$  و (٢)  $\angle د$

(٢) و (د)

الحل :

المعطيات : د هـ و مثلث قائم الزاوية في و ، د و = ٣ سم ،

و ك = ٣ سم ، ك منتصف د هـ .

المطلوب : إيجاد (١)  $\angle هـ$  و (٢)  $\angle د$

البرهان :  $\therefore$  المثلث د و هـ قائم الزاوية في و

، ك منتصف د هـ

$\therefore$  و ك =  $\frac{1}{2}$  د هـ ( نظرية )

$\therefore$  د هـ =  $2 \times 3 = 6$  سم

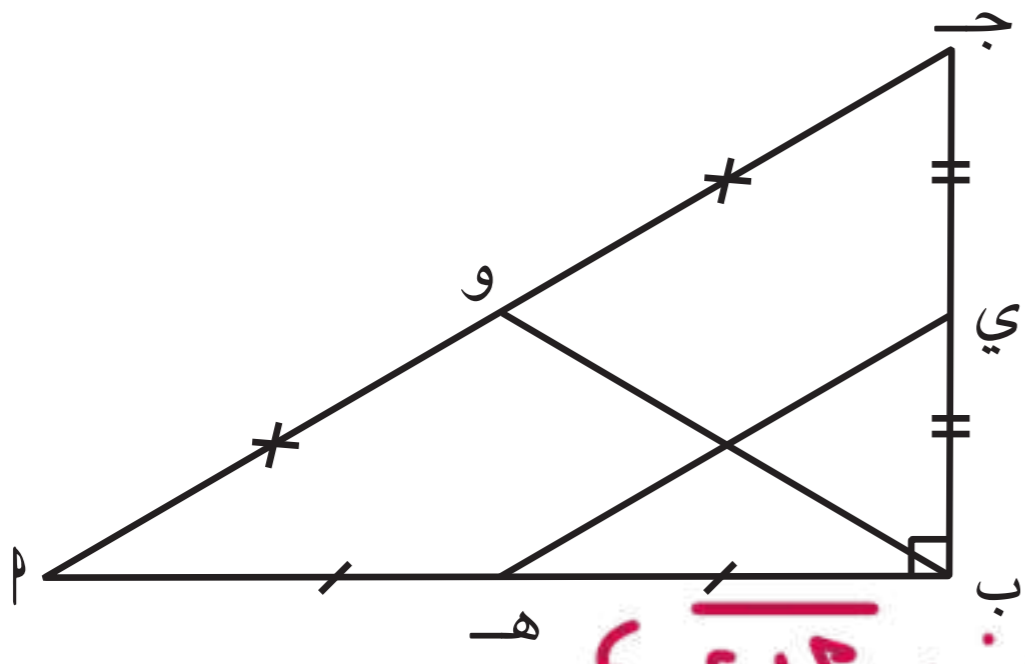
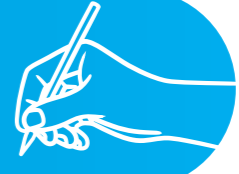
$\therefore$  د و =  $\frac{1}{2}$  د هـ

$\therefore$   $\angle هـ = 30^\circ$

$\therefore$  د و هـ مثلث ثلاثيني سئيني

$\therefore$   $\angle د = 60^\circ$





في الشكل المقابل:  $\angle$  ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ، فيه :

هـ منتصف  $\overline{AB}$  ، ي منتصف  $\overline{BC}$  ،

و منتصف  $\overline{AC}$  ، هـ ي = ٥ سم

أوجد بالبرهان كلاً مما يلي: (١) طول  $\overline{AO}$  (٢) طول  $\overline{BO}$  و

المعطيات:  $\angle$  ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ، هـ منتصف  $\overline{AB}$  ، ي منتصف  $\overline{BC}$  ، هـ ي = ٥ سم

المطلوب: (١) طول  $\overline{AO}$  ، (٢) طول  $\overline{BO}$

البرهان:  $\angle$  ب ج مثلث فيه: هـ منتصف  $\overline{AB}$  ، ي منتصف  $\overline{BC}$

$\therefore$  هـ ي =  $\frac{1}{2} \overline{AC}$  (نظرية)

$\angle$  ب ج =  $5 \times 2 = 10$  سم

$\therefore$   $\angle$  ب ج مثلث قائم الزاوية في ب

و منتصف  $\overline{AB}$

$\therefore$  ب و =  $\frac{1}{2} \overline{AC}$  (نظرية)

=  $10 \times \frac{1}{2} = 5$  سم

مثال (٣):

في الشكل المقابل: أوجد بالبرهان قيمة ك .

الحل:

المعطيات:  $\Delta$  س ع ص مثلث قائم الزاوية في ع ،  $\angle$  س =  $30^\circ$

المطلوب: إيجاد قيمة ك .

البرهان:  $\therefore$  المثلث س ع ص قائم الزاوية في ع ،  $\angle$  س =  $30^\circ$

$\therefore \Delta$  س ع ص مثلث ثلاثيني ستيني

$\therefore$  ع ص =  $\frac{1}{2}$  س ص (نتيجة)

$2 + ك = \frac{1}{2} (12 + ك)$

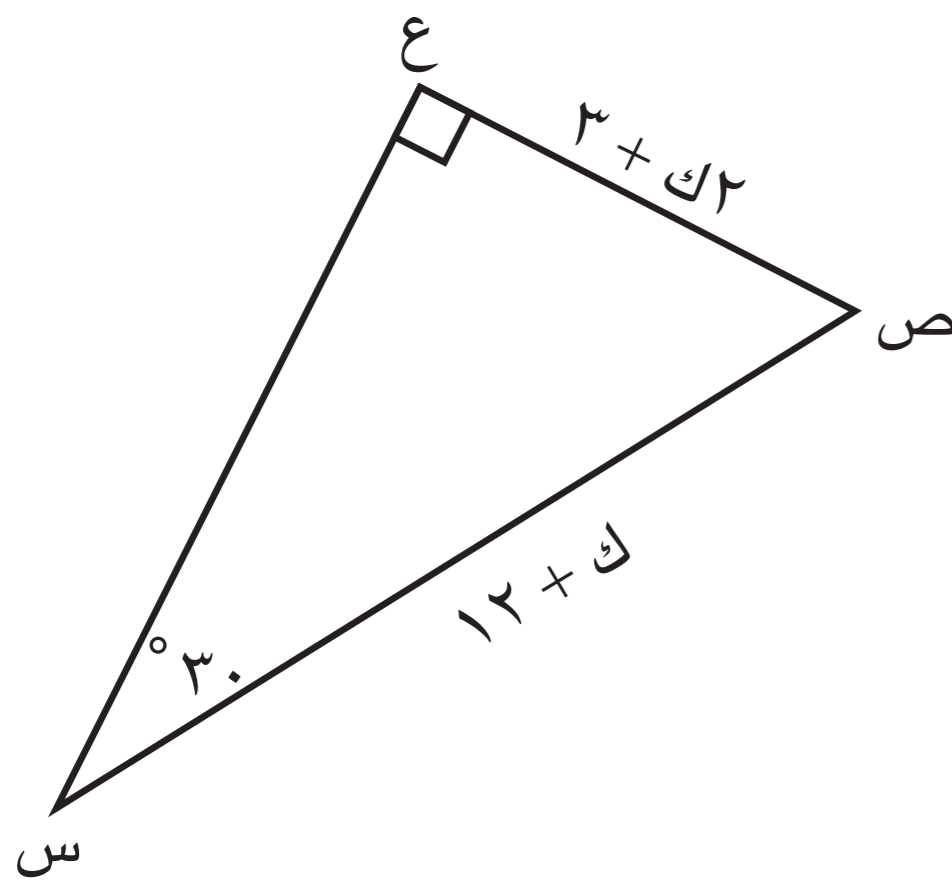
$2(2 + ك) = (12 + ك)$

$4 + 2ك = 12 + ك$

$4ك - ك = 12 - 4$

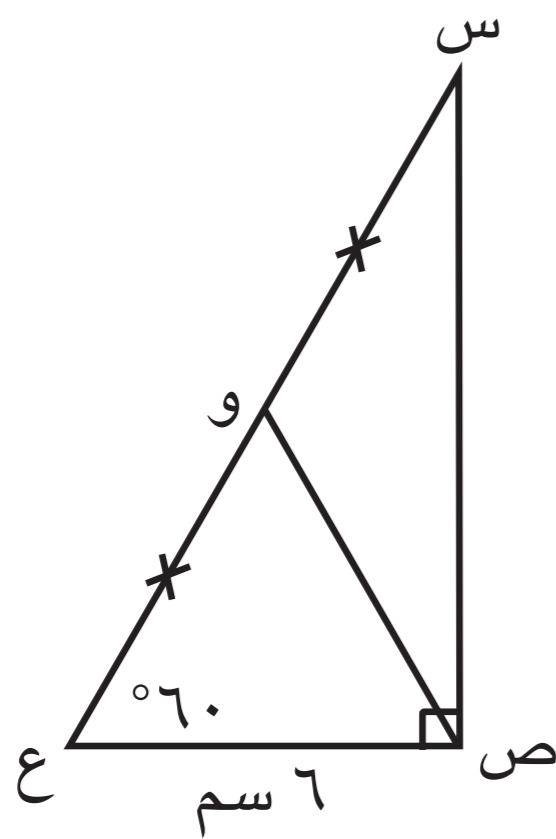
$3ك = 8$

$\therefore ك = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$





- ١) س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ، و منتصف س ع .  
 أوجد بالبرهان كلاً مما يلي : (١) طول س ع  
 (٢) طول ص و  
 (٣)  $\hat{و} (و \hat{ص} س)$



البرهان :

١ في ه س ع قائم الزاوية في ص :

م (ش) =  $180 - (90 + 60)$

=  $180 - 150 = 30$  (مجموع قياسات زوايا المثلث =  $180^\circ$ )

∴  $ص و = \frac{1}{2} س ع$

س ع =  $2 \times ص و$

=  $2 \times 6 = 12$  سم (نتيجة)

٢ في ه س ع قائم الزاوية في ص :

ص و =  $\frac{1}{2} س ع$

ص و =  $\frac{1}{2} س ع$

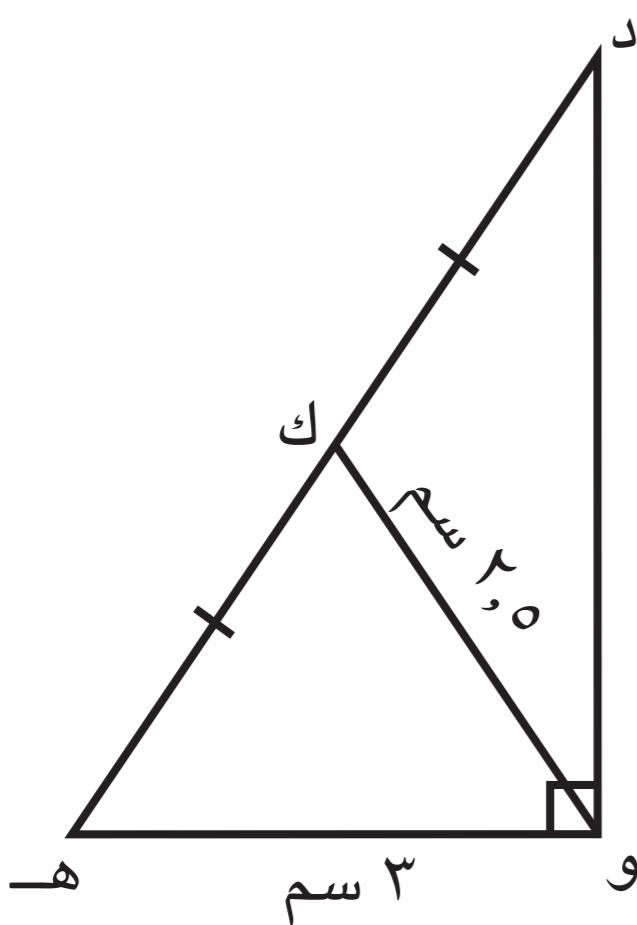
٣ ∴ و منتصف س ع (مفترضا)

∴ ص و =  $\frac{1}{2} س ع$  (نظرية)

=  $\frac{1}{2} \times 12 = 6$  سم

∴ م (و) = م (ص) = م (س) =  $30^\circ$   
 (مخالفات المثلث الخطية الضعيفة)

- ٢) في الشكل المقابل : المثلث ه و د قائم الزاوية في و ، ك منتصف ه د .  
 أوجد بالبرهان كلاً مما يلي : (١) طول ه د  
 (٢) طول د و



البرهان :

١ في ه و د قائم الزاوية في و :

ك منتصف ه د (مفترضا)

∴ و ك =  $\frac{1}{2} ه د$  (نظرية)

ه د =  $2 \times و ك$

=  $2 \times 2.5 = 5$  سم

٢ (د) = (و) = (ه) =  $90^\circ$

=  $180 - (90 + 30)$

=  $180 - 120 = 60$

=  $16$

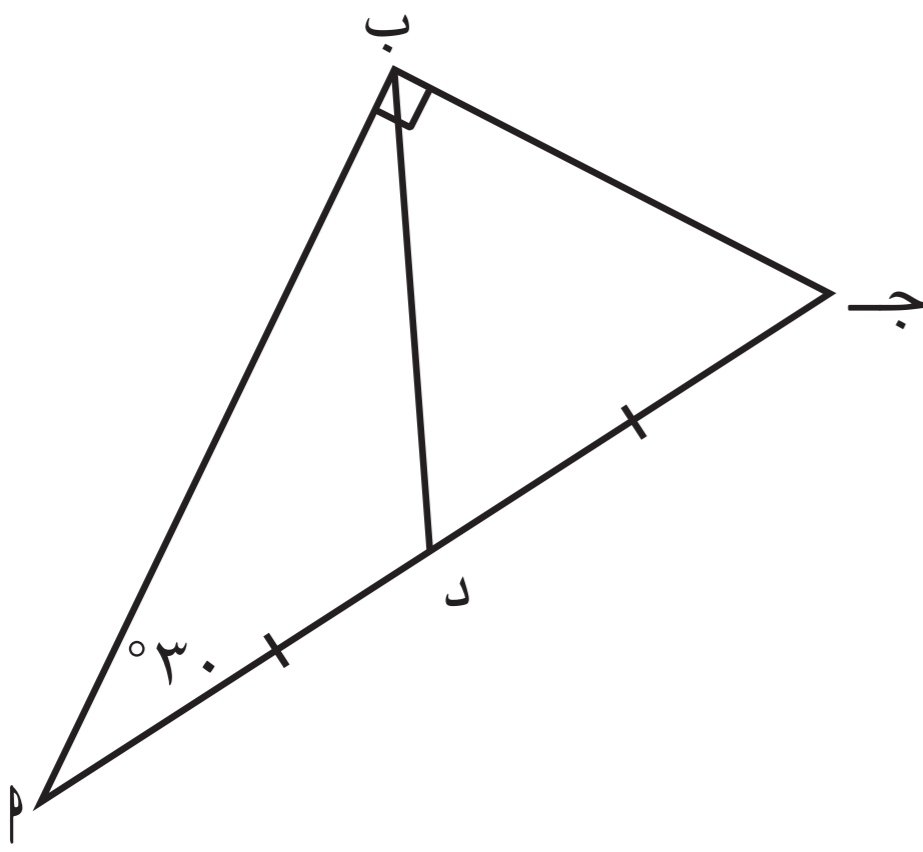
د و =  $16$

=  $16$  سم (نظرية فيثاغورث)



٣ في الشكل المقابل :

المثلث  $\Delta$  ب ج قائم الزاوية في ب ،  $\angle \alpha = 30^\circ$  .  
 أثبت أن المثلث ب د ج متطابق الأضلاع .



**البرهان :**

في  $\Delta$  ب د ج القائم الزاوية في ب :

د منتصف  $\overline{\alpha\gamma}$  (مفروض)

$\therefore \beta\alpha = \beta\gamma$  (نظرية)

ب د = ج د — ①

ب ب = ج ج (مفروض)  $\angle \alpha = 30^\circ$  (مفروض)

$\therefore \beta\alpha = \beta\gamma$  (نتيجة)

ب د = ج د — ②  
 من ا ب ، ج د ينتج انه ب ج = ج د = ب د  
 ب ج = ج د = ب د متطابق الأضلاع .

٤ في الشكل المقابل : أوجد بالبرهان طول  $\overline{\alpha\beta}$  .

في  $\Delta$  ب د ج القائم الزاوية في ب

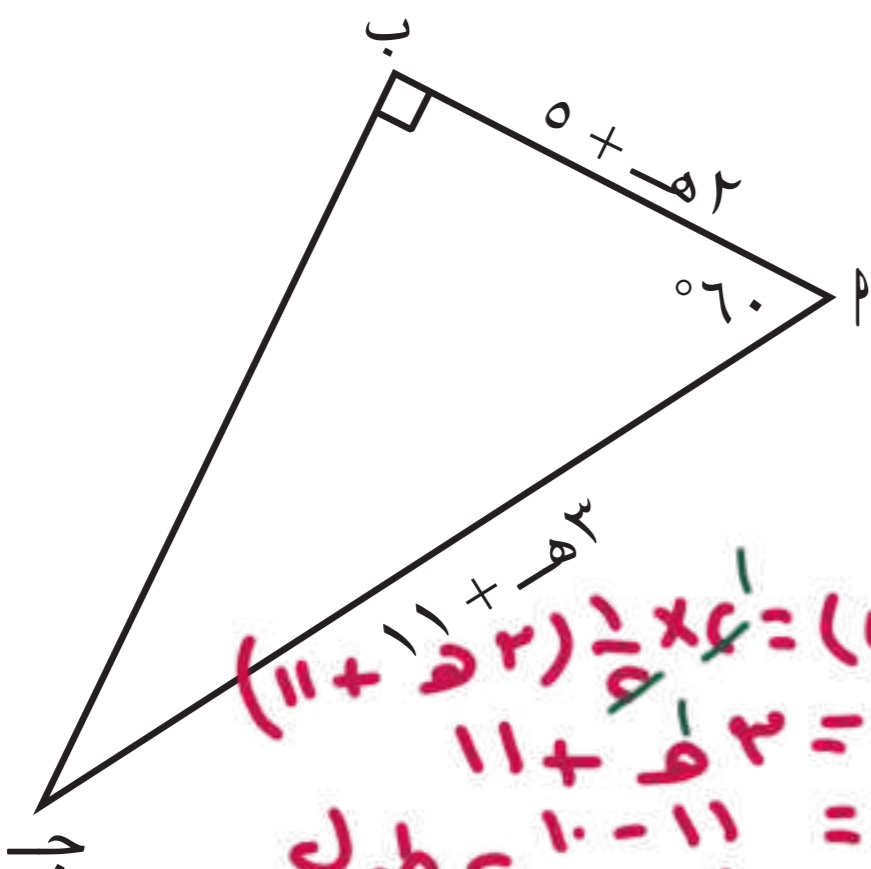
ج د = ج ج (مفروض)  $\angle \alpha = 60^\circ$  ،  $\angle \beta = 90^\circ$  ،  $\angle \gamma = 30^\circ$

$\therefore \beta\alpha = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

(مجموع قياسات زوايا مثلث الداخلية =  $180^\circ$ )

$\therefore \beta\alpha = \beta\gamma$  (نتيجة)

$\beta\alpha = 60^\circ$  ،  $\beta\gamma = 60^\circ$  ،  $\beta\alpha = \beta\gamma$



$\beta\alpha = 60^\circ$  ،  $\beta\gamma = 60^\circ$  ،  $\beta\alpha = \beta\gamma$   
 $\beta\alpha = 60^\circ$  ،  $\beta\gamma = 60^\circ$  ،  $\beta\alpha = \beta\gamma$   
 طول  $\overline{\alpha\beta} = 7$  وحدة طول  
 طول  $\overline{\alpha\beta} = 7$  وحدة طول

٥ في الشكل المقابل :  $\Delta$  ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ،

و منتصف  $\overline{\alpha\beta}$  ، ه منتصف  $\overline{\beta\gamma}$  ،

د منتصف  $\overline{\alpha\gamma}$  .

أثبت أن  $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha\gamma}$  و  $\overline{\beta\gamma} = \overline{\beta\alpha}$

**البرهان :**

في  $\Delta$  ب د ج القائم الزاوية في ب :

د منتصف  $\overline{\alpha\gamma}$  ، ه منتصف  $\overline{\beta\gamma}$  (مفروض)

$\therefore \beta\alpha = \beta\gamma$  (نظرية) — ①

د منتصف  $\overline{\alpha\gamma}$  (مفروض)

$\therefore \beta\alpha = \beta\gamma$  (نظرية) — ②

من ا ب ، ج د ينتج انه ب ج = ج د = ب د

ب ج = ج د = ب د

(من خواص المثلث)



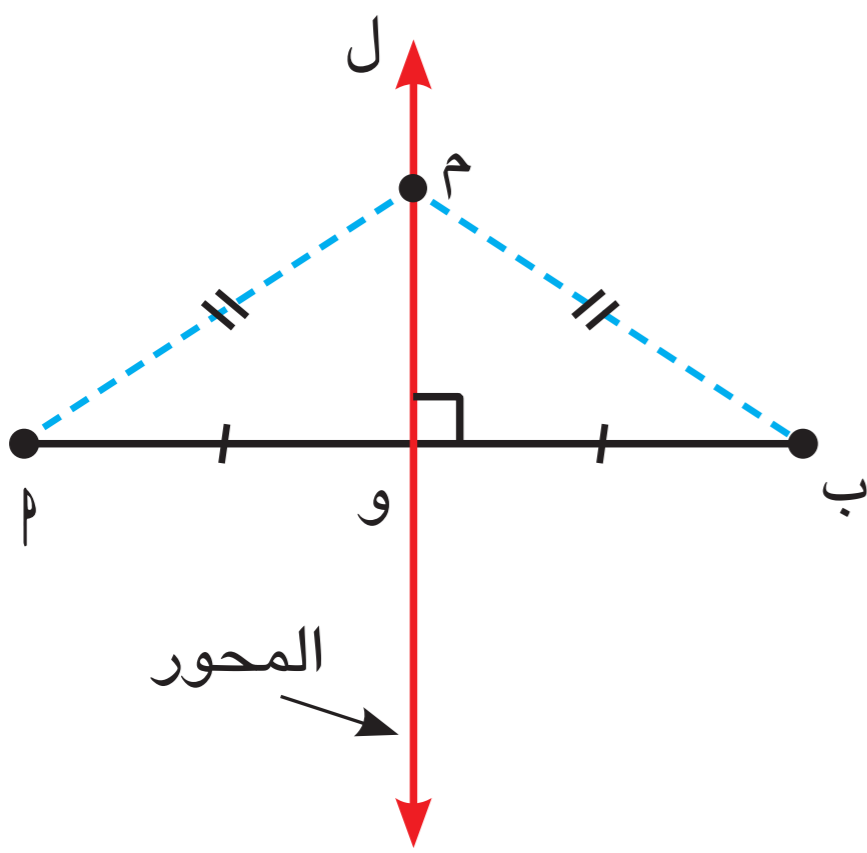
## Perpendicular Bisectors of a Triangle

سوف تتعلّم : توظيف نظرية محاوِر أضلاع المثلث لحلّ تمارين هندسية .

### العبارات والمفردات :

Perpendicular Bisector

محور القطعة المستقيمة



تعلّم أنّ محور القطعة المستقيمة هو العمود المنصف لها .

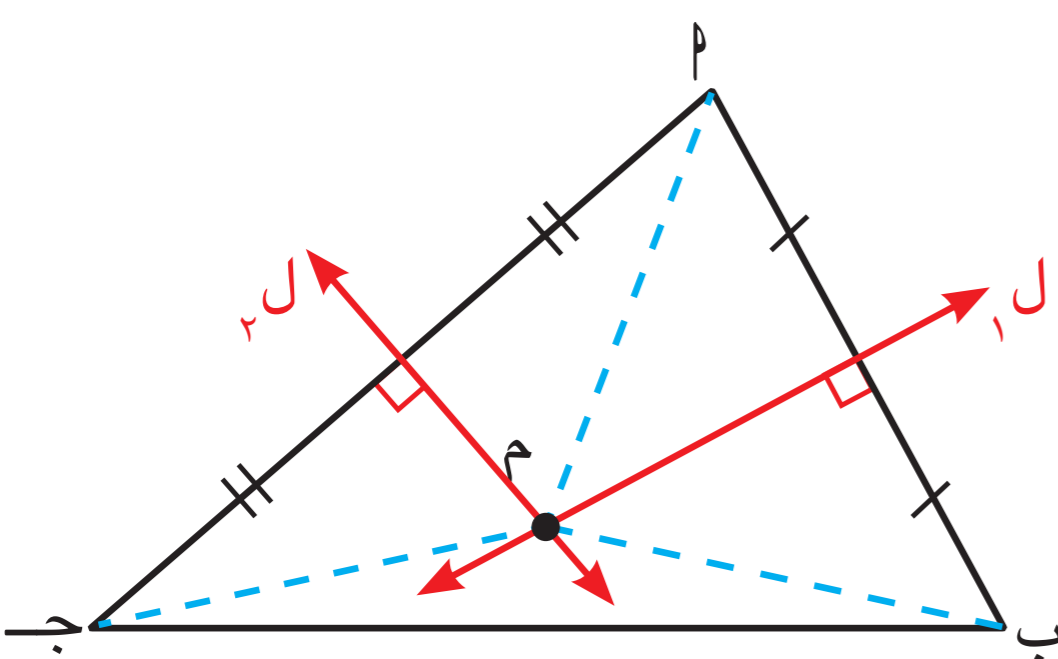
في الشكل المقابل :  $\overleftrightarrow{L}$  محور  $\overline{AB}$

$\therefore \overleftrightarrow{L} \perp \overline{AB}$  ،  $AO = BO$

### خواصّ محور قطعة مستقيمة

- أيّ نقطة تنتمي إلى محور قطعة مستقيمة تكون على أبعاد متساوية من طرفي القطعة المستقيمة .
- أيّ نقطة على أبعاد متساوية من طرفي قطعة مستقيمة تنتمي إلى محور هذه القطعة المستقيمة .

### استكشاف



بالمثل :  
 $\overleftrightarrow{L_1}$  محور  $\overline{AB}$  ،  $M \in \overleftrightarrow{L_1}$   
 $MA = MB$  (٢)

أكمل :  
 $\therefore \overleftrightarrow{L_2}$  محور  $\overline{AC}$  ،  $M \in \overleftrightarrow{L_2}$   
 $MA = MC$  (١)

من (١) ، (٢)

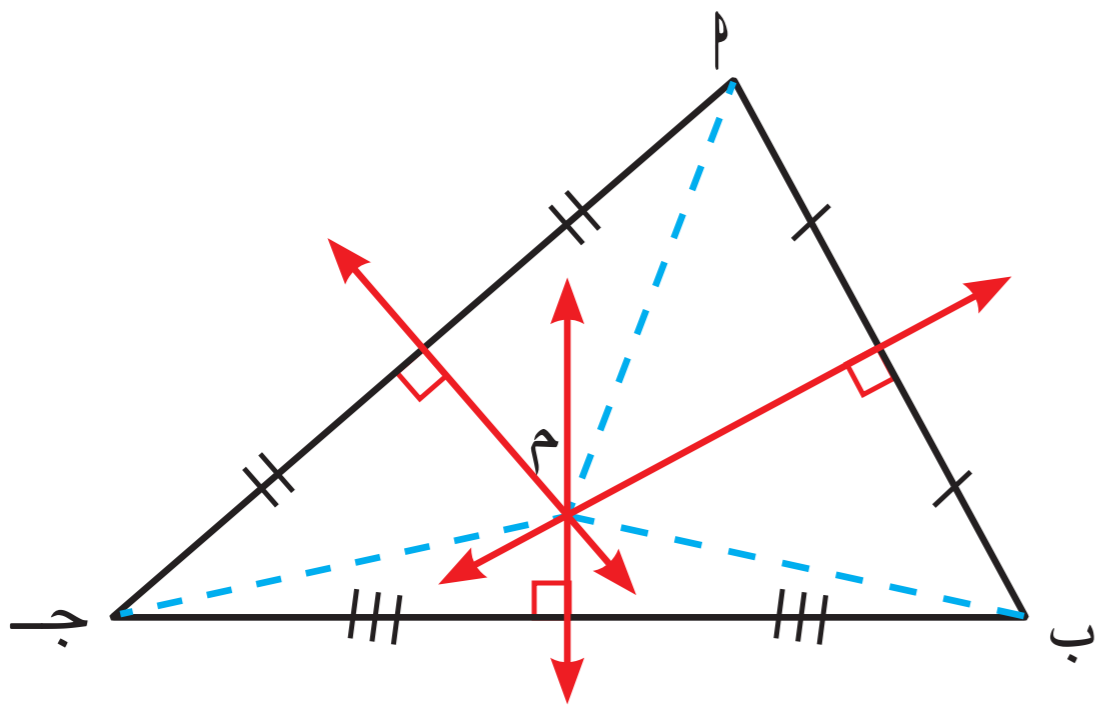
$\therefore MA = MB = MC$

$\therefore M \in$  محور  $\overline{BC}$

$\therefore$  محاوِر أضلاع المثلث تتقاطع في نقطة واحدة .



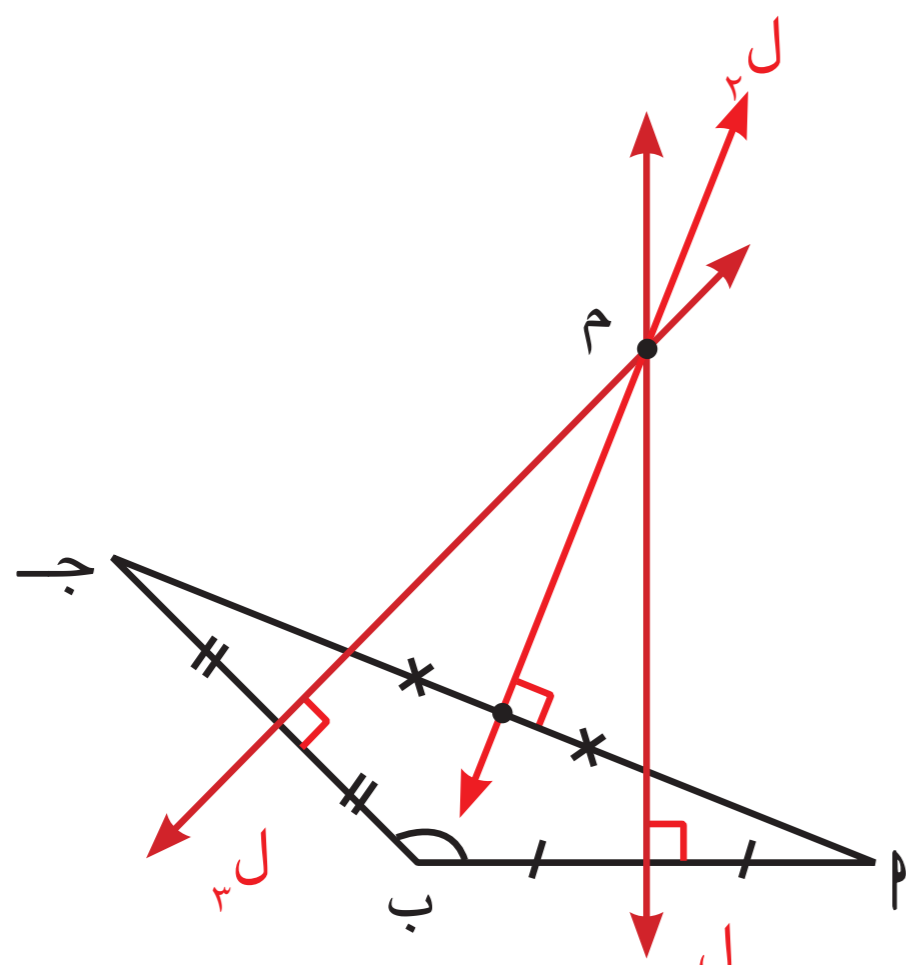
**نظرية : محاور أضلاع المثلث تتقاطع في نقطة واحدة .**



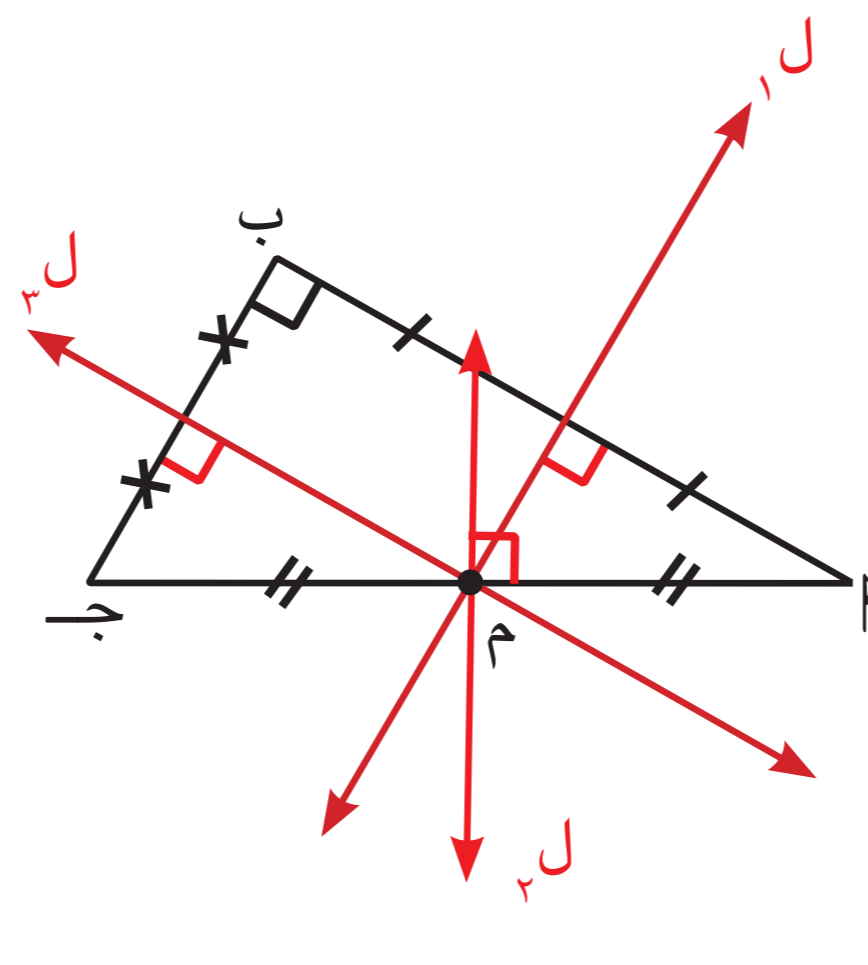
من « إستكشِف » السابق ،  
 م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث  $\Delta$  ب ج  
 $\therefore$  م  $\Delta$  = م ب = م ج

**نتيجة :**

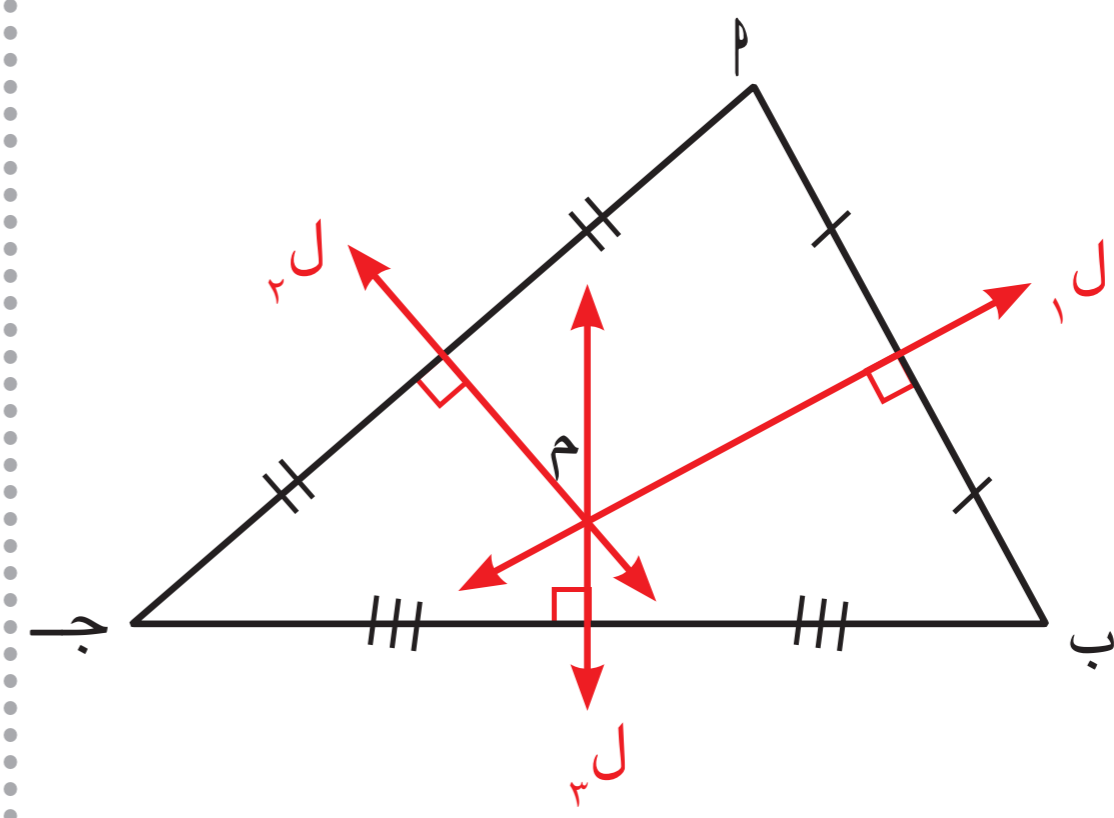
نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث تقع على أبعاد متساوية من رؤوسه .



مثلث منفرج الزاوية



مثلث قائم الزاوية

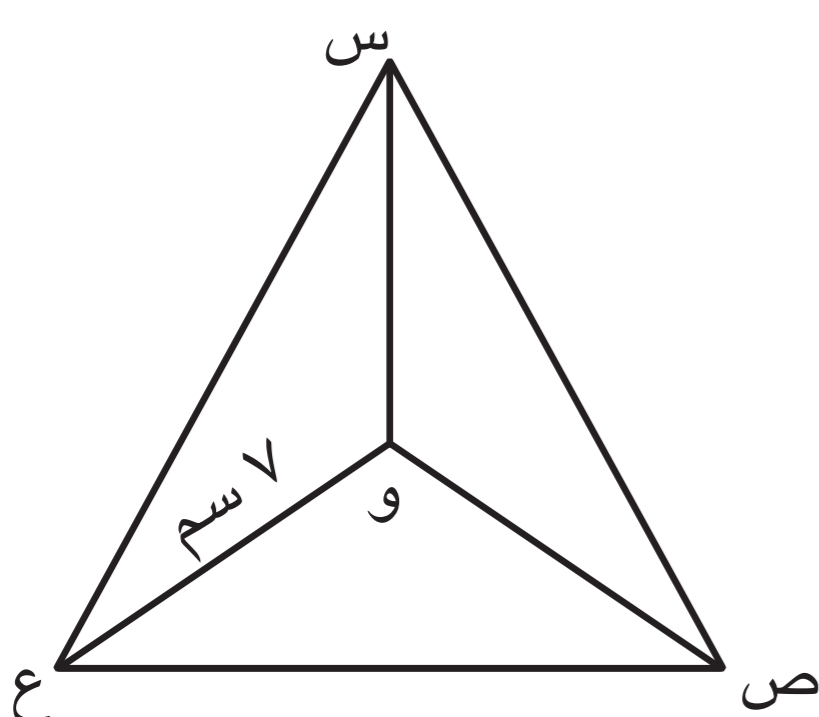
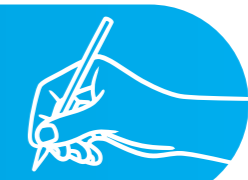


مثلث حادّ الزوايا

من الأشكال السابقة نلاحظ أنّ :

- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث الحادّ الزوايا تقع داخل المثلث .
- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث القائم الزاوية تقع في منتصف الوتر .
- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث المنفرج الزاوية تقع خارج المثلث .

**دورك الآن ( ١ )**



المثلث س ص ع فيه : و نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ،

و ع = و ص . أكمل دون استخدام الأدوات الهندسية :

و س = ..... سم

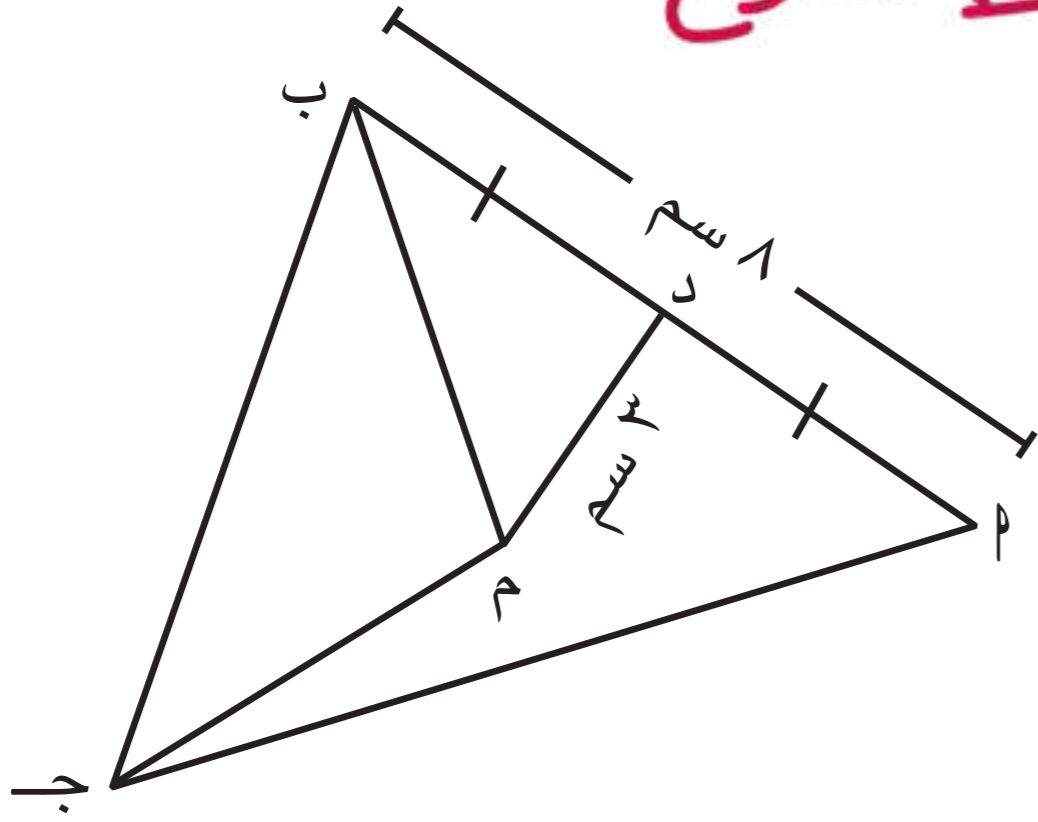
و ص = ..... سم





لتكن م نقطة تقع على أبعاد متساوية من رؤوس مثلث . فهل م هي نقطة تقاطع محاور أضلاعه ؟ فسّر إجابتك . نعم ، هذه النقطة هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث .  
 م دوس مثلثا م دوس نفسى مركز الدائرة المحيطة بالمثلث م  
 م نقطة تقاطع محاور الأضلاع .

مثال (١):



أب جـ مثلث فيه :  $AB = 8$  سم ، د منتصف  $\overline{AB}$   
 م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ،  $BC = 3$  سم .  
 أوجد بالبرهان كلاً مما يلي : (١) طول  $\overline{DM}$  . (٢) طول  $\overline{AM}$  .

الحل :

المعطيات :  $AB = 8$  سم ، د منتصف  $\overline{AB}$   
 م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ،  $BC = 3$  سم

المطلوب : إيجاد : (١) طول  $\overline{DM}$  (٢) طول  $\overline{AM}$

(معطى)

البرهان :  $\therefore AB = 8$  سم ، د منتصف  $\overline{AB}$ 

$$\therefore DB = 8 \times \frac{1}{2} = 4 \text{ سم}$$

(معطى)

$\therefore$  م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ، د منتصف  $\overline{AB}$

$$\therefore DM \perp AB$$

$\therefore \Delta DMB$  قائم الزاوية في د

$$(DM)^2 + (DB)^2 = (MB)^2$$

(نظرية فيثاغورث)

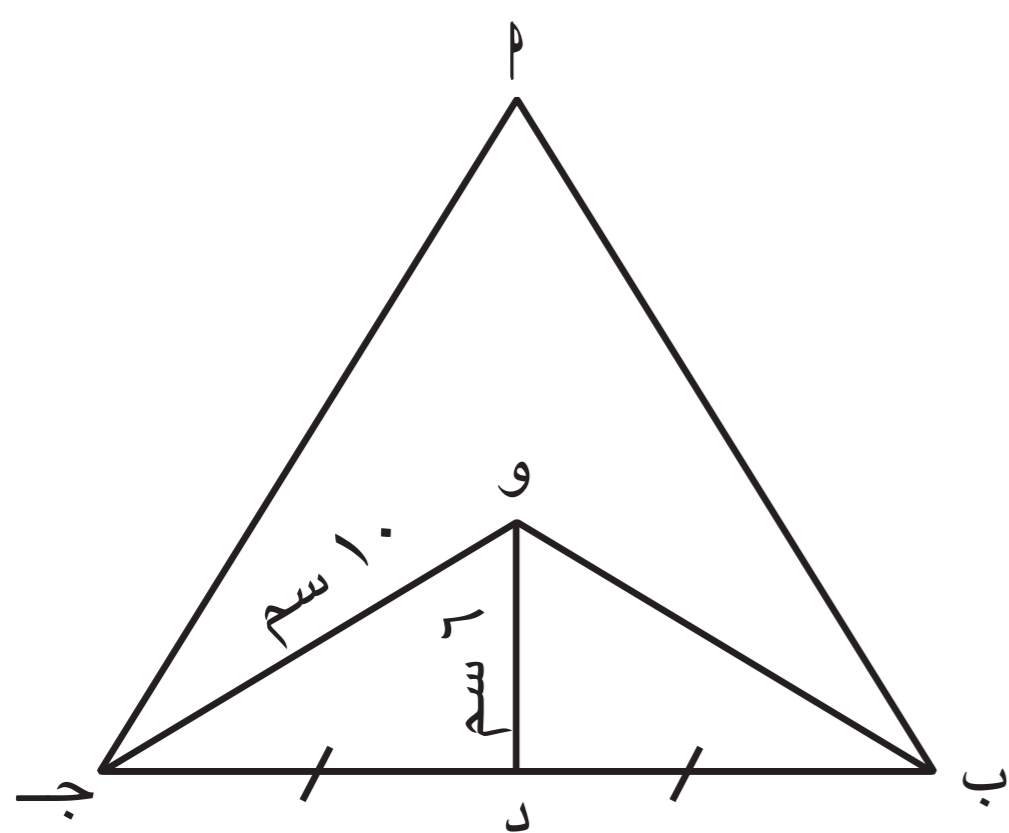
$$\therefore (DM)^2 + (4)^2 = (3)^2$$

$$\therefore (DM)^2 = 9 - 16 = -7 \text{ سم}$$

$\therefore$  نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث تقع على أبعاد متساوية من رؤوسه

(نتيجة)

$$\therefore DM = MB = 5 \text{ سم}$$



أ ب ج مثلث فيه :  
و نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،  
د منتصف ب ج ،  
و ج = ١٠ سم ، و د = ٦ سم  
أوجد بالبرهان كلاً مما يلي :

(١) ب و (٢) ب د (٣) ب ج

المعطيات : ب ج مثلث فيه : ونقطة تقاطع محاور أضلاعه ، د منتصف ب ج ،

و ج = ١٠ سم ، و د = ٦ سم .

المطلوب : (١) ب و (٢) ب د (٣) ب ج

البرهان : ∴ و نقطة تقاطع محاور أضلاعه مثلث ب ج (معطى)

∴ و ب = و ج

= ١٠ سم

∴ د منتصف ب ج

∴ و د ⊥ ب ج

∴ Δ و د ب قائم الزاوية في د

∴ (ب د)<sup>٢</sup> = (ب و)<sup>٢</sup> - (و د)<sup>٢</sup> (نظرية فيثاغورث)

$$ب د = \sqrt{(ب و)^2 - (و د)^2}$$

$$= \sqrt{١٠٠ - ٣٦}$$

$$= \sqrt{٦٤}$$

$$= ٨ سم$$

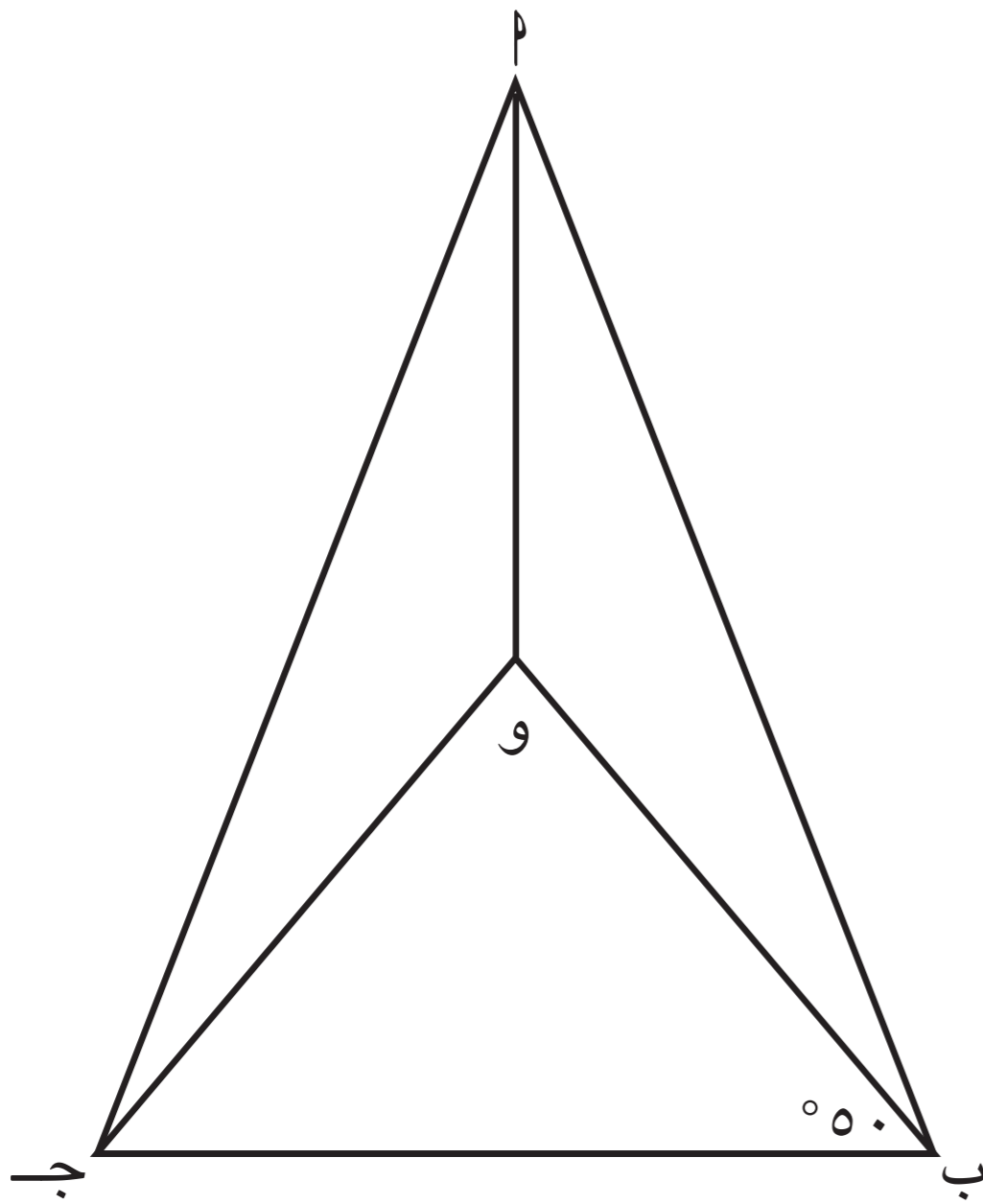
∴ ب ج = ٢ × ب د

$$= ٢ × ٨$$

$$= ١٦ سم$$



## مثال (٢) :



ا ب ج مثلث فيه : و نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،  
إذا كان  $\angle (و ب ج) = 50^\circ$  .

(١) أثبت أن المثلث ب و ج متطابق الضلعين .

(٢) أوجد  $\angle (ب و ج)$  .

**الحل :**

**المعطيات :** ا ب ج مثلث فيه و نقطة تقاطع محاور أضلاعه .

**المطلوب :** إثبات أن المثلث ب و ج متطابق الضلعين .  
إيجاد  $\angle (و ب ج)$

**البرهان :** ∴ و نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث

$$\therefore \angle (ب و ج) = \angle (ب و ج)$$

∴  $\Delta$  ب و ج متطابق الضلعين

$$\therefore \angle (ب و ج) = \angle (ب و ج) = 50^\circ$$

$$\therefore \angle (ب و ج) = 180^\circ - (50^\circ + 50^\circ) = 80^\circ$$

( معطى )

( نتيجة )

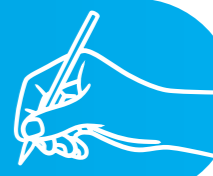
( زاويتا القاعدة في مثلث متطابق

الضلعين متطابقتان )

( مجموع قياسات زوايا المثلث

الداخلة =  $180^\circ$  )

## دورك الآن (٣)



ك ل ه مثلث فيه :

و نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ك ل ه ،

و  $\overline{د} \perp \overline{ل ه}$  ،  $ل ه = 24$  سم ،  $د و = 5$  سم .

أوجد بالبرهان كلاً مما يلي : (١) ه و

(٢) محيط  $\Delta$  ل و ه

**المعطيات :** ك ل ه مثلث و نقطة تقاطع محاور أضلاعه

**المطلوب :** و  $\overline{د} \perp \overline{ل ه}$  ،  $ل ه = 24$  سم ،  $د و = 5$  سم

**المطلوب :** إيجاد (١) ه و (٢) محيط  $\Delta$  ل و ه

**البرهان :** ∴ و نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ك ل ه ، و  $\overline{د} \perp \overline{ل ه}$

∴ د منتصف ل ه ،

$$\therefore د ه = \frac{1}{2} \times 24 = 12 \text{ سم}$$



$\Delta$  و د هـ - قائم الزاوية في د

(نظرية فيثاغورث)

$$\begin{aligned} (و هـ)^2 &= (د هـ)^2 + (و د)^2 \\ و هـ &= \sqrt{(14)^2 + (5)^2} \\ &= \sqrt{196 + 25} \\ &= \sqrt{221} \end{aligned}$$

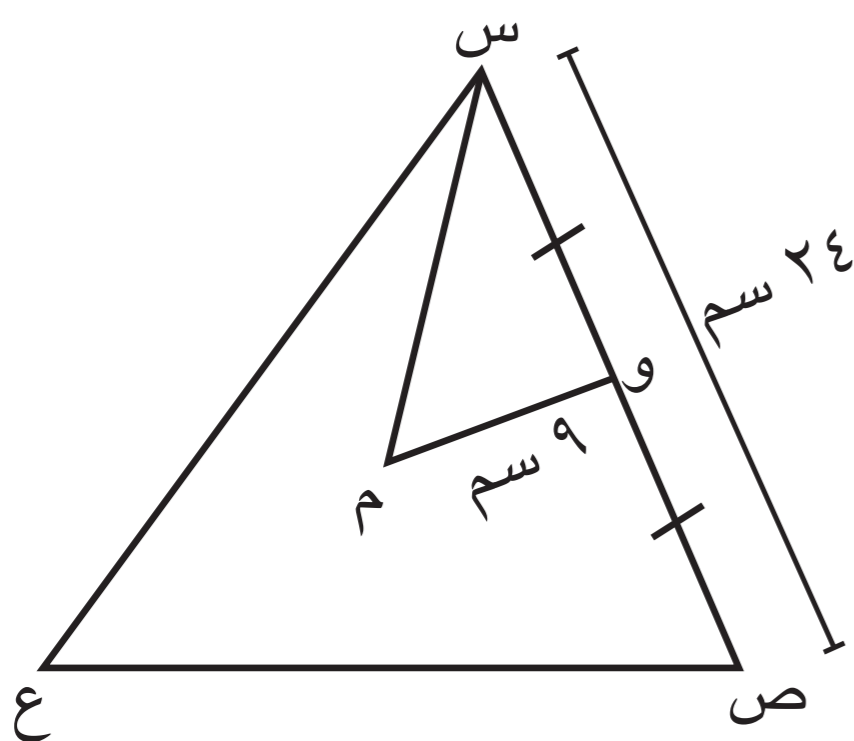
$\therefore$  و هـ = 13 سم

$\therefore$  و نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ك ل هـ ، تقع على **أبعاد متساوية** من رؤوسه .

$\therefore$  ل و = 13 سم

$$\begin{aligned} \text{محيط } \Delta \text{ ل و هـ} &= 13 + 13 + 24 \\ &= 50 \text{ سم} \end{aligned}$$

تمارين ذاتية :



١) س ص ع مثلث فيه :

- م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ، و م = 9 سم ،
- س ص = 24 سم ، و منتصف س ص .
- أوجد بالبرهان كلاً مما يلي :
- (١) و س (٢) س م (٣) م ص

البرهان : في  $\Delta$  س ص ع :

١) و منتصف س ص (معلم)

$$\therefore و س = \frac{1}{2} س ص$$

$$= \frac{1}{2} \times 24 \text{ سم} = 12 \text{ سم}$$

٢) م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث (معلم)

$\therefore$  م و ل س ص

$\Delta$  س و م قائم الزاوية في و

$$(س م)^2 = (س و)^2 + (م و)^2$$

$$= (12)^2 + (9)^2$$

$$= 144 + 81$$

$$= 225$$

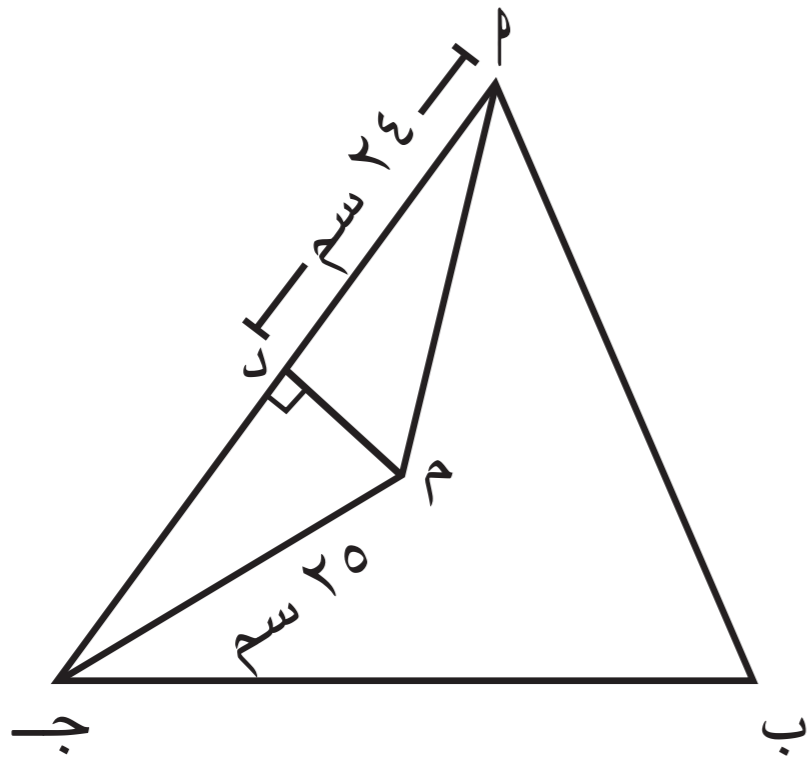
$$س م = \sqrt{225} = 15 \text{ سم} \quad (\text{نظرية فيثاغورث})$$

٣) م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث (معلم)

$$\therefore م م = م س \quad (\text{نتيجة})$$

$$= 15 \text{ سم}$$





٢  $\Delta$  ا ب ج فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ،  
ج م = ٢٥ سم ، د م = ٢٤ سم .

أوجد بالبرهان :

(١) طول م أ

(٢) محيط  $\Delta$  م ج ا

البرهان :

① في  $\Delta$  ا ب ج :

م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث

$$\therefore \text{ج م} = \text{م ج}$$

(نتيجة)  $\text{ج م} = ٢٥ \text{ سم}$

$$\text{ج د} = \frac{٢}{٤} \text{ ج م}$$

$$\text{ج د} = \frac{٢}{٤} \times ٢٥ = ١٢.٥ \text{ سم}$$

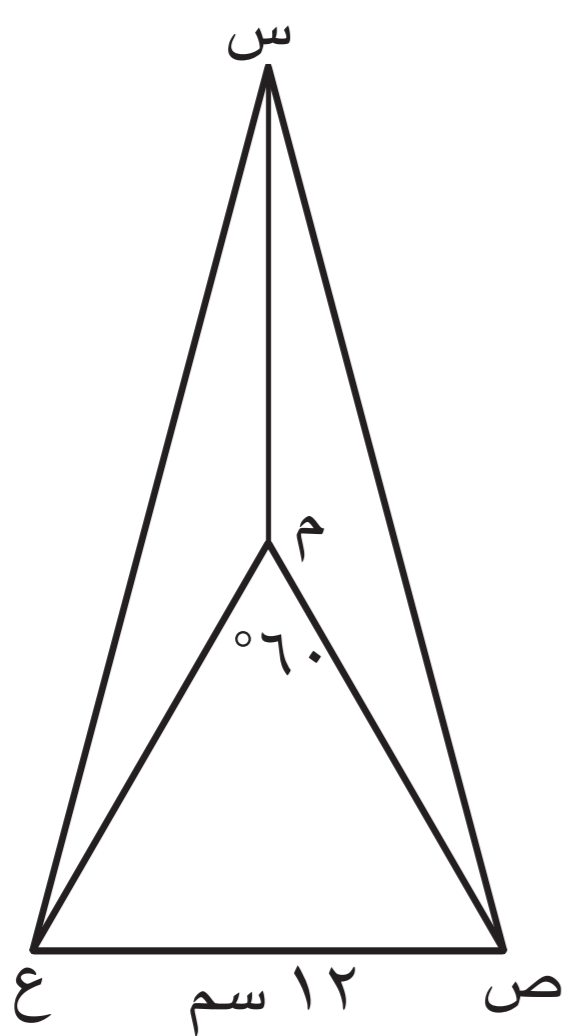
$$\therefore \text{ج ا} = ٢ \times ١٢.٥ = ٢٥ \text{ سم}$$

$$= ٤٨ \text{ سم}$$

محيط  $\Delta$  م ج ا = مجموع أطوال أضلاعه

$$= ٢٥ + ٢٥ + ٤٨$$

$$= ٩٨ \text{ سم}$$



٣ س ص ع مثلث فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،  
إذا كان ص ع = ١٢ سم ،  $\angle$  (ص م ع) =  $60^\circ$  .

أ) أثبت أن المثلث ص م ع متطابق الأضلاع .

ب) أوجد طول م س .

البرهان :

① في  $\Delta$  س م ع :

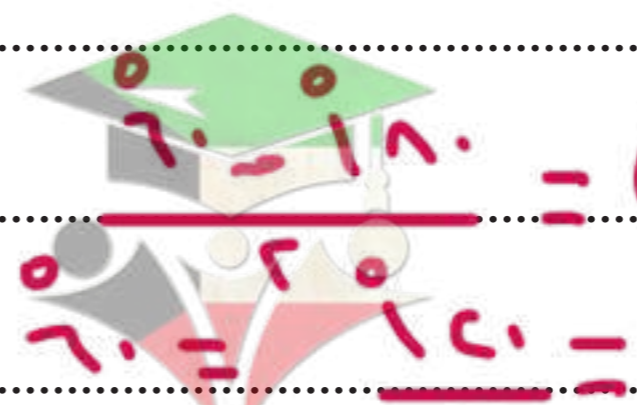
م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث (مفترض)

$$\therefore \text{م م} = \text{م ع} \quad (\text{نتيجة})$$

في  $\Delta$  م م ع :

$$\therefore \text{م م} = \text{م ع}$$

$$\therefore \text{م م} = \text{م ع} = \text{م م} \quad (\text{نتيجة})$$



ب)  $\text{م م} = \text{م م} = \text{م ع}$

$$\text{م م} = \text{م م} = \text{م ع}$$

$$\therefore \text{م م} = \text{م ع} = \text{م م}$$

$$= ١٢ \text{ سم}$$

(مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية =  $180^\circ$ )

١٦٧ (ملاحظات الواحة)

# منصّفات الزوايا الداخلة للمثلث

## Interior Angles Bisectors of a Triangle

٤ - ٧

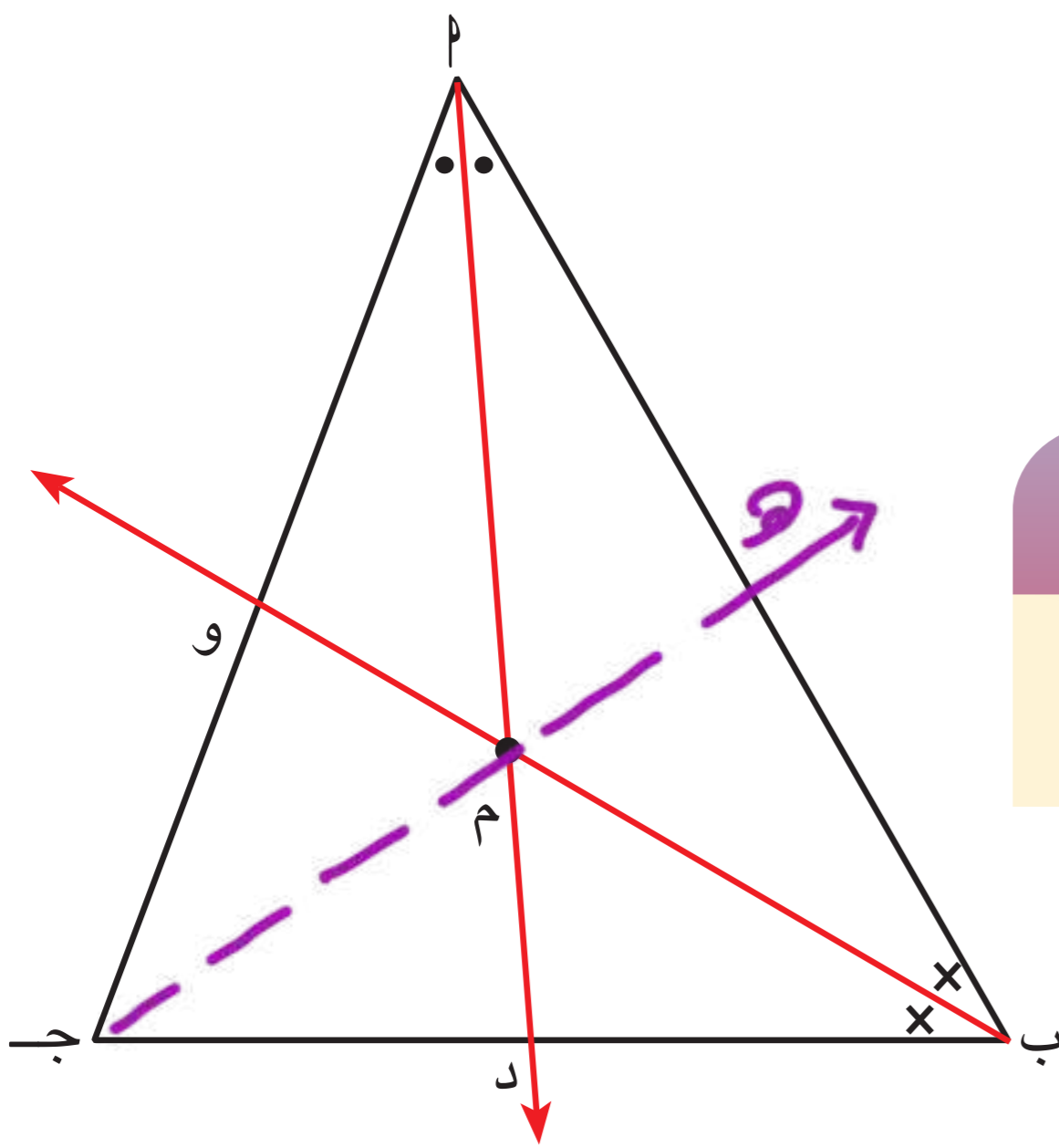
سوف تتعلّم : توظيف نظرية منصّفات الزوايا الداخلة للمثلث لحلّ تمارين هندسية .

### العبارات والمفردات :

Angle Bisectors

منصّفات الزوايا

### استكشِف (١)



### اللوازم

أدوات هندسية .

$\Delta$  أ ب ج مثلث فيه :

$\overrightarrow{أ د}$  منصّف  $\hat{أ}$  ،  $\overrightarrow{ب و}$  منصّف  $\hat{ب}$  ،

$\overrightarrow{أ د} \cap \overrightarrow{ب و} = \{ م \}$

أجب عمّا يلي :

١ ما نوع المثلث بالنسبة إلى زواياه ؟

**مثلث حاد الزوايا**

٢ أرسم ج م يقطع  $\overrightarrow{أ ب}$  في هـ .

٣ أوجد  $\hat{و} (أ ج م) = ٥٥^\circ$

٤ أوجد  $\hat{و} (ب ج م) = ٥٥^\circ$

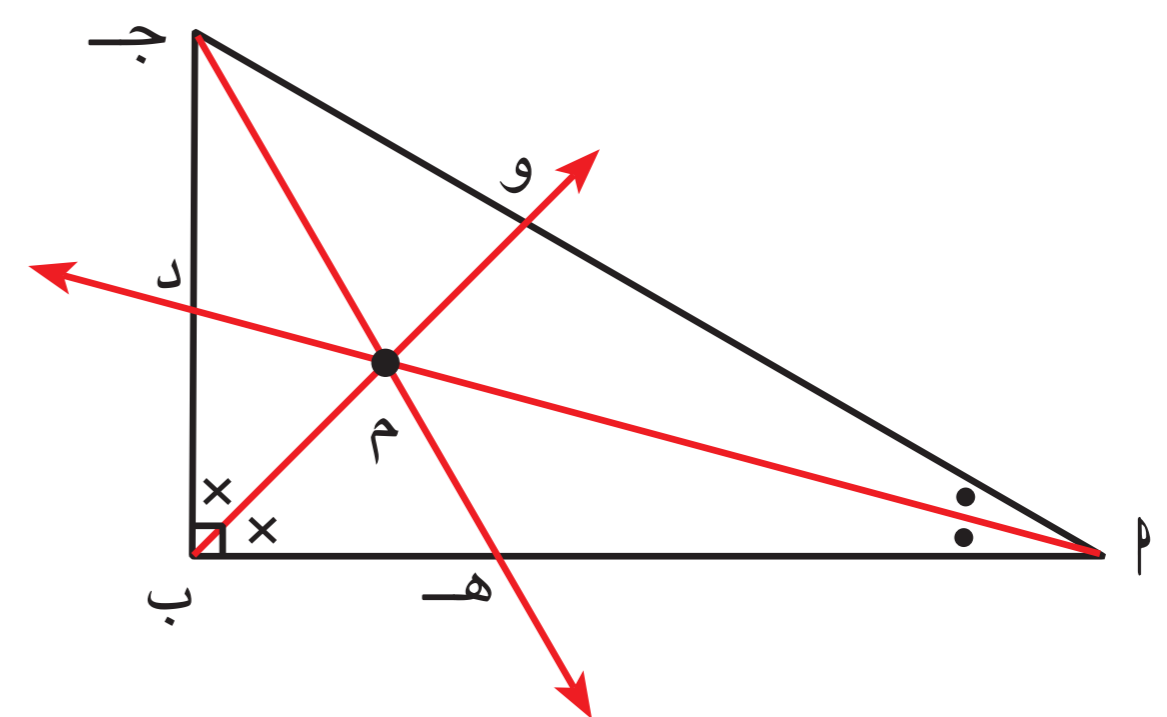
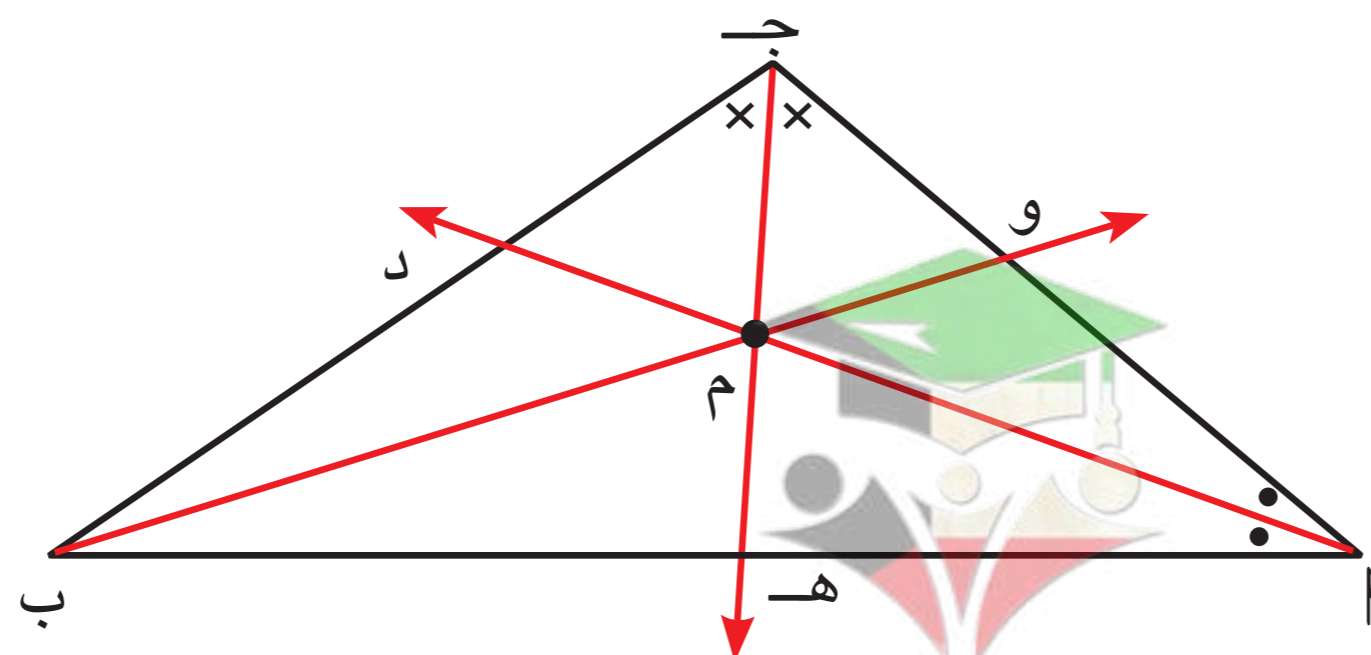
ماذا تلاحظ ؟ **الزوايا متساوية في القياس**

ج هـ منصّف  $\hat{ج}$

بالمثل للمثلث القائم الزاوية والمنفرج الزاوية .

### تذكّر

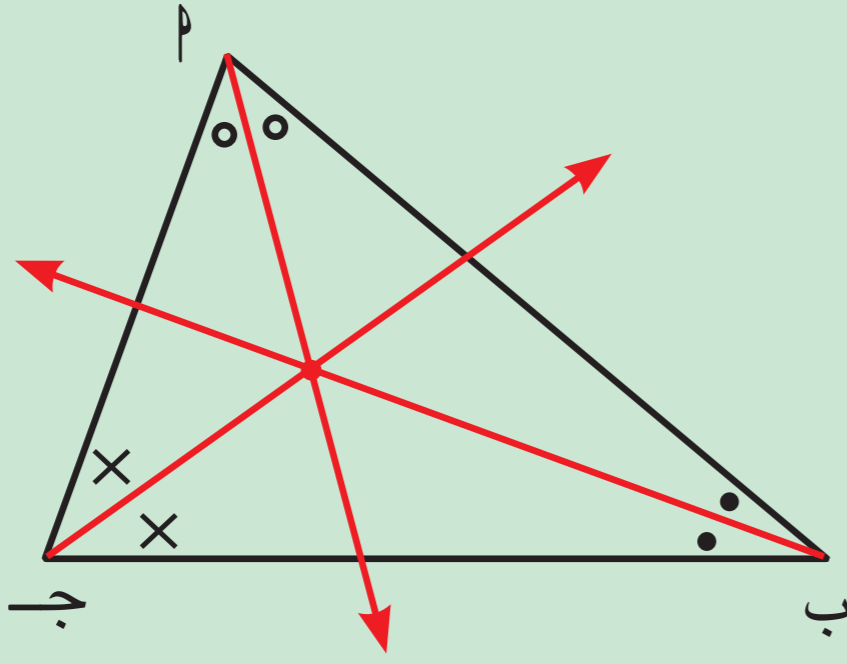
**منصّف الزاوية** هو شعاع مرسوم من رأس الزاوية يقسم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين .



صفوة معلم الكويت

## نظرية :

منصّفات الزوايا الداخلة للمثلث تتقاطع في نقطة واحدة .



## دورك الآن (١)

في الشكل المقابل :

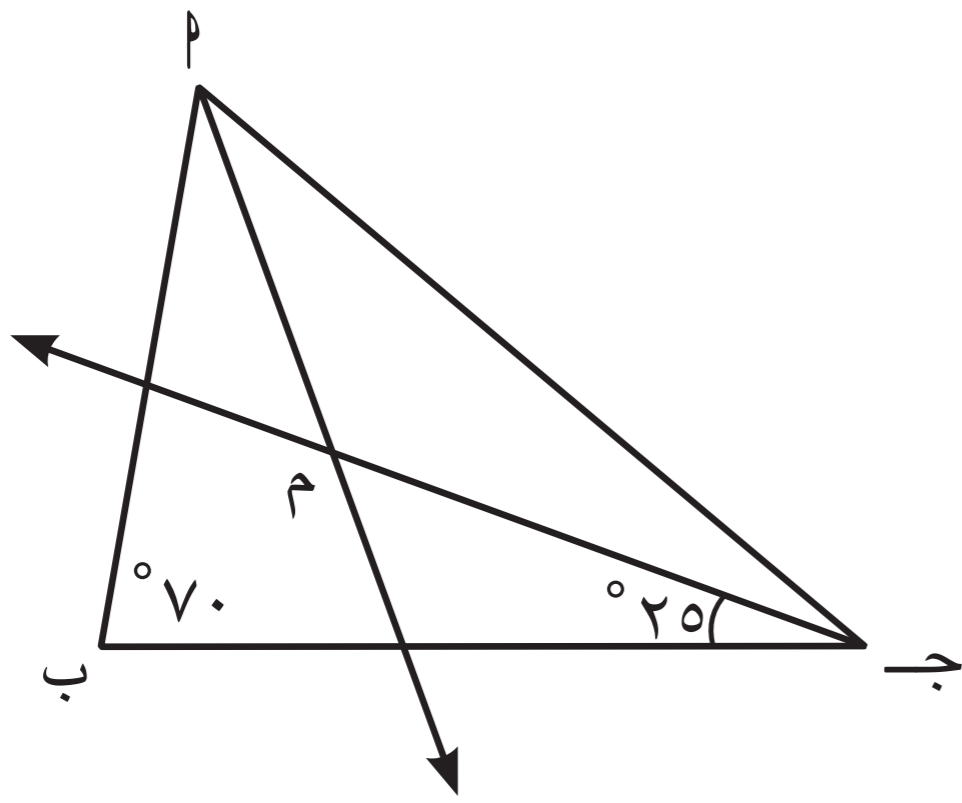
م نقطة تقاطع منصّفات الزوايا الداخلة للمثلث  $\Delta$  ب ج  
أكمل ما يلي ( دون استخدام الأدوات الهندسية ) :

$$n \text{ (م جـ } \Delta) = \dots = 90^\circ \times 3 = 270^\circ$$

السبب م نقطة تقاطع منصّفات الزوايا الداخلة للمثلث

$$n \text{ ( } \Delta) = 180^\circ - (90^\circ + 90^\circ) = 0^\circ$$

السبب مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة =  $180^\circ$



## استكشِف (٢)

إذا كانت م هي نقطة تقاطع منصّفات الزوايا الداخلة للمثلث  $\Delta$  ب ج ،

م ل ، م ن ، م و هي الأعمدة المرسومة من النقطة م على أضلاع المثلث ،

فأوجد باستخدام الأدوات الهندسية كلاً مما يلي :

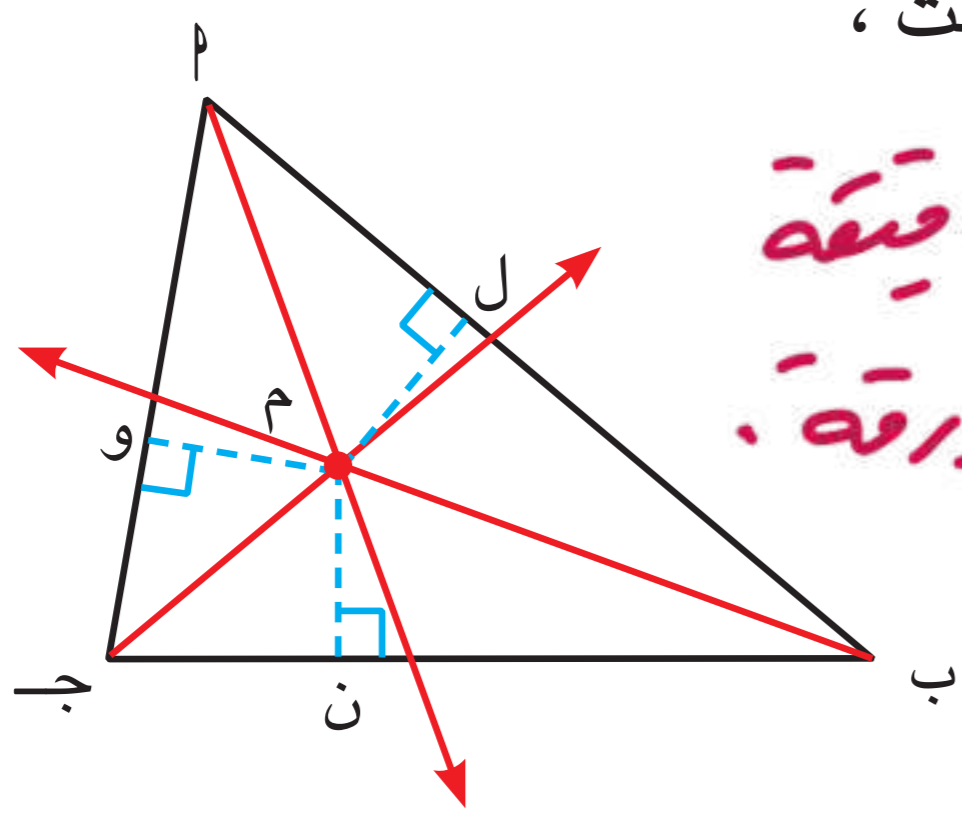
\* قد تكون القياسات غير دقيقة  
لأن لم يتم قياسها على ورقة.

$$1 \text{ طول م ل} = \dots$$

$$2 \text{ طول م ن} = \dots$$

$$3 \text{ طول م و} = \dots$$

• ماذا تلاحظ ؟  $م ل = م ن = م و$



## لاحظ أنّ

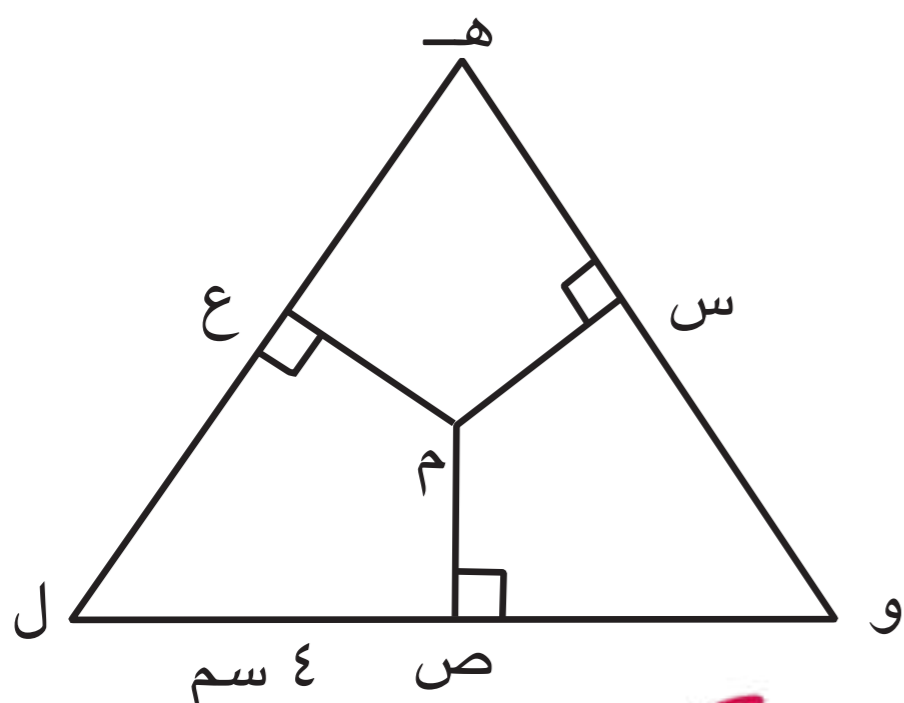
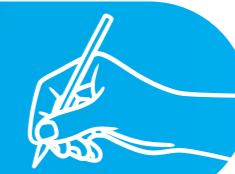
بُعد نقطة عن مستقيم هو طول العمود المرسوم من هذه النقطة على المستقيم .

## نتيجة :

نقطة تقاطع منصّفات الزوايا الداخلة للمثلث على أبعاد متساوية من أضلاعه .

بالمثل تتحقّق صحّة النتيجة للمثلث القائم الزاوية والمثلث المنفرج الزاوية .





المثلث هـ و ل فيه :

م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة ،

م ع = ٣ سم ، ص ل = ٤ سم .

أكمل ما يلي ( دون استخدام الأدوات الهندسية ) :

م ص =  $\frac{٣}{٤}$  =

السبب : نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلة للمثلث على أبعاد متساوية من أضلاعه .

م س =  $\frac{٣}{٥}$  =

السبب : نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلة للمثلث

على أبعاد متساوية من أضلاعه .

م ل =  $\frac{٤}{٥}$  =

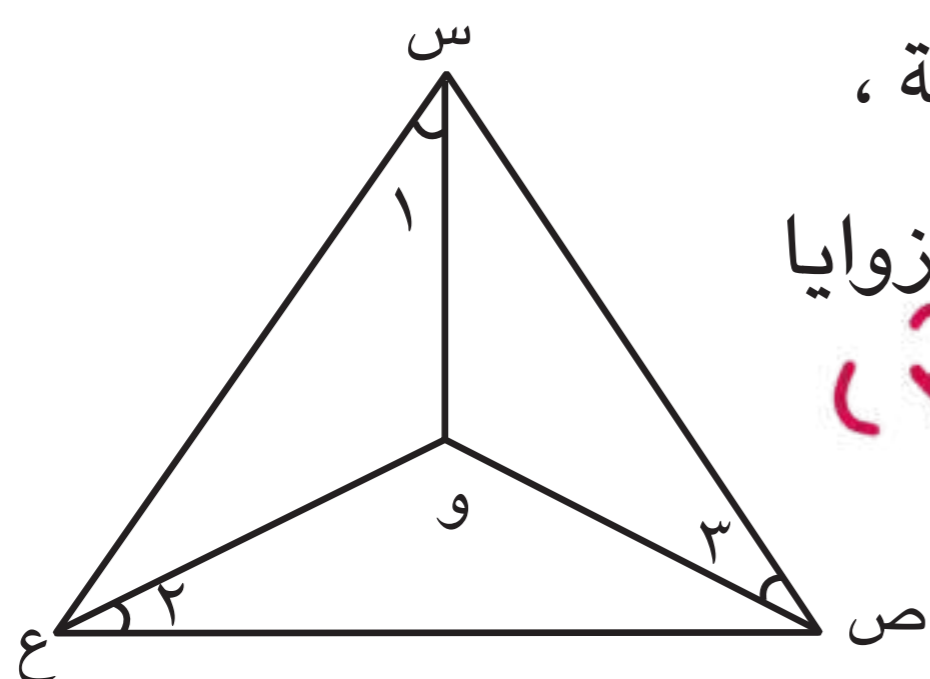
السبب : نظرية فيثاغورث

تذكر



الوتر : هو الضلع المقابل للزاوية القائمة في المثلث قائم الزاوية .

عبّر عن فهمك (١)



إذا كانت و نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث س ص ع الداخلة ،

فما علاقة (  $\hat{و} + \hat{ص} + \hat{ع}$  ) بمجموع قياسات زوايا

المثلث س ص ع الداخلة ؟  $١٨٠^\circ = \hat{و} + \hat{ص} + \hat{ع}$

$١٨٠ \times \frac{١}{٣} = ٦٠$

مثال (١) :

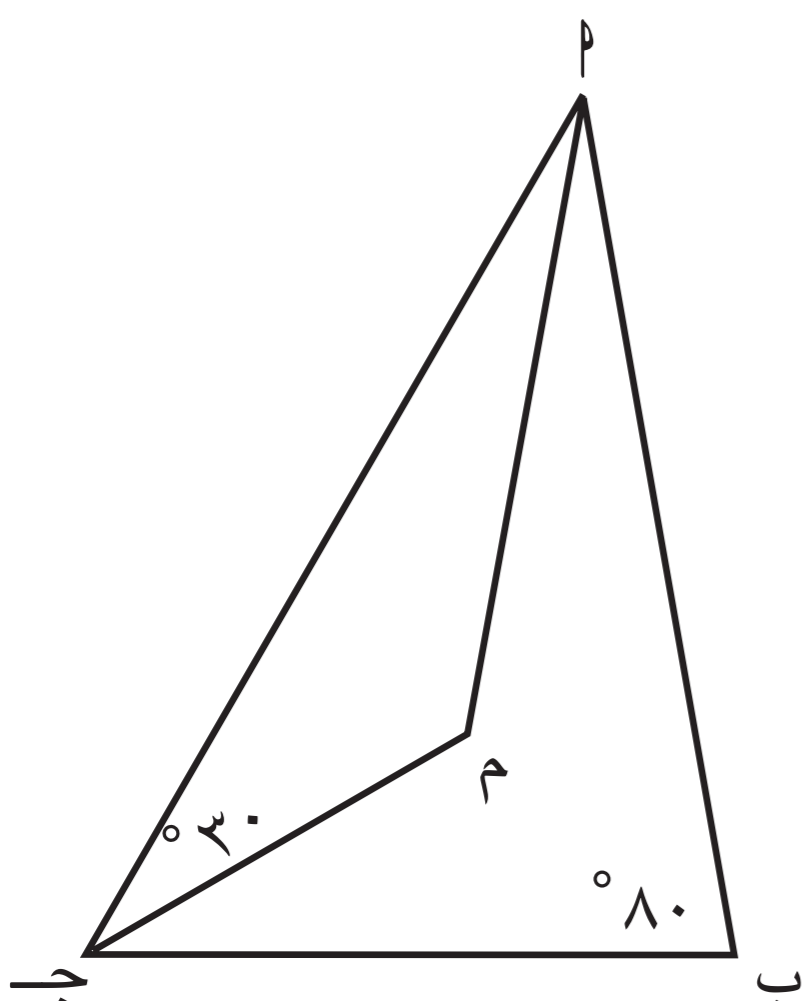
في الشكل المقابل ،  $\Delta$  أ ب ج فيه : م نقطة تقاطع منصفات

زواياه الداخلة ، أوجد بالبرهان  $\hat{و}$  ( ج أ م ) .

الحل :

المعطيات : في  $\Delta$  أ ب ج : م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة

المطلوب : إيجاد  $\hat{و}$  ( ج أ م )



**البرهان :** ∴ م نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث الداخلة ( معطى )

( نظرية )

∴ ج م منصف ج

$$\therefore \angle ج = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$$

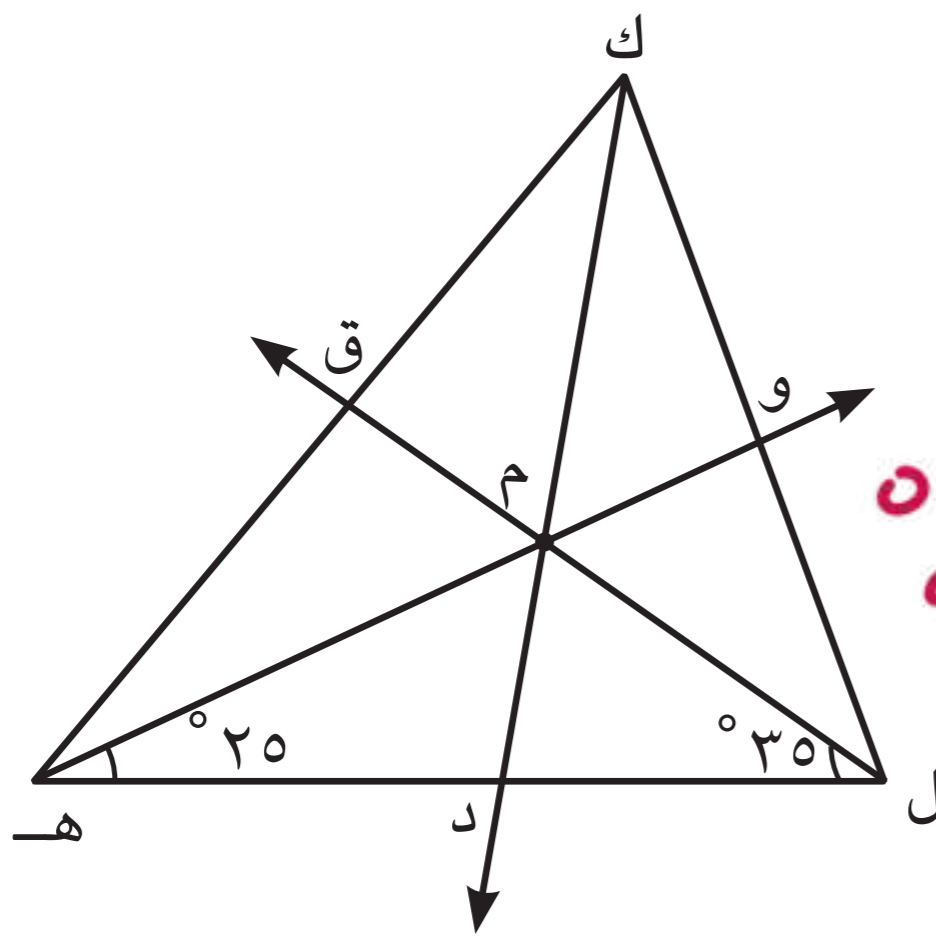
∴ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة يساوي  $180^\circ$

$$\therefore \angle م = 180^\circ - (60^\circ + 80^\circ) = 40^\circ$$

∴ م منصف م

$$\therefore \angle م = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$$

دورك الآن (3)



$\Delta$  ك ل هـ فيه : م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة ،

$$\angle م ل هـ = 35^\circ ، \angle م هـ ل = 25^\circ$$

أوجد بالبرهان  $\angle م ك هـ$  ،  $\angle م ك ل$  ،  $\angle م ك هـ$  .

المعطيات: ل هـ م منصف هـ ، م نقطة تقاطع منصفات زواياه

الداخلة م ل هـ =  $35^\circ$  ، م هـ ل =  $25^\circ$  ، م ك ل =  $90^\circ$

المطلوب: م ل ك هـ ، م ل ك هـ ، م ل ك هـ

**البرهان :** ∴ م نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث الداخلة ،

∴ ل م منصف ل

$$\therefore \angle ل = 2 \times 35^\circ = 70^\circ$$

∴ هـ م منصف هـ

$$\therefore \angle هـ = 2 \times 25^\circ = 50^\circ$$

∴ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة =  $180^\circ$

$$\therefore \angle م ك هـ = 180^\circ - (70^\circ + 50^\circ) = 60^\circ$$

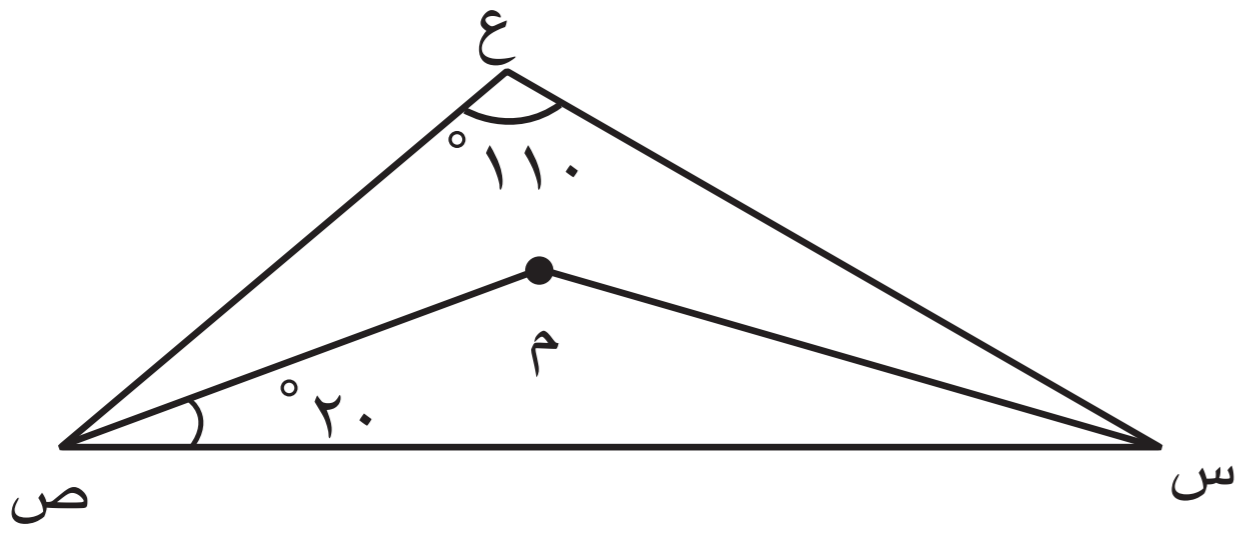
∴ ك م منصف ك

$$\therefore \angle م ك هـ = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$= 30^\circ$$



مثال (٢):



$\Delta$  س ع ص فيه م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة ،

$$\angle ع = 110^\circ ، \text{ إذا كان } \angle م ص س = 20^\circ$$

أوجد بالبرهان كلاً من :

$$(1) \angle م ص ع$$

$$(2) \angle م س$$

$$(3) \angle م ص$$

الحل :

المعطيات : م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة ،

$$\angle ع = 110^\circ ، \angle م ص س = 20^\circ$$

المطلوب : إيجاد : (1)  $\angle م ص ع$

$$(2) \angle م س$$

$$(3) \angle م ص$$

البرهان : في  $\Delta$  س ع ص ،

∴ م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة ( معطى )

∴ م ص منصف  $\angle ع$  ( نظرية )

$$\therefore \angle م ص ع = 2 \times 20^\circ = 40^\circ$$

$$\therefore \angle م س = 180^\circ - (110^\circ + 40^\circ) \text{ (مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة يساوي } 180^\circ \text{)}$$

$$= 180^\circ - 150^\circ$$

$$= 30^\circ$$

∴ م س منصف  $\angle م ص$

$$\therefore \angle م ص = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$$

في  $\Delta$  م س ص ،

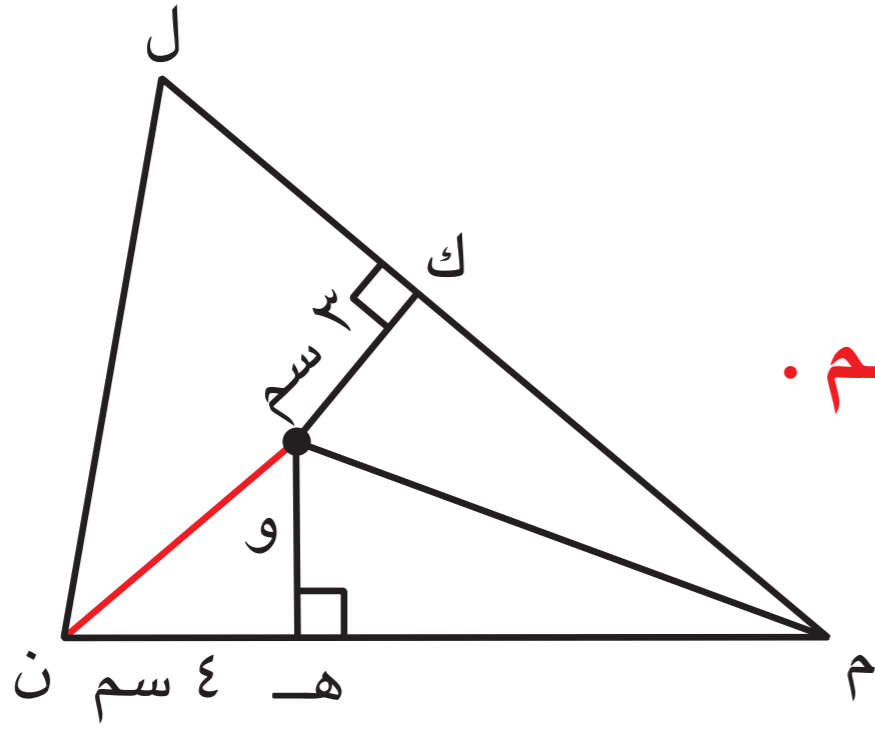
$$\angle م ص = 180^\circ - (20^\circ + 15^\circ) \text{ (مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة يساوي } 180^\circ \text{)}$$

$$= 180^\circ - 35^\circ$$

$$= 145^\circ$$



### مثال (٣) :



في الشكل المقابل، المثلث ل م ن فيه :  
و نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة ، و ك = ٣ سم ، هـ ن = ٤ سم .  
أوجد و ن .

**الحل :**

**المعطيات :**  $\Delta$  ل م ن فيه : و نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة ،  
و ك = ٣ سم ، هـ ن = ٤ سم

**المطلوب :** إيجاد و ن

**البرهان :**  $\therefore$  و نقطة تقاطع منصفات الزوايا في  $\Delta$  م ل ن  
تقع على أبعاد متساوية من أضلاعه ( نتيجة )

$$\therefore \text{و هـ} = \text{و ك} = ٣ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{و هـ} \perp \text{م ن} ، \angle \text{و هـ ن} = 90^\circ .$$

$\therefore \Delta$  و هـ ن قائم الزاوية

$$\text{( نظرية فيثاغورث )} \quad \text{و ن}^2 = \text{و هـ}^2 + \text{هـ ن}^2$$

$$\therefore \text{و ن} = \sqrt{\text{و هـ}^2 + \text{هـ ن}^2}$$

$$= \sqrt{٩ + ١٦}$$

$$\therefore \text{و ن} = \sqrt{٢٥} = ٥ \text{ سم}$$

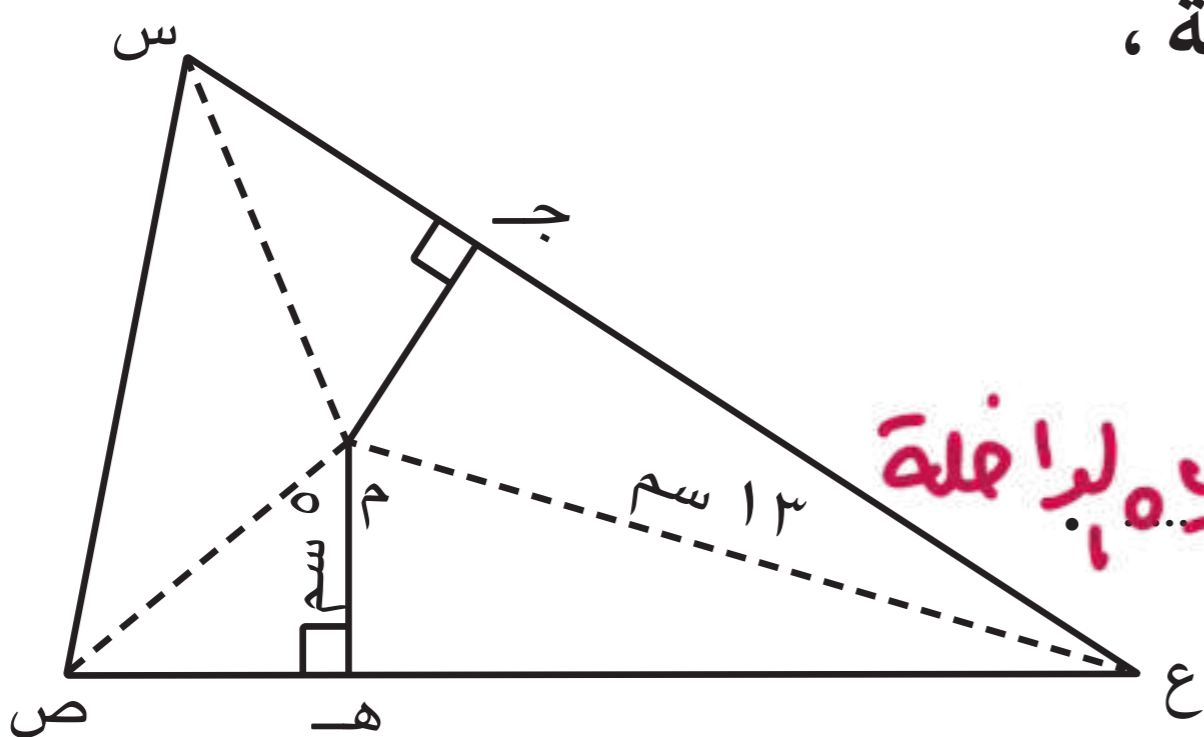
### دورك الآن (٤)



المثلث س ص ع فيه : م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة ،

$$\text{م ع} = ١٣ \text{ سم} ، \text{م هـ} = ٥ \text{ سم}$$

أوجد طول ع ج .



**المعطيات :**  $\Delta$  س ص ع فيه : م نقطة تقاطع منصفات زواياه لداخلة

**المطلوب :** إيجاد طول ع ج .

**البرهان :**  $\therefore$  م نقطة تقاطع منصفات زوايا  $\Delta$  س ص ع

$\therefore$  م تقع على أبعاد متساوية من أضلاعه

$$\text{م ج} = \text{م هـ} = ٥ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{م ج} \perp \text{س ع}$$

$$\therefore \angle \text{م هـ ص} = 90^\circ$$

$\therefore \Delta$  ع م ج قائم الزاوية في ج



$$(ع ج) = (ع م) - (ج م) \quad (\text{نظرية فيثاغورث})$$

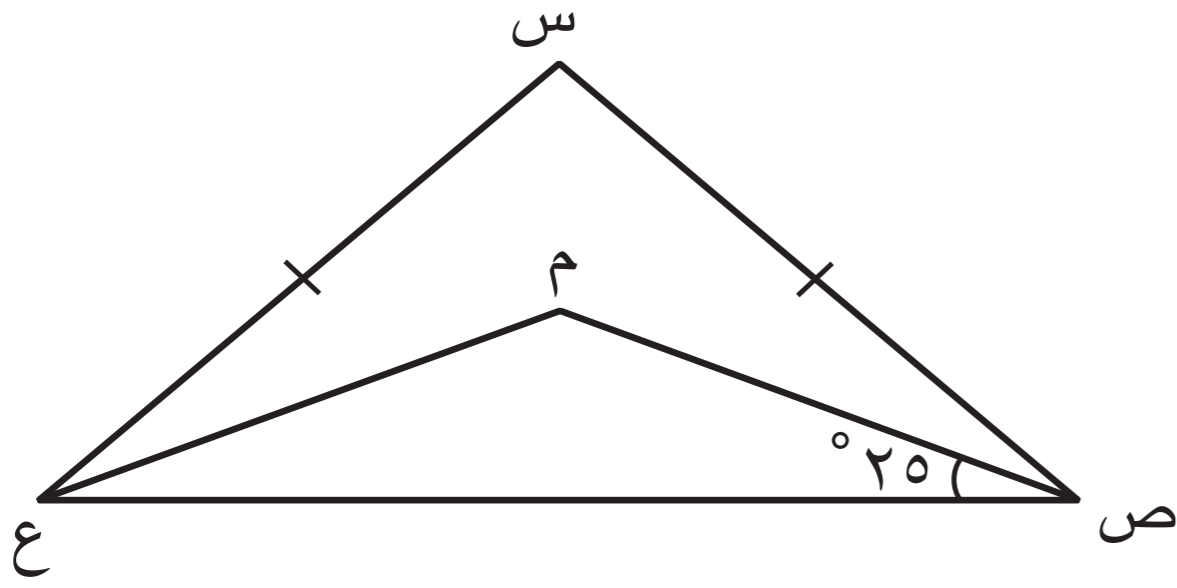
$$\therefore ع ج = \sqrt{(ع م)^2 - (ج م)^2}$$

$$= \sqrt{٢٥^2 - ١٣^2}$$

$$= \sqrt{٦٤٠}$$

$$\therefore ع ج = ١٢ \text{ سم}$$

### مثال (٤):



المثلث س ص ع متطابق الضلعين فيه : م هي نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة ،  $\angle م ص ع = ٢٥^\circ$  .  
أوجد بالبرهان  $\angle م ص س$  .

الحل :

المعطيات : س ص ع مثلث متطابق الضلعين :

م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة ،  $\angle م ص ع = ٢٥^\circ$

المطلوب : إيجاد  $\angle م ص س$

البرهان :  $\therefore$  م نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلة للمثلث س ص ع (معطى)

$\therefore$  ص م منصف ص  $\leftarrow$  (نظرية)

$$\therefore \angle م ص ع = ٢٥ \times ٢ = ٥٠^\circ$$

$\therefore \Delta$  س ص ع متطابق الضلعين

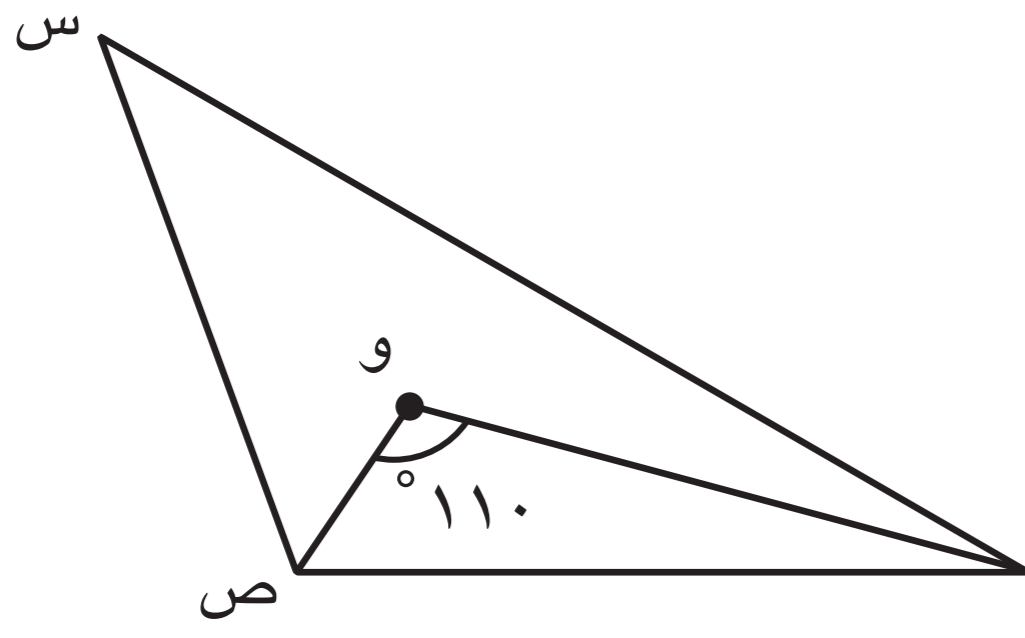
$\therefore \angle م ص س = \angle م ص ع = ٥٠^\circ$  (زاويتا القاعدة متطابقتان في المثلث المتطابق الضلعين) (معطى)

$\therefore \angle م ص س + \angle م ص ع + \angle م س ص = ١٨٠^\circ$  (مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث يساوي  $١٨٠^\circ$ )

$$١٠٠ + ١٨٠ =$$

$$٨٠ =$$





في الشكل المقابل :  $\Delta$  س ص ع فيه :

و نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة ،  $\angle (ص و ع) = 110^\circ$  ،  
أوجد بالبرهان  $\angle (س و و)$  .

المعطيات : **و نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث الداخلية**  
**م (ص و ع) = 110**

المطلوب : إيجاد  $\angle (س و و)$

البرهان : في  $\Delta$  ص و ع ،

$\therefore \angle (ص و ع) = 110^\circ$  (معطى)

$\therefore$  مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة =  $180^\circ$

$\therefore \angle (و ص ع) + \angle (و ع ص) + \angle (و ص و) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

$\therefore$  و نقطة تقاطع **منصفات زوايا** المثلث س ص ع

$\therefore \angle (س و و) + \angle (ص و و) = 70^\circ \times 2 = 140^\circ$

$\therefore \angle (س و و) = 140^\circ - 180^\circ = -40^\circ$  (مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث =  $180^\circ$ )

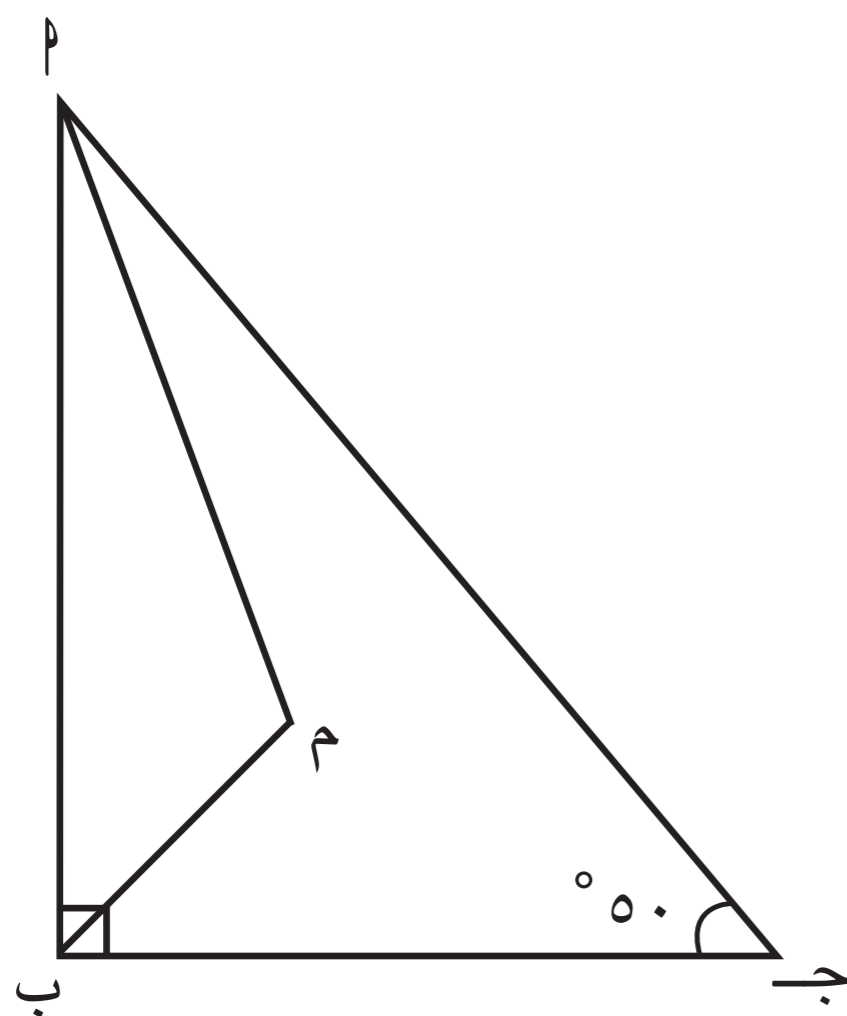
تمارين ذاتية :



١) أ ب ج - مثلث قائم الزاوية في ب

م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة ،  $\angle (ج م ب) = 50^\circ$  .

أوجد بالبرهان : **أ**  $\angle (م ب ب)$  **ب**  $\angle (م أ ب)$



**البرهان :**

**١** في  $\Delta$  م ب ج القائم الزاوية في ب :

$\therefore$  م نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلة للمثلث (معطى)

$\therefore \angle (م ب ب) = \frac{1}{2} \angle (ب) = 45^\circ$

$\therefore \angle (م أ ب) = \frac{1}{2} \angle (ب) = 45^\circ$

$\therefore \angle (م ب ج) = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

**ب**  $\angle (م ب ب) = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ$

$\therefore \angle (م ب ب) = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$

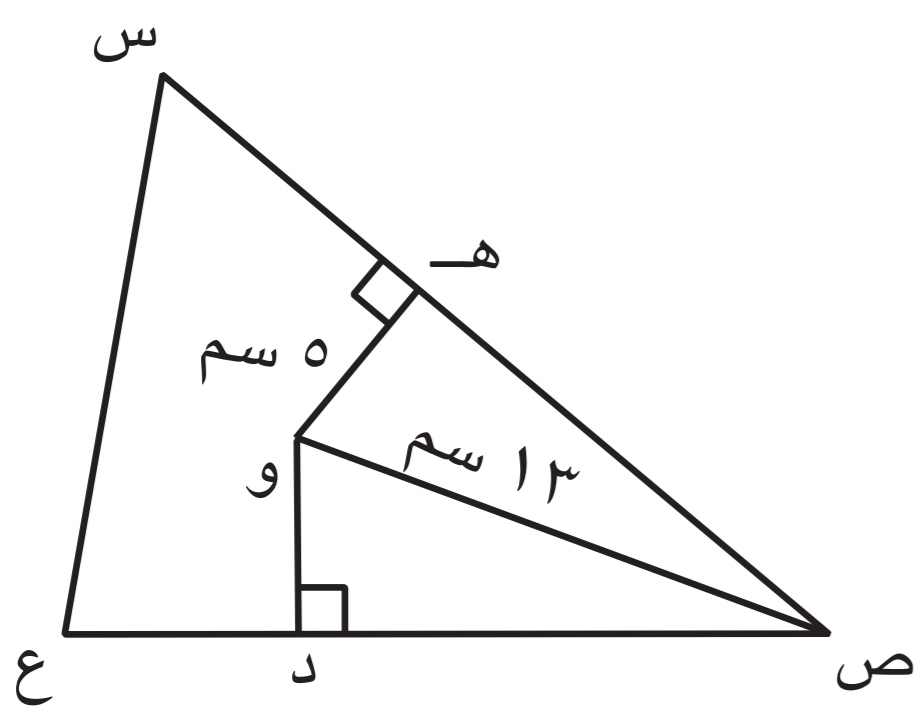
مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة =  $180^\circ$

٢ المثلث  $س ص ع$  فيه : و نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة ،

هـ و = ٥ سم ، ص و = ١٣ سم

أوجد بالبرهان :

أ) و د      ب) ص د



البرهان :

٤ أ) في  $هـ س ص$  :

∴ م نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث الداخلية (معطى)

∴ و د = و هـ = ٥ سم (نتيجة)

ب) و د = ص د (معطى)

∴ هـ و د قائم الزاوية في د

$(ص د) - (و د) = (و هـ) - (و د)$   
 $(١٣) - (٥) =$   
 $١٦٩ - ٢٥ = ١٤٤$   
 $ص د = \sqrt{١٤٤} = ١٢$   
 (نظرية فيثاغورث)

٣ المثلث  $س ص ع$  فيه : و نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة ،  $\hat{و} = ١٢٠^\circ$

أوجد بالبرهان  $\hat{و} (س)$  .

البرهان : في  $هـ س ص$  :

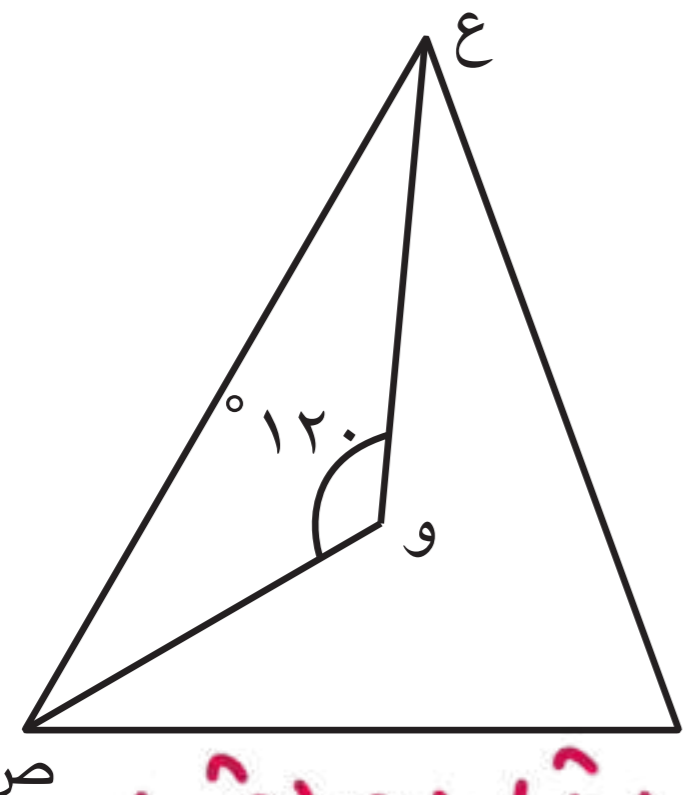
في  $هـ و ص$  :

$\hat{و} = (\hat{و} هـ) + (\hat{و} و ص) = ١٨٠ - ٦٠ = ١٢٠^\circ$

(مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة =  $١٨٠^\circ$ )

في  $هـ س ص$  :

∴ م نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث الداخلية (معطى) (مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة =  $١٨٠^\circ$ )



$\hat{و} = (\hat{و} هـ) + (\hat{و} و ص) = ٦٠ \times ٢ = ١٢٠^\circ$   
 $\hat{و} = ١٨٠ - ٦٠ = ١٢٠^\circ$

٤ المثلث  $أ ب ج$  متطابق الضلعين فيه : و هي نقطة تقاطع

منصفات زواياه الداخلة ،  $\hat{و} (ج ب) = ١٥^\circ$  .

أوجد بالبرهان  $\hat{و} (أ)$  .

البرهان : في  $أ ب ج$

∴ م نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث الداخلية (معطى)

$\hat{و} (ج ب) = ١٥ \times ٢ = ٣٠^\circ$

$\hat{و} (أ ب) = ٣٠^\circ$

$\hat{و} (ب ج) = ٣٠^\circ$

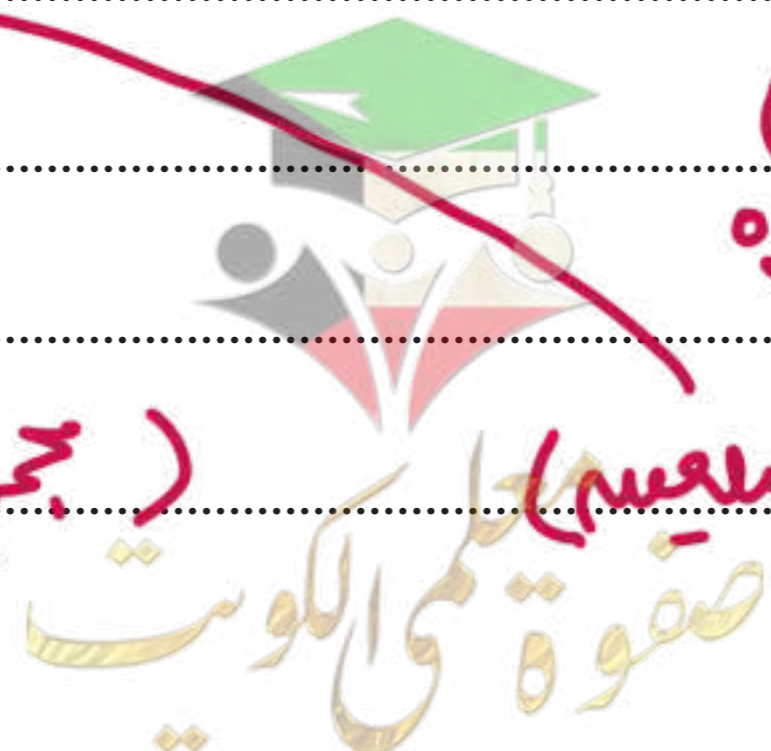
$\hat{و} (أ ب) = ٣٠^\circ$

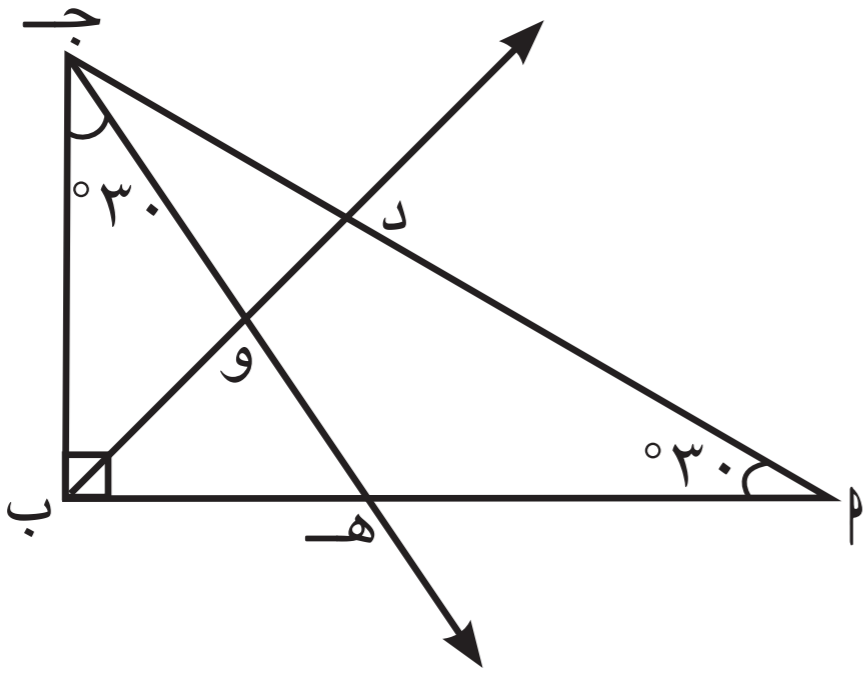
(مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة =  $١٨٠^\circ$ )

$(\hat{و} (أ ب) + \hat{و} (ب ج)) - ١٨٠ = (\hat{و} (أ ج))$

$٦٠ - ١٨٠ =$

$١٢٠ =$





- ٥ أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ،  
 $\angle A = 60^\circ$  ،  $\angle C = 30^\circ$  ،  
 إذا كان ب د منتصف ب ،  
 $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$  ،  
 أثبت أن و نقطة تقاطع منصفات  
 الزوايا الداخلة للمثلث أ ب ج .

**البرهان :**

في المثلث أ ب ج القائم الزاوية في ب :

$$\text{م (ج)} = 180^\circ - (\text{م (أ)} + \text{م (ب)}) = 90^\circ$$

$$\text{م (ب ج د)} = 180^\circ - \text{م (ج)} = 90^\circ$$

$$\text{م (ب ج د)} = \text{م (ب ج ه)} = 90^\circ$$

ب د منتصف ب ج ،

ب ه منتصف ب ج (معطى)

ب د ه منتصف ب ج في النقطة و

∴ و هي نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلة للمثلث أ ب ج

مهارات تفكير عليا :

اختر الإجابة الصحيحة .

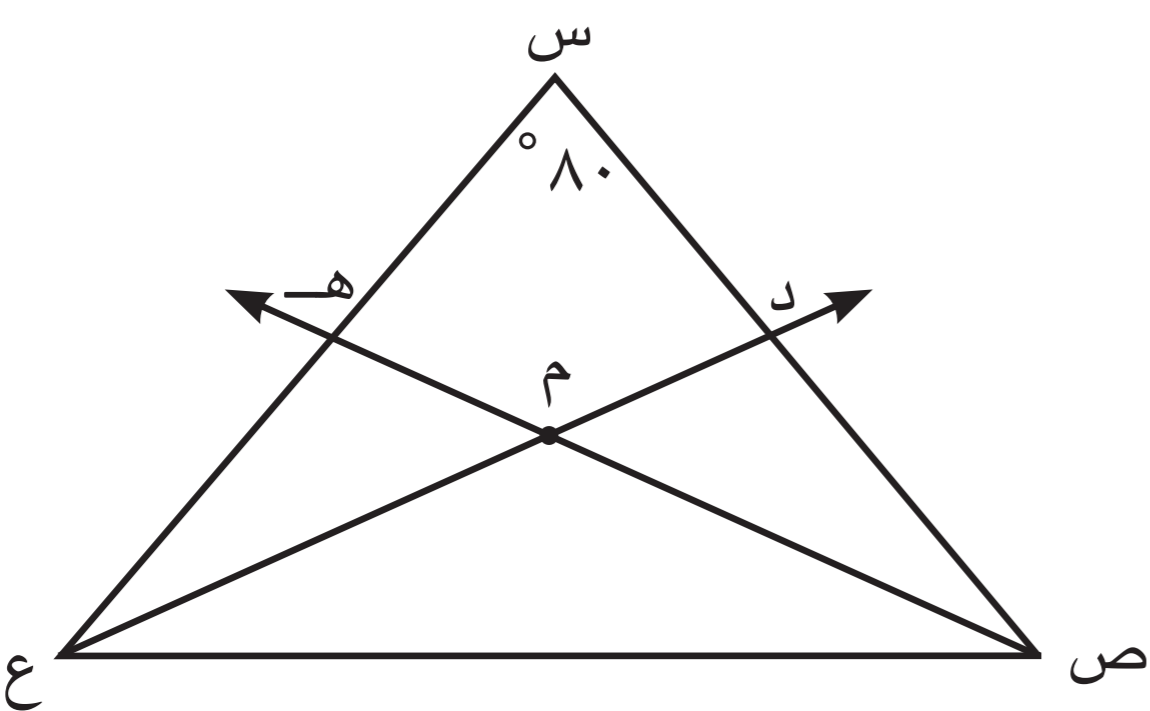
- ٦ س ص ع مثلث فيه : ص ه منتصف ص ،

ع د منتصف ع

$$\text{م (د ه)} = \dots$$

أ  ١٠٠°    ب  ٥٠°

ج  ١٢٠°    د  ٤٠°



$$\text{م (د ه)} = 180^\circ - \text{م (س)} = 100^\circ$$

$$\text{م (د ه)} = \text{م (د ه ص)} = 120^\circ$$

$$\text{م (د ه)} + \text{م (د ه ص)} = 180^\circ - \text{م (س)} = 100^\circ$$

$$\therefore \text{م (د ه ص)} + \text{م (د ه ص)} = 100^\circ \Rightarrow \text{م (د ه ص)} = 50^\circ$$



# الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه

٥ - ٧

## Altitudes from Vertices of a Triangle to its Sides

سوف تتعلم : توظيف نظرية الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه لحلّ تمارين هندسية .

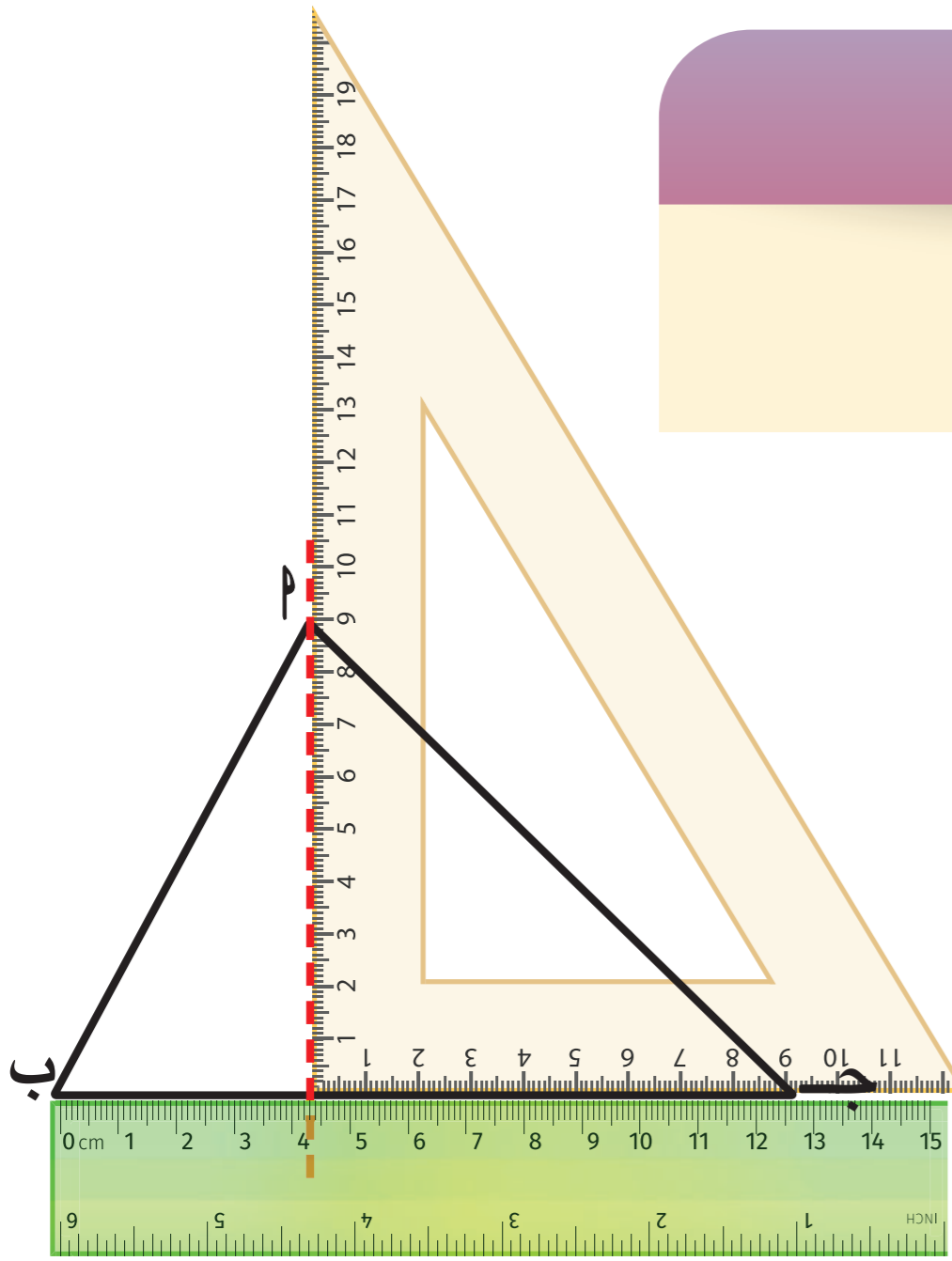
### العبارات والمفردات :

Heights

الارتفاعات

Altitudes

الأعمدة



### اللوازم

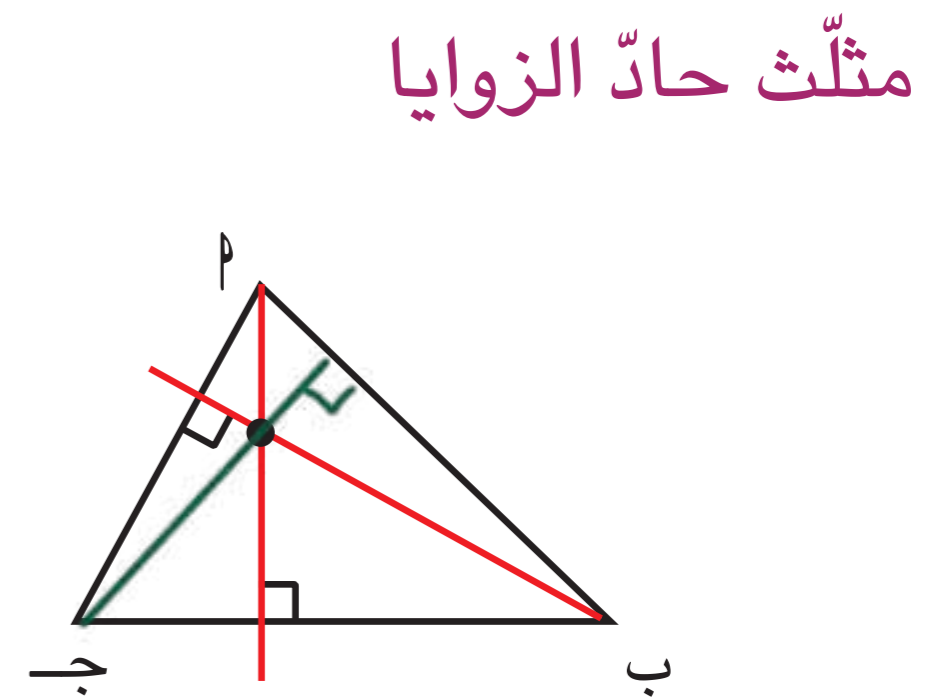
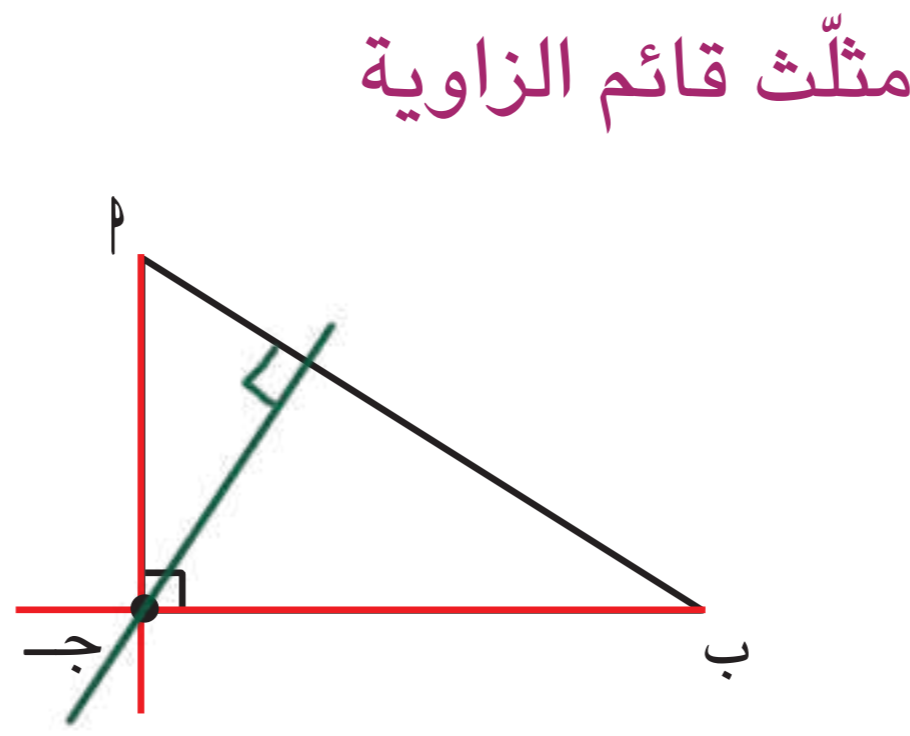
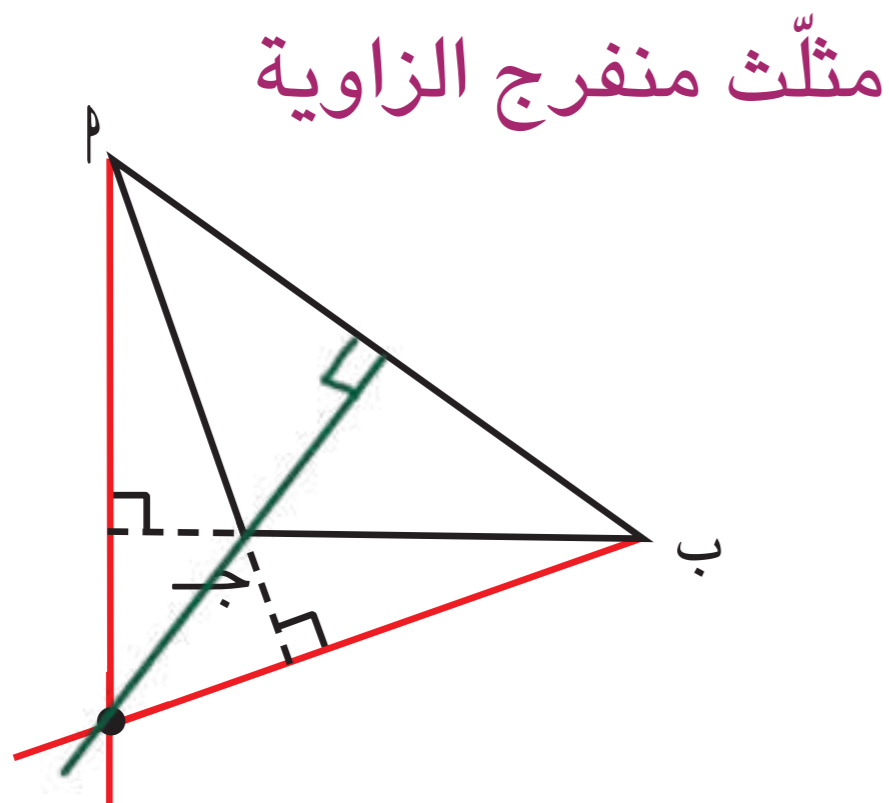
أدوات هندسية .

**إرتفاع المثلث** هو طول العمود المرسوم من رأس المثلث على قاعدته ( أو امتدادها ) .  
في المثلث  $P$  ب ج الموضَّح في الشكل المقابل ،  
يمكن رسم العمود النازل من رأس المثلث  $P$   
على الضلع المقابل له ب ج باستخدام المثلث القائم  
والمسطرة كما في الشكل .

### استكشف



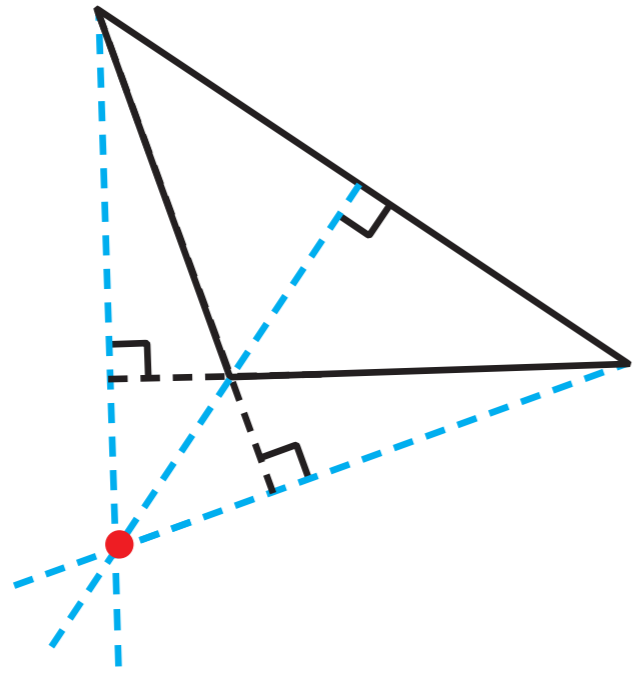
في المثلثات التالية ، تم رسم العمودين من الرأسين  $P$  ، ب  
على الضلعين المقابلين لهما ( أو امتدادهما ) كما في الشكل .  
أرسم العمود الثالث من الرأس ج .



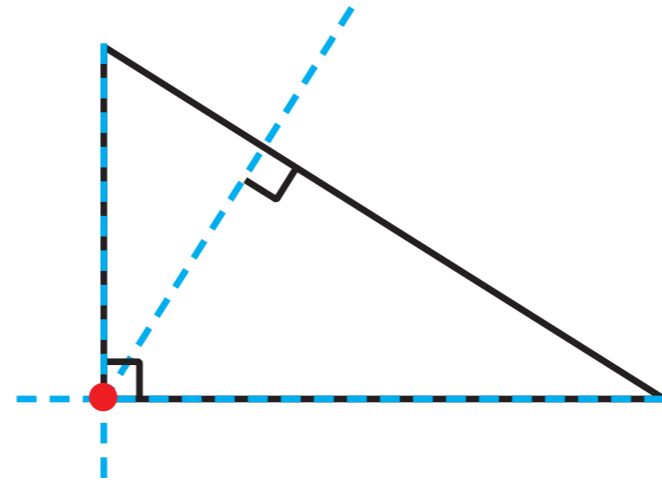
• ماذا تلاحظ ؟ نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة تختلف من مثلث إلى الآخر

**نظرية :** الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه تتقاطع في نقطة واحدة .

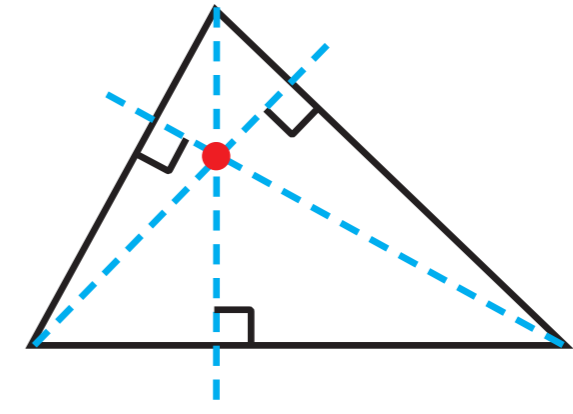
لاحظ أن:



نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث المنفرج الزاوية على أضلاعه (أو امتدادها) تقع خارج المثلث.

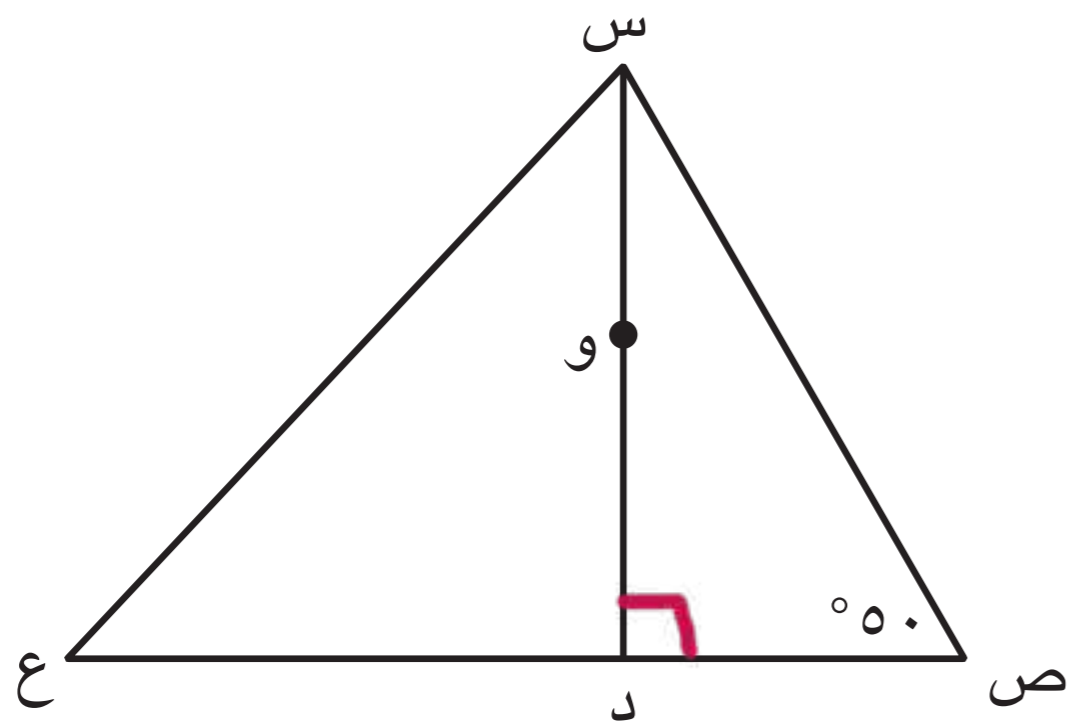


نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث القائم الزاوية على أضلاعه هي رأس الزاوية القائمة.



نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث الحاد الزوايا على أضلاعه تقع داخل المثلث.

دورك الآن (١)



أ) في المثلث س ص ع : و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ، و  $\exists$  س د . أكمل ما يلي :

•  $\angle (س د ص) = 90^\circ$

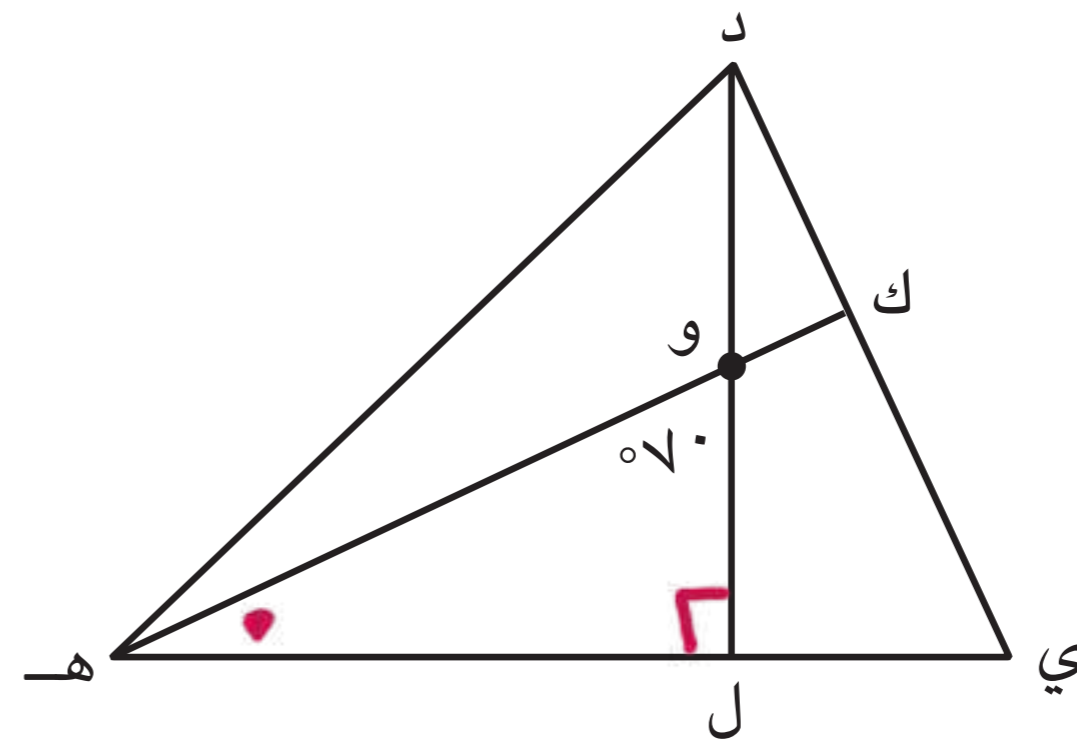
السبب س د ل عمود

•  $\angle (ص س د) = 180^\circ - (90^\circ + 50^\circ) = 40^\circ$

السبب مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = 180

ب) في المثلث د ه ي : و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ،

هـ ك  $\cap$  د ل = { و } . أكمل ما يلي :



•  $\angle (و هـ ل) = 180^\circ - (90^\circ + 70^\circ) = 20^\circ$

السبب مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = 180

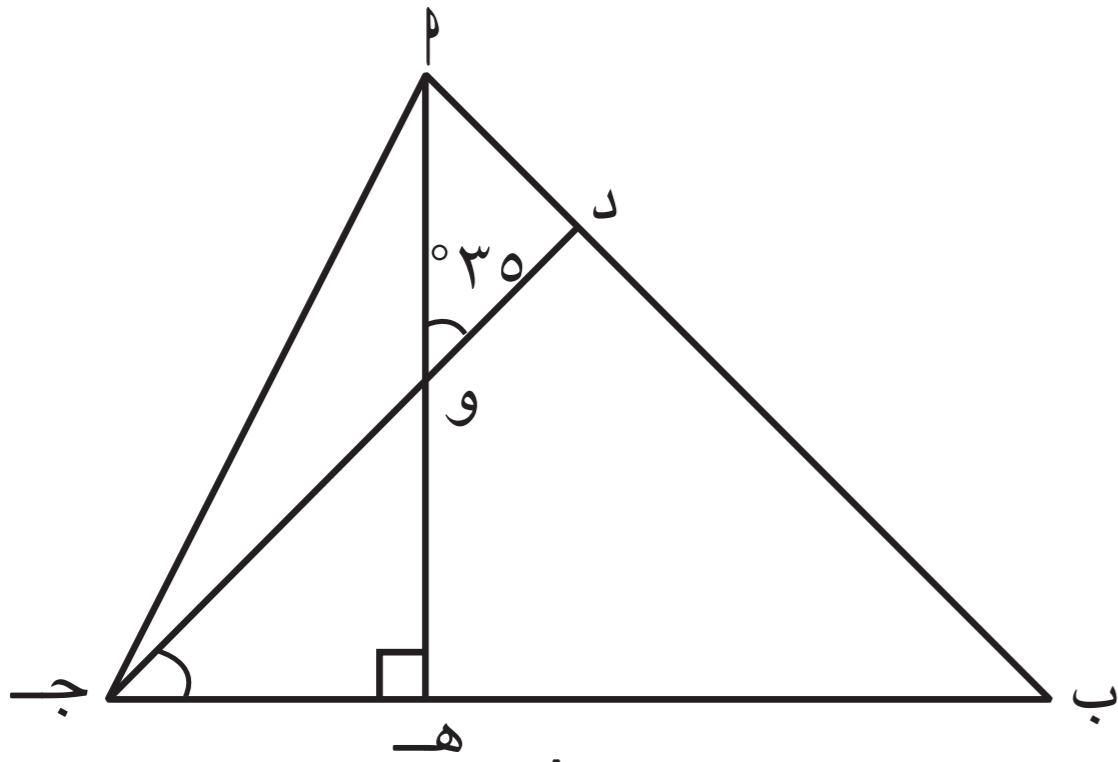
•  $\angle (ي و د) = 180^\circ - (90^\circ + 70^\circ) = 20^\circ$

السبب مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = 180

تذكر

مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = 360°

مثال (١):



أ ب ج مثلث فيه : و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ،  $\angle (د و ب) = 35^\circ$  ، إذا كان  $\overline{ج د} \cap \overline{أ ه} = \{ و \}$  ، أوجد بالبرهان  $\angle (و ج ه)$  .

الحل :

المعطيات : و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ،  $\angle (د و ب) = 35^\circ$

المطلوب : إيجاد  $\angle (و ج ه)$

البرهان : ∴ و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه (معطى)

$$\therefore \overline{أ ه} \perp \overline{ب ج}$$

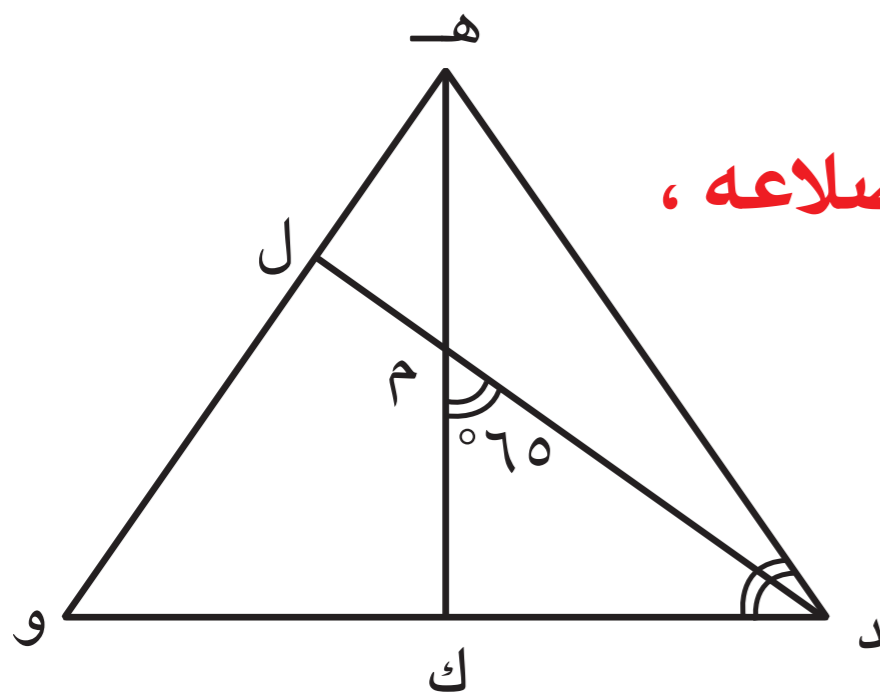
$$\therefore \Delta و ه ج قائم الزاوية في ه ، ∴  $\angle (و ه ج) = 90^\circ$$$

$$\therefore \angle (ه و ج) = \angle (د و ب) = 35^\circ \text{ بالتقابل بالرأس}$$

$$\therefore \angle (و ج ه) = 180^\circ - (35^\circ + 90^\circ)$$

$$= 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ \text{ (مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث = } 180^\circ)$$

مثال (٢):



$\Delta د ه و$  فيه : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ،  $\overline{ه ك} \cap \overline{د ل} = \{ م \}$  ،  $\angle (ه د و) = \angle (د م ك) = 65^\circ$  .

(١) أوجد بالبرهان  $\angle (و)$

(٢) أثبت أن المثلث ه د و متطابق الضلعين

الحل :

المعطيات : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ،  $\angle (ه د و) = \angle (د م ك) = 65^\circ$

المطلوب : إيجاد : (١)  $\angle (و)$  (٢) إثبات أن المثلث ه د و متطابق الضلعين

البرهان : ∴ م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه (معطى)

$$\therefore م ك \perp د و ، م ل \perp ه و \text{ (نظرية)}$$

$$\therefore \angle (ك م د) = 65^\circ \text{ (معطى)}$$

$$\therefore \angle (ك م ل) = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ \text{ (بالتجاور على خط مستقيم)}$$

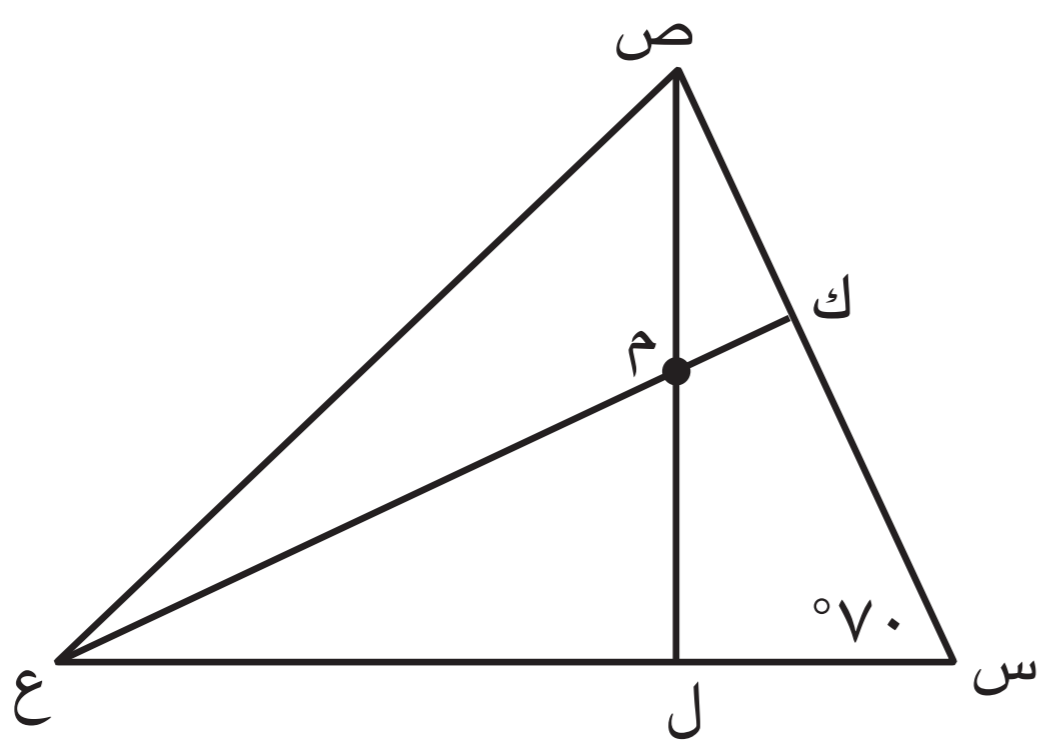
ك م ل و شكل رباعي فيه :

$$\therefore \angle (م ك و) = \angle (م ل و) = 90^\circ$$

$$\therefore \angle (و) = 360^\circ - (115^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 65^\circ \text{ (مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = } 360^\circ)$$

$$\therefore \angle (ه د و) = 65^\circ \text{ (معطى)}$$

$$\therefore \Delta ه د و \text{ متطابق الضلعين . (لتطابق زوايا القاعدة)}$$



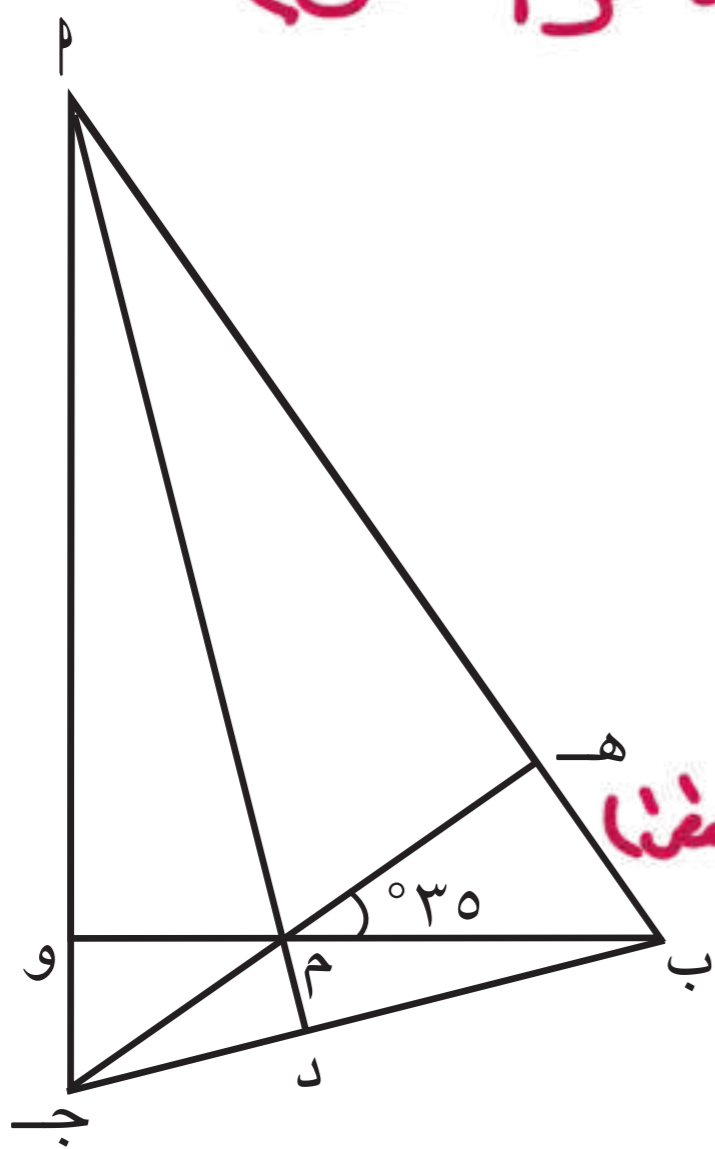
١ في الشكل المقابل ، المثلث س ص ع فيه :  $\hat{س} = 70^\circ$  ،  
 م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة  
 من رؤوس المثلث على أضلاعه ،  
 $ل ص \cap ك ع = \{ م \}$  ،  
 أوجد بالبرهان : (١)  $\hat{س ص ل}$  و (٢)  $\hat{ص م ع}$

البرهان :

١ : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه (معطى)  
 $\therefore ل ص \perp س ع$   
 $\therefore \hat{ص ل س} = (س ق ل) = 90^\circ$   
 $\hat{ص م ع} = 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 110^\circ$   
 (مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة =  $180^\circ$ )  
 الشكل الرباعي =  $360^\circ$   
 $\hat{ص م ع} = (ص م ع) = 110^\circ$   
 (بالتقابل بالرأس)

٢ في الشكل المقابل ، أ ب ج مثلث فيه :  
 م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة  
 من رؤوس المثلث على أضلاعه ،  $\hat{ه م ب} = 35^\circ$  ،  
 أوجد بالبرهان  $\hat{ب أ ج}$  .

البرهان :

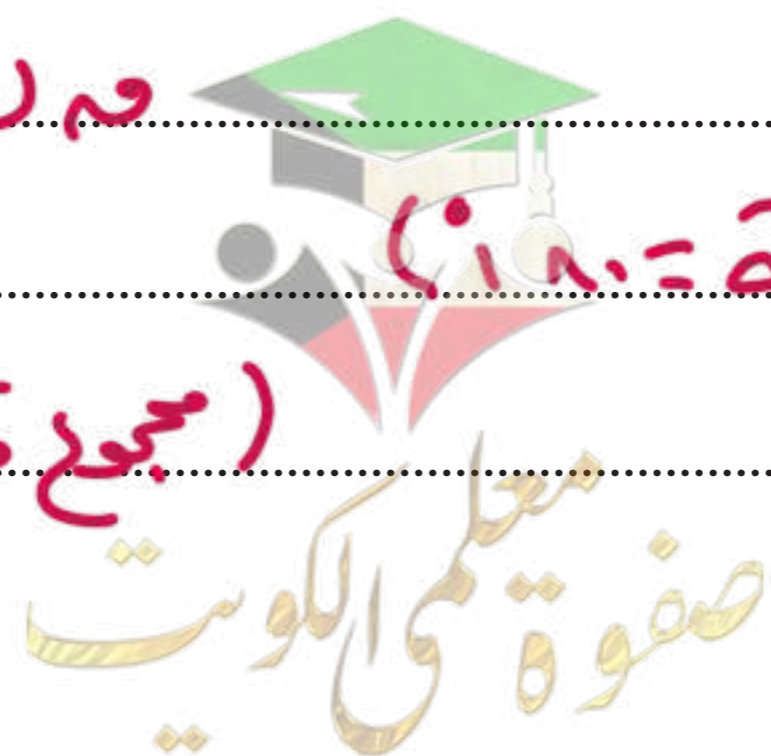


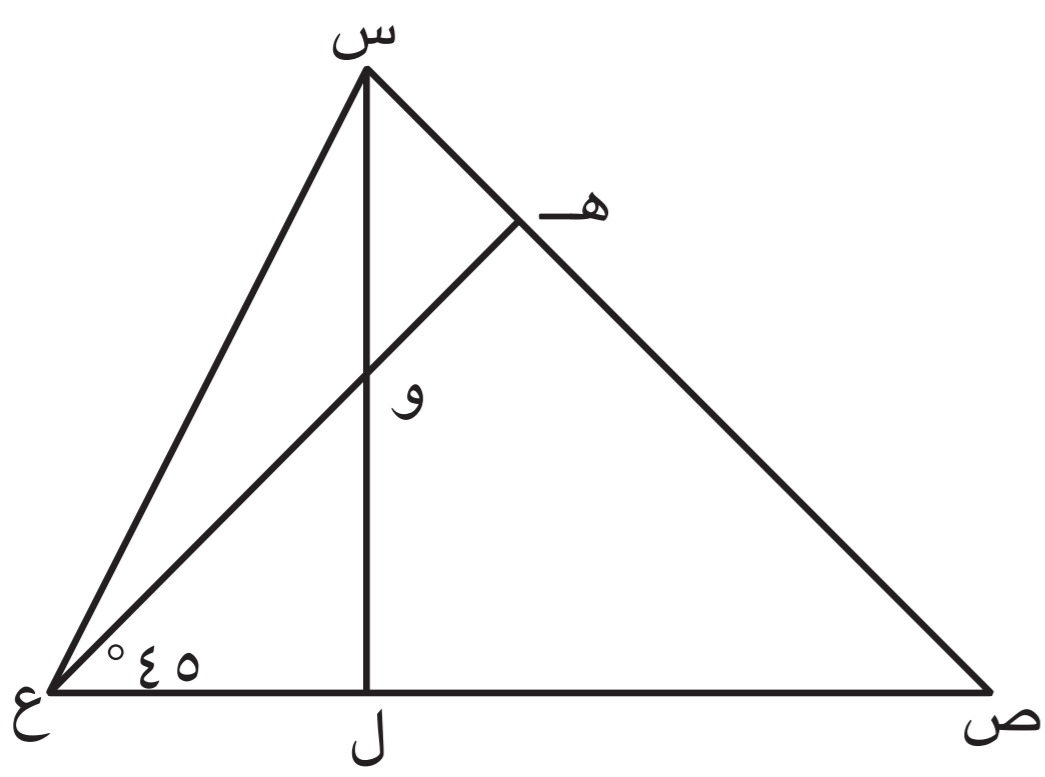
٢ : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه (معطى)  
 $\therefore ج ه \perp ب أ$  ،  $ب م \perp أ ج$

في ه م ب :

$\hat{ه م ب} = (ه م ب) = 90^\circ$   
 $\hat{ب م ج} = 180^\circ - 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$   
 (مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة =  $180^\circ$ )  
 $\hat{ب أ ج} = 180^\circ - 55^\circ - 90^\circ = 35^\circ$

(مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة =  $180^\circ$ )





٣ في الشكل المقابل، س ص ع مثلث فيه:  $\angle ه ع ل = 45^\circ$   
 و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه،  
 $س ل \cap ه ع = \{ و \}$ .  
 (١) أوجد بالبرهان  $\angle ه و س$   
 (٢) ما نوع المثلث ه و س بالنسبة إلى أضلاعه؟

البرهان:

١ ونقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه (مفترضا)

∴  $س ل \perp ه ع$  ،  $ع ه \perp س ه$  (٢) في  $\Delta ه و س$ :

في  $\Delta ه و ل ع$ :  
 $\angle ه و ل ع = 90^\circ$  (م  $\Delta ه و ل ع$ )  
 $\angle ه و س = 90^\circ$  (م  $\Delta ه و س$ )  
 $\angle ه و ل ع = 90^\circ$  (م  $\Delta ه و ل ع$ )

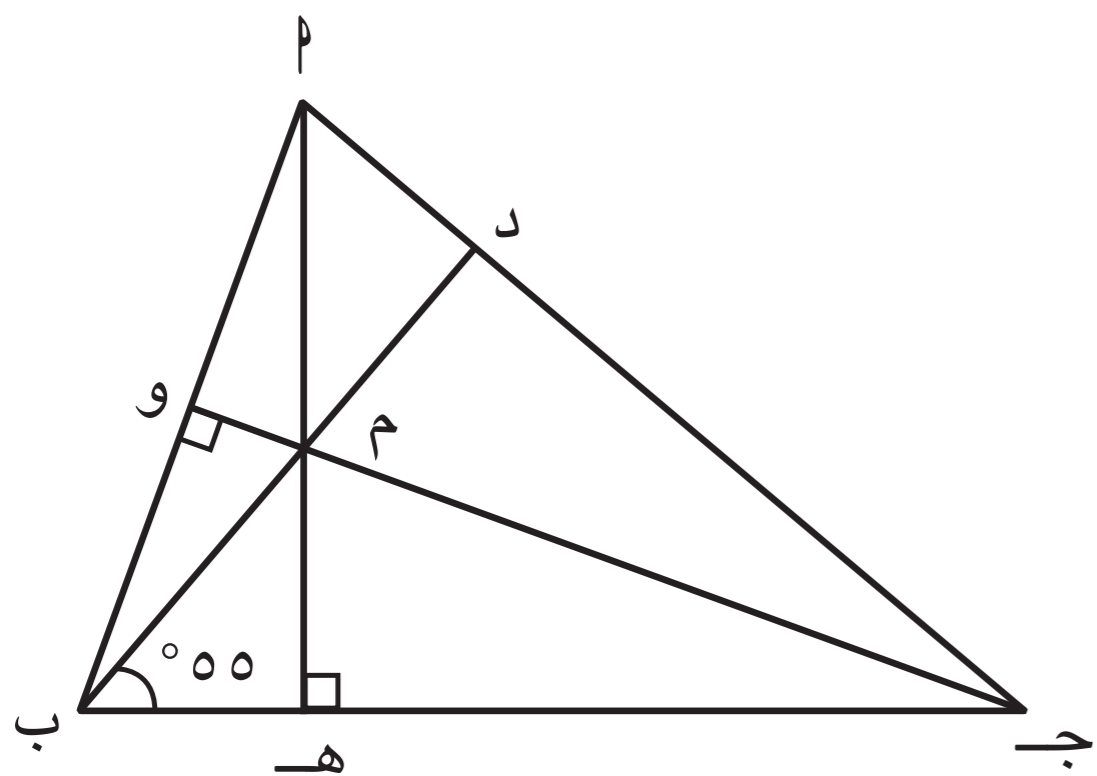
$\angle ه و ل ع = 90^\circ$  (م  $\Delta ه و ل ع$ )  
 $\angle ه و س = 90^\circ$  (م  $\Delta ه و س$ )  
 $\angle ه و ل ع = 90^\circ$  (م  $\Delta ه و ل ع$ )

$\angle ه و ل ع = 90^\circ$  (م  $\Delta ه و ل ع$ )  
 $\angle ه و س = 90^\circ$  (م  $\Delta ه و س$ )  
 $\angle ه و ل ع = 90^\circ$  (م  $\Delta ه و ل ع$ )

(مجموع زوايا المثلث الداخلة =  $180^\circ$ ) ∴  $\Delta ه و س$  متساوية الأضلاع

$\angle ه و س = \angle ه و ل ع = \angle ه و ل س$  (م  $\Delta ه و ل ع$ )  
 $\angle ه و س = \angle ه و ل ع = \angle ه و ل س$  (م  $\Delta ه و ل ع$ )

$\angle ه و س = 45^\circ$  (بالتقابل بالرأس)



٤ أ ب ج مثلث فيه:

$ه ه \perp ب ج$  ،  $ج و \perp أ ب$ .

$\angle م ب ه = 55^\circ$

(١) أثبت أن:  $ب د \perp أ ج$ .

(٢) أوجد  $\angle م أ ج$ .

البرهان:

١ في  $\Delta م ب ج$ :

$ه ه \perp ب ج$  ،  $ج و \perp أ ب$  (مفترضا)

∴ م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من

رؤوس المثلث على أضلاعه

∴  $ب د \perp أ ج$

في  $\Delta م ب ج$ :

$\angle م ب ه = 55^\circ$  (م  $\Delta م ب ه$ )  
 $\angle م ب ج = 90^\circ$  (م  $\Delta م ب ج$ )  
 $\angle م ب ه = 55^\circ$  (م  $\Delta م ب ه$ )  
 $\angle م ب ج = 90^\circ$  (م  $\Delta م ب ج$ )

$\angle م ب ج = 90^\circ$  (م  $\Delta م ب ج$ )  
 $\angle م ب ه = 55^\circ$  (م  $\Delta م ب ه$ )  
 $\angle م ب ج = 90^\circ$  (م  $\Delta م ب ج$ )

$\angle م ب ج = 90^\circ$  (م  $\Delta م ب ج$ )  
 $\angle م ب ه = 55^\circ$  (م  $\Delta م ب ه$ )  
 $\angle م ب ج = 90^\circ$  (م  $\Delta م ب ج$ )

$\angle م ب ج = 90^\circ$  (م  $\Delta م ب ج$ )  
 $\angle م ب ه = 55^\circ$  (م  $\Delta م ب ه$ )  
 $\angle م ب ج = 90^\circ$  (م  $\Delta م ب ج$ )

(مجموع زوايا المثلث الداخلة =  $180^\circ$ ) ∴  $\Delta م ب ج$  متساوية الأضلاع

$\angle م ب ج = \angle م ب ه = \angle م ب ج$  (م  $\Delta م ب ج$ )  
 $\angle م ب ج = \angle م ب ه = \angle م ب ج$  (م  $\Delta م ب ج$ )

# القطع المتوسطة للمثلث

٦-٧

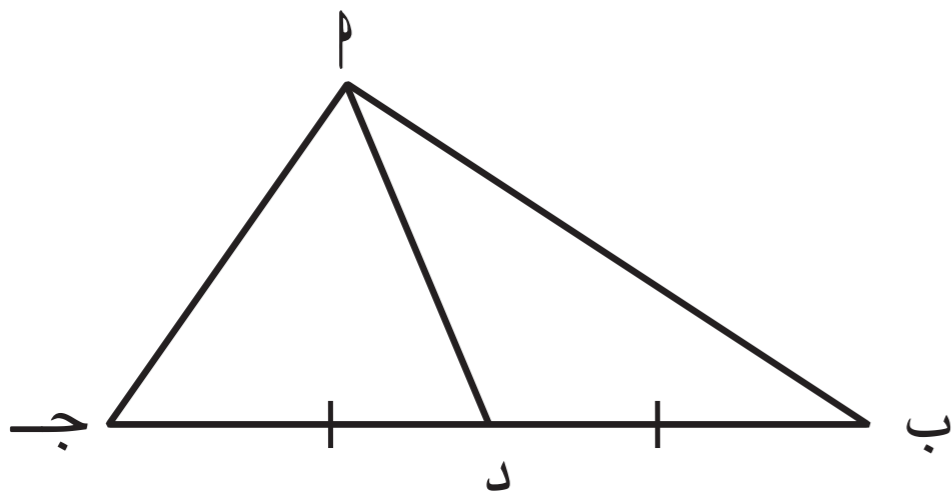
## Medians of a Triangle

سوف تتعلم : توظيف نظرية القطع المتوسطة للمثلث لحلّ تمارين هندسية .

### العبارات والمفردات :

Median of a Triangle

القطع المتوسطة للمثلث



في  $\Delta$   $AB$  جـ :

د منتصف  $AB$  جـ ،

$\overline{PD}$  تُسمى ( قطعة متوسطة للمثلث  $AB$  جـ ) .

**القطع المتوسطة للمثلث :** هي القطعة المستقيمة التي تصل بين أي رأس في المثلث ومنتصف الضلع المقابل له .

### استكشف



في  $\Delta$   $AB$  جـ : ومنتصف  $AB$  ، هـ منتصف  $AC$  ،

$\overline{BE} \cap \overline{CH} = \{M\}$

هل  $M$  ينصف  $BC$  جـ ؟

للتحقق من ذلك ، نتبع ما يلي :

**العمل :** نرسم  $M$  يقطع  $BC$  جـ في  $D$  ، بحيث  $AM = MD = MS$  ، ثم صل  $BS$  ،  $CS$  جـ

في  $\Delta$   $ABS$  :  $OM \parallel BS$  ؟ لماذا ؟

في  $\Delta$   $ACS$  جـ :  $OM \parallel CS$  ؟ لماذا ؟

هل الشكل  $BS$  جـ  $M$  متوازي أضلاع ؟ وضّح إجابتك .

**ملاحظات :** قترا متوازي الأضلاع

$BD = DC$  جـ

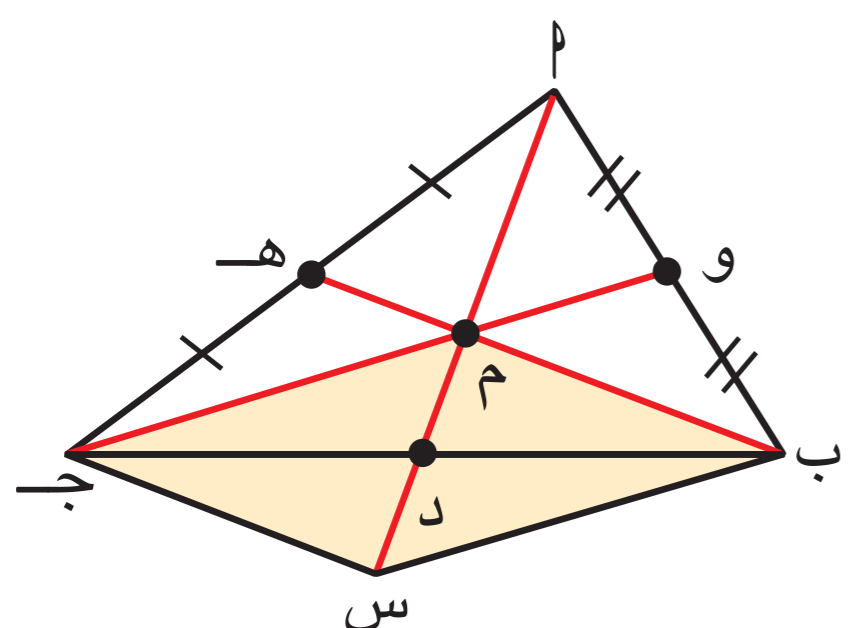
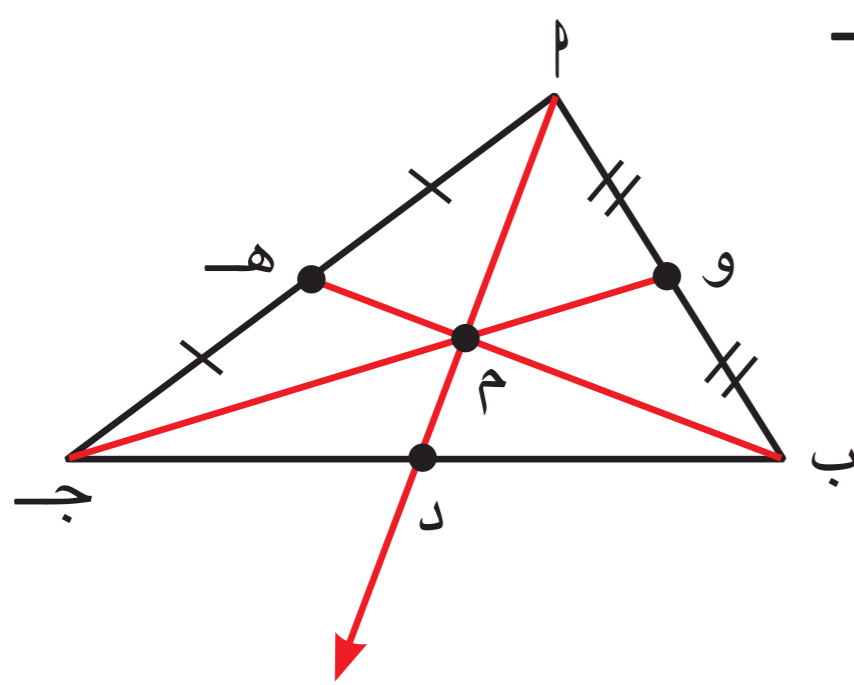
$\overline{AD}$  قطعة متوسطة

$MD = MS$  جـ

$MD = MS = \frac{1}{2} AM = \frac{1}{2} MS$  جـ

### اللازم

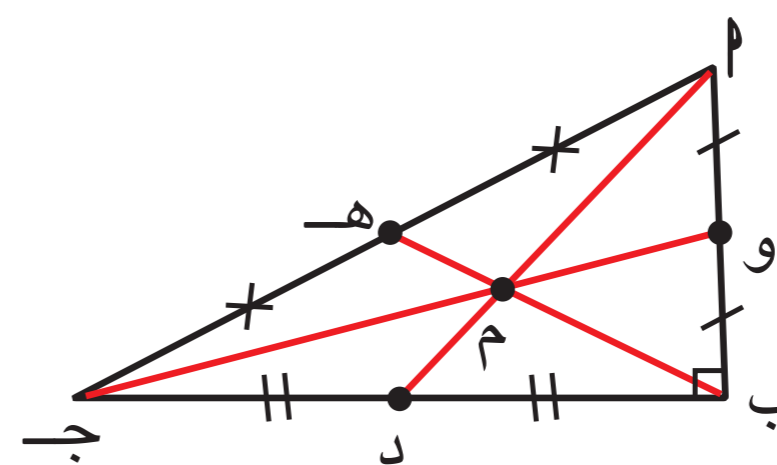
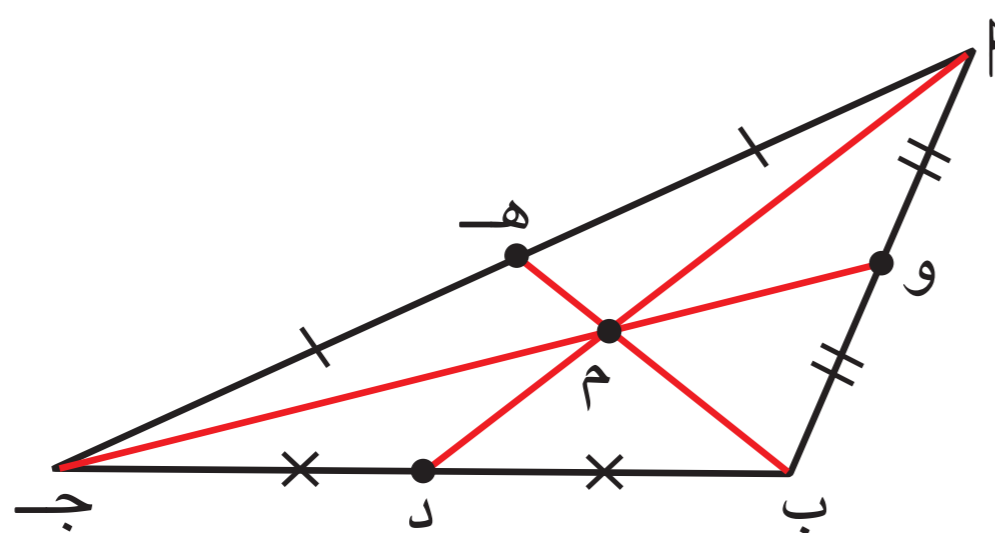
أدوات هندسية .



( لأن  $AM = MD = MS$  عملاً )

صفوة علمي الكويت

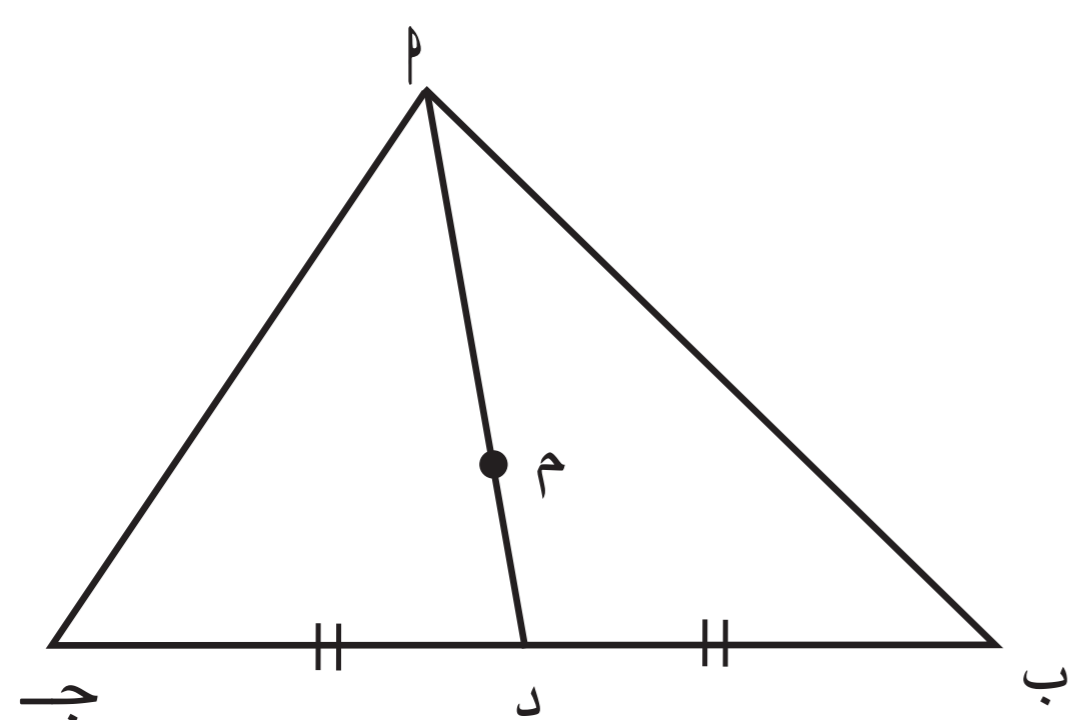
بالمثل في المثلث القائم الزاوية والمثلث المنفرج الزاوية .



• ماذا تلاحظ ؟ **القطع المتوسطة للمثلث تتلاقى في نقطة واحدة**

### نظرية :

القطع المتوسطة للمثلث تتقاطع في نقطة واحدة تُقسم كل منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس .



في  $\Delta$   $AB$  ج :

$\overline{AD}$  قطعة متوسطة ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث .

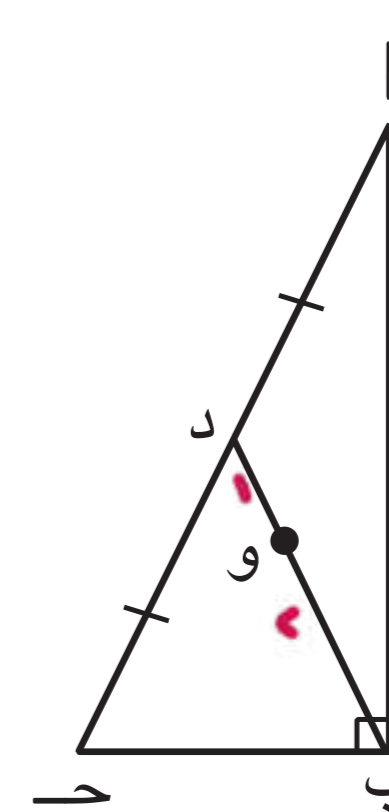
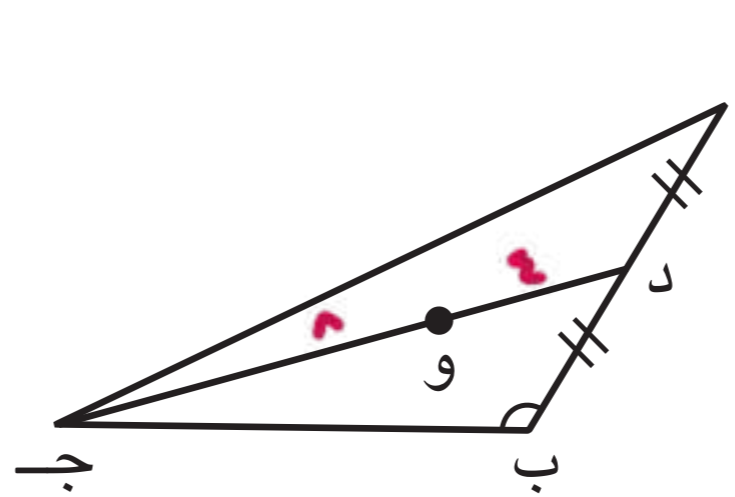
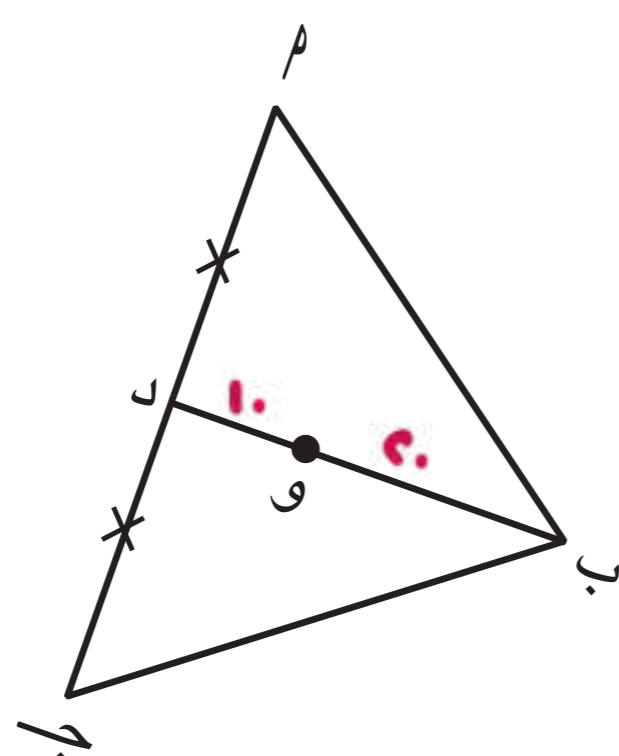
أكمل :

$$\begin{array}{l} \text{م} = \frac{2}{3} \text{AD} \\ \text{م} = \frac{1}{3} \text{AD} \\ \text{م} = \frac{2}{3} \text{AD} \\ \text{م} = \frac{1}{3} \text{AD} \end{array}$$

### دورك الآن (١)

في كل من المثلثات التالية : و نقطة تقاطع القطع المتوسطة .

أكمل ( دون استخدام الأدوات الهندسية ) .



لتكن  $AD = 30$  سم

لتكن  $AD = 4$  سم

لتكن  $AD = 2$  سم

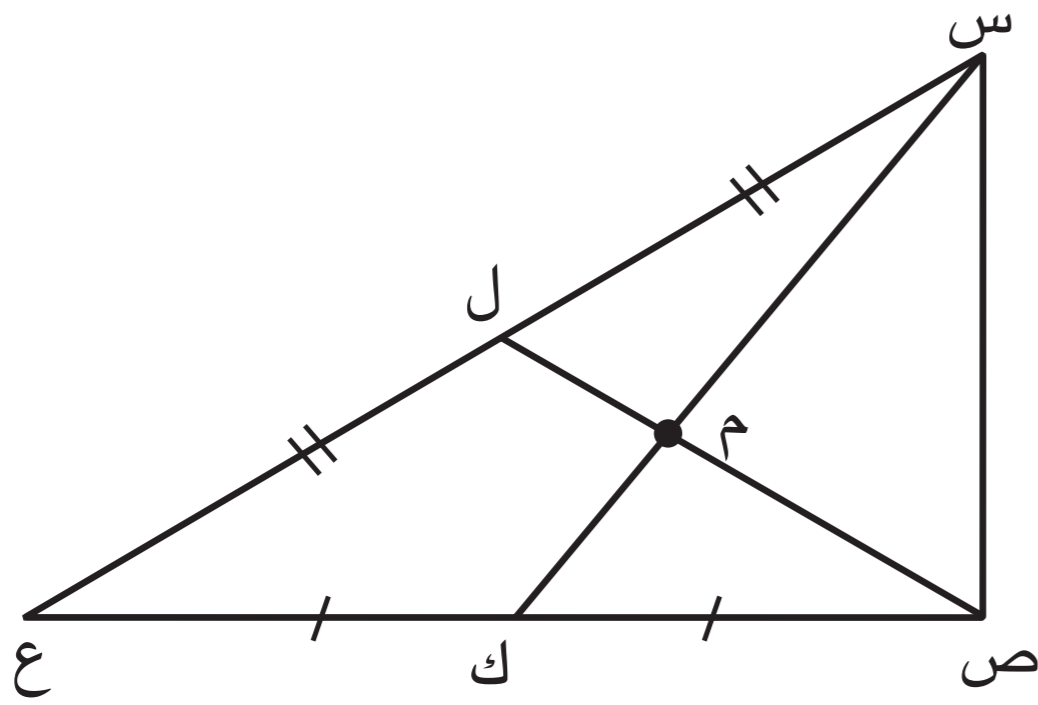
∴  $AM = 20$  سم ∴  $DM = 10$  سم ∴  $AM = 8$  سم ∴  $DM = 4$  سم ∴  $AM = 1$  سم ∴  $DM = 1$  سم

∴  $AM = 12$  سم ∴  $DM = 4$  سم ∴  $AM = 2$  سم ∴  $DM = 1$  سم





في الشكل المقابل س ص ع مثلث :



∴ ل منتصف  $\overline{س ج}$  ∴ ص ل قطعة متوسطة

∴ ك منتصف  $\overline{ص ع}$  ∴ س ك قطعة متوسطة

∴ ص ل ∩ س ك = {م}

∴ م هي نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث

### مثال (١):

أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ،

ب ج = ٦ سم ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث أ ب ج ،  $\angle م = 30^\circ$

أوجد بالبرهان كلاً من : (١) أ ج (٢) ب د

(٣) ب م (٤) م د

الحل :

المعطيات : أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ، م نقطة تقاطع القطع المتوسطة ،

ب ج = ٦ سم ،  $\angle م = 30^\circ$

المطلوب : إيجاد كل من : (١) أ ج (٢) ب د (٣) ب م (٤) م د

البرهان :  $\Delta$  أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب فيه :

$$\therefore \angle م = 30^\circ$$

$$\therefore ب ج = \frac{1}{2} أ ج$$

(نتيجة)

(مثلث ثلاثيني ستيني)

$$\therefore أ ج = ٢ \times ب ج = ٢ \times ٦ = ١٢ \text{ سم}$$

∴ د منتصف أ ج ، ب زاوية قائمة

(نظرية)

$$ب د = \frac{1}{2} أ ج$$

$$= \frac{1}{2} \times ١٢ = ٦ \text{ سم}$$

(معطى)

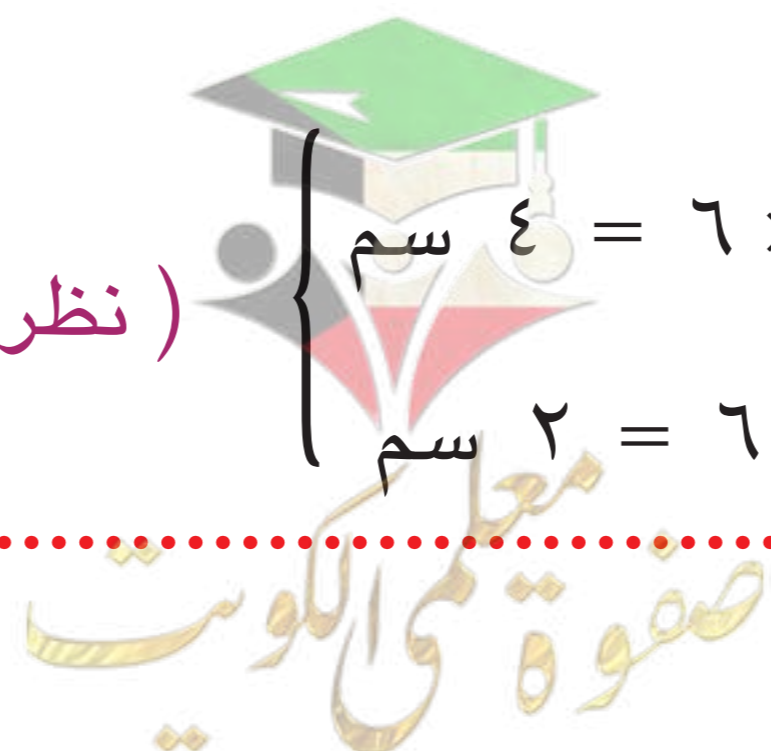
∴ م نقطة تقاطع القطع المتوسطة

∴ ب د قطعة متوسطة

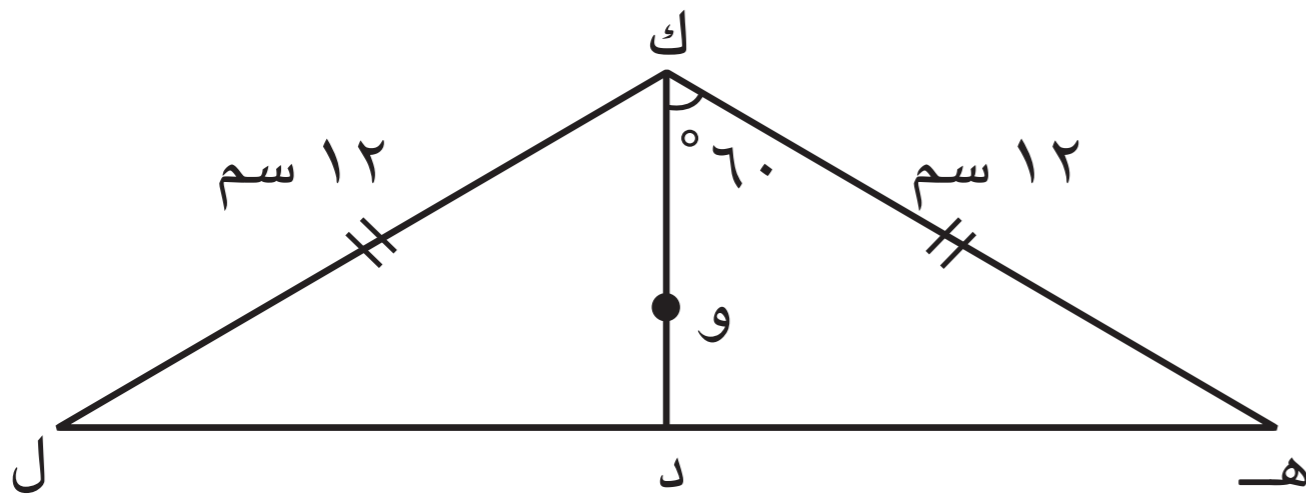
(نظرية)

$$\therefore ب م = \frac{2}{3} ب د = \frac{2}{3} \times ٦ = ٤ \text{ سم}$$

$$\therefore م د = \frac{1}{3} ب د = \frac{1}{3} \times ٦ = ٢ \text{ سم}$$



مثال (٢):



ك هل مثلث فيه :

ك هـ = ك ل = ١٢ سم ،  $\angle ك د = 60^\circ$  ،  
و نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث .

أوجد بالبرهان كلاً من : (١)  $\angle هـ$

(٢) ك د

(٣) و د

الحل :

المعطيات : ك هل مثلث فيه : ك هـ = ك ل = ١٢ سم ،  $\angle ك د = 60^\circ$

المطلوب : إيجاد كل من : (١)  $\angle هـ$  (٢) ك د (٣) و د

البرهان :  $\Delta ك هـ ل$  فيه :

∴ و نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث ك هل (معطى)

∴ د منتصف هـ ل

∴ ك هـ = ك ل (معطى)

∴  $\overline{ك د} \perp \overline{هـ ل}$

(من خواص المثلث المتطابق الضلعين)

∴  $\angle ك د هـ = 90^\circ$

في  $\Delta ك هـ ل$  :

∴  $\angle هـ ك د = 60^\circ$

∴  $\angle هـ ك د = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

∴  $\Delta ك هـ ل$  مثلث ثلاثيني ستيني

∴ ك د =  $\frac{1}{2}$  ك هـ (نتيجة)

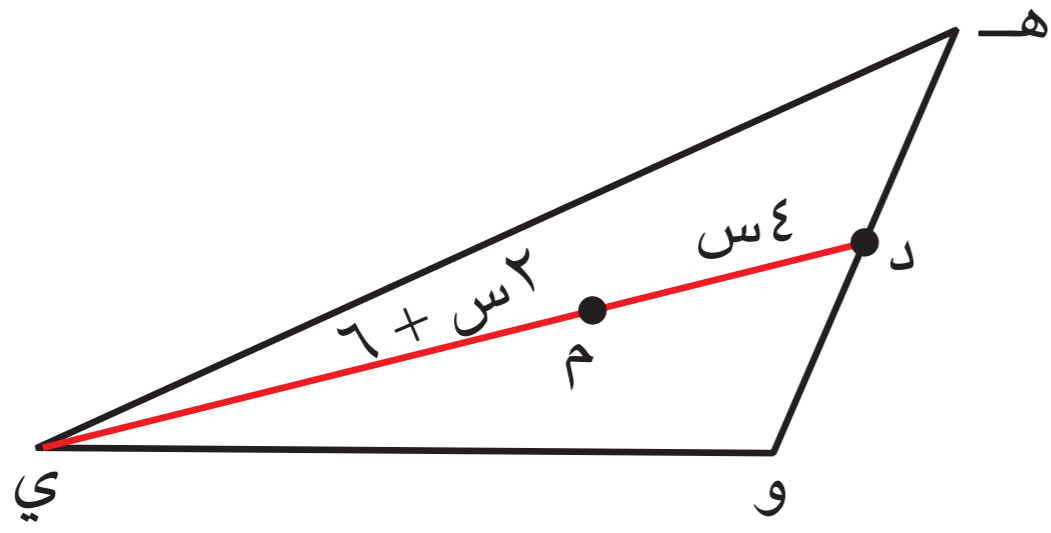
$$6 \text{ سم} = 12 \times \frac{1}{2} =$$

$$\therefore \text{و د} = 6 \times \frac{1}{2} =$$

$$\text{(نظرية)} \quad 2 \text{ سم} = 6 \times \frac{1}{3} =$$



### مثال (٣) :



المثلث هـ و ي فيه : م نقطة تقاطع القطع المتوسط للمثلث .  
إذا كان  $د م = (٤س)$  سم ،  $م ي = (٦ + ٢س)$  سم ،  
أوجد بالبرهان قيمة س .

الحل :

المعطيات : المثلث هـ و ي فيه : م نقطة تقاطع القطع المتوسط للمثلث ،  
 $د م = (٤س)$  سم ،  $م ي = (٦ + ٢س)$  سم .

المطلوب : إيجاد قيمة س .

البرهان : ∴ م نقطة تقاطع القطع المتوسط للمثلث هـ و ي ( معطى )

( نظرية )

$$\therefore د م = م ي \times \frac{١}{٢}$$

( حلّ المعادلة )

$$\therefore ٤س = (٦ + ٢س) \times \frac{١}{٢}$$

$$٤س = ٣ + س$$

$$٤س - س = ٣$$

$$٣س = ٣$$

$$س = ١$$

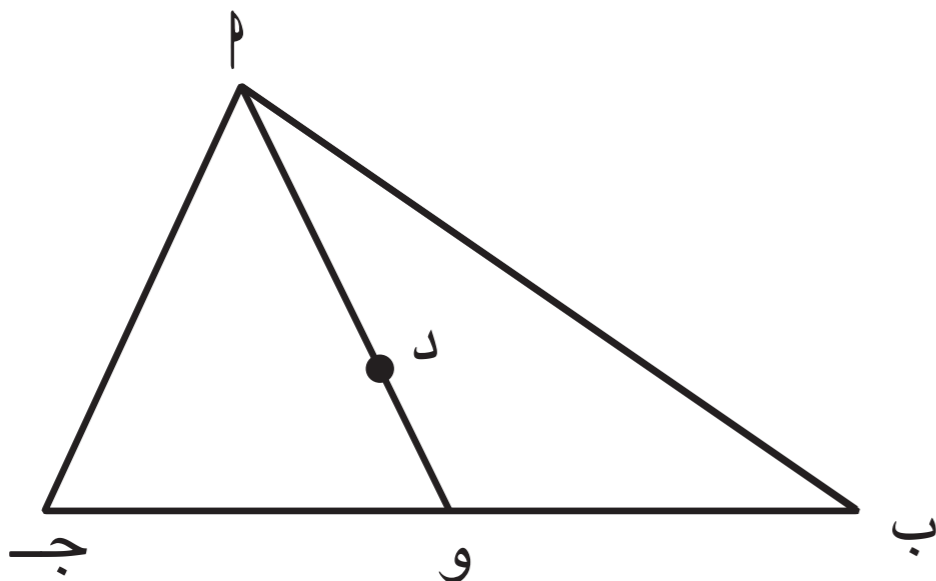
( تحقّق من إجابتك )

انتبه

استخدم خاصية توزيع الضرب  
على الجمع لتسهيل العمليات  
الحسابية .

$$\frac{١}{٢} (٦ + ٢س)$$

### دورك الآن (٣)



في الشكل المقابل :  $\overline{أ و}$  قطعة متوسطة للمثلث  $أ ب ج$  ،  
إذا كان  $أ د = ٥س - ١$  ، و  $د ب = ٢س$  ،  
أوجد بالبرهان طول  $\overline{أ و}$  .

المعطيات :  $\overline{أ و}$  قطعة متوسطة للمثلث  $أ ب ج$

$$أ د = ٥س - ١ \quad و \quad د ب = ٢س$$

المطلوب : طول  $\overline{أ و}$

البرهان : ∴ د نقطة تقاطع القطع المتوسط للمثلث ( معطى )

∴  $\overline{أ و}$  قطعة متوسطة ،

( نظرية )

$$\therefore و د = د ب \times \frac{١}{٢}$$

( حلّ المعادلة )  $(٥س - ١) \times \frac{١}{٢} = ٢س$

$$٥س - ١ = ٤س$$

$$٥س - ٤س = ١$$

$$س = ١$$

وبالتالي ،  $\overline{أ و} = د ب + و د = ٢س + ٥س - ١ = ٧س - ١$  ( تحقّق من إجابتك )

$$أ و = ٧س - ١ = ٧(١) - ١ = ٦$$



١ في الشكل المقابل :

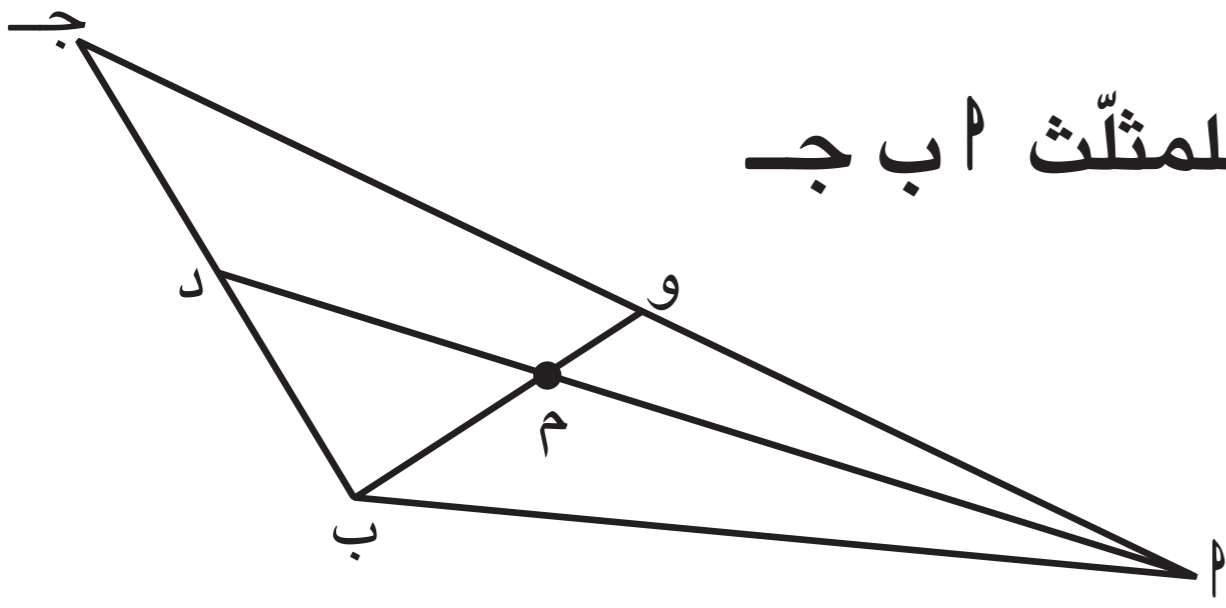
أد  $\cap$  ب و = { م } ، م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث أ ب ج

إذا كان م ب = ٤ سم ، أ د = ٢٧ سم ،

أوجد بالبرهان كلاً من : (١) و م

(٢) أ م

(٣) م د



البرهان :

١ م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث أ ب ج (مفروضاً)

∴ م ب =  $\frac{1}{2}$  ب م (نظرية)

$$م ب = ٤ \times \frac{1}{2} = ٢ \text{ سم}$$

٢ أ م =  $\frac{2}{3}$  أ د (نظرية)

$$٢ \times \frac{3}{2} = ٣ \text{ سم}$$

٣ م د =  $\frac{1}{2}$  أ د (نظرية)

$$٢٧ \times \frac{1}{2} = ١٣.٥$$

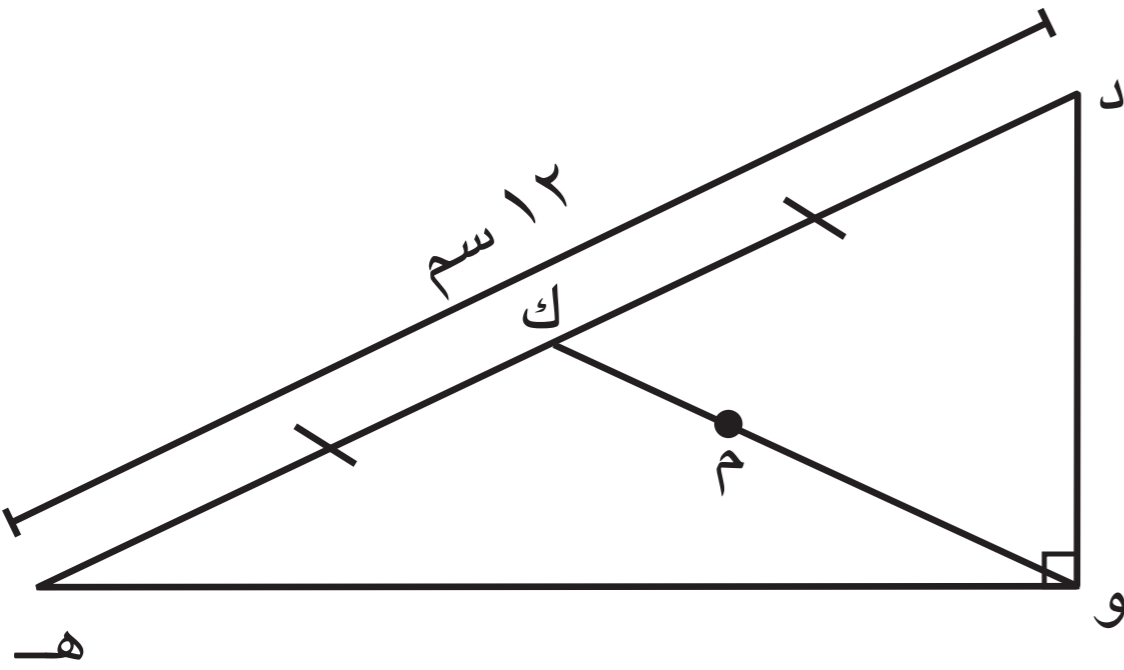
$$١٣.٥ \text{ سم}$$

٢  $\Delta$  ه و د قائم الزاوية في و ، فيه :

م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث .

أوجد بالبرهان كلاً مما يلي : (١) و ك

(٢) م ك



البرهان :

١ في  $\Delta$  ه و د القائم الزاوية في و : (٢) م هي نقطة تقاطع

القطع المتوسطة للمثلث (مفروضاً)

∴ و ك =  $\frac{1}{2}$  و د (نظرية)

$$١٢ \times \frac{1}{2} = ٦ \text{ سم}$$

$$٦ \text{ سم}$$

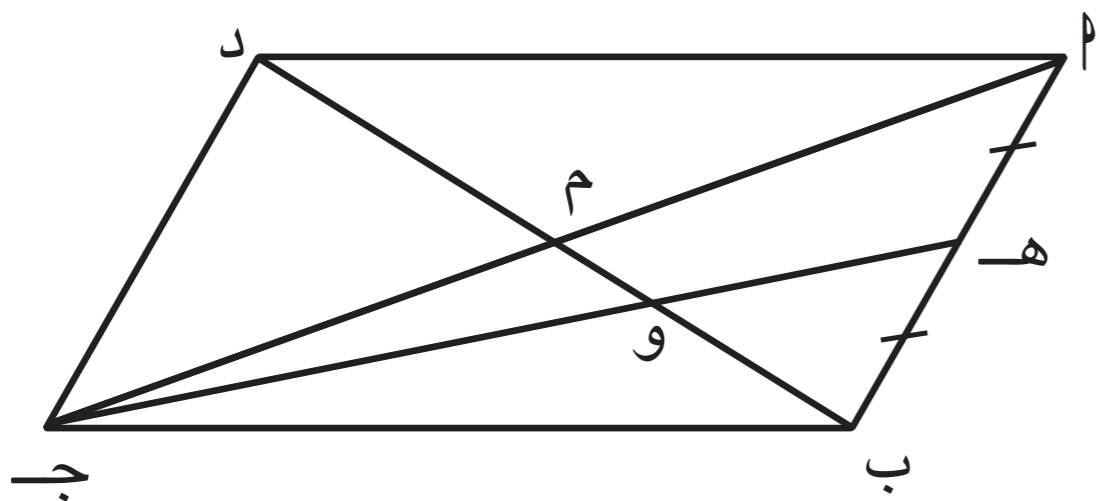
∴ م ك =  $\frac{2}{3}$  و ك (نظرية)

$$٦ \times \frac{2}{3} = ٤ \text{ سم}$$

$$٤ \text{ سم}$$



٣ أب ج د متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م ،  
 إذا كان  $BD = 18$  سم ، ه منتصف  $AB$   
 $BM \cap ج ه = \{و\}$   
 أوجد بالبرهان : (١) م ب (٢) ب و



البرهان :

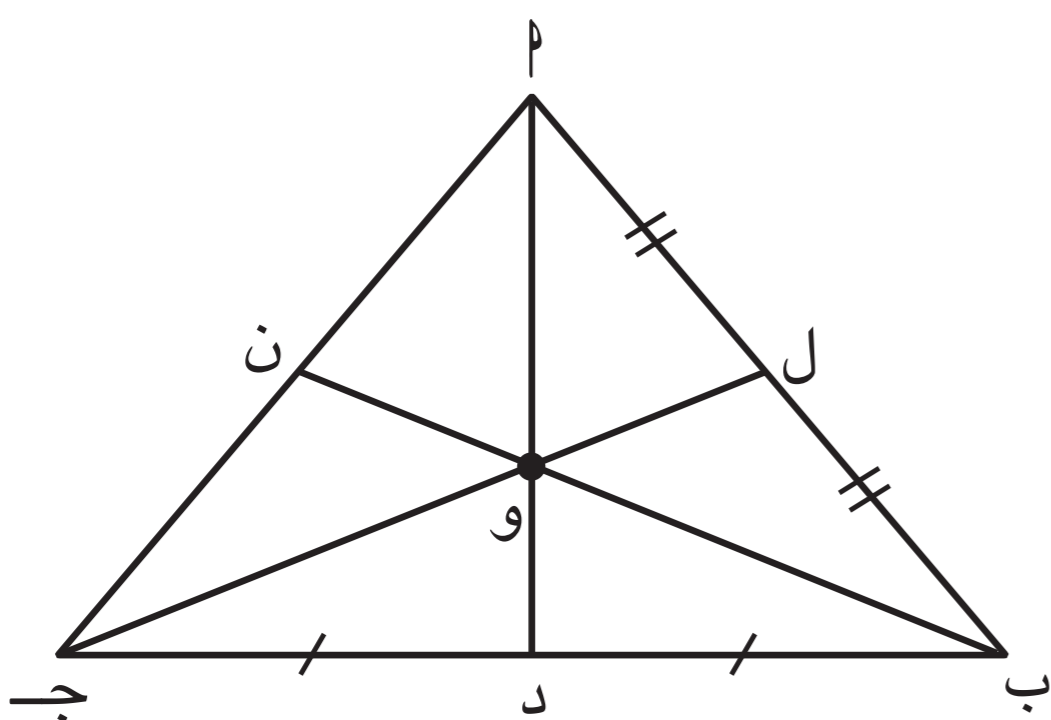
١ :-  $AB \parallel CD$  متوازي أضلاع (معطى)  
 $\therefore BM = DM$  و  $AM = CM$   
 $BM = \frac{1}{2} BD$

$$BM = \frac{1}{2} \times 18 = 9 \text{ سم}$$

٢ في  $\triangle BMD$  :  
 م منتصف  $BD$   
 ه منتصف  $AB$   
 :- وهن نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث  
 ب و  $BM = \frac{2}{3} BD$  (نظرية)  
 $\frac{2}{3} \times 18 = 12$   
 $\frac{2}{3} \times 9 = 6$

٤ المثلث  $ABC$  فيه :

و نقطة تلاقي القطع المتوسطة للمثلث ،  
 إذا كان  $AO = 8$  (س) وحدة طول ،  
 و  $OD = (5 - 3)$  وحدة طول ،  
 أوجد بالبرهان قيمة  $OS$  ، ثم تحقق من الحل .



البرهان :

في  $\triangle ABC$  :  
 وهن نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث (معطى)  
 $\therefore OS = \frac{1}{3} OD$  و  $OS = \frac{2}{3} AO$  (نظرية)

$$8 = \frac{2}{3} OS \quad \therefore OS = \frac{3 \times 8}{2} = 12$$

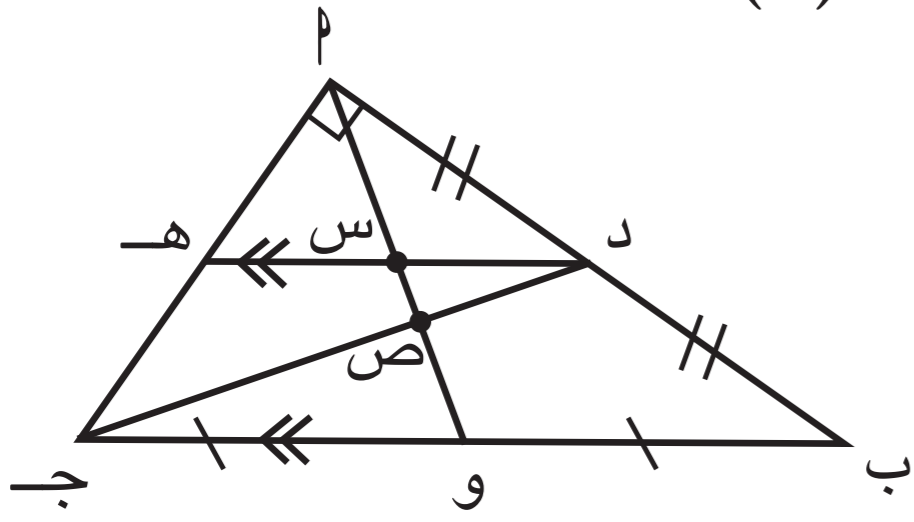
$$OS = \frac{1}{3} OD \quad \therefore 12 = \frac{1}{3} OD \quad \therefore OD = 36$$

$$AD = AO + OD = 8 + 36 = 44$$

$$OS = \frac{2}{3} \times 44 = \frac{88}{3} = 29 \frac{1}{3}$$



- ٥ لديك قائمتان ، إختتر من القائمة (٢) ما يناسب كلّ تمرين من القائمة (١) لتحصل على إجابة صحيحة .



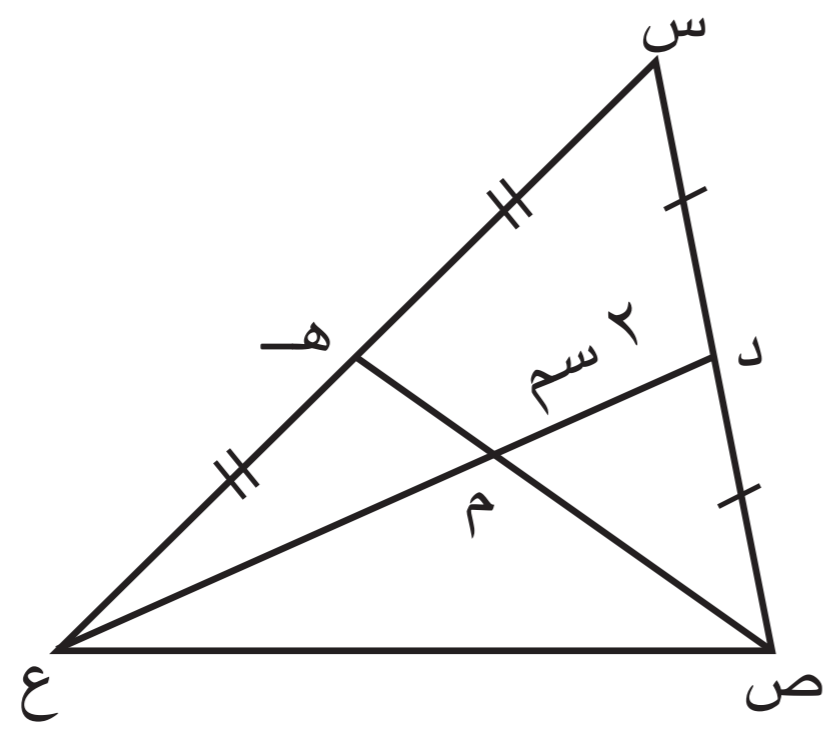
في الشكل المقابل : ا ب ج مثلث قائم الزاوية في ا ،  
د منتصف ا ب ، و منتصف ب ج ،  
ده // ب ج ، ده = ٦ سم

القائمة (٢)	القائمة (١)
١ سم (أ)	١ ص و = ب
٢ سم (ب)	٢ د س = ح
٣ سم (ج)	٣ س ص = ا
٤ سم (د)	
٦ سم (هـ)	

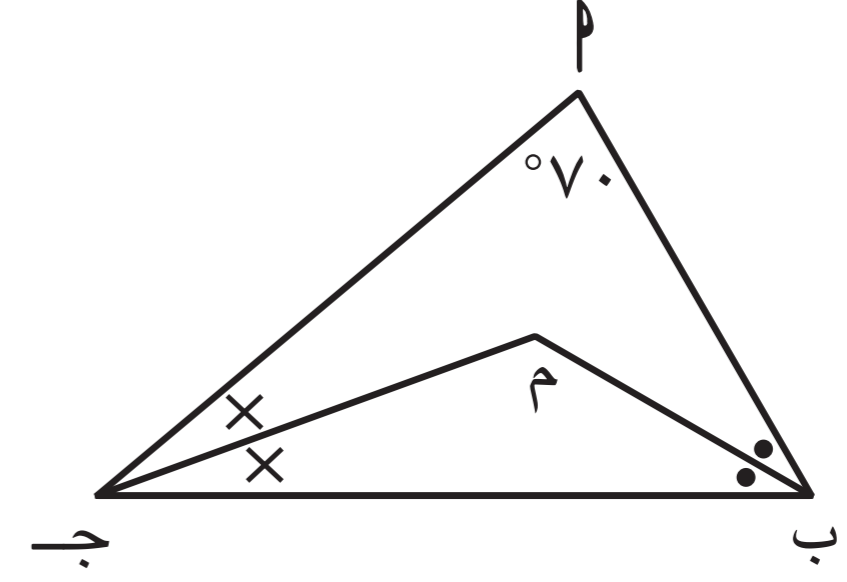
# تقويم الوحدة التعليمية السابعة Unit Seven Assessment

## أولاً: البنود المقالية

١ في كل من المثلثات التالية ، أكمل دون استخدام الأدوات الهندسية :



(ب)



(أ)

م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث س ص ع .

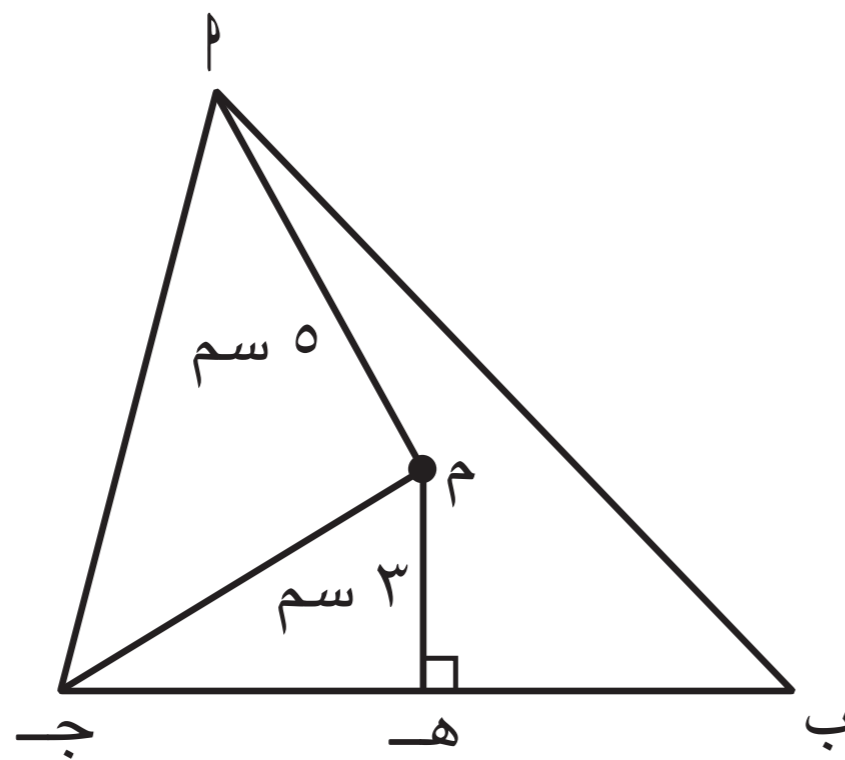
$$م = ع = ٢ \times ٢ = ٤ \text{ سم}$$

$$د = ع = ٢ + ٤ = ٦ \text{ سم}$$

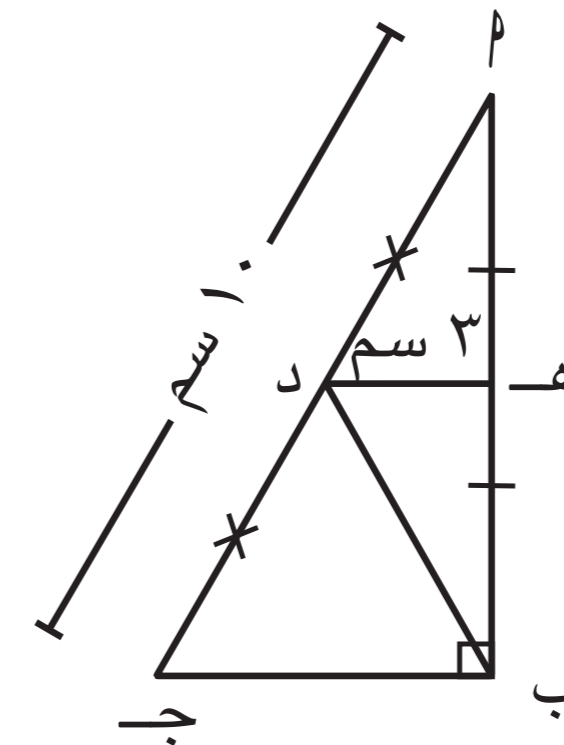
$$١٠ = ٧٠ + ١٠ = (١٠ - ٧٠) + ١٠ = ٤٠$$

$$١٠ = ٧٠ + ١٠ = (١٠ - ٧٠) + ١٠ = ٤٠$$

$$١٤٥ =$$



(د)



(ج)

م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث م ب ج .

$$م = ج = ٥ \text{ سم}$$

$$هـ = ج = \sqrt{(٥)^2 - (٣)^2} = \sqrt{٢٥ - ٩} = \sqrt{١٦} = ٤ \text{ سم}$$

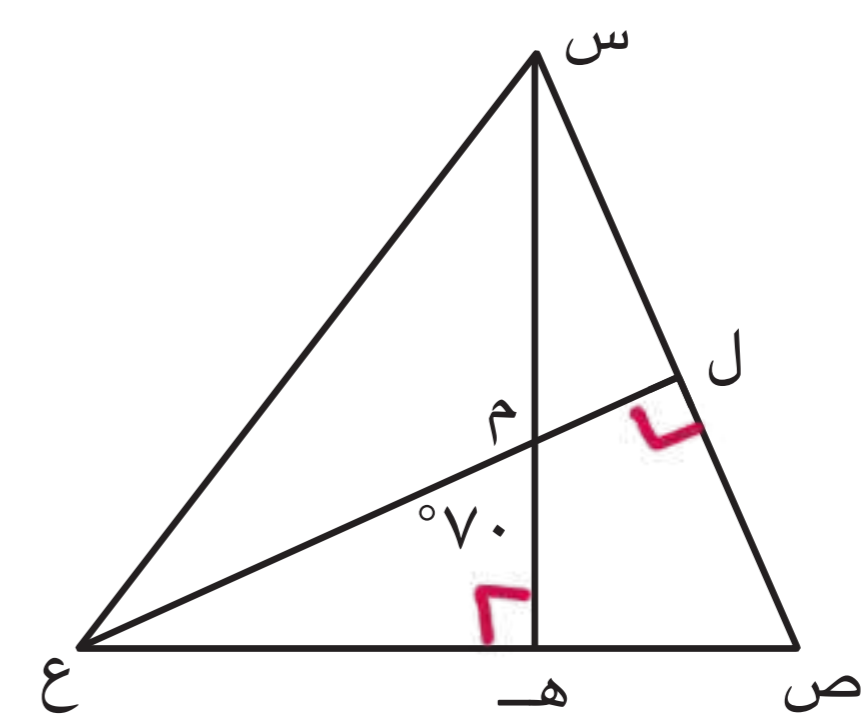
$$ب = ج = ٤ + ٤ = ٨ \text{ سم}$$

$$ب = ج = ٢ \times ٢ = ٤ \text{ سم}$$

$$ب = د = \frac{١}{٢} \times ١٠ = ٥ \text{ سم}$$

$$م = ب = \sqrt{(١٠)^2 - (٦)^2} = \sqrt{١٠٠ - ٣٦} = \sqrt{٦٤} = ٨ \text{ سم}$$

$$٨ = \sqrt{٦٤} =$$



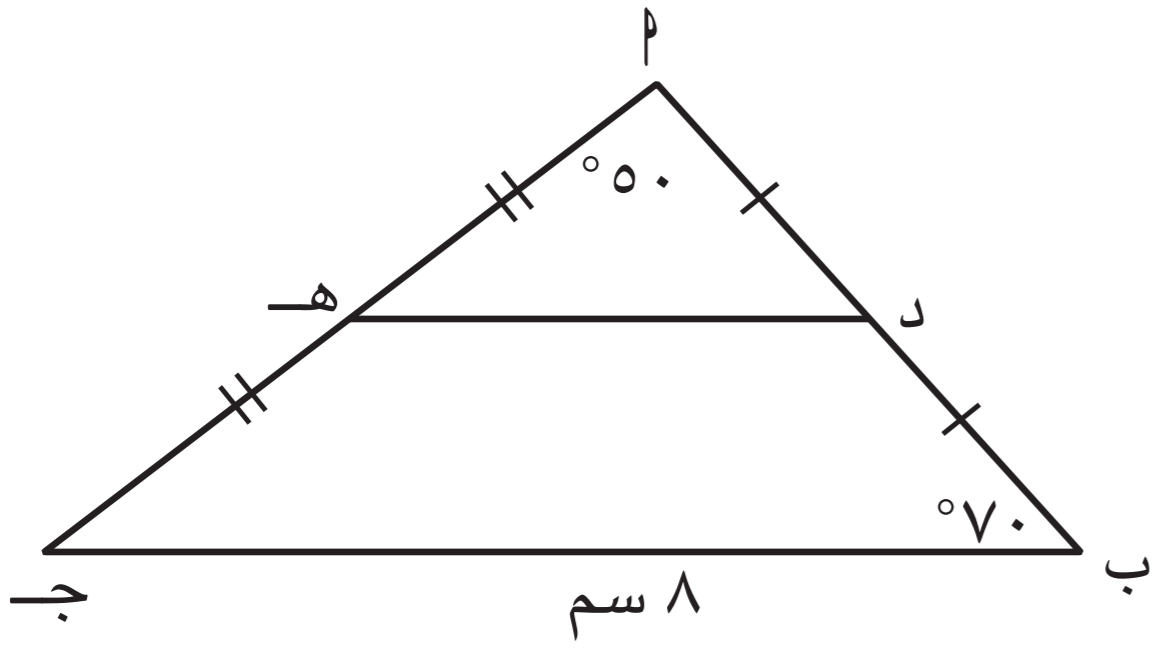
(هـ)

م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث س ص ع على أضلاعه .

$$١٠ = (٩ + ١٠) - ١٠ = ٩ = ١٠ - ١٠ = ٠$$

$$١٠ = (٩ + ١٠) - ١٠ = ٩ = ١٠ - ١٠ = ٠$$





٢)  $\Delta$  جـ مثلث فيه : د منتصف  $\overline{AB}$  ،  
 هـ منتصف  $\overline{AC}$  ،  $\angle A = 50^\circ$  ،  
 $\angle B = 70^\circ$  ،  $AB = 8$  سم ،  
 أوجد بالبرهان : (١)  $\angle DHE$  ، (٢)  $\angle ADE$  ،  
 (٣)  $\angle AHD$

البرهان :

١) د منتصف  $\overline{AB}$  ، هـ منتصف  $\overline{AC}$  (معلمين)

∴  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

$\angle DHE = \angle B = 70^\circ$  (نظرية)

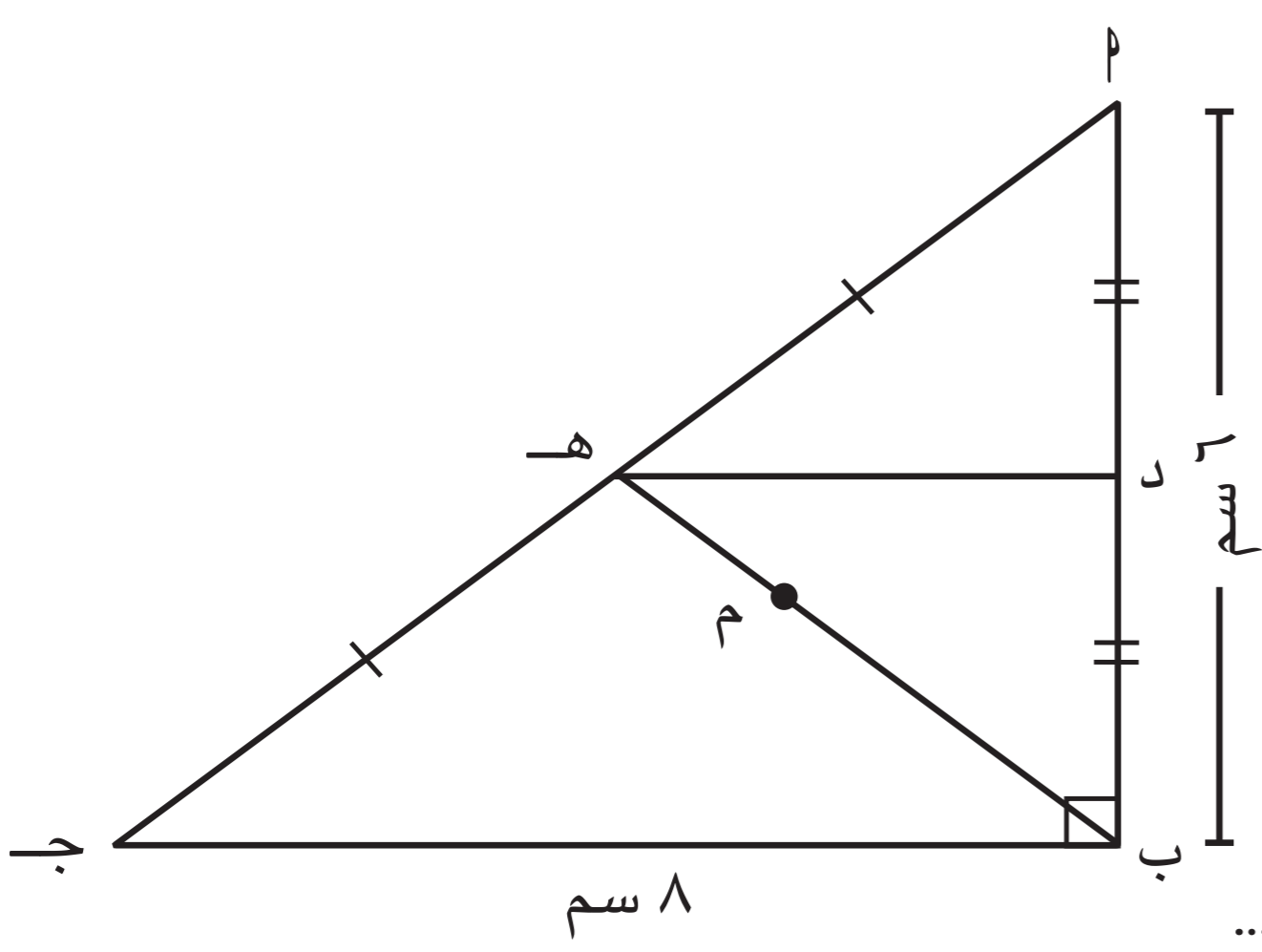
$$= \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ سم}$$

٢)  $\angle ADE = 50^\circ$  (بالتوازي مع (ب) )

٣)  $\angle AHD = 180^\circ - (50^\circ + 70^\circ)$

$$= 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

(مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة =  $180^\circ$ )



٣)  $\Delta$  جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه :  
 د منتصف  $\overline{AB}$  ، هـ منتصف  $\overline{AC}$  ،  
 $AB = 6$  سم ،  $BC = 8$  سم ،  
 م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث  $\Delta$  جـ .  
 أوجد بالبرهان : (أ)  $\angle DHE$  ، (ب)  $\angle ADE$  ،  
 (ج)  $\angle BHE$  ، (د)  $\angle M$

البرهان :

١) في  $\Delta$  جـ القائم الزاوية في ب

د منتصف  $\overline{AB}$  ، هـ منتصف  $\overline{AC}$  (معلمين)

∴  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

$\angle DHE = \angle B = 90^\circ$  (نظرية)

$$= \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ سم}$$

٢)  $\angle ADE = \angle B = 90^\circ$  (ب) + (ب) = (ج)

$$= \frac{1}{2} \times 6 = 3 \text{ سم}$$

$$= \frac{1}{3} \times 6 = 2 \text{ سم}$$

٣) هـ منتصف  $\overline{AC}$  (معلمين)

∴  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$  (نظرية)

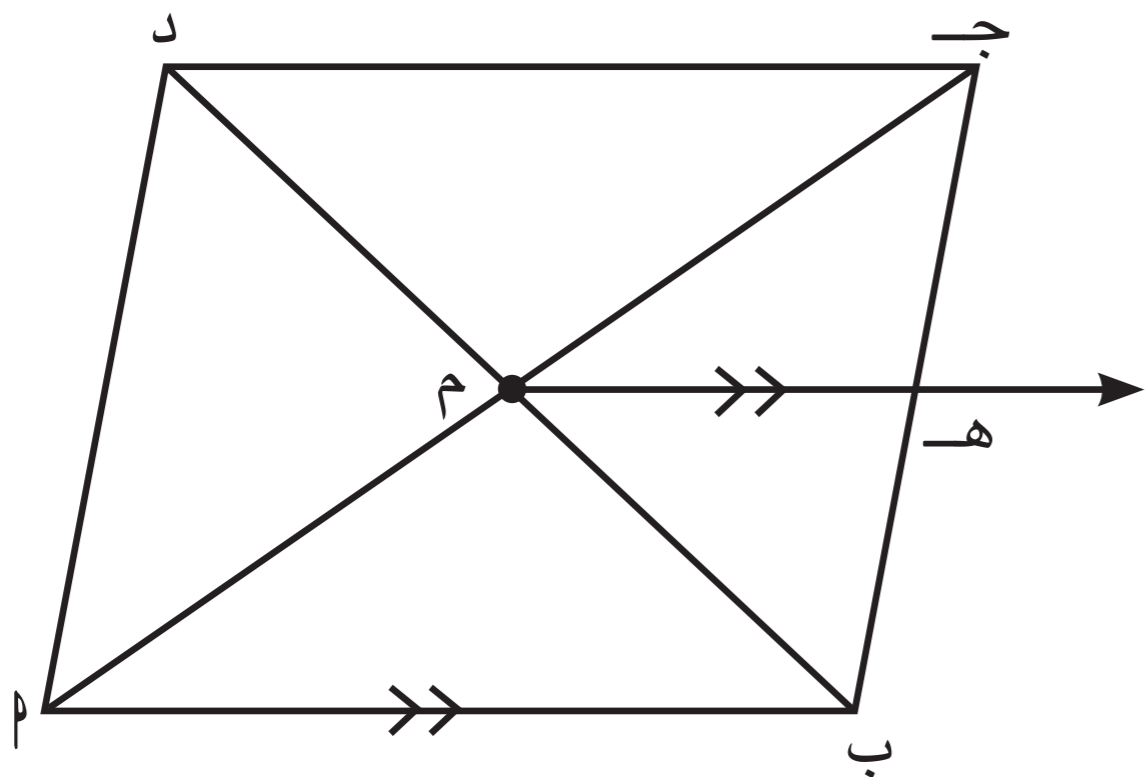
$$= \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ سم}$$

٤)  $\angle BHE = 90^\circ$  (ب) (نظرية)

$$= \frac{1}{2} \times 6 = 3 \text{ سم}$$

$$= \frac{1}{3} \times 6 = 2 \text{ سم}$$





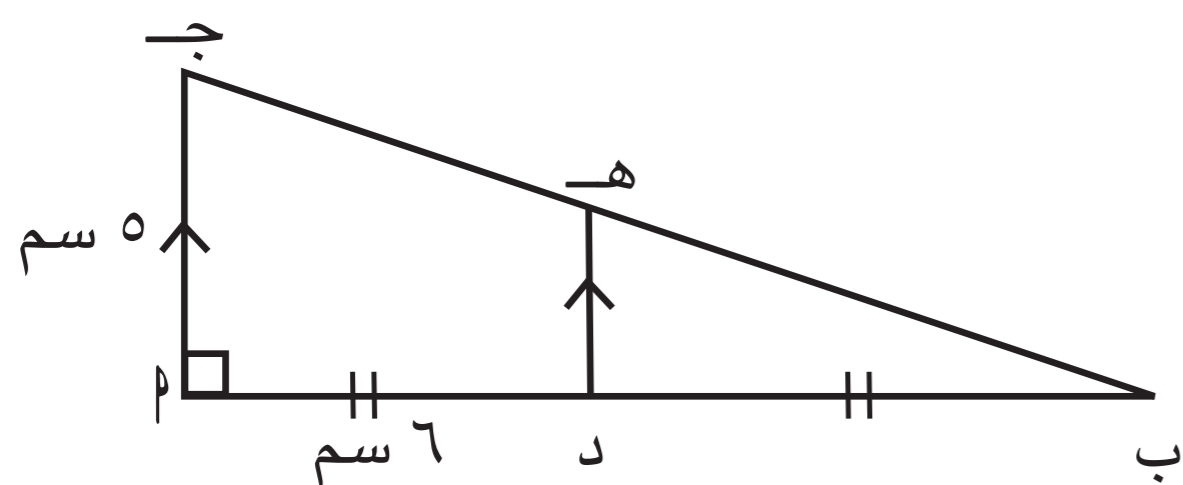
٤ في الشكل المقابل :

أ ب ج د متوازي الأضلاع تقاطع قطراه في م  
 م ه // أ ب ويقطع ب ج في ه .  
 أثبت أن : ه منتصف ب ج .

البرهان :

ب ج د متوازي أضلاع (معطى)  
 م م = ج م (القطران يتخالفان في م)  
 في ه ب ج :  
 م منتصف م ج  
 م ه // أ ب (معطى)  
 ∴ ه منتصف ب ج (نظرية)

٥ في الشكل المقابل ، أ ب ج مثلث قائم الزاوية في م



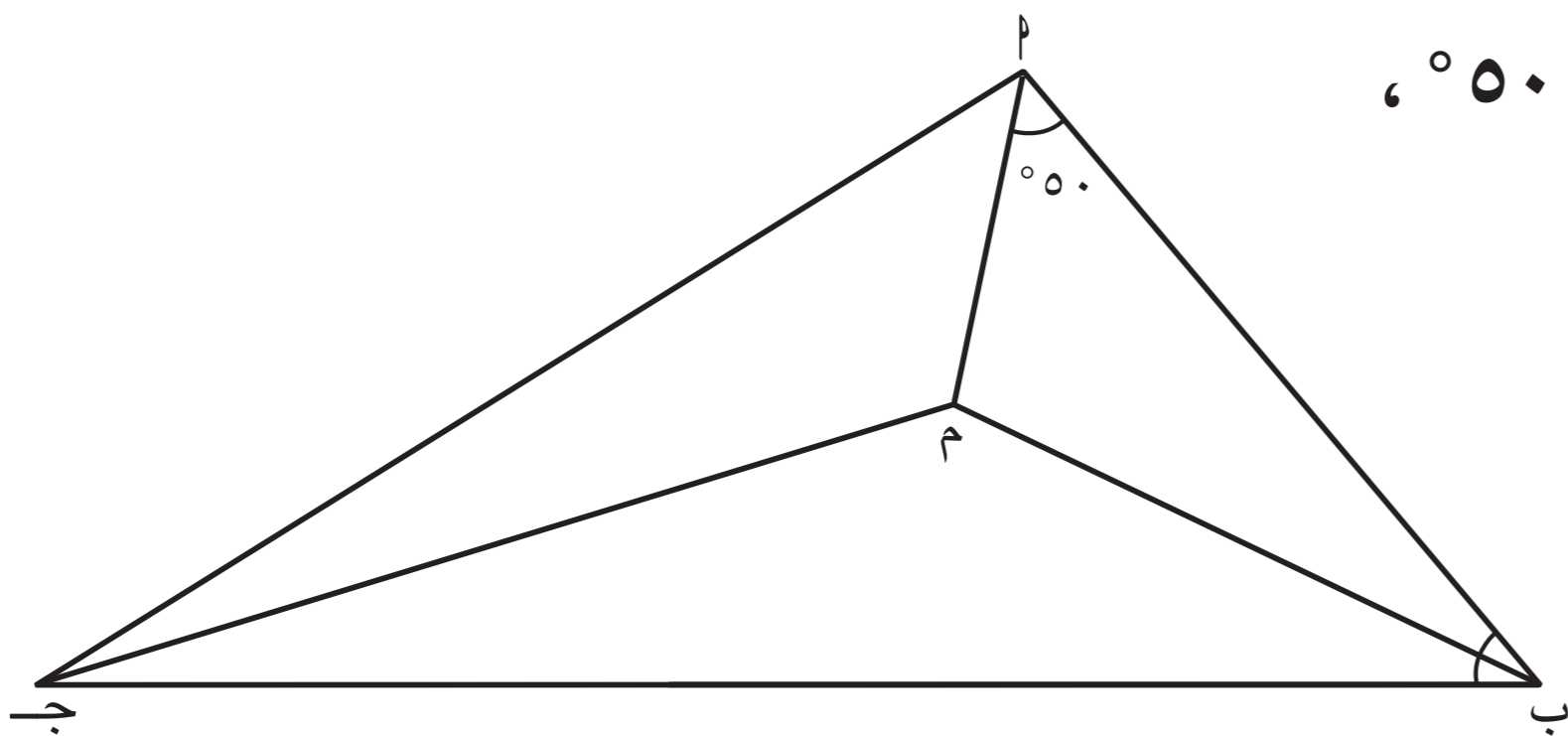
د منتصف أ ب ، د ه // أ ج ،  
 د = ٦ سم ، أ ج = ٥ سم .  
 أ) أثبت أن : ب ه = ه ج .  
 ب) أوجد : طول ه ج .

البرهان :

أ) في المثلث القائم الزاوية في م :  
 د منتصف أ ج (معطى)  
 د ه // أ ج (معطى)  
 ∴ ه منتصف ب ج (نظرية)  
 ∴ ب ه = ه ج

ب)  $\angle (ب ج د) = \angle (ج د ب) + \angle (د ج ب)$   
 $\angle (١٢) + \angle (٥) =$   
 $١٢٢ + ٢٥ =$   
 $١٦٩ =$   
 $\angle ب ج د = ١٦٩$   
 $\angle ه ج د = ١٣$   
 (نظرية فيثاغورس)  
 $١٣ \times ١٣ = ١٦٩$

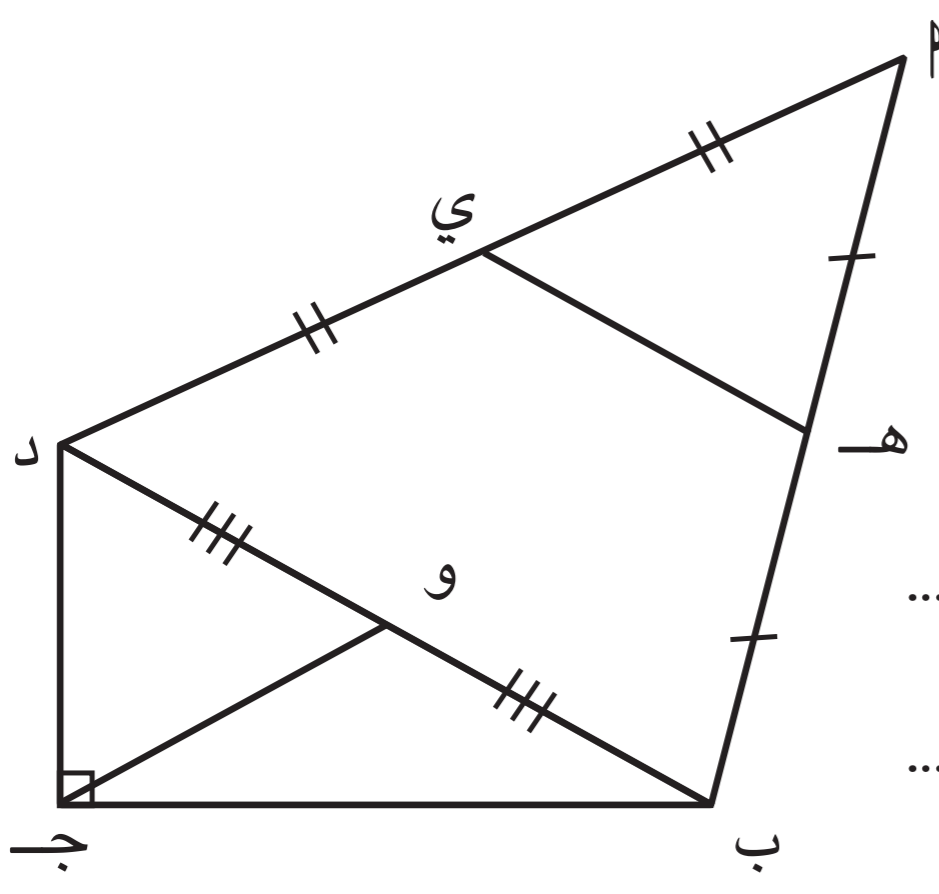




٦ ا ب ج مثلث فيه :  $\angle P = 50^\circ$  ، حيث م نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلة . أوجد بالبرهان  $\angle M$  .

**البرهان :**

في  $\Delta P$  ج :  
 م نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلة بمثلث (وعلمنا)  
 ز م (م)  $= 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$   
 م (ج)  $= 180^\circ - (90^\circ + 40^\circ)$   
 $= 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$  (مجموع زاويتا زاوية المثلث الداخلة =  $180^\circ$ )  
 م (ج م)  $= \frac{1}{2} \text{ م (ج)}$   
 $= \frac{1}{2} \times 50^\circ = 25^\circ$

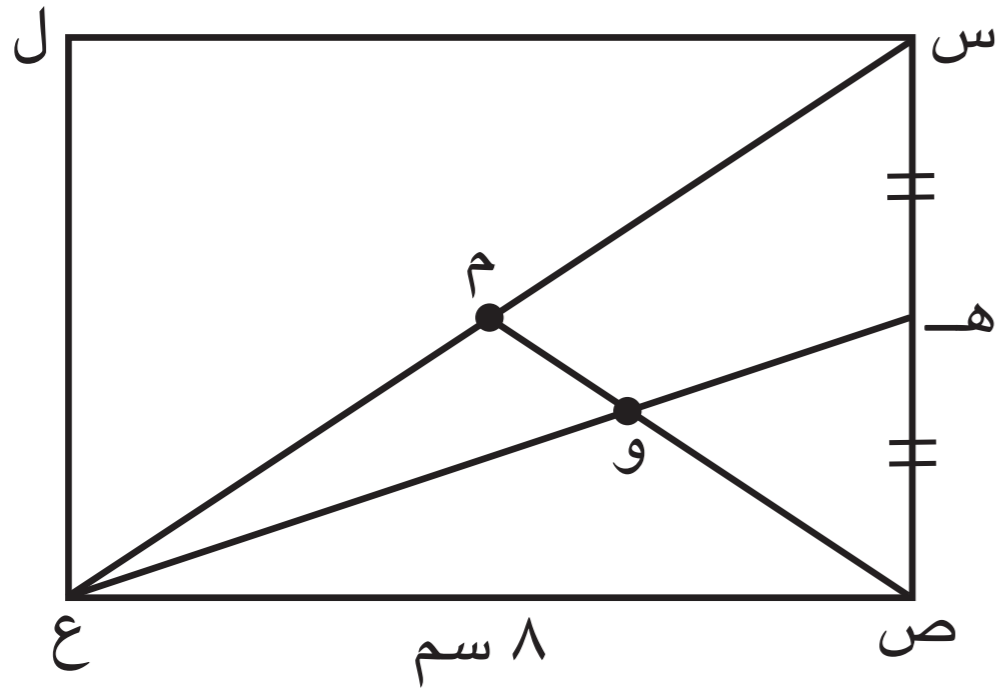


٧ في الشكل المقابل : هـ ، ي ، و منتصفات ا ب ، ا د ، ب د على الترتيب ،  $\angle C = 90^\circ$  . برهن أن : هـ ي = و ج .

**البرهان :**

في  $\Delta P$  ب د :  
 هـ منتصف ا ب (معلمنا)  
 ي منتصف ا د (معلمنا)  
 هـ ي =  $\frac{1}{2}$  ب د — ①  
 في  $\Delta P$  ب ج القائم الزاوية في ج :  
 و منتصف ب د (معلمنا)  
 و ج =  $\frac{1}{2}$  ب د — ②  
 من ا ① ، ② ينتج ان :  
 هـ ي = و ج (من خواص المثلث و اة)





٨ س ص ع ل مستطيل ،

م نقطة تقاطع قطريه ، ص ع = ٨ سم ، س ص = ٦ سم  
نصفت س ص في هـ ، هـ ع ∩ ص م = { و } .

(١) برهن أن : و نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث س ص ع .

(٢) أوجد طول و م .

البرهان :

١. س ص ع ل مستطيل (معطى)

∴ س ص = ٦ ، ع ص = ٨

م منتصف س ع (م فواهد المستطيل) م منتصف س ع (نظرية فيثاغورث)

هـ منتصف س ع (معطى) ∴ و هي نقطة تقاطع القطع

المتوسطة للمثلث س ص ع

٢. في ∆ س ص ع القائم الزاوية في ص :

(س ع) = (س ص) + (ص ع)  
٦ = ٣ + ٣  
٣ = ٣  
∴ و = ٣

٩ عند تصميم إحدى النقوشات الفنية .

قرر المصمم رسم الشكل المقابل كما هو موضح :

حيث س ص = ص ع = ١٠ سم ، س ل ⊥ ص ع ،

رسم وهـ // س ع ، هـ ∩ ص س . أوجد بالبرهان طول هـ و .

البرهان :

في ∆ س ص ع :

س ص = ص ع (معطى)

س و ⊥ ص ع (معطى)

∴ و منتصف ص ع (م فواهد المثلث المتساوي الضلعين)

في ∆ س ص ع :

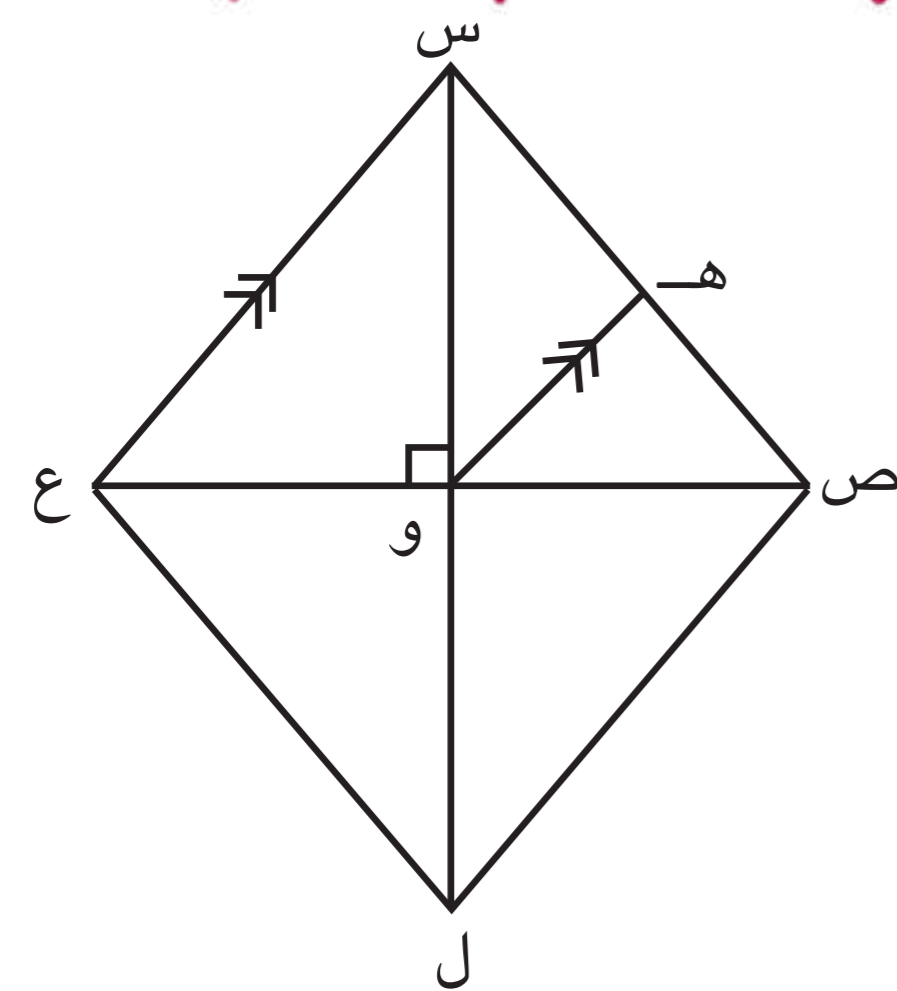
و منتصف ص ع

وهـ // س ع (معطى)

∴ هـ منتصف س ص (نظرية)

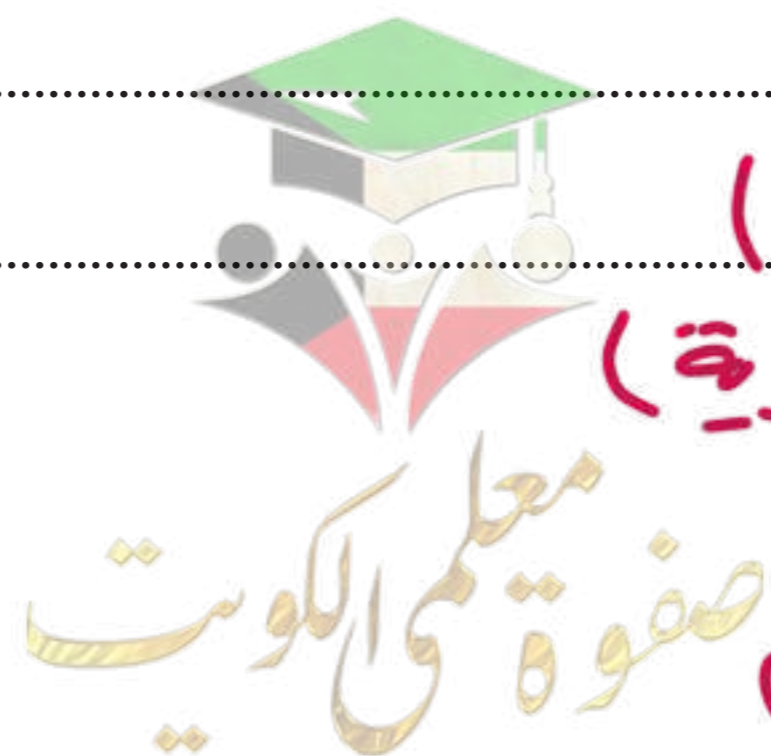
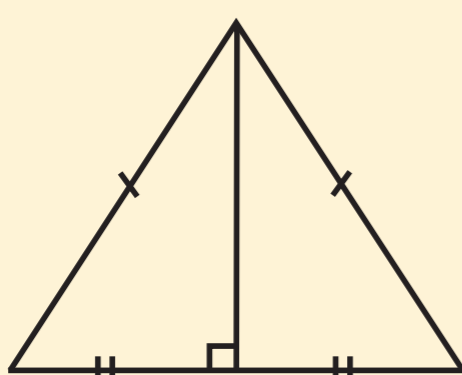
هـ و = ١/٢ س ع

= ١/٢ × ١٠ = ٥



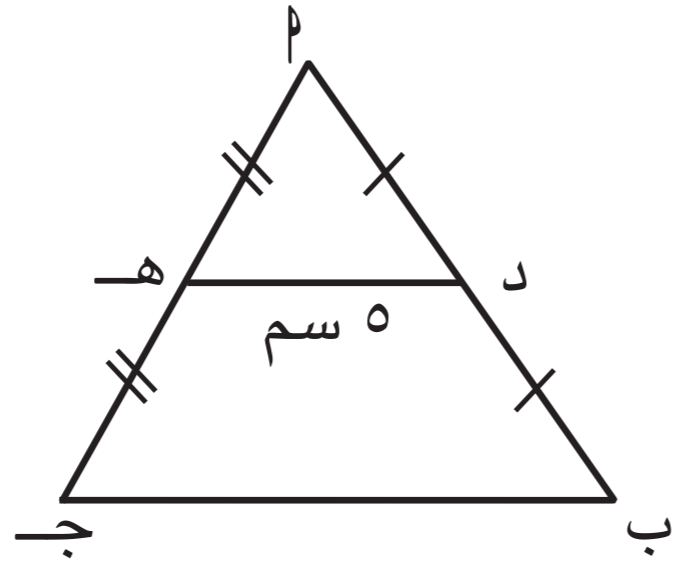
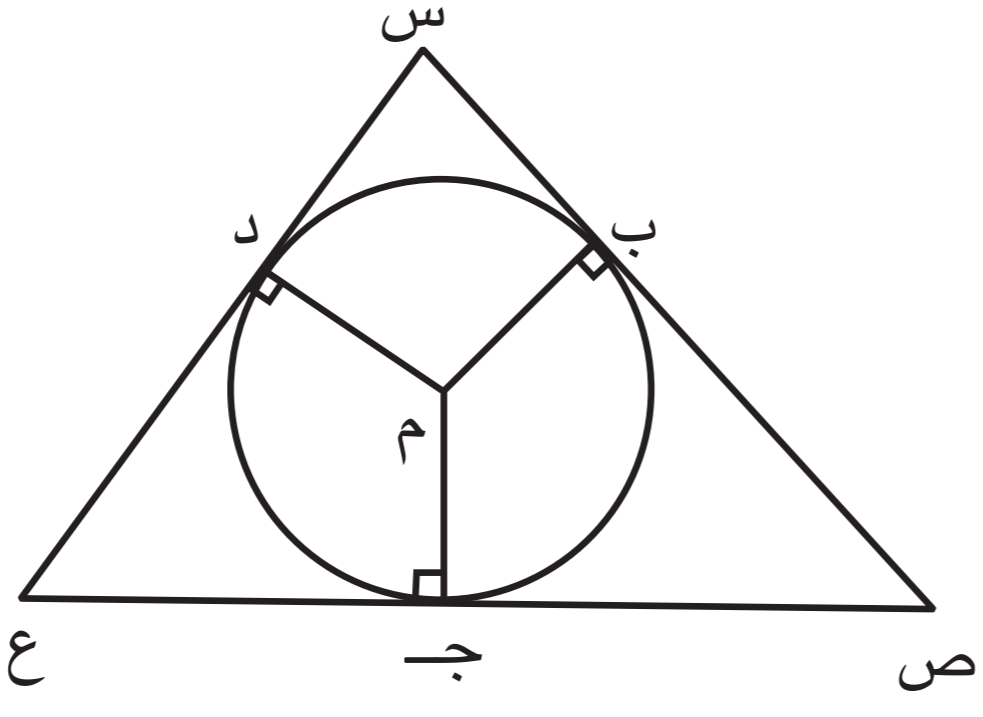
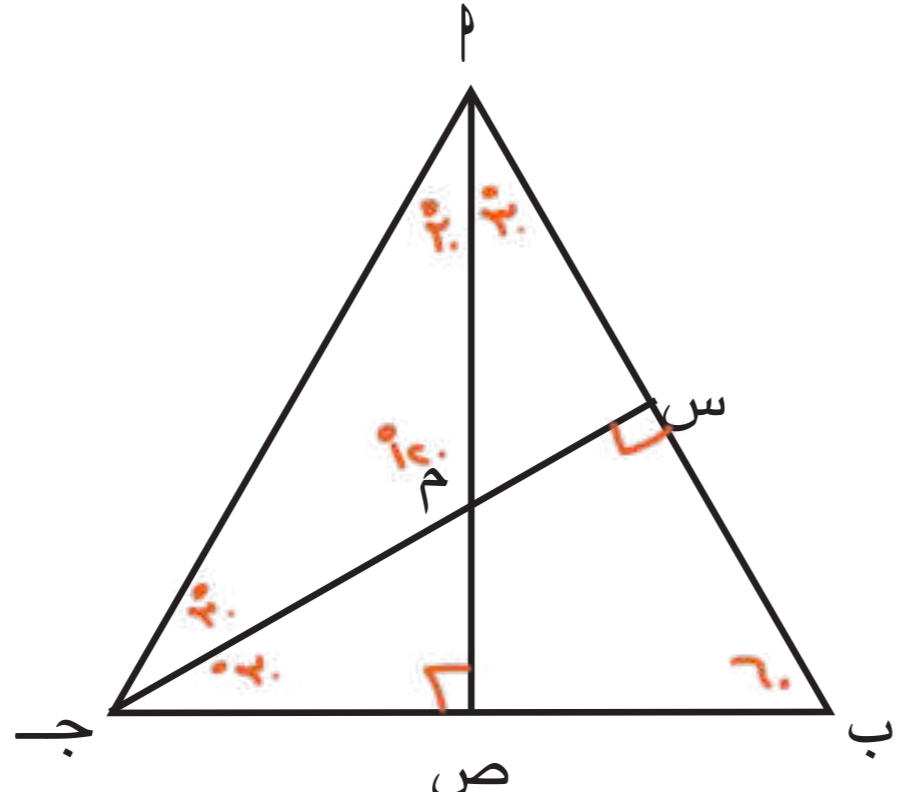
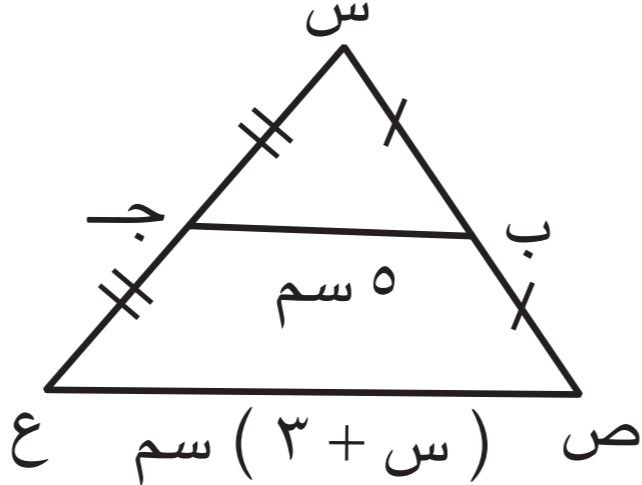
تذكر

في المثلث المتطابق الضلعين العمود المرسوم من رأس المثلث على قاعدته ينصفها .

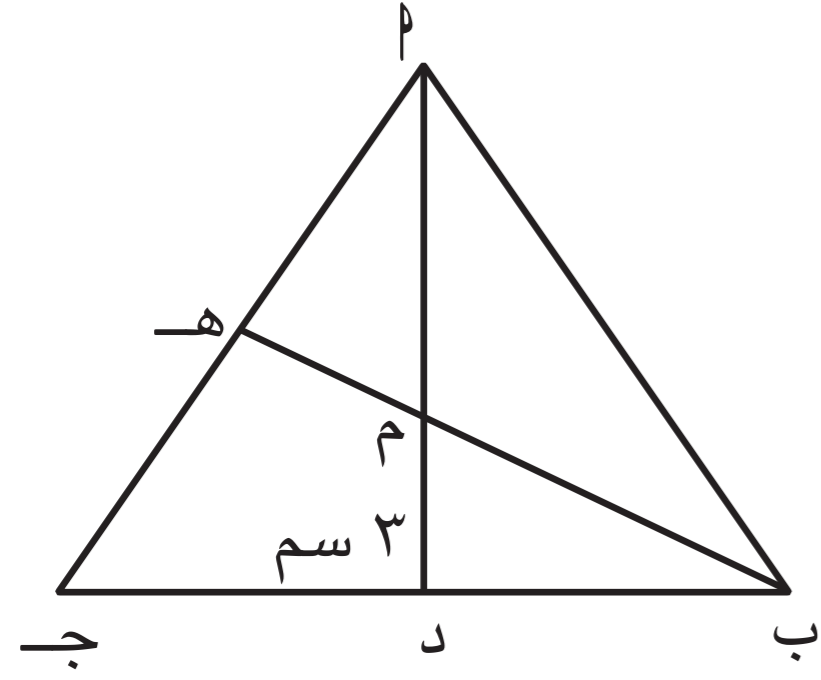


## ثانيًا: البنود الموضوعية

في البنود ( ١ - ٦ ) ، ظلّل **أ** إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل **ب** إذا كانت العبارة غير صحيحة .

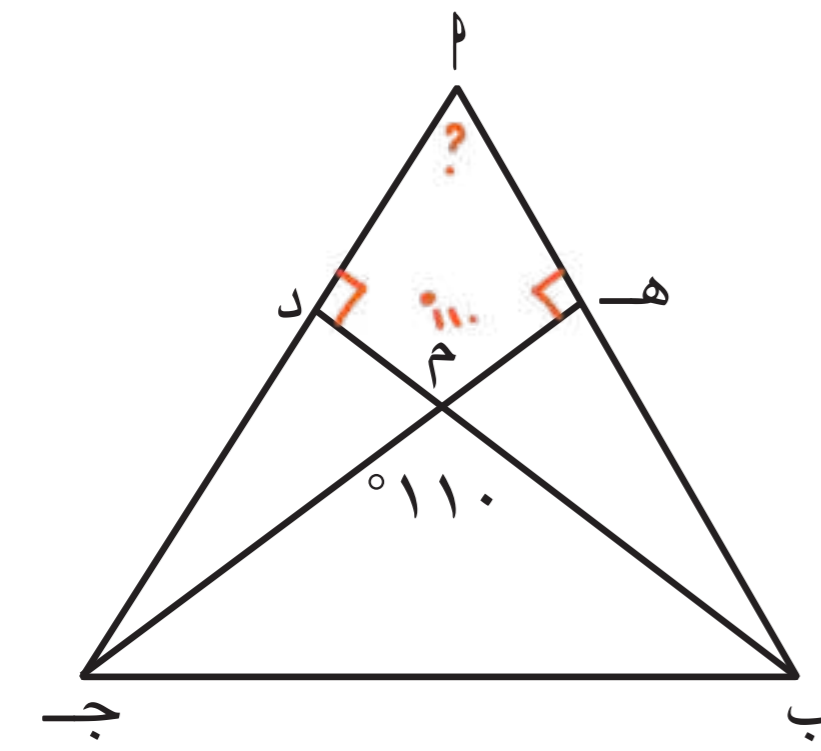
<input type="checkbox"/>	<b>أ</b>	<p>١ المثلث <math>\triangle ABC</math> فيه : <math>D</math> منتصف <math>\overline{AB}</math> ،  <math>H</math> منتصف <math>\overline{AC}</math> ، <math>DE = 5</math> سم ،                  فإن <math>\overline{BC} = 10</math> سم .  <b>ب ج = ١٠</b></p> 
<input type="checkbox"/>	<b>أ</b>	<p>٢ نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث المنفرج الزاوية تقع داخل المثلث .  <b>خارج</b></p>
<input type="checkbox"/>	<b>ب</b>	<p>٣ نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث القائم الزاوية على أضلاعه هي رأس الزاوية القائمة .</p>
<input type="checkbox"/>	<b>أ</b>	<p>٤ في الشكل المقابل : دائرة مركزها <math>M</math>                  فإن <math>M</math> هي نقطة تقاطع القطع المتوسطة                  للمثلث <math>SSC</math> .  <b>الأعمدة</b></p> 
<input type="checkbox"/>	<b>ب</b>	<p>٥ إذا كان <math>\triangle ABC</math> متطابق الأضلاع ،  <math>M</math> نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة                  من رؤوسه على أضلاعه ،  <math>CS \cap AS = \{M\}</math> ،                  فإن <math>\angle CMA = 120^\circ</math></p> 
<input type="checkbox"/>	<b>ب</b>	<p>٦ في الشكل المقابل :  <math>V = S</math></p> 

في البنود ( ٧ - ١٩ ) أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّ الإجابة الصحيحة .



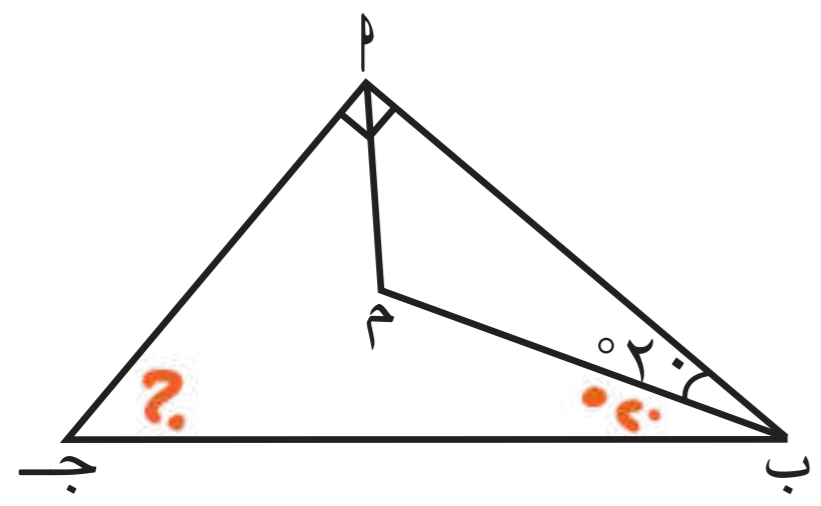
٧)  $\Delta$  ب ج مثلث فيه م نقطة تقاطع متوسّطات المثلث ،  
 م د = ٣ سم ، فإنّ م ا =  $3 \times 3 = 9$  ←

- أ  ٦ سم    ب  ٩ سم    ج  ١,٥ سم    د  ٥ سم



٨)  $\Delta$  ب ج مثلث فيه م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة  
 من رؤوس المثلث على أضلاعه ،  $\angle م ب ج = 110^\circ$  ،  
 فإنّ  $\angle م = (110 + 90 + 90) - 360 = 70$

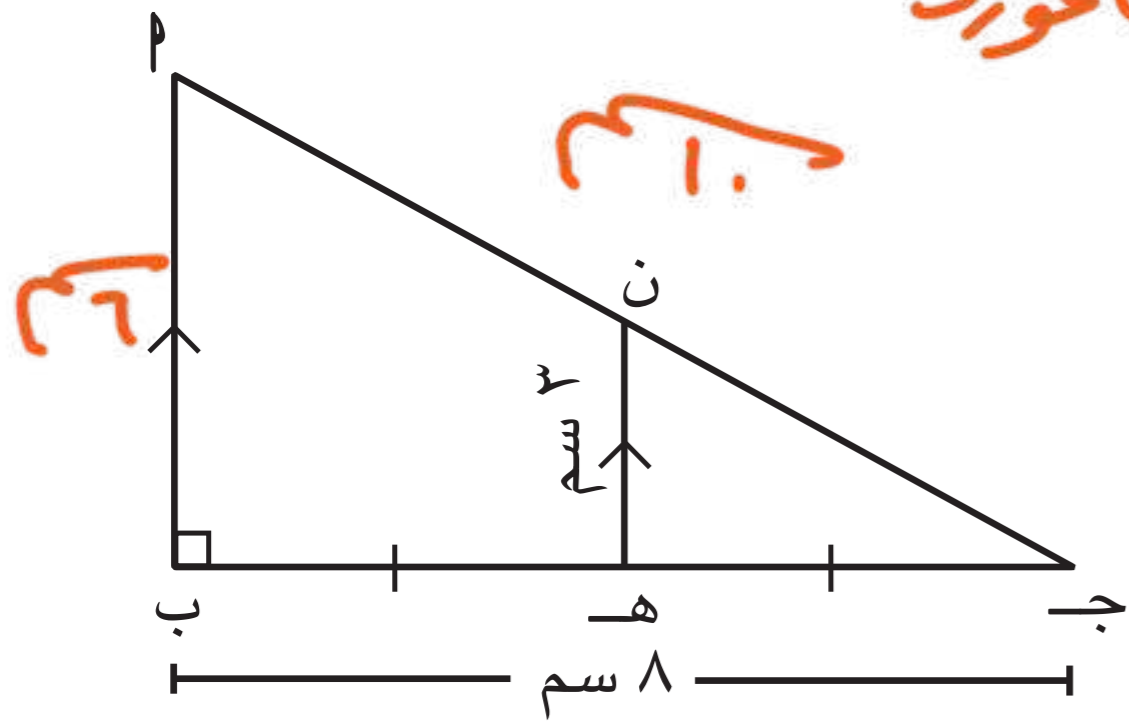
- أ  ٧٠    ب  ١١٠    ج  ٣٥    د  ٦٠



٩)  $\Delta$  ب ج مثلث قائم الزاوية في ا ،  
 م نقطة تقاطع منصفّات الزوايا الداخلة للمثلث ،  
 $\angle م ب ج = 20^\circ$  ، فإنّ  $\angle م ا ج = (20 + 90) - 180 = 50$

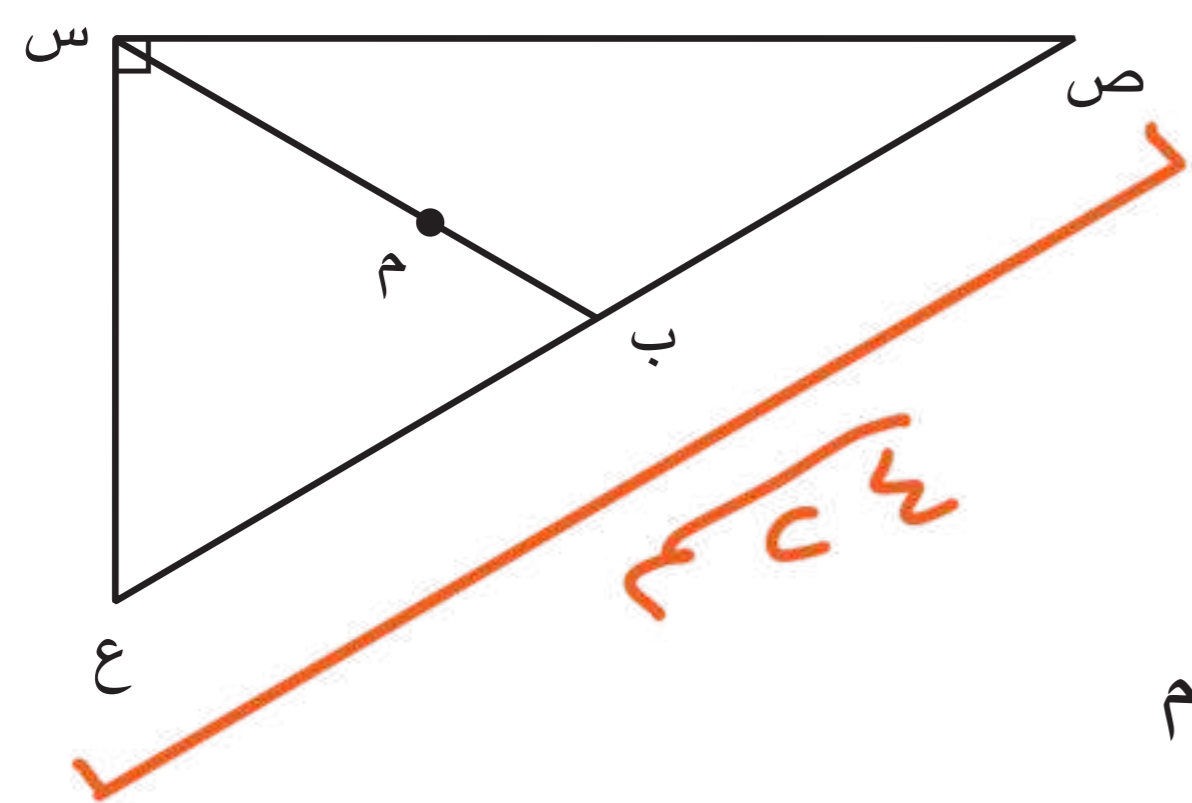
- أ  ٣٠    ب  ٤٠    ج  ٥٠    د  ٦٠

ب ستم ٣ نظرية فيثاغورث



١٠)  $\Delta$  ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ،  
 ه منتصف ب ج ، ه ن // ب ا .  
 فإنّ :  $ا ج =$

- أ  ٨ سم    ب  ١٠ سم    ج  ٣ سم    د  ٦ سم



١١) س ص ع مثلث قائم الزاوية في س .  
 طول وتره = ٢٤ سم ، م نقطة تقاطع القطع  
 المتوسّطة للمثلث س ص ع ،  
 فإنّ :  $م ب =$

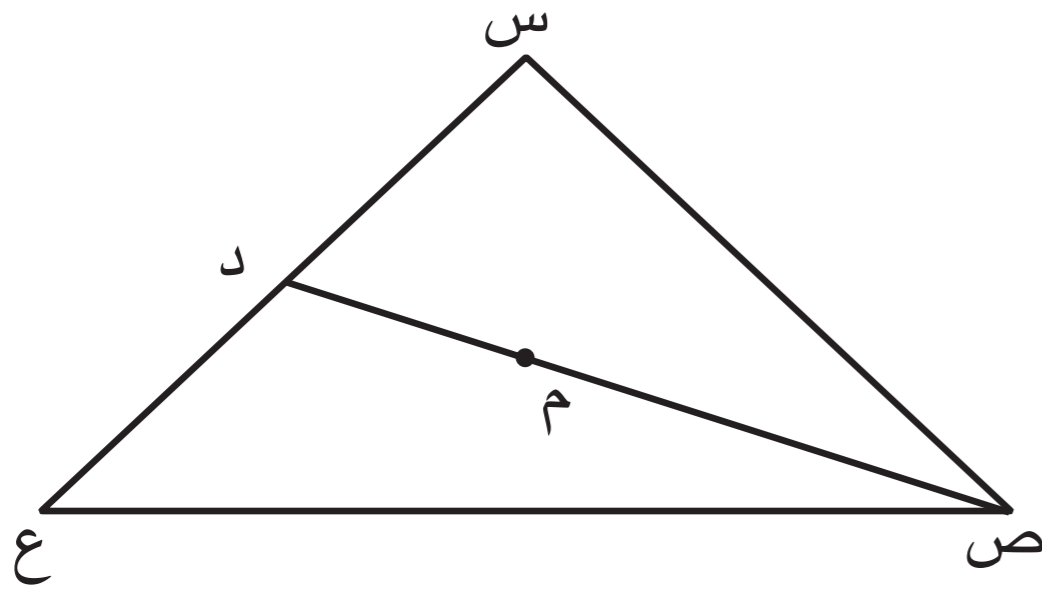
- أ  ٤ سم    ب  ٣ سم    ج  ٦ سم    د  ١٢ سم

ب س =  $24 \times \frac{1}{2} = 12$  سم  
 م ب =  $12 \times \frac{1}{2} = 6$  سم

١٢ عدد القطع المتوسطة للمثلث المنفرج الزاوية يساوي :

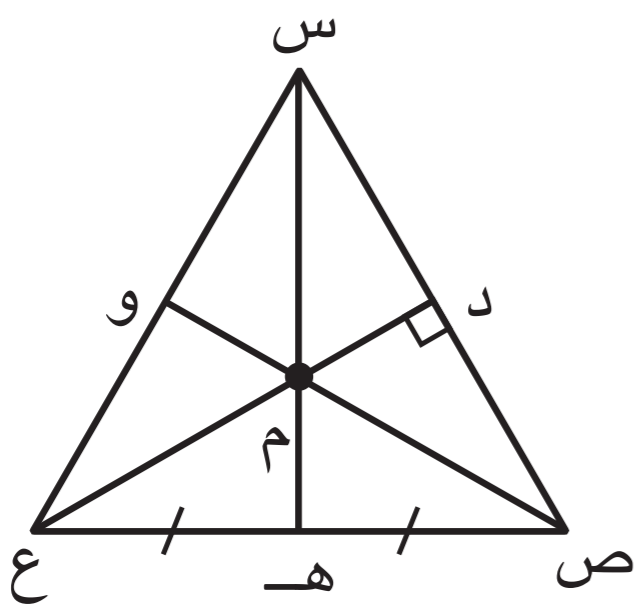
- أ صفر  ب ١  ج ٢  د ٣

١٣ إذا كان  $\overline{ص د}$  قطعة متوسطة في المثلث  $س ص ع$  ،  
م نقطة تلاقي القطع المتوسطة ، فإن  $م د =$



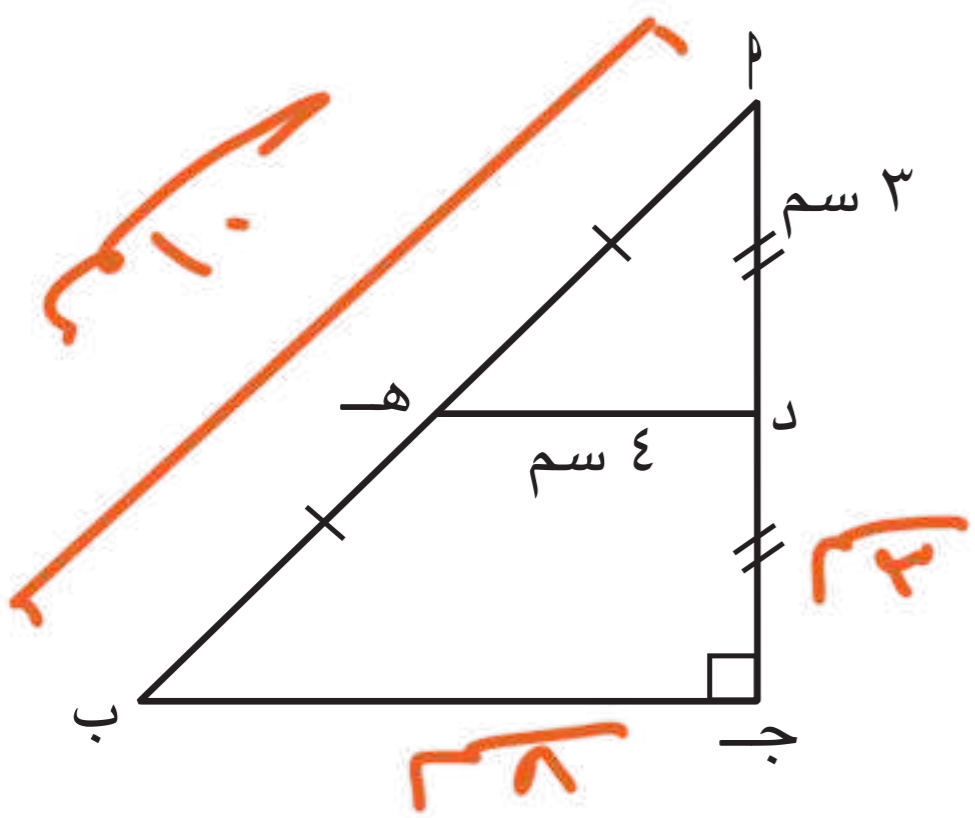
- ١/٢ ص م  ب ٢ ص م  ج ١/٢ ص د  د ٢ ص د

١٤  $س ص ع$  مثلث متطابق الأضلاع ،  $س هـ \cap ص و \cap ع د = \{م\}$  ،  
فإن م هي نقطة تقاطع :



- أ منصفات زوايا المثلث فقط .  
ب منصفات زوايا المثلث والأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه فقط .  
د منصفات زوايا المثلث والأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه و القطع المتوسطة للمثلث ومحاور أضلاعه .  
د منصفات زوايا المثلث ومحاور أضلاعه فقط .

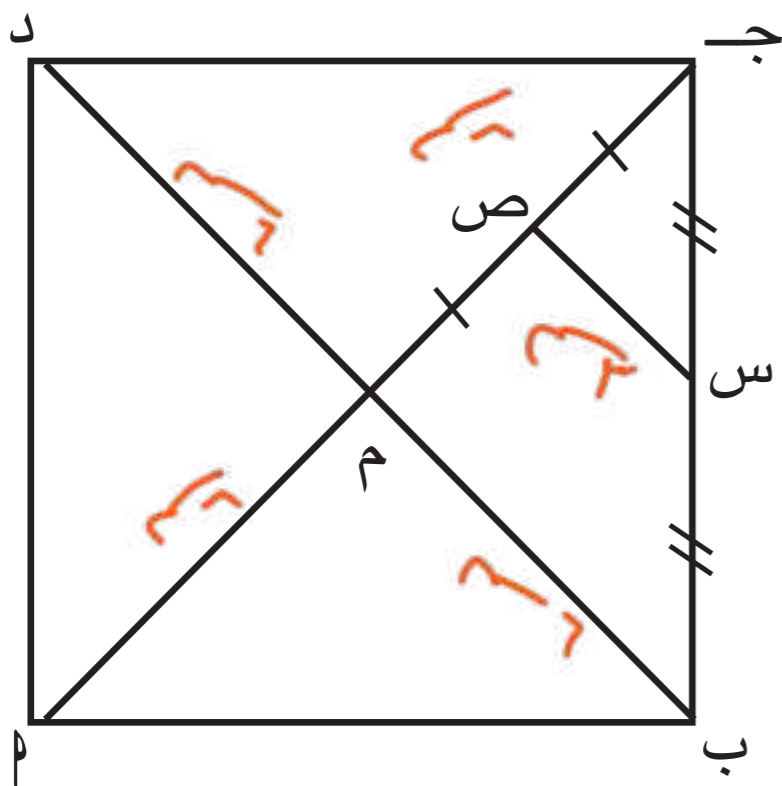
١٥ في الشكل المقابل : إذا كانت د ، هـ منتصفي  $\overline{أ ب}$  ،  
 $\overline{أ ب}$  على الترتيب ، فإن  $\overline{أ ب} =$



- أ ٥ سم  ب ١٠ سم  ج ٢٥ سم  د ١٢ سم

باستخدام نظرية فيثاغورث

١٦ في الشكل المقابل :  $\overline{أ ب ج د}$  مربع فيه  
س ، ص منتصفا  $\overline{ب ج}$  ،  $\overline{ج م}$  على الترتيب  
حيث  $\overline{أ ج} = ١٢$  سم ، فإن  $س ص$  يساوي :



- أ ١٢ سم  ب ٦ سم  ج ٣ سم  د ٤ سم





# الوحدة التعليمية الثامنة



# النسبة المئوية – الهندسة والقياس

## « الجمال فيه هندسة أبراج الكويت »

تحتوي أبراج الكويت على كرة ضخمة تُستخدم كخزان للماء ، ويعتمد تصميمها بالكامل على حسابات المساحة السطحية والحجم .

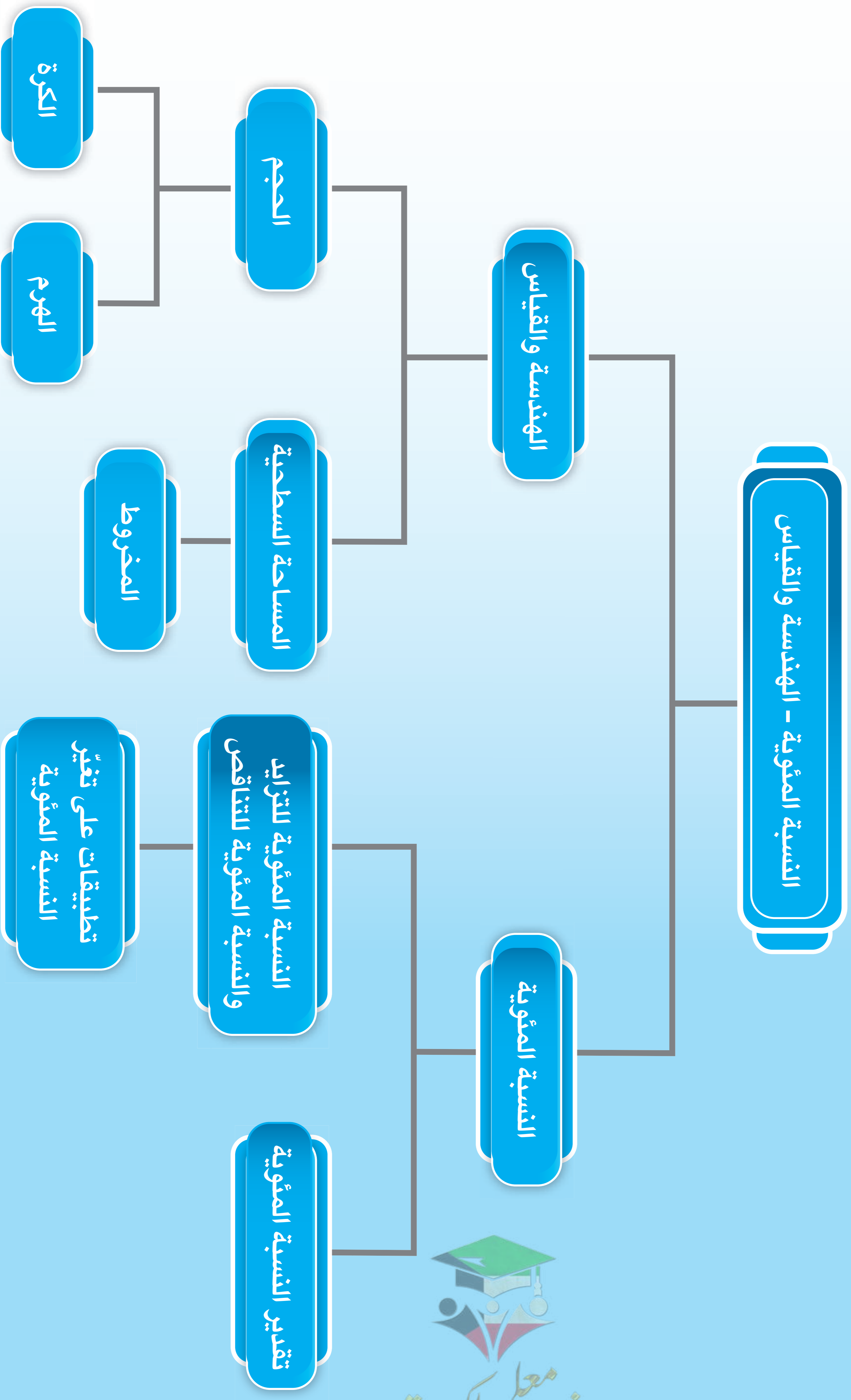
فكلما تغيّر طول نصف قطر الكرة ولو قليلاً ، تغيّر الحجم والمساحة السطحية بشكل كبير .

ولهذا السبب ، يحرص المهندسون عند تصميم المعالم على اختيار النسب بدقّة ، لأنّ زيادة بسيطة في الأبعاد قد تسبّب زيادة كبيرة في الحجم والمساحة السطحية وبالتالي زيادة التكلفة .



المجال	معايير المنهج	مؤشر الأداء
العدّ والجبر	تحديد علاقات التناسب في المسائل الرياضية .	التذكّر - التعرّف - الفهم - التمثيل - التعاون - العمل الجماعي - الوسائط - حلّ المشكلات - الاستكشاف والتقصّي - النمذجة - العلاقات - الاستدلال - الاستنتاج - التقويم
الهندسة والقياس	تطبيق الأساليب والأدوات والصيغ الملائمة لتحديد قياسات .	التذكّر - التعرّف - الفهم - الوسائط - الاستكشاف والتقصّي - النمذجة - المقارنة والتمييز - الاستنتاج - حلّ المشكلات - التحليل والتركيب - القوانين - التقويم - الاستدلال - العلاقات
	فهم خواصّ القياس للأشياء والوحدات والأنظمة وعمليات القياس .	

## مخطط تنظيمي للوحدة التعليمية الثامنة



# هل أنت مستعدّ؟

١ أكمل الجدول التالي :

النسبة المئوية	الصورة العشرية	الصورة الكسرية	الشكل
١٠٠%	١.٠٠	١	
٥٠%	٠.٥٠	$\frac{1}{2}$	
٢٥%	٠.٢٥	$\frac{1}{4}$	
٧٥%	٠.٧٥	$\frac{3}{4}$	
$33\frac{1}{3}\%$	٠.٣٣	$\frac{1}{3}$	
٤٠%	٠.٤٠	$\frac{2}{5}$	

هل أنت مستعدّ؟

٢ حلّ التناسب لكلّ ممّا يلي :

ب)  $\frac{120}{40} = \frac{20}{س}$

$$\begin{array}{r} ٤٠ \times ٢٥ = ١٠٠ \times س \\ ٤٠ \times ٢٥ = ١٠٠ \times س \\ \hline ١٠٠ \qquad \qquad ١٠٠ \\ \hline ٨ = س \end{array}$$

أ)  $\frac{س}{١٦} = \frac{٥}{٨}$

$$\begin{array}{r} ١٦ \times ٥ = ٨ \times س \\ ١٦ \times ٥ = ٨ \times س \\ \hline ٨٠ = ٨ \times س \\ \hline ١٠ = س \end{array}$$

صفوة معلمي الكويت

٣ حلّ المعادلات التالية في ح :

أ)  $40 \text{ س} = 360$

$$\frac{360}{40} = \frac{40 \text{ س}}{40}$$

س = 9

ج)  $\frac{9}{5} = \text{س} + 1$

$$1 - \frac{9}{5} = \text{س} + 1 - \frac{9}{5}$$

$$\text{س} = 1 - \frac{9}{5}$$

$$\text{س} = \frac{5}{5} - \frac{9}{5}$$

هـ)  $20 = 16(\text{س} + 1)$

$$20 = 16\text{س} + 16$$

$$16 - 16 = 20 - 16$$

$$16\text{س} = 4$$

$$\frac{4}{16} = \frac{16\text{س}}{16} \rightarrow \text{س} = \frac{1}{4}$$

٤ أوجد قيمة كلٍّ مما يلي :

أ) ٣٠٪ من ٧٠

$$70 \times \frac{30}{100} = 21$$

س = 21

٥ أوجد ناتج كلٍّ مما يلي :

أ)  $10,5 \times 4,2 = 44,1$

ب)  $10 \times 3,14 = 31,4$

ج)  $2,5 \times 14 = 35$

٦ في الشكل المقابل : أوجد طول أ جـ .

$$2(ج) = 2(ب) + 2(ب) + 2(ج)$$

$$2(ج) = 2(ب) + 2(ب) + 2(ج)$$

$$36 + 64 = 100$$

$$100 = 100$$

ب)  $7 = \frac{28}{100} \times \text{س}$

$$\frac{700}{28} \times 7 = \frac{28}{28} \times \frac{28 \times \text{س}}{100}$$

س = 25

د)  $7 - = \text{س} - 1$

$$1 - 7 - = \text{س} - 1 - 7 -$$

$$\text{س} = 8$$

$$8 - = \frac{2}{1} = \frac{2}{1}$$

و)  $3 = 5(\text{س} - 1)$

$$3 = 5\text{س} - 5$$

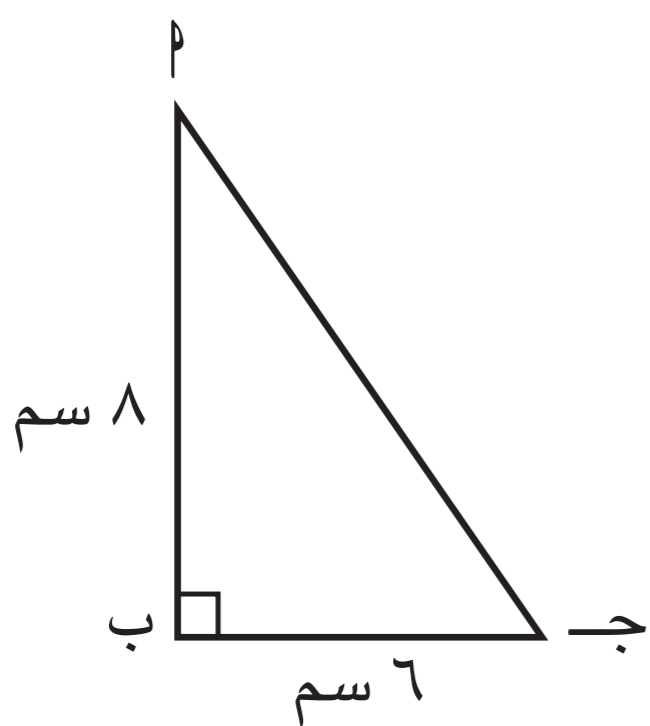
$$5\text{س} = 8$$

$$\frac{8}{5} = \frac{5\text{س}}{5} \rightarrow \text{س} = \frac{8}{5}$$

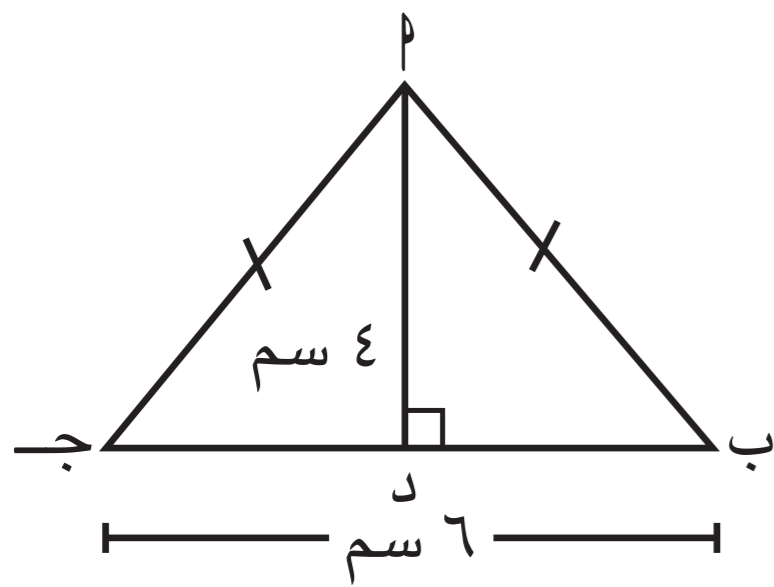
ب) ١٥٪ من ١٨٠

$$180 \times \frac{15}{100} = 27$$

س = 27



٧ في الشكل المقابل ، أوجد كلاً مما يلي :



أ طول  $\overline{AB}$  =  $\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AC}$

$3 = 6 \times \frac{1}{2} =$

ب طول  $\overline{AB}$  =  $\sqrt{(4)^2 + (6)^2}$

$5 = \sqrt{20} =$

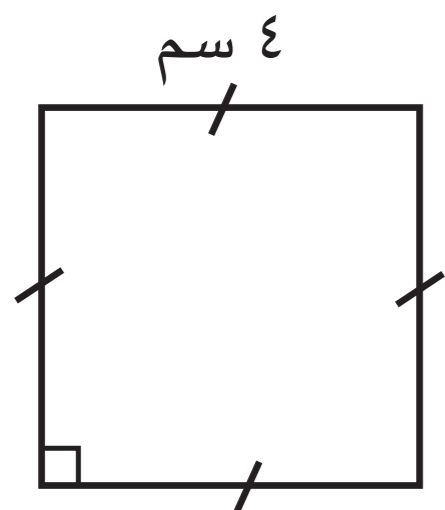
ج محيط  $\Delta$   $\overline{AB}$  ج =  $6 + 5 + 5$

$16$  سم =

د مساحة  $\Delta$   $\overline{AB}$  ج =  $\frac{1}{2} \times 6 \times 4$

$12 = \frac{1}{2} \times 6 \times 4$

٨ في الشكل المقابل ، أوجد مساحة المنطقة المربعة .



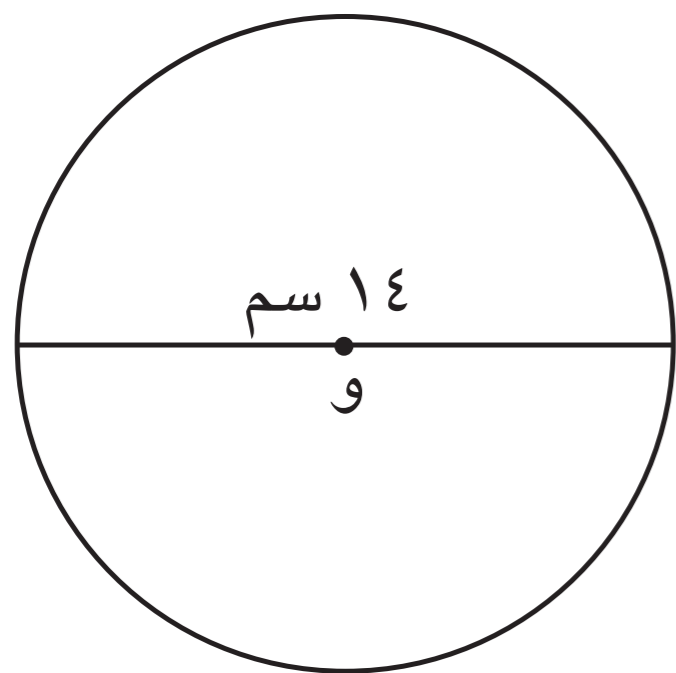
.....

.....

.....

.....

٩ في الشكل المقابل ، أوجد مساحة المنطقة الدائرية .



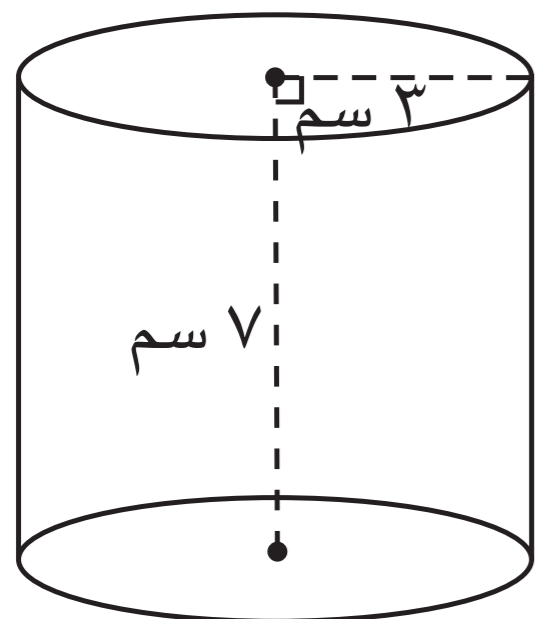
.....

.....

.....

.....

١٠ أوجد حجم الأسطوانة الدائرية القائمة ( اعتبر  $\pi = \frac{22}{7}$  ) .

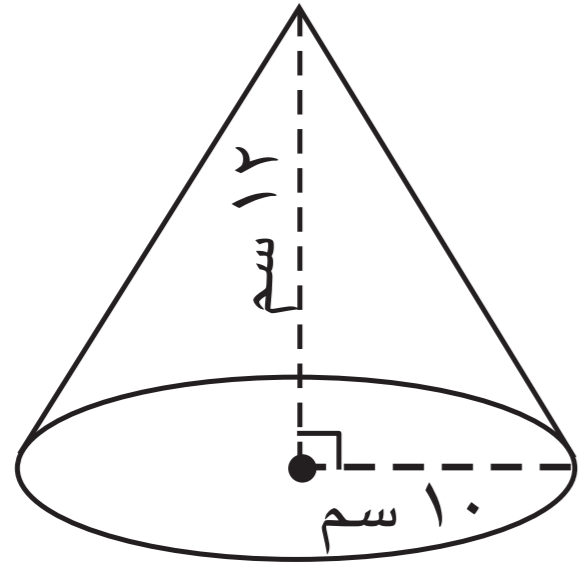


.....

.....

.....

.....



١١ أوجد حجم المخروط الدائري القائم الذي طول نصف قطر قاعدته ١٠ سم وارتفاعه ١٢ سم (إعتبر  $\pi = 3,14$ ).

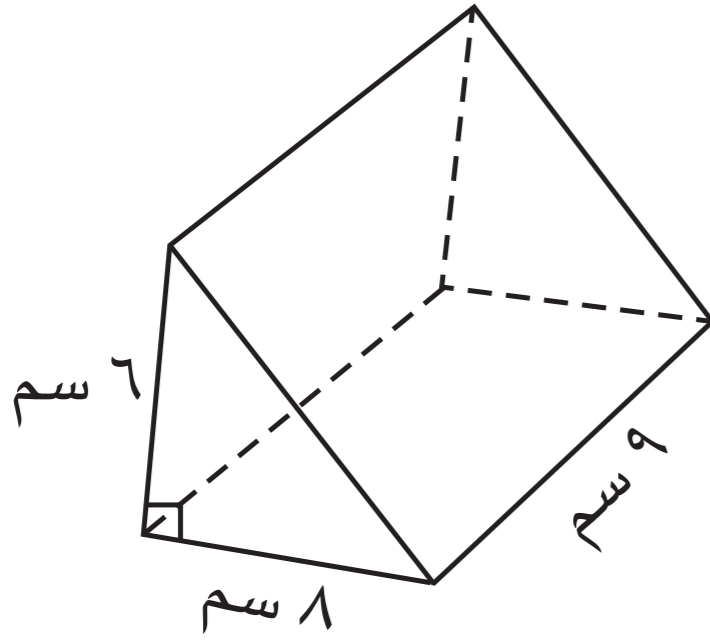
$$\text{حجم المخروط} = \frac{1}{3} \pi \text{ نصف القطر}^2 \times \text{الارتفاع}$$

$$= \frac{1}{3} \times 3,14 \times (10)^2 \times 12$$

$$= \frac{1}{3} \times 3,14 \times 10 \times 10 \times 12$$

$$= 1256 \text{ سم}^3$$

١٢ في الشكل المقابل، أوجد حجم المنشور القائم:



$$\text{حجم المنشور} = \text{الطول} \times \text{العرض} \times \text{الارتفاع}$$

$$= 9 \times 6 \times 4$$

$$= 216$$

$$= 216 \text{ سم}^3$$



# تقدير النسبة المئوية

٨ - ١

## Estimate Percent

سوف تتعلم : تقدير النسبة المئوية .

### العبارات والمفردات :

Estimate      تقدير      Percent      النسبة المئوية

### حلّ وناقش

أراد سالم دفع فاتورة العشاء في أحد المطاعم وقيمتها ٩ دنانير . وكان هذا المطعم يعتمد بدل الخدمة ١٠٪ من قيمة الفاتورة ، أو ١٩٪ بدل الخدمة المتميزة .

RESTAURANT	
Kuwait	
HUMMUS	2.000
FALAFEL	2.500
GRILLED CHICKEN	3.500
ICED TEA	1.000
<b>SUBTOTAL</b>	<b>9.000</b>
<b>SERVICE CHARGE</b>	<b>0.900</b>
<b>TOTAL</b>	<b>9.900</b>
Thank you !	

١) قَدِّر قيمة ما يدفعه سالم في حالة بدل الخدمة ١٠٪ .

نلاحظ أنّ ٩ دنانير  $\approx$  ١٠ دنانير

بدل الخدمة  $\approx$  ١٠٪  $\times$  ١٠

$$\text{دينار} \approx 1 \times \frac{10}{100} \approx 1$$

قيمة ما يدفعه سالم  $\approx$  ٩ + ١

$\approx$  ١٠ دنانير

٢) قَدِّر ما يدفعه سالم في حالة بدل الخدمة المتميزة ١٩٪ .

نلاحظ أنّ ١٩٪  $\approx$  ٢٠٪

بدل الخدمة  $\approx$  ٢٠٪  $\times$  ١٠

$$\text{دينار} \approx 1 \times \frac{20}{100} \approx 2$$

قيمة ما يدفعه سالم  $\approx$  ٩ + ٢

$\approx$  ١١ دنانير

### معلومة مفيدة :

بدل الخدمة يُعطى مقابل الخدمة التي تقدّمها المطاعم . وهو النسبة المئوية المحددة لبدل الخدمة  $\times$  قيمة الفاتورة .

### انتبه

عند التقدير ، استخدم الرمز  $\approx$  ويُقرأ « يساوي تقريباً »

٣) ما القيمة الفعلية لبدل الخدمة في الفاتورة ؟  $9 \times \frac{19}{100} = 1,71$  دينار

٤) ما نسبة بدل الخدمة لهذه الفاتورة ؟  $\frac{1,71}{9,900} \approx 1,72\%$

عند تقدير النسب المئوية نختار أعداداً مناسبة .

## مثال (١) :

أ) قُدِّر ٢٤% من ٦٢

الحلّ :

(قُدِّر)  $٢٤\% \approx ٢٥\%$  ،  $٦٢ \approx ٦٠$

٢٥% من ٦٠

$٦٠ \times ٢٥\% =$

$$١٥ = \cancel{٦٠}^{١٥} \times \frac{١}{٤} = ٦٠ \times \frac{\cancel{٢٥}^١}{٤} =$$

$\therefore ٢٤\% \text{ من } ٦٢ \approx ١٥$

ب) قُدِّر ٥٣,٥% من ٩٩

الحلّ :

(قُدِّر)  $٥٣,٥\% \approx ٥٤\%$  ،  $٩٩ \approx ١٠٠$

٥٤% من ١٠٠

$١٠٠ \times ٥٤\% =$

$$٥٤ = \cancel{١٠٠}^١ \times \frac{٥٤}{\cancel{١٠٠}^١} =$$

$\therefore ٥٣,٥\% \text{ من } ٩٩ \approx ٥٤$

أعطِ تقديراً آخر

## دورك الآن (١)

قُدِّر ٣٢% من ٨٩

$$٨٩ \times ٣٢\% \approx ٩٠ \times ٣٠\%$$

$$\approx ٩٠ \times \frac{٣}{١٠} = ٢٧$$

$\approx ٢٧$

## مثال (٢) :

إذا كانت مبيعات شركة ما في أحد الأعوام ٣٠٠٠٠٠٠ دينار، ثم انخفضت بنسبة ١٩% في العام الذي يليه، فقُدِّر قيمة الانخفاض.

الحلّ :

(قُدِّر)  $١٩\% \approx ٢٠\%$

قيمة الانخفاض  $\approx ٢٠\%$  من ٣٠٠٠٠٠٠

$$\approx \cancel{٣٠٠٠٠٠٠}^{٦٠٠٠٠} \times \frac{٢٠}{\cancel{١٠٠}^١} =$$

$\approx ٦٠٠٠٠$

تُقدَّر قيمة الانخفاض بـ ٦٠٠٠٠ دينار تقريباً.



صفوة معلمي الكويت

### مثال (٣) :

تلقى محرر في صحيفة محلية رسائل من ٤٠ شخصًا ، إذا كان هذا العدد يمثل ٨% من العدد الكلي لقراء الصحيفة في مدينة ما ، فقدر عدد القراء لهذه الصحيفة .

الحل :

نفرض أن العدد الكلي للقراء هو س .

$$٨\% \approx ١٠\% \quad (\text{قدر})$$

$$\therefore ١٠\% \text{ من } س \approx ٤٠$$

$$١٠\% \times س \approx ٤٠$$

$$س \times \frac{١٠}{١٠٠} \approx ٤٠$$

$$س \times \frac{١٠}{١٠٠} \approx ٤٠ \times \frac{١٠٠}{١٠}$$

$$س \approx ٤٠٠$$

يُقدر عدد قراء الصحيفة بـ ٤٠٠ شخص تقريبًا .

تذكر



• ١٠% من س تكافئ ١٠% × س

$$\frac{١٠}{١٠٠} = ١٠\%$$

### دورك الآن (٢)



اشترى خالد معدات للصيد بسعر ٢٠ دينارًا ، ودفع ١١% من سعرها كضريبة مبيعات . قدر ما دفعه خالد .

$$١١\% \approx ١٠\% \quad (\text{قدر})$$

$$\text{قيمة الضريبة} \approx ٢٠ \times ١٠\%$$

$$\approx ٢٠ \times \frac{١٠}{١٠٠} \approx ٢ \text{ دينار}$$

$$\text{ما دفعه خالد} \approx ٢٠ + ٢ \approx ٢٢ \text{ دينار}$$

### عبّر عن فهمك



تمتلك الكادي حاسوبًا قيمته ٢٥٠ دينارًا ، وهي تأمل أن تباعه بحيث يكون سعر البيع على الأقل ٤٩% من قيمته الأصلية . إذا باعت الكادي حاسوبها بمبلغ ٩٠ دينارًا ، فهل حققت ما كانت تصبو إليه ؟ فسّر إجابتك مستخدمًا مفهوم التقدير .

$$٢٥٠ \times ٤٩\% = ١٢٢,٥$$

$$٢٥٠ \times \frac{٤٩}{١٠٠} = ١٢٢,٥$$

$$١٢٢,٥$$

$$\text{سعر البيع} = ٢٥٠ - ١٢٢,٥ = ١٢٧,٥ \text{ دينار}$$



## تمارين ذاتية :



١) قدر ٢٩٪ من ٤٢٠٠

$$4200 \times \frac{29}{100} = 1218$$

$$4200 \times \frac{29}{100}$$

$$= 1218$$

٢) قدر ٣٨٪ من ١٢٠

$$120 \times \frac{38}{100} = 45.6$$

$$120 \times \frac{38}{100}$$

$$= 45.6$$

٣) جهاز كهربائي ثمنه ٦٢٠ دينارًا، وكان عليه خصم ٢٢٪. قدر ثمنه بعد الخصم.

مقدار الخصم = نسبة الخصم  $\times$  المبدأ الأصلي

$$620 \times \frac{22}{100} = 136.4$$

$$620 \times \frac{22}{100} = 136.4$$

$$620 - 136.4 = 483.6 \text{ دينار}$$

٤) أعلن أحد المحلات التجارية عن خصم ١١٪ على إحدى السلع. قدر قيمة الخصم إذا كان سعر

السلعة ٤٩٩ دينارًا.

قيمة الخصم = نسبة الخصم  $\times$  المبدأ الأصلي

$$499 \times \frac{11}{100} = 54.89$$

$$499 \times \frac{11}{100}$$

$$= 54.89 \text{ دينار}$$

٥) أفاد استطلاع للرأي بأن ٢٧٪ من متعلمي مدرسة حكومية يمارسون هواية كرة السلة وعدد

١١٠ متعلمين. قدر عدد متعلمي هذه المدرسة.

$$\frac{110}{27} = \frac{س}{100}$$

نفرص من عدد متعلمي المدرسة هو س

$$110 = \frac{س}{100} \times 27$$

$$110 = \frac{س}{100} \times 27$$

$$\frac{النسبة}{100} = \frac{المجزء}{المكمل}$$

$$110 \times 100 = 27 \times س$$

$$11000 = 27 \times س$$

$$407.4 = س$$

∴ عدد متعلمي المدرسة هو ٤٠٧ متعلم

## Percentage Increase and Percentage Decrease

سوف تتعلم : حلّ مسائل تتضمن نسباً مئوية تزايدية ونسباً مئوية تناقصية .

## العبارات والمفردات :

النسبة المئوية للتزايد Percentage Increase النسبة المئوية للتناقص Percentage Decrease

## تذكر



- القيمة النهائية = القيمة الأصلية + مقدار الزيادة
- أو القيمة النهائية = القيمة الأصلية - مقدار النقصان .
- التغير إما بالزيادة أو بالنقصان .

## حلّ وناقش



اشترى صاحب معرض أثاث خزانة ثياب بمبلغ ١١٠ دنانير ، ثمّ باعها بنسبة ربح ٤٠٪ ، كما باع خزانة ثياب تصميمها قديم كانت في المعرض بنسبة خصم ٢٠٪ عن سعرها الأصلي وهو ١٢٠ دينارًا . ما سعر بيع خزانة الثياب في الحالتين ؟

- خزانة سعرها ١١٠ دنانير : **نسبة الربح ٤٠٪** أوجد ما يلي :

## ١ مقدار الزيادة :

$$\begin{aligned} \text{مقدار الزيادة} &= ١١٠ \times ٤٠\% \\ &= \frac{٤٠}{١٠٠} \times ١١٠ = \\ &= ٤٤ \end{aligned}$$

## ٢ القيمة النهائية للبيع (سعر البيع) :

$$\begin{aligned} \text{القيمة النهائية} &= \text{القيمة الأصلية} + \text{مقدار الزيادة} \\ &= ١١٠ + ٤٤ = \\ &= ١٥٤ \text{ دينار} \end{aligned}$$

## ٣ النسبة المئوية بعد الزيادة :

$$\begin{aligned} \text{النسبة المئوية بعد الزيادة} &= ١٠٠\% + ٤٠\% \\ &= ١٤٠\% \end{aligned}$$

## ٤ ما قيمة ١٤٠٪ من ١١٠ دنانير ؟

$$١٤٠\% \times ١١٠ = ١٥٤ \text{ دينار}$$

- خزانة سعرها ١٢٠ دينارًا : **نسبة الخصم ٢٠٪** أوجد ما يلي :

## ١ مقدار النقصان :

$$\begin{aligned} \text{مقدار النقصان} &= ١٢٠ \times ٢٠\% \\ &= \frac{٢٠}{١٠٠} \times ١٢٠ = \\ &= ٢٤ \end{aligned}$$

## ٢ القيمة النهائية للبيع (سعر البيع) :

$$\begin{aligned} \text{القيمة النهائية} &= \text{القيمة الأصلية} - \text{مقدار النقصان} \\ &= ١٢٠ - ٢٤ = \\ &= ٩٦ \text{ دينار} \end{aligned}$$

## ٣ النسبة المئوية بعد النقصان :

$$\begin{aligned} \text{النسبة المئوية بعد النقصان} &= ١٠٠\% - ٢٠\% \\ &= ٨٠\% \end{aligned}$$

## ٤ ما قيمة ٨٠٪ من ١٢٠ دينارًا ؟

$$٨٠\% \times ١٢٠ = ٩٦ \text{ دينار}$$

ماذا تلاحظ ؟



يمكن حلّ المسائل التي تتضمن نسباً مئوية تزايدية باستخدام المعادلة التالية :

$$\text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} \times (100\% + \text{النسبة المئوية للتزايد}) .$$

كذلك ، يمكن حلّ المسائل التي تتضمن نسباً مئوية تناقصية باستخدام المعادلة التالية :

$$\text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} \times (100\% - \text{النسبة المئوية للتناقص}) .$$

### مثال (١) :

أوجد القيمة النهائية إذا كانت القيمة الأصلية ٤٠ والنسبة المئوية للتزايد ٣٠٪ .

الحلّ :

$$\text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} \times (100\% + \text{النسبة المئوية للتزايد})$$

$$= (100\% + 30\%) \times 40 =$$

$$= 130\% \times 40 =$$

$$= \frac{130}{100} \times 40 = 52$$

### دورك الآن (١)

أوجد القيمة النهائية إذا كانت القيمة الأصلية ٢٥٠ والنسبة المئوية للتناقص ٨٠٪ .

$$\text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} \times (100\% - \text{النسبة المئوية للتناقص})$$

$$= (100\% - 80\%) \times 250 =$$

$$= 20\% \times 250 =$$

$$= \frac{20}{100} \times 250 = 50$$

### مثال (٢) :

تناقصت قيمة إيرادات إحدى شركات الاتصالات المدرجة في سوق الأوراق المالية بنسبة ١٠٪ حيث

بلغت ٣٦٠٠٠ دينار ( إيرادات يوم واحد ) .

أوجد القيمة الأصلية للإيرادات ومقدار النقص .

الحلّ :

$$\text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} \times (100\% - \text{النسبة المئوية للتناقص})$$

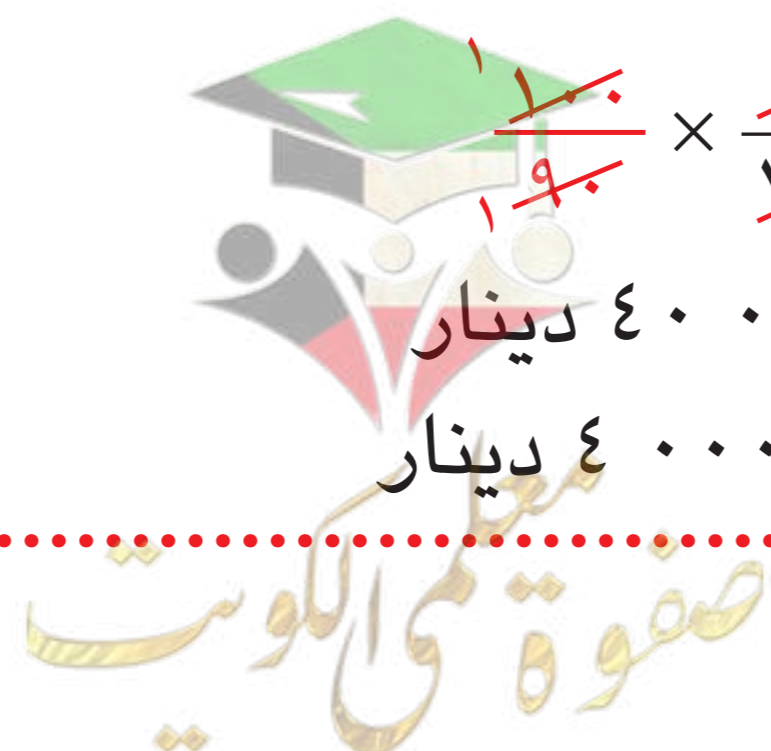
$$36000 = \text{القيمة الأصلية} \times (100\% - 10\%)$$

$$36000 = \text{القيمة الأصلية} \times 90\%$$

$$\frac{36000}{90} = \frac{\text{القيمة الأصلية}}{100} \times 90 \Rightarrow \text{القيمة الأصلية} = \frac{36000 \times 100}{90} = 40000$$

$$\therefore \text{القيمة الأصلية} = 40000 = 100 \times 400 = 40000 \text{ دينار}$$

$$\text{مقدار النقص} = 40000 - 36000 = 4000 \text{ دينار}$$



أوجد القيمة الأصلية ومقدار الزيادة إذا كانت القيمة النهائية تساوي ٣٢٠ والنسبة المئوية للتزايد تساوي ٦٠٪.

$$\text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} \times (100\% + \text{النسبة المئوية للتزايد})$$

$$320 = \text{القيمة الأصلية} \times (100\% + 60\%)$$

$$20 = \text{القيمة الأصلية} \times 160\%$$

$$20 = \frac{160}{100} \times \text{القيمة الأصلية}$$

$$\frac{20}{160} \times 100 = \frac{\text{القيمة الأصلية}}{100} \times 100$$

$$\therefore \text{القيمة الأصلية} = 20 \times 100 = 2000$$

$$= 2000 \text{ دينار}$$

$$\text{مقدار الزيادة} = 320 - 2000$$

$$= 180 \text{ دينار}$$

### معلومة مفيدة:

بعض الدول تعفي الزائرين من الضريبة حيث يمكنهم استرجاع نسبة معينة من قيمة مشترياتهم عند مغادرة البلد وتسمى Tax Free Shopping.

### عبّر عن فهمك

اشترت ريم من إحدى الدول مشتريات بقيمة ١٨٠٠ دينار، وعند عودتها في المطار، اتّجهت ريم إلى قاعة (Tax Free) حيث استرجعت ١٠٪ من قيمة مشترياتها.

في رأيك، كم قيمة مشتريات ريم بعد استرجاع ١٠٪ منها؟

$$\text{القيمة النهائية} = 1800 \times (100\% - 10\%)$$

$$= 1620$$

$$= 1620 \text{ دينار}$$

### مثال (٣):

زادت إحدى الجامعات الخاصة المتميّزة عدد قبول المتعلّمين إلى ٦٣٠٠ متعلّم، إذا كان العدد الأصلي للقبول كل سنة ٤٥٠٠ متعلّم، فأوجد النسبة المئوية للتزايد.

### الحل:

$$\text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} \times (100\% + \text{النسبة المئوية للتزايد})$$

$$6300 = 4500 \times (100\% + \text{س})$$

$$\frac{6300}{4500} = 100\% + \text{س}$$

$$\frac{7}{5} = 100\% + \text{س}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{3}{5} = 100\% - \frac{3}{5} = \text{س}$$

$$\therefore \text{النسبة المئوية للتزايد} = \frac{20}{100} = \frac{20 \times 2}{20 \times 100} = 40\%$$

### تذكّر

$$1 = 100\%$$

### انتبه

$$\frac{5}{5} = 1$$



أوجد النسبة المئوية للتناقص إذا كانت القيمة النهائية ٢٠٠ والقيمة الأصلية ٥٠٠ .

القيمة النهائية : القيمة الأصلية  $\times (١٠٠\% - \text{النسبة المئوية للتناقص})$

$$200 = 500 \times (100\% - x)$$

$$200 = 500 \times (1 - \frac{x}{100})$$

$$\frac{200}{500} = 1 - \frac{x}{100}$$

$$\frac{2}{5} = 1 - \frac{x}{100}$$

$$\frac{x}{100} = 1 - \frac{2}{5}$$

$$\frac{x}{100} = \frac{5}{5} - \frac{2}{5}$$

$$\frac{x}{100} = \frac{3}{5}$$

$$x = \frac{3}{5} \times 100$$

$$x = \frac{300}{5}$$

$$x = 60\%$$

∴ النسبة المئوية للتناقص =  $\frac{300}{500} = \frac{3 \times 100}{5 \times 100} = \frac{60}{100} = 60\%$

### تمارين ذاتية :



١ أوجد التكلفة الإجمالية لسلعة كان سعرها ٣٠٠ دينار ، ثم زادت بنسبة ٢٠٪ .

القيمة النهائية = القيمة الأصلية  $\times (١٠٠\% + \text{النسبة المئوية للزيادة})$

$$= 300 \times (100\% + 20\%)$$

$$= 300 \times 120\%$$

$$= \frac{120 \times 300}{100} = 360 \text{ دينار}$$

٢ أوجد القيمة الأصلية إذا كانت : القيمة النهائية تساوي ٥٠٠ ،

والنسبة المئوية للتناقص تساوي ٧٥٪ .

القيمة النهائية = القيمة الأصلية  $\times (١٠٠\% - \text{النسبة المئوية للتناقص})$

$$500 = \text{القيمة الأصلية} \times (100\% - 75\%)$$

$$500 = \text{القيمة الأصلية} \times 25\%$$

$$\text{∴ القيمة الأصلية} = \frac{500}{25\%} = 2000 \text{ دينار}$$

$$\frac{500}{25} \times \frac{100}{100} = \frac{500 \times 100}{25}$$

٣ تزايدت إيرادات إحدى المؤسسات التجارية في أحد الشهور بنسبة ٣٠٪ عن الشهر السابق حيث

بلغت ١٣٠٠٠ دينار ، أحسب إيرادات الشهر السابق .

القيمة النهائية = القيمة الأصلية  $\times (١٠٠\% + \text{النسبة المئوية للزيادة})$

$$13000 = \text{القيمة الأصلية} \times (100\% + 30\%)$$

$$13000 = \text{القيمة الأصلية} \times 130\%$$

$$13000 = \text{القيمة الأصلية} \times \frac{130}{100}$$

$$\frac{13000}{130} \times \frac{100}{100} = \frac{13000 \times 100}{130}$$

$$\text{∴ القيمة الأصلية} = 10000 \text{ دينار}$$

٤ يعمل خالد كمحاسب في متجر ويحصل على خصم ٣٠٪ على مشترياته منه .

إذا كان سعر البيع لإحدى السلع ٩٠ دينارًا ، فكم سيدفع خالد بعد الخصم ؟

$$\text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} \times (100\% - \text{النسبة المئوية للتناقص})$$

$$= 90 \times (100\% - 30\%)$$

$$= 90 \times 70\%$$

$$= \frac{90 \times 70}{100}$$

$$= 63 \text{ دينار}$$

٥ اشترت منى أجهزة كهربائية بقيمة ٢٤٠٠ دينار ، حيث حصلت على خصم ٢٠٪ .

أوجد السعر الأصلي للأجهزة ، ثم أوجد مقدار الخصم .

$$\text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} \times (100\% - \text{النسبة المئوية للتناقص})$$

$$2400 = \text{القيمة الأصلية} \times (100\% - 20\%)$$

$$2400 = \text{القيمة الأصلية} \times 80\%$$

$$2400 = \frac{\text{القيمة الأصلية} \times 80}{100}$$

$$\frac{2400 \times 100}{80} = \frac{\text{القيمة الأصلية} \times 80}{80}$$

$$\therefore \text{القيمة الأصلية} = 3000 \text{ دينار}$$

$$\text{مقدار الخصم} = 3000 - 2400 = 600 \text{ دينار}$$

٦ أوجد النسبة المئوية للتزايد إذا كانت القيمة النهائية ٢١٠ دنانير والقيمة الأصلية ١٤٠ دينارًا .

$$\text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} \times (100\% + \text{النسبة المئوية للتزايد})$$

$$210 = 140 \times (100\% + \text{س})$$

$$210 = 140 \times (1 + \text{س})$$

$$1 + \text{س} = \frac{210}{140}$$

$$\text{س} = \frac{210}{140} - 1$$

$$\text{النسبة المئوية للتزايد} = \frac{140 \times \text{س}}{140} = \frac{210}{140} - 1$$

$$= \frac{50}{100}$$

$$= 50\%$$





٧ باع عبد الرحمن لأحمد دراجة هوائية بسعر ٢٤ دينارًا وخوذة بسعر ٦ دنانير . تمثل التكلفة الإجمالية التي دفعها أحمد ١٢٠٪ مما أنفقه عبد الرحمن في الأصل لشراء الدراجة والخوذة . فكم دفع عبد الرحمن في الأصل ؟ وما الربح الذي حققه ببيعه الدراجة والخوذة ؟



$$\text{القيمة النهائية} = ٢٤ + ٦ = ٣٠ \text{ دينار}$$

$$\text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} \times (١٠٠\% + \text{نسبة الخسارة للزيادة})$$

$$٣٠ = \text{القيمة الأصلية} \times ١٤٠\%$$

$$٣٠ = \text{القيمة الأصلية} \times \frac{١٤٠}{١٠٠}$$

$$\frac{٣٠}{\frac{١٤٠}{١٠٠}} = \text{القيمة الأصلية} \times \frac{١٤٠}{١٠٠}$$

$$\text{القيمة الأصلية} = ٢١.٤٣$$

$$\text{مقدار الربح} = ٢١.٤٣ - ٣٠ = ٨.٥٧$$

$$= ٨.٥٧ \text{ دينار}$$

# تطبيقات على تغيّر النسبة المئوية

## Application of Percent Change

٣ - ٨

سوف تتعلّم : استخدام النسبة المئوية للتزايد والتناقص وتطبيقها .

حلّ وناقش

تذكّر

تغيّر النسبة المئوية إمّا بالزيادة أو بالنقصان .

أعلن بنك الكويت المركزي في إحدى السنوات أنّ قيمة الاحتياطي النقدي كان في بداية السنة المالية ١٠ مليارات دينار . فأوجد قيمة الاحتياطي الجديد في كلٍّ من الحالات التالية :

١) ارتفاع بنسبة ١٠٪ ، ثمّ انخفاض بنسبة ١٠٪ .

القيمة النهائية للاحتياطي النقدي بعد ارتفاع ١٠٪

$$= \text{القيمة الأصلية} \times (100\% + 10\%)$$

$$= 10 \times (100\% + 10\%)$$

$$= 110\% \times 10$$

$$= \frac{110}{100} \times 10 = 11 \text{ مليار دينار}$$

القيمة النهائية للاحتياطي النقدي بعد انخفاض ١٠٪

$$= \text{القيمة الأصلية} \times (100\% - 10\%)$$

$$= 10 \times (100\% - 10\%)$$

$$= 90\% \times 10$$

$$= \frac{90}{100} \times 10 = 9,9 \text{ مليار دينار}$$

ماذا تلاحظ ؟

هل عادت قيمة الاحتياطي النقدي إلى قيمته السابقة ؟ لا

٢) انخفاض بنسبة ١٠٪ ، ثمّ ارتفاع بنسبة ١٠٪ .

$$\text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} \times (100\% - 10\%)$$

$$= 10 \times 90\%$$

$$= \frac{90}{100} \times 10$$

$$= 9 \text{ مليار دينار}$$

$$\text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} \times (100\% + 10\%)$$

$$= 10 \times 110\%$$

$$= \frac{110}{100} \times 10$$

$$= 11,9 \text{ مليار دينار}$$

• قارن بين القيمة النهائية في كلٍّ من ١) و ٢) لم تعد قيمة الاحتياطي إلى القيمة

الباقية



## مثال (١) :

رفعت إحدى شركات الاتصال أسعار أجهزتها بنسبة ٢٠٪ ، ثم منحت هذه الشركة موظفيها خصمًا يبلغ ١٠٪ . فكم ستدفع إحدى الموظفات ثمن جهاز كان سعره ٣٠٠ دينار قبل الزيادة ؟

الحل :

ثمن الجهاز بعد الزيادة = القيمة الأصلية  $\times$  ( النسبة المئوية للتزايد + ١٠٠٪ )

$$= ٣٠٠ \times ( ٢٠\% + ١٠٠\% )$$

$$= ٣٠٠ \times ١٢٠\%$$

$$= \frac{١٢٠}{١٠٠} \times ٣٠٠ = ٣٦٠ \text{ دينارًا}$$

القيمة النهائية لثمن الجهاز = القيمة الأصلية  $\times$  ( النسبة المئوية للتناقص - ١٠٠٪ )

$$= ٣٦٠ \times ( ١٠\% - ١٠٠\% )$$

$$= ٣٦٠ \times ٩٠\%$$

$$= \frac{٩٠}{١٠٠} \times ٣٦٠ = ٣٢٤ \text{ دينارًا}$$

انتبه



ميّز بين القيمة الأصلية في الحالتين .

## عبّر عن فهمك (١)

هل يمكن حلّ « مثال (١) » بطريقة أخرى ؟ وضّح إجابتك .

## دورك الآن (١)

يريد ثامر شراء جهاز للمشي ( Treadmill ) سعره الأصلي ٣٠٠ دينار ، وخلال فترة الخصومات كانت نسبة الخصم على الجهاز ٣٠٪ ، وضرية مبيعات نسبتها ١٠٪ ، كم سيدفع ثامر لشراء الجهاز ؟

القيمة النهائية = القيمة الأصلية  $\times$  ( النسبة المئوية للتناقص - ١٠٠٪ )

$$= ٣٠٠ \times ( ٣٠\% - ١٠٠\% )$$

$$= ٣٠٠ \times ٧٠\%$$

$$= \frac{٧٠}{١٠٠} \times ٣٠٠ = ٢١٠$$

$$= ٢١٠ \text{ دينار}$$

القيمة النهائية = القيمة الأصلية  $\times$  ( النسبة المئوية للتزايد + ١٠٠٪ )

$$= ٣٠٠ \times ( ١٠\% + ١٠٠\% )$$

$$= ٣٠٠ \times ١١٠\%$$

$$= \frac{١١٠}{١٠٠} \times ٣٠٠ = ٣٣٠$$

$$= ٣٣٠ \text{ دينار}$$

## دورك الآن (٢)

يهوى جاسم رياضة الغوص في البحر ، إذا كان استئجار لوازم الغطس في اليوم الواحد يكلف ١٥ دينارًا يُضاف إليها نظير الخدمة ، فأوجد تكلفة الاستئجار في حالة خصم ٢٠٪ بعد إضافة ٥ دنائير نظير الخدمة .

تكلفة الاستئجار بعد إضافة نظير الخدمة = ١٥ + ٥ = ٢٠ دينار .

تكلفة الاستئجار بعد الخصم =  $\frac{٩٠}{١٠٠} \times ٢٠ = ١٨$  دينار

$$= ١٨ \text{ دينار}$$

## مثال (٢):

انخفضت مبيعات شركة موادّ بناء بنسبة ٢٠% فأصبحت ٤٠٠٠ دينار .

أ) أوجد القيمة الأصلية للمبيعات قبل الانخفاض .

ب) ما النسبة المئوية للتزايد التي تُعيد المبيعات إلى قيمتها الأصلية قبل الانخفاض ؟

الحلّ:

أ) القيمة النهائية = القيمة الأصلية  $\times$  (١٠٠% - النسبة المئوية للتناقص)

$$٤٠٠٠ = \text{القيمة الأصلية} \times (١٠٠\% - ٢٠\%)$$

$$٤٠٠٠ = \text{القيمة الأصلية} \times ٨٠\%$$

$$\frac{٤٠٠٠}{٨٠} = \text{القيمة الأصلية} \times \frac{٨٠}{٨٠}$$

$$\therefore \text{القيمة الأصلية} = \frac{٤٠٠٠}{٨٠} \times ١٠٠ = ٥٠٠٠ \text{ دينار}$$

ب) القيمة النهائية = القيمة الأصلية  $\times$  (١٠٠% + النسبة المئوية للتزايد)

$$٥٠٠٠ = \text{القيمة الأصلية} \times (١٠٠\% + س)$$

$$٥٠٠٠ = \text{القيمة الأصلية} \times (١ + س)$$

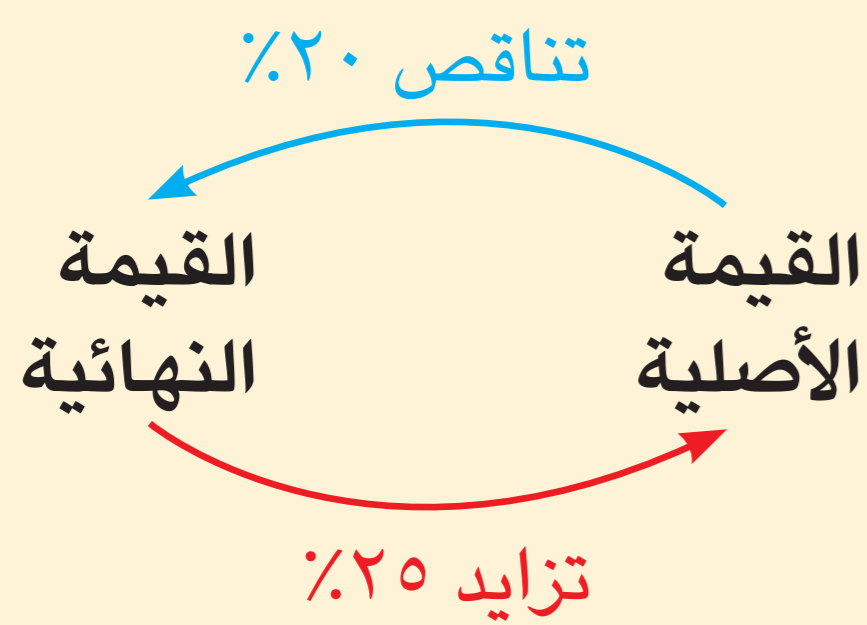
$$\frac{٥٠٠٠}{٤٠٠٠} = ١ + س$$

$$\frac{٥}{٤} = ١ + س$$

$$س = \frac{٥}{٤} - ١ = \frac{١}{٤} = ٢٥\%$$

$\therefore$  النسبة المئوية للتزايد = ٢٥%

لاحظ أنّ



## دورك الآن (٣)

إذا زادت نفقات شركة للطيران بنسبة ١٠٠% عن الشهر السابق لتصل إلى ٨٠٠٠ دينار .

أ) أوجد نفقات الشركة قبل الزيادة .

$$٨٠٠٠ = \text{القيمة الأصلية} \times (١٠٠\% + ١٠٠\%)$$

$$٨٠٠٠ = \text{القيمة الأصلية} \times ٢$$

$$\text{القيمة الأصلية} = \frac{٨٠٠٠}{٢} = ٤٠٠٠ \text{ دينار}$$

$\therefore$  نفقات الشركة قبل الزيادة هي ٤٠٠٠ دينار .

ب) ما النسبة المئوية للتناقص التي تجعل نفقات الشركة تعود إلى مستواها في الشهر الماضي ؟

$$\text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} \times (١٠٠\% - \text{النسبة المئوية للتناقص})$$

$$٤٠٠٠ = ٨٠٠٠ \times (١ - س)$$

$$\frac{٤٠٠٠}{٨٠٠٠} = ١ - س$$

$$\therefore \text{النسبة المئوية للتناقص} = ١ - \frac{٤٠٠٠}{٨٠٠٠} = ١ - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} = ٥٠\%$$



إذا انخفض سعر سهم ٥٠٪ عن سعره في العام الماضي ، في رأيك ، ما النسبة المئوية للزيادة التي تُعيده إلى سعره الأصلي ؟ وضح إجابتك . **النسبة المئوية للزيادة = ١٠٠٪**

## تمارين ذاتية :



١ تداول أحمد في سوق الكويت للأوراق المالية حيث اشترى أسهمًا بمبلغ ٤٠ ٠٠٠ دينار وكانت أسعار الأسهم تتأرجح بين هبوط وارتفاع . أوجد سعر بيع أسهم أحمد عند ارتفاع الأسهم ٢٥٪ ، ثم انخفاض ١٠٪ ؟

$$\begin{aligned} & \text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} \times (100\% + \text{النسبة المئوية للزيادة}) \\ & \text{القيمة النهائية} = 40000 \times (100\% + 25\%) \\ & = 40000 \times 125\% \\ & = 40000 \times \frac{125}{100} \\ & = 50000 \text{ دينار} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} \times (100\% - \text{النسبة المئوية للتناقص}) \\ & \text{القيمة النهائية} = 50000 \times (100\% - 10\%) \\ & = 50000 \times 90\% \\ & = 50000 \times \frac{90}{100} \\ & = 45000 \text{ دينار} \end{aligned}$$

٢ يعمل ناصر وسيطًا عقاريًا في شركة عقارات في الكويت ، إذا طلبت منه الشركة بيع عقار (منزل) سعره الأصلي ٣٠٠ ٠٠٠ دينار بنسبة زيادة ٣٠٪ عن سعره الأصلي ، حيث يتقاضى ناصر ٥٪ من سعر البيع ، فما هو المبلغ الذي تحصل عليه الشركة من بيع العقار ؟

$$\begin{aligned} & \text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} \times (100\% + \text{النسبة المئوية للزيادة}) \\ & \text{القيمة النهائية} = 300000 \times (100\% + 30\%) \\ & = 300000 \times 130\% \\ & = 300000 \times \frac{130}{100} \\ & = 390000 \text{ دينار} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الأصلية} \times (100\% - \text{النسبة المئوية للتناقص}) \\ & \text{القيمة النهائية} = 390000 \times (100\% - 5\%) \\ & = 390000 \times 95\% \\ & = 390000 \times \frac{95}{100} \\ & = 370500 \text{ دينار} \end{aligned}$$

:- المبلغ الذي حصل عليه الشركة من بيع العقار = ٣٧٠ ٥٠٠ دينار

٣ بلغ سعر التذكرة الواحدة لحضور أمسية شعرية ٣٠ دينارًا ، ويضاف إليها نظير الخدمة .

أوجد سعر التذكرة في كل من الحالات التالية : **القيمة النهائية = ٣٠ × (١٠٠٪ - ٥٪)**

أ) خصم ٢٠٪ ، ثم إضافة ١٠٪ نظير الخدمة .

$$\begin{aligned} & \text{القيمة النهائية} = 30 \times (100\% - 20\%) \\ & = 30 \times 80\% \\ & = 30 \times \frac{80}{100} \\ & = 24 \text{ دينار} \end{aligned}$$

ب) خصم ٢٠٪ بعد إضافة ١٠ دينار نظير الخدمة .

**قيمة التذكرة بعد إضافة نظير الخدمة = القيمة النهائية = ٤٠ × (١٠٠٪ - ٥٪)**

$$\begin{aligned} & \text{القيمة النهائية} = 40 \times (100\% - 20\%) \\ & = 40 \times 80\% \\ & = 40 \times \frac{80}{100} \\ & = 32 \text{ دينار} \end{aligned}$$

- ٤ إذا انخفضت نفقات فهد الشهرية ٦٠% عن الشهر السابق ، والتي كانت ٥٠٠ دينار ، أوجد ما يلي :  
 أ) نفقات فهد بعد الانخفاض .

القيمة النهائية = القيمة الأصلية  $\times$  (النسبة المئوية للتناقص)

$$= 500 \times (100\% - 60\%)$$

$$= 500 \times 40\%$$

$$= \frac{40}{100} \times 500$$

$$= 200 \text{ دينار}$$

- ب) النسبة المئوية للتزايد التي تجعل نفقات فهد تعود إلى مستواها في الشهر السابق .

القيمة النهائية = القيمة الأصلية  $\times$  (النسبة المئوية للتزايد)

$$500 = 500 \times (100\% + \text{النسبة المئوية للتزايد})$$

$$\frac{500}{500} = \frac{500}{500} + \frac{\text{النسبة المئوية للتزايد}}{100}$$

$$1 = 1 + \frac{\text{النسبة المئوية للتزايد}}{100}$$

$$0 = \frac{\text{النسبة المئوية للتزايد}}{100}$$

$$\text{النسبة المئوية للتزايد} = \frac{0 \times 100}{500} = \frac{0}{5} = 0\%$$

مهارات تفكير عليا :

اختر الإجابة الصحيحة .

- ٥ إذا ارتفع سعر جرام الذهب بنسبة ٢٥% ، ثم انخفض بنسبة ٢٠% ، فإن السعر النهائي يكون :

أ) أقل بمقدار ٥% من السعر الأصلي .

ب) أكثر بمقدار ٥% من السعر الأصلي .

ج) السعر الأصلي نفسه .

د) ليس أيًا مما سبق .



نصفها ، سعر جرام الذهب = ١٠٠ دينار

٢) بعد الارتفاع :  
 القيمة المئوية =  $100 \times 125\%$

$$= \frac{125}{100} \times 100 = 125 \text{ دينار}$$

ب) بعد الانخفاض :

القيمة المئوية =  $125 \times 80\%$

$$= \frac{80}{100} \times 125 = 100 \text{ دينار}$$

# المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم

## Surface Area of a Right Circular Cone

٤ - ٨

سوف تتعلم : إيجاد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم .

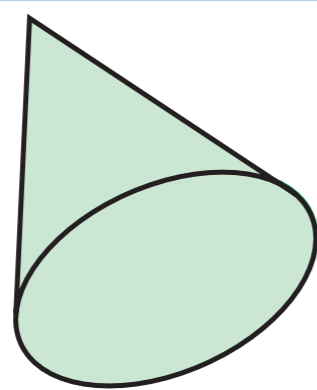
### العبارات والمفردات :

Surface Area  
Lateral Area

مساحة سطحية  
مساحة جانبية

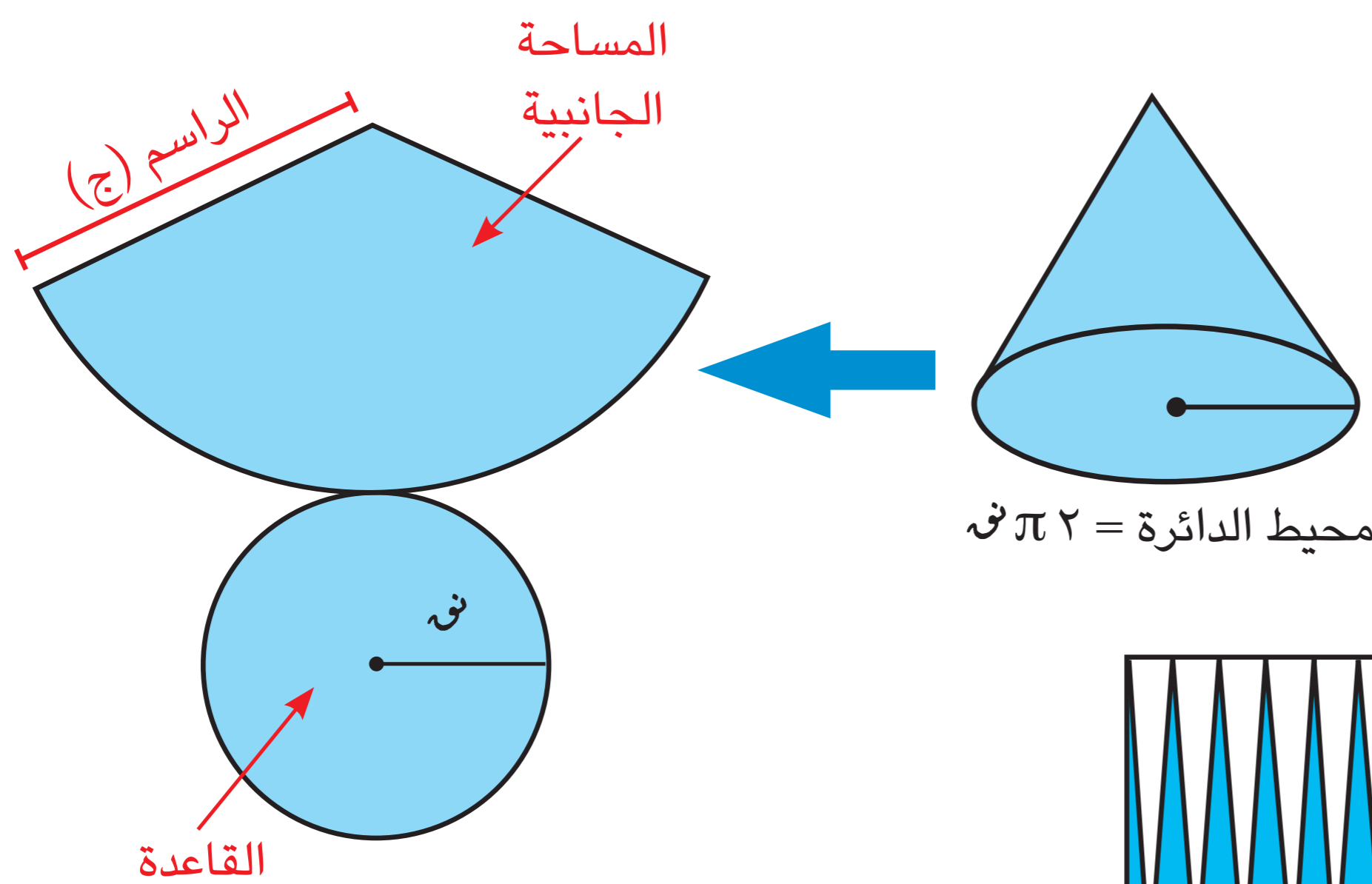
Right Circular Cone  
Slant Height

مخروط دائري قائم  
راسم

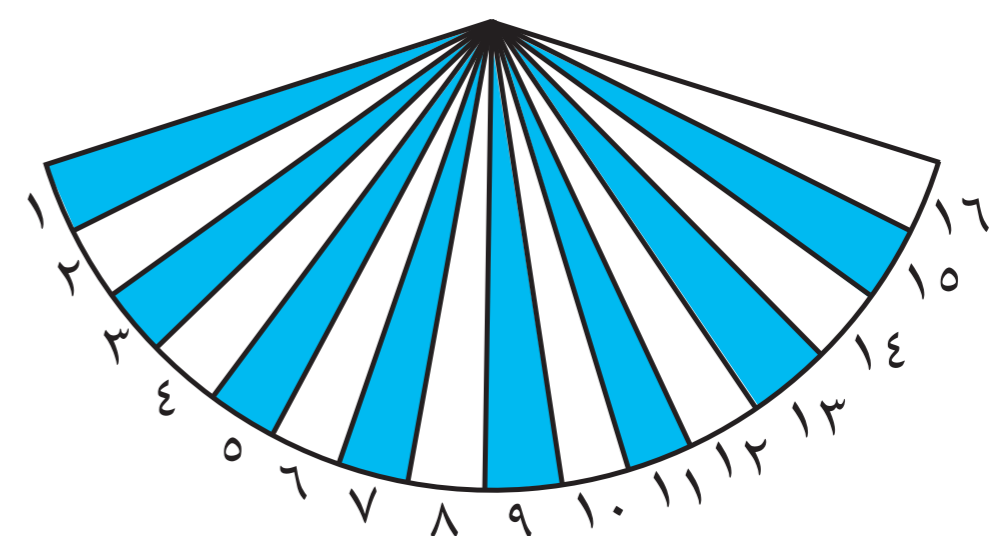
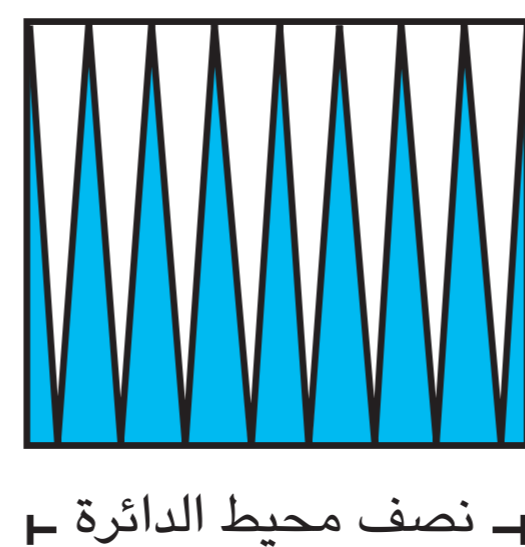


المخروط الدائري القائم : مجسم قاعدته دائرية الشكل وله رأس واحد ، وارتفاعه هو طول العمود المرسوم من رأسه على قاعدته عند مركزها .

### استكشف



عند فك شبكة المخروط ، نحصل على منطقتين كما هو موضح في الشكل المقابل .  
ولقد تعلمت سابقاً أنّ مساحة الدائرة =  $\pi r^2$  ،  
فما هي المساحة الجانبية للمخروط ؟  
لو قمنا بتقسيم المنطقة إلى أجزاء متطابقة ، ثم أعدنا ترتيبها كما هو موضح في الشكل التالي :



نلاحظ أنّ كلما زاد عدد الأجزاء المتطابقة ، اقترب الشكل من مستطيل عرضه هو الراسم .

إذا ، المساحة الجانبية للمخروط الدائري القائم

= مساحة المنطقة المستطيلة

= الطول × العرض

=  $\frac{1}{2} \times$  محيط الدائرة  $\times$  طول الراسم

=  $\frac{1}{2} \times 2\pi r \times$  ج ( حيث ج هو طول الراسم )

=  $\pi r \times$  ج

لاحظ أنّ



**الراسم** : هو القطعة المستقيمة الواصلة من رأس المخروط إلى أي نقطة على الدائرة .

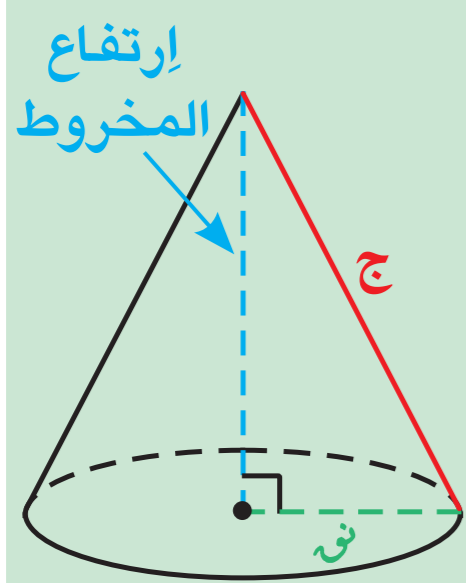


ومنه المساحة السطحية للمخروط الدائري

$$= \text{المساحة الجانبية} + \text{مساحة الدائرة}$$

$$= \pi r^2 + \pi r \times \text{ج}$$

$$= \pi r (r + \text{ج})$$



المساحة الجانبية للمخروط الدائري القائم =  $\pi r \times \text{ج}$  (حيث ج هو طول الارتفاع)

المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

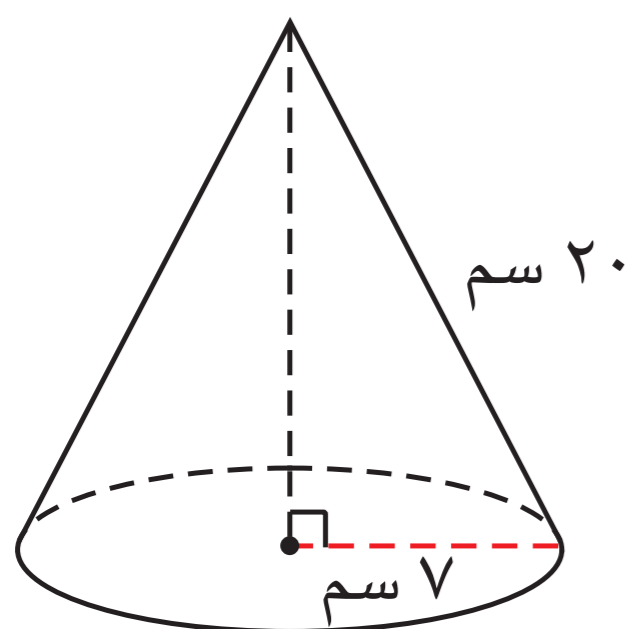
$$= \pi r^2 + \pi r \times \text{ج}$$

$$= \pi r (r + \text{ج})$$

### ملاحظة:

لاحظ أن: في المخروط الدائري القائم أي راسم فيه هو وتر لمتثلت قائم الزاوية وضلعي القائمة هما نصف قطر قاعدة المخروط وارتفاعه.

### مثال (١):



في الشكل المقابل، مخروط دائري قائم (اعتبر  $\pi = \frac{22}{7}$ ).

أوجد:

أ) مساحته الجانبية.

ب) مساحته السطحية.

الحل:

أ) المساحة الجانبية =  $\pi r \times \text{ج}$

$$= 20 \times 7 \times \frac{22}{7} = 440 \text{ سم}^2$$

ب) المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$= \pi r^2 + 440 =$$

$$= 7 \times 7 \times \frac{22}{7} + 440 =$$

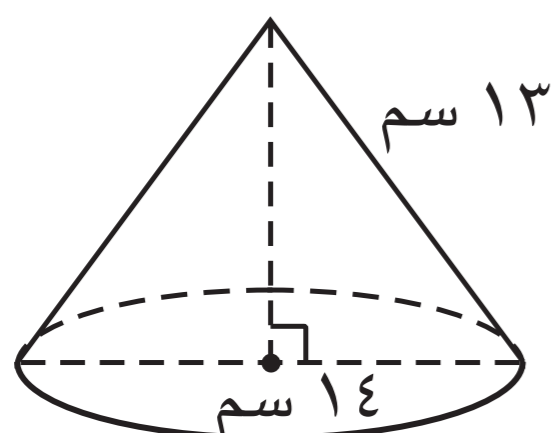
$$= 154 + 440 =$$

$$= 594 \text{ سم}^2$$

## دورك الآن (١)

أوجد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم في الشكل المقابل ( اعتبر  $\pi = \frac{22}{7}$  ).

$$\text{ن} = 14 \div 2 = 7$$



المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم =  $\pi$  ن ( ج + ن )

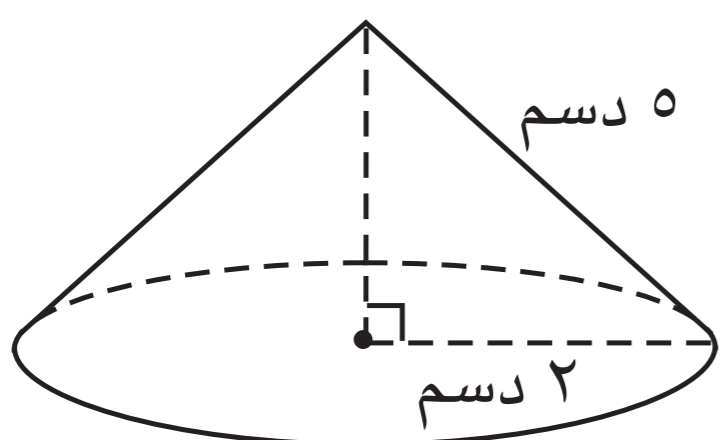
$$= \frac{22}{7} \times 7 \times (7 + 12)$$

$$= 22 \times 19$$

$$= 418 \text{ سم}^2$$

## دورك الآن (٢)

أوجد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم في الشكل المقابل ( اعتبر  $\pi = 3.14$  ).



المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم =  $\pi$  ن ( ج + ن )

$$= 3.14 \times 2 \times (2 + 5)$$

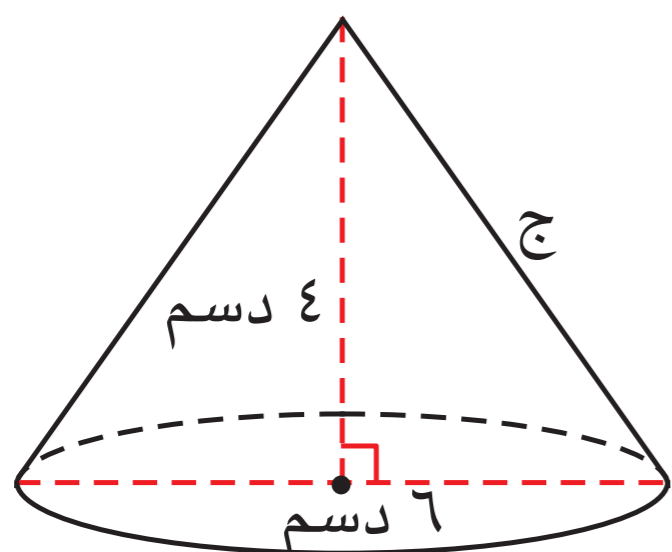
$$= 3.14 \times 2 \times 7$$

$$= 43.96 \text{ دسم}^2$$

## عبّر عن فهمك

يقول أحمد إن كل المخاريط التي محيط قاعدتها يساوي  $8\pi$  سم تكون مساحتها السطحية متساوية. هل أحمد على صواب؟ فسّر إجابتك. **ليست متساوية، لأنه إذا كانت المساحة السطحية مختلفة باختلاف طول الراس**

## مثال (٢):



مخروط دائري قائم طول قطر قاعدته 6 دسم وارتفاعه 4 دسم. أوجد ما يلي:

أ) طول الراس (ج):

$$\text{ن} = 3 = \text{دسم}$$

نظرية فيثاغورث  $ج^2 = 3^2 + 4^2$

$$ج^2 = 9 + 16 = 25$$

$$ج = \sqrt{25} = 5 \text{ دسم}$$

ب) المساحة السطحية للمخروط

الدائري القائم: ( بدلالة  $\pi$  )

المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم

$$= \pi$$
 ن ( ج + ن )

$$= \pi \times 3 \times (3 + 4)$$

$$= 8 \times 3 \times \pi$$

$$= 24\pi \text{ دسم}^2$$

### مثال (٣) :



إشترت فتون مثلجًا على شكل مخروط طول قطره ٤ سم وطول راسمه ١٠ سم . أحسب المساحة السطحية للمخروط .  
( اعتبر  $\pi = 3,14$  )

**الحل :**

المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم

$$= \pi r (r + h)$$

$$= 3,14 \times 2 \times (2 + 10)$$

$$= 3,14 \times 2 \times 12$$

$$= 3,14 \times 24$$

$$= 75,36 \text{ سم}^2$$

### دورك الآن (٣)



أرادت شركة ورقيات تصنيع قبعات للأطفال على شكل مخروط دائري قائم طول نصف قطره قاعدته ٧ سم وطول الراسم ٣٠ سم . أحسب المساحة السطحية للقبعة .  
( اعتبر  $\pi = \frac{22}{7}$  )

**انتبه**



القبعة على شكل مخروط بدون قاعدة .



المساحة السطحية للقبعة : المساحة الجانبية للمخروط

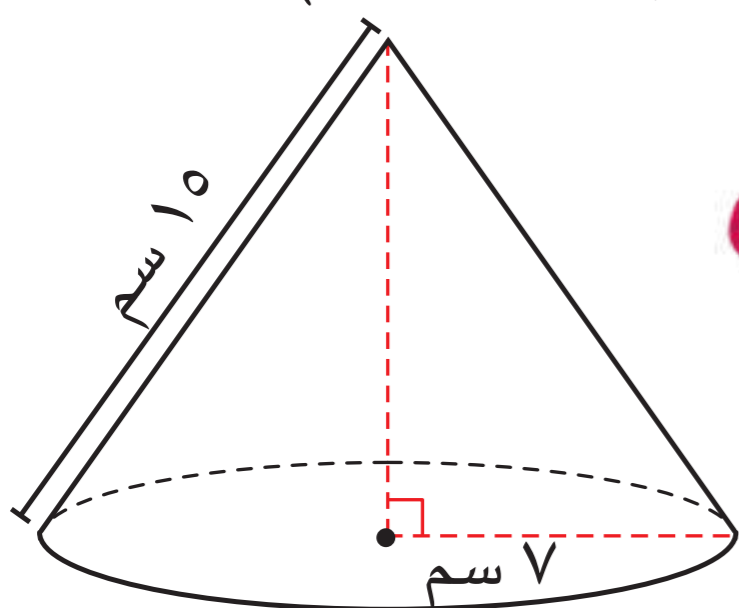
$$= \pi r h$$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 30 = 660 \text{ سم}^2$$

### تمارين ذاتية :



١ أوجد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم في الشكل المقابل . ( اعتبر  $\pi = \frac{22}{7}$  )

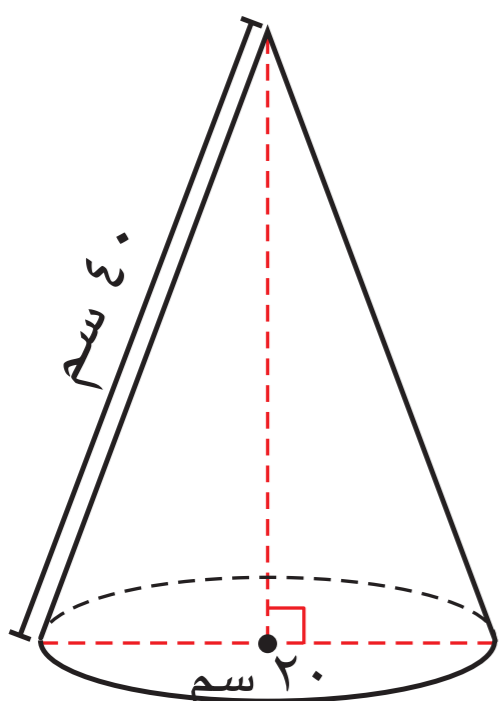


المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم =  $\pi r (r + h)$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times (7 + 10)$$

$$= 22 \times 17 = 374 \text{ سم}^2$$

٢ أوجد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم في الشكل المقابل .



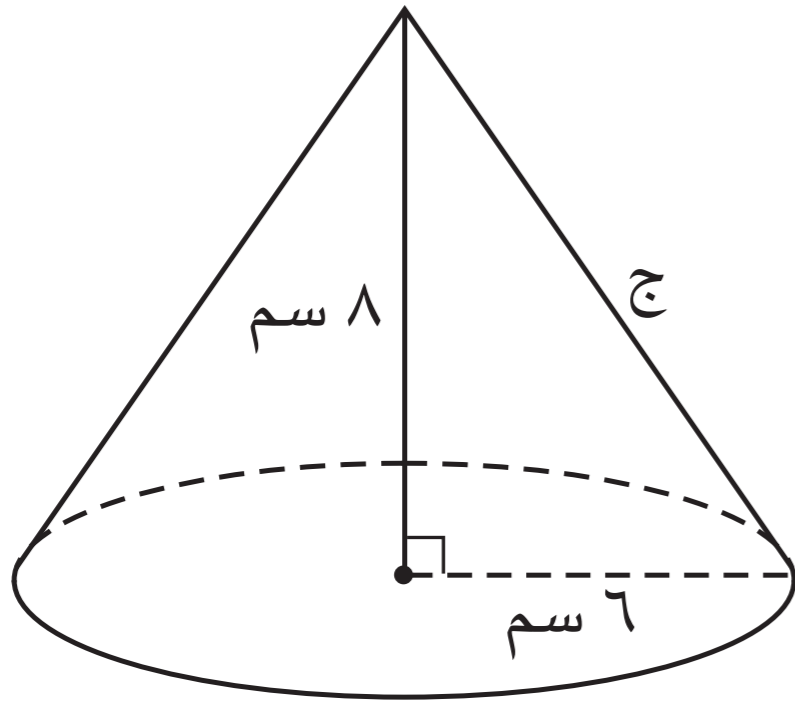
$$\text{نعلم } 40 \div 40 = 1 \text{ سم}$$

المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم =  $\pi r (r + h)$

$$= 3,14 \times 10 \times (10 + 4)$$

$$= 3,14 \times 10 \times 14 = 439,6 \text{ سم}^2$$

٣ مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٨ سم ، أوجد ما يلي :



أ طول الراسم (ج) :

ج =  $\sqrt{6^2 + 8^2}$  (نظرية فيثاغورس)

$36 + 64 =$

$100 =$

ج =  $\sqrt{100} = 10$  سم

ب المساحة السطحية للمخروط : (بدلالة  $\pi$ )

المساحة السطحية للمخروط =  $\pi \times \text{نصف القطر} \times (\text{نصف القطر} + \text{الراسم})$

$= \pi \times 6 \times (6 + 10)$

$= \pi \times 6 \times 16$

$= 96\pi$  سم<sup>٢</sup>

٤ أوجد المساحة السطحية لمخروط دائري قائم ، طول نصف قطر قاعدته ٧ سم

وطول الراسم ٩ سم . (إعتبر  $\pi = \frac{22}{7}$ )

المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم =  $\pi \times \text{نصف القطر} \times (\text{نصف القطر} + \text{الراسم})$

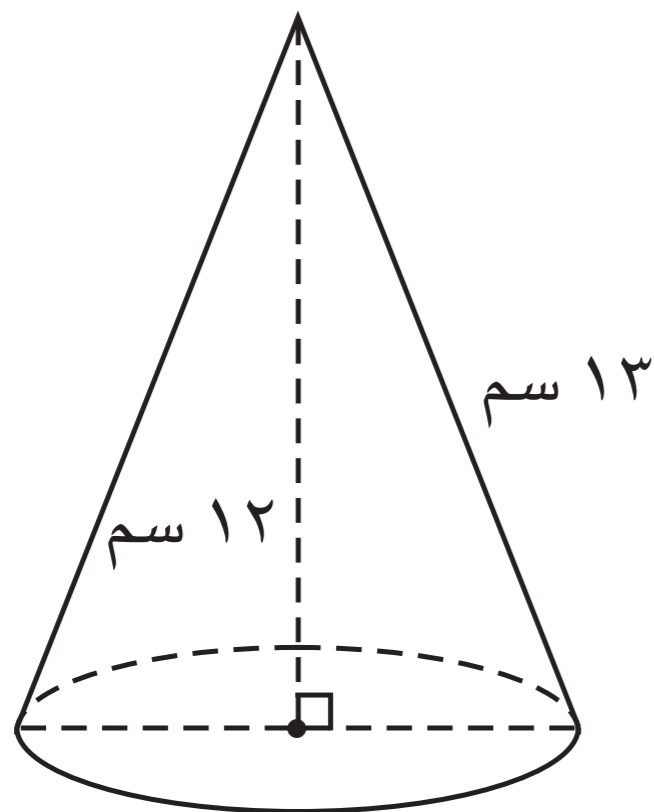
$= \frac{22}{7} \times 7 \times (7 + 9)$

$= 16 \times 22$

$= 352$  سم<sup>٢</sup>

مهارات تفكير عليا :

٥ في الشكل المقابل ، المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم مقربة إلى أقرب عدد كلي هي :



(إعتبر  $\pi = 3,14$ ) .  $\text{نصف القطر} = \sqrt{12^2 - 12^2}$

$= \sqrt{144 - 144}$

$= \sqrt{0}$

نصف القطر =  $\frac{0}{2} = 0$  سم

أ ٢٦٧ سم<sup>٢</sup>

ب ٢٨٣ سم<sup>٢</sup>

ج ٦٩١ سم<sup>٢</sup>

د ٧٢٢ سم<sup>٢</sup>

ب المساحة السطحية =  $2,14 \times 0 \times (0 + 12)$

$= 12 \times 0 \times 2,14$

$= 2,568$

$\approx 3$  سم<sup>٢</sup>

## Volume of The Pyramid

سوف تتعلّم : إيجاد حجم الهرم القائم .

### العبارات والمفردات :

Volume

حجم

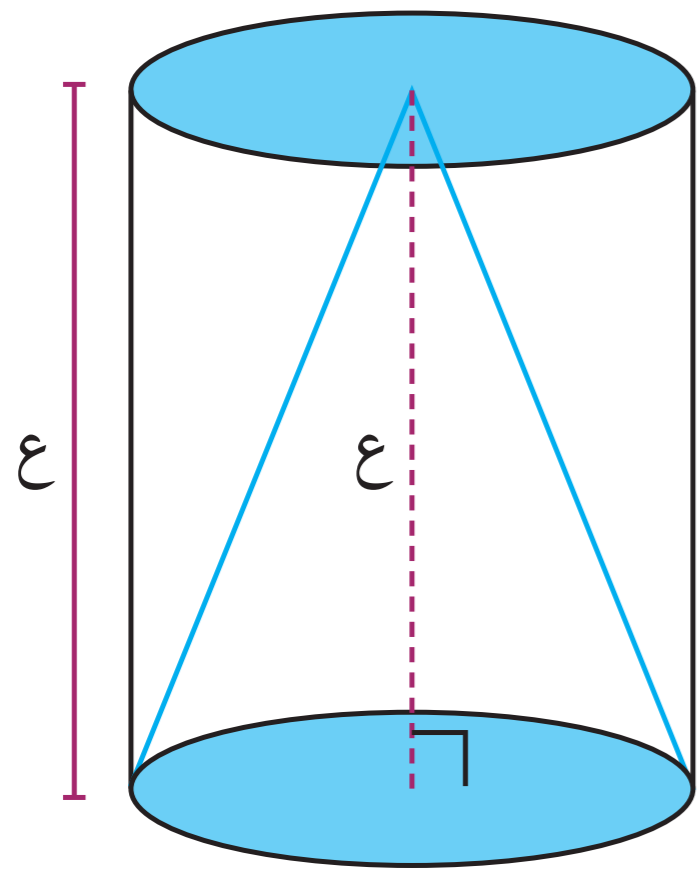
Right Pyramid

هرم قائم

### استكشف



سبق وأن تعلّمت كيفية حساب حجم المخروط القائم من حساب حجم الأسطوانة الدائرية القائمة المشتركة معه في القاعدة والارتفاع .



كما سبق وأن تعلّمت كيفية حساب حجم المنشور القائم

فهل تستطيع حساب حجم الهرم القائم بدلالة حجم المنشور القائم الذي له مساحة القاعدة نفسها والارتفاع نفسه كما فعلت سابقاً ؟

ليكن لدينا هرم قائم ومنشور قائم لهما الارتفاع نفسه والقاعدة نفسها.

### خطوات عمل التجربة :

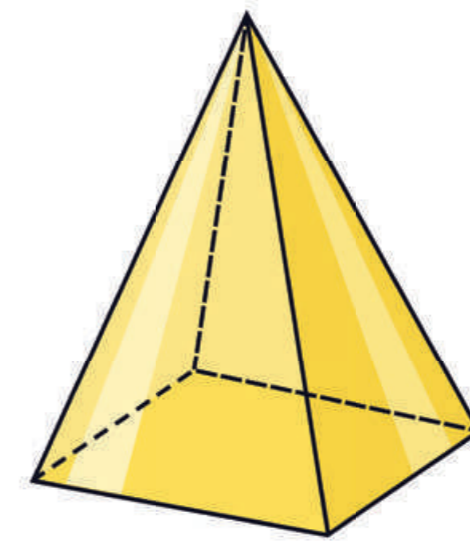
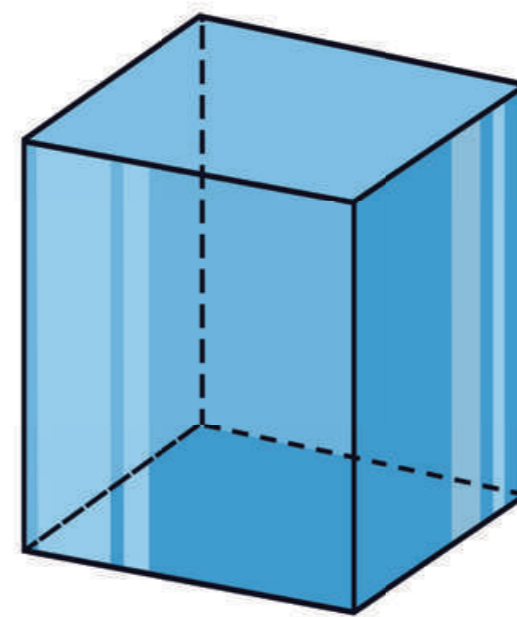
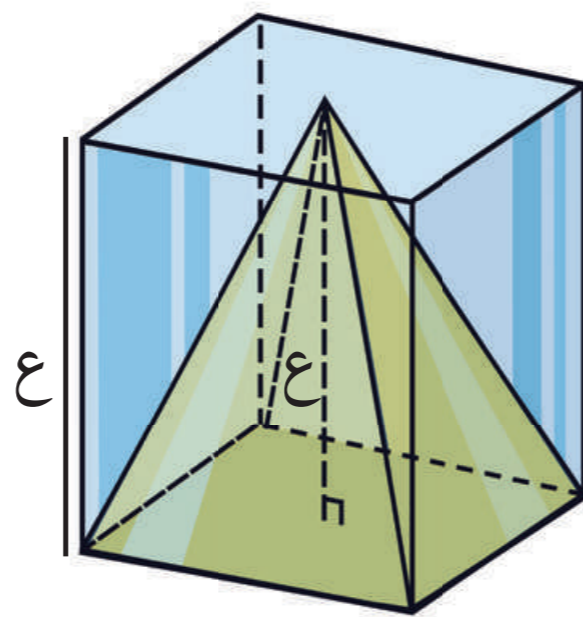
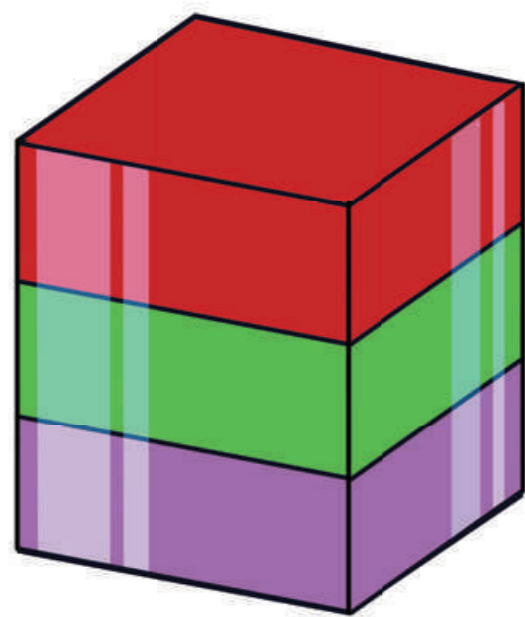


١ إملأ الهرم ( بالرمل البنفسجي مثلاً ) تمامًا حتّى الحافة .

٢ أسكب الرمل في المنشور .

٣ كرّر هذه العملية واملأ الهرم حتّى الحافة بلون آخر ( الأخضر مثلاً ) ، ثمّ اسكبه داخل المنشور .

٤ كرّر العملية حتّى يمتلئ المنشور .



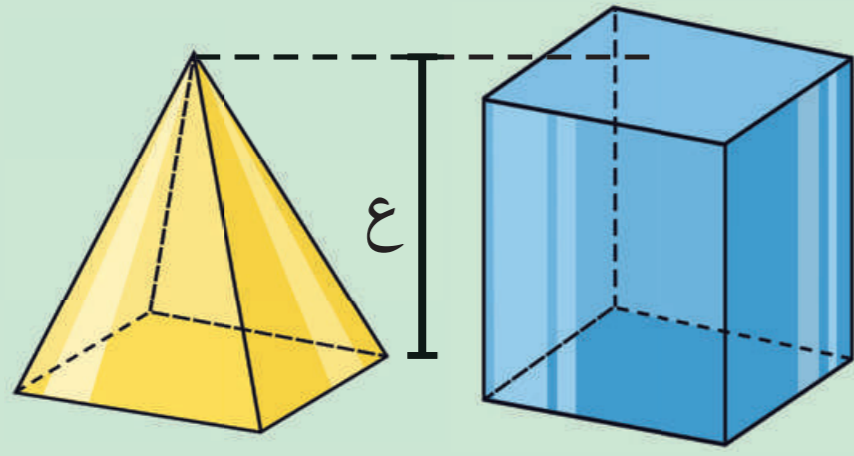
### ماذا تلاحظ ؟

بعد ٣ مرّات من ملء الهرم وسكبه ، ستجد أنّ المنشور امتلأ تمامًا .

إذا نلاحظ أنّ : حجم الهرم هو ثلث حجم المنشور المشترك معه بالقاعدة والارتفاع .



حجم الهرم القائم =  $\frac{1}{3} \times$  حجم المنشور القائم المشترك معه في القاعدة والارتفاع

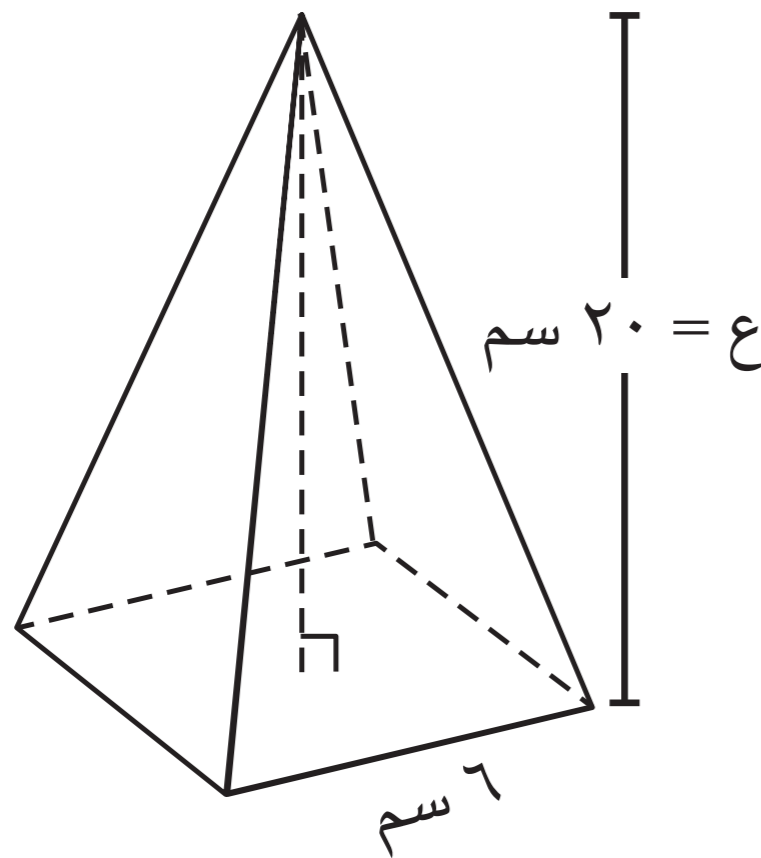


حجم الهرم القائم =  $\frac{1}{3} \times$  مساحة القاعدة  $\times$  الارتفاع

$$ح = \frac{1}{3} \times م \times ع$$

### مثال (١):

أوجد حجم الهرم القائم المنتظم الذي قاعدته على شكل مربع طول ضلعه ٦ سم وارتفاعه ٢٠ سم .



الحل:

حجم الهرم المنتظم =  $\frac{1}{3} \times$  مساحة القاعدة  $\times$  الارتفاع

$$= \frac{1}{3} \times 20 \times 6^2$$

$$= \frac{1}{3} \times 20 \times 6 \times 6$$

$$= 240 \text{ سم}^3$$

∴ حجم الهرم = ٢٤٠ سم<sup>٣</sup>

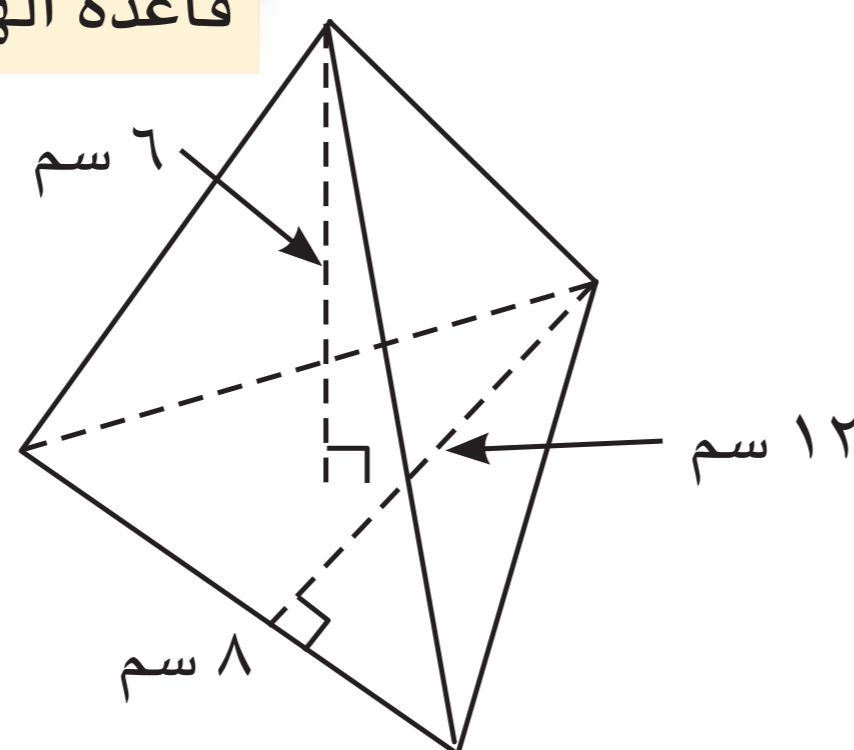
### دورك الآن (١)

انتبه



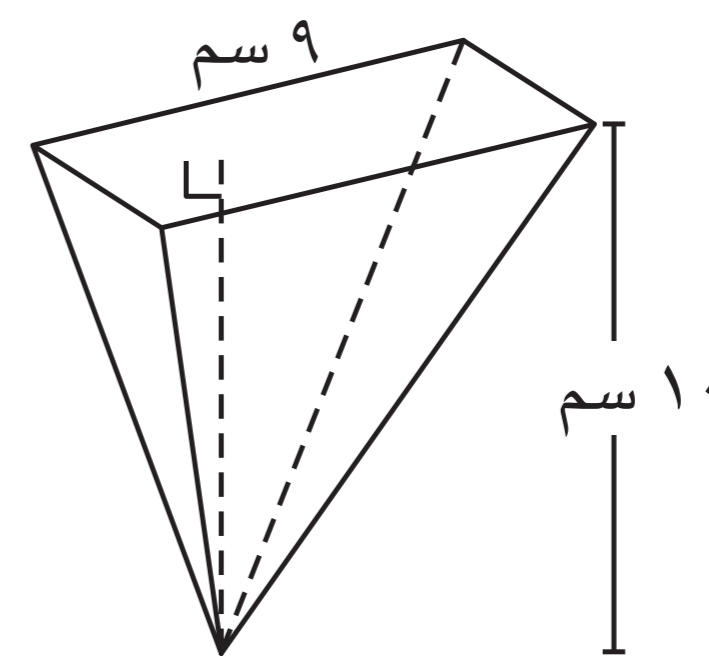
ميّز بين ارتفاع الهرم وارتفاع قاعدة الهرم (المثلث)

ب) هرم ثلاثي قائم



أوجد حجم الهرم في كل شكل مما يلي:

أ) هرم رباعي قائم منتظم



حجم الهرم =  $\frac{1}{3} \times م \times ع$

$$= \frac{1}{3} \times 8 \times \left( \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \right) = 64 \text{ سم}^3$$

$$= \frac{1}{3} \times 7 \times \left( \frac{1}{2} \times 12 \times 8 \right) = 112 \text{ سم}^3$$

حجم الهرم =  $\frac{1}{3} \times م \times ع$

$$= \frac{1}{3} \times 10 \times (9 \times 9) = 300 \text{ سم}^3$$

$$= \frac{1}{3} \times 10 \times 81 = 270 \text{ سم}^3$$



أوجد كل من حمد ونواف حجم الهرم القائم الذي له الارتفاع والقاعدة نفسهما لمنشور قائم حجمه ٢٧ م<sup>٣</sup>. فأيهما على صواب؟ فسّر إجابتك.

نواف



حجم الهرم = ٨١ م<sup>٣</sup>

حمد

حجم الهرم = ٩ م<sup>٣</sup>

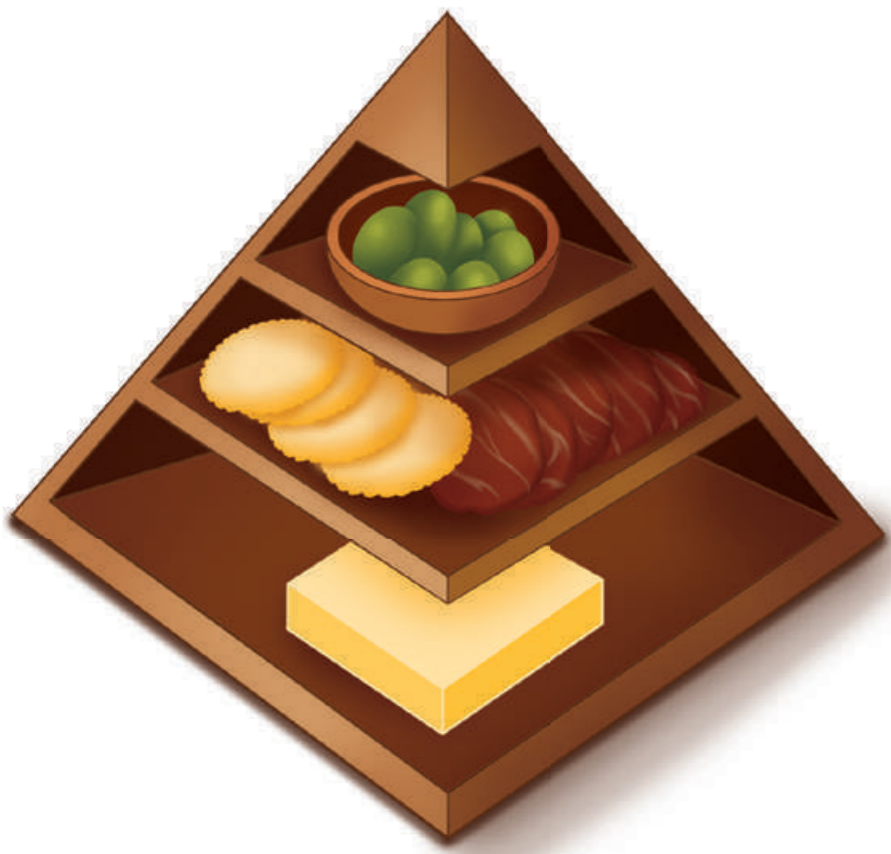


حمد هو الصحيح  
لأن حجم الهرم له نفس  
القاعدة والارتفاع يساوي  
الارتفاع  
حجم المنشور  
 $\frac{1}{3} \times 27 = 9 \text{ م}^3$

مثال (٢):

يقوم مصنع أثاث بصنع طبق تقديم على شكل هرم رباعي قائم منتظم، حجم طبق التقديم ٤٠٠ سم<sup>٣</sup> وارتفاعه ٢٠ سم. أوجد مساحة قاعدة الطبق.

الحل:



$$\text{حجم الهرم المنتظم} = \frac{1}{3} \times \text{ع} \times \text{م}$$

$$20 \times \text{م} \times \frac{1}{3} = 400$$

$$20 \times \text{م} \times \frac{1}{3} \times 3 = 400 \times 3$$

$$\text{م} \times 20 \times \frac{1}{3} \times 3 = 1200 \times \frac{1}{3}$$

$$\text{م} = 60$$

$$\therefore \text{مساحة قاعدة الطبق} = 60 \text{ سم}^2$$

دورك الآن (٢)



تصنع مها علبةً لتعبئة القرقيعان، شكل العلبة هرم قائم منتظم، إذا كان حجم العلبة ٤٤ سم<sup>٣</sup>، ومساحة قاعدتها ١٢ سم<sup>٢</sup>، فما ارتفاع هذه العلبة؟



$$\text{الحجم} = \frac{1}{3} \times \text{ع} \times \text{م}$$

$$44 = \frac{1}{3} \times 12 \times \text{ع}$$

$$44 = 4 \times \text{ع}$$

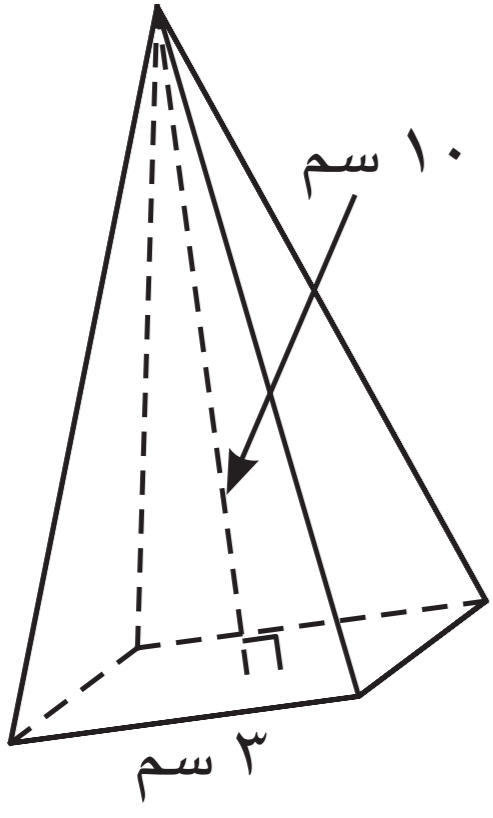
$$\frac{44}{4} = \frac{4 \times \text{ع}}{4}$$

$$11 = \text{ع}$$



صفوة معلمى الكويت

## تمارين ذاتية :

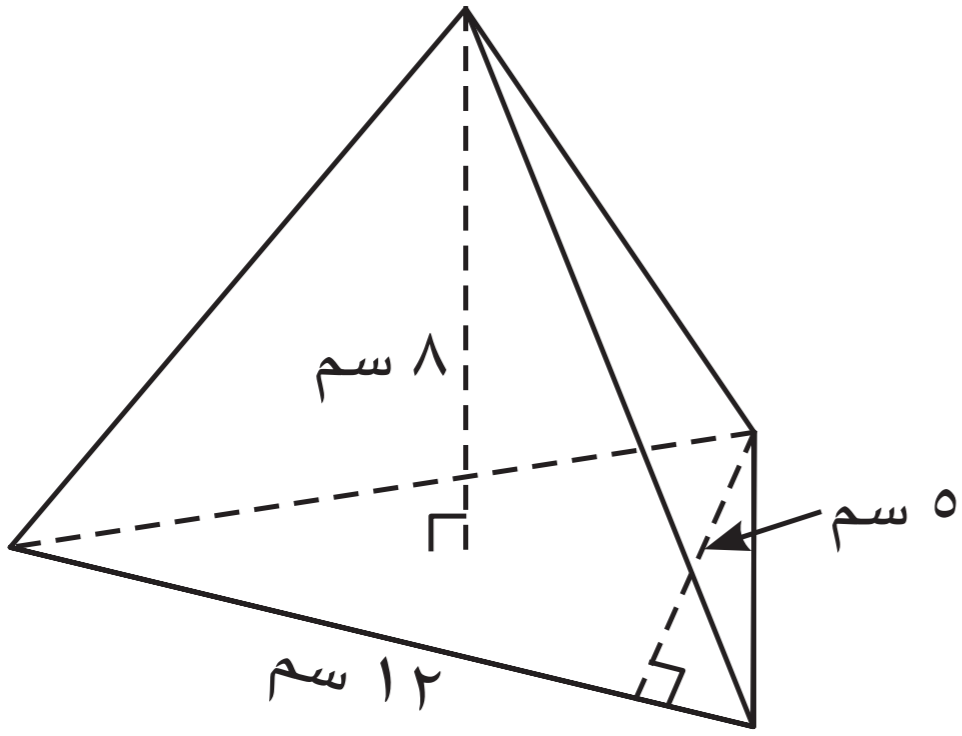


- ١ هرم قائم منتظم قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ٣ سم وارتفاع الهرم ١٠ سم . أوجد حجم الهرم .

$$\text{حجم الهرم} = \frac{1}{3} \times 3 \times 3 \times 10$$

$$= \frac{1}{3} \times (3 \times 3) \times 10 =$$

$$= \frac{1}{3} \times 9 \times 10 = 30 \text{ سم}^3$$



- ٢ هرم قائم قاعدته مثلثة الشكل ، طولها ١٢ سم ، وارتفاعها ٥ سم ، وارتفاع الهرم ٨ سم . أوجد حجم الهرم .

$$\text{حجم الهرم} = \frac{1}{3} \times 2 \times 3 \times 8$$

$$= \frac{1}{3} \times (5 \times 12 \times \frac{1}{2}) \times 8 =$$

$$= \frac{1}{3} \times 30 \times 8 = 80 \text{ سم}^3$$

- ٣ هرم قائم منتظم مساحة قاعدته ١٥ م<sup>٢</sup> ، إذا كان حجمه ٥٥ م<sup>٣</sup> ، فما ارتفاع هذا الهرم ؟

$$\text{حجم الهرم} = \frac{1}{3} \times 2 \times 3 \times 8$$

$$8 \times 15 \times \frac{1}{3} = 55$$

$$8 \times 5 = 55$$

$$\frac{55}{8} = \frac{60}{8}$$

$$8 = 11 \text{ م}$$

- ٤ هرم رباعي قائم منتظم حجمه ٣٠٠ سم<sup>٣</sup> ، إذا كان ارتفاع الهرم ٩ سم ، فما طول ضلع قاعدة الهرم ؟

$$\text{حجم الهرم} = \frac{1}{3} \times 2 \times 3 \times 8$$

$$9 \times 3 \times \frac{1}{3} = 300$$

$$3 \times 3 = 300$$

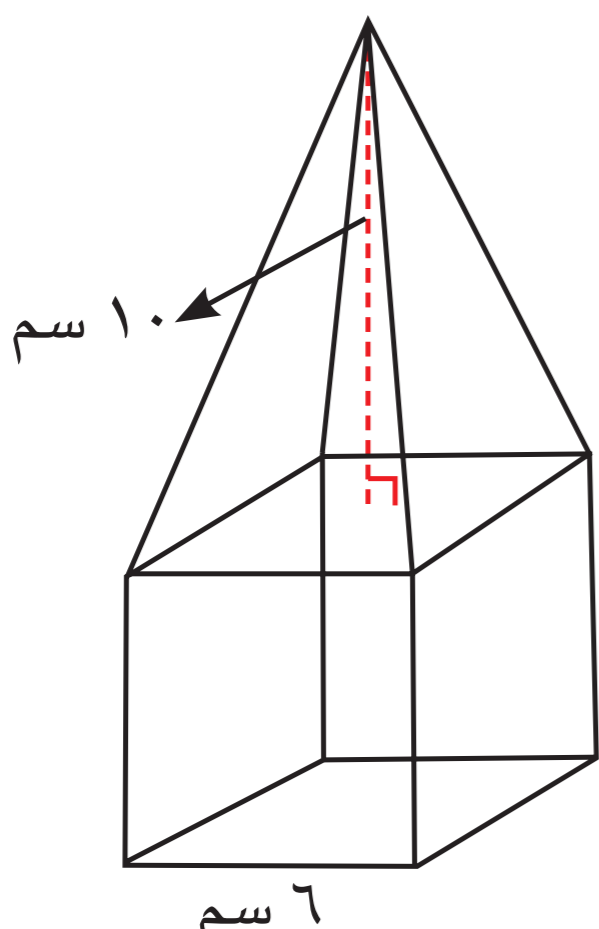
$$\frac{300}{9} = \frac{33}{9}$$

$$33 = 3$$

$$\therefore \text{طول ضلع قاعدة الهرم} = 11 \text{ م}$$

## مهارات تفكير عليا :

اختر الإجابة الصحيحة .



- ٥ هرم رباعي قائم منتظم قاعدته هي أحد أوجه مكعب . حسب البيانات المدونة ، فإن حجم الجسم الموضح في الشكل المقابل يساوي :

أ ٢١٦ سم<sup>٣</sup>

ب ٣٣٦ سم<sup>٣</sup>

ج ١٢٠ سم<sup>٣</sup>

د ٩٦ سم<sup>٣</sup>

$$\text{حجم المكعب} = 6^3 = 216$$

$$\text{حجم الهرم} = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 10 = 120 \text{ سم}^3$$

$$216 - 120 = 96 \text{ سم}^3$$

## Volume of The Sphere

سوف نتعلّم : حساب حجم كرة .

### العبارات والمفردات :

Sphere

كرة

Volume

حجم

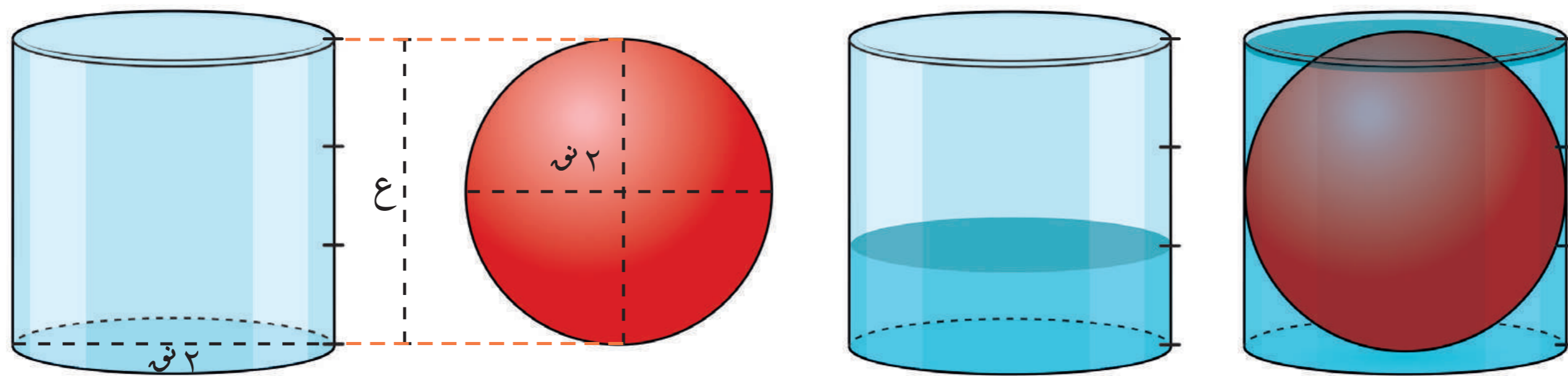
### استكشف



تعلم أنّ حجم الأسطوانة الدائرية القائمة هو :  $\pi \times r^2 \times h$

ليكن لدينا أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوي طول قطر قاعدتها وموضّح عليها تدريج من الخارج بحيث يُجزأ ارتفاعها إلى ثلاثة أقسام متطابقة .  
قُم بسكب كمّية من الماء بحيث تملأ  $\frac{1}{3}$  حجم الأسطوانة .

ضع كرة داخل الأسطوانة بشرط أن يكون قطر الكرة يساوي ارتفاع الأسطوانة ، وكذلك قطر الكرة يساوي قطر قاعدة الأسطوانة .



### ماذا تلاحظ ؟

سوف يرتفع السائل حتّى يصل إلى ارتفاع الأسطوانة

إذاً حجم الكرة =  $\frac{2}{3} \times \text{حجم الأسطوانة}$

$$= \frac{2}{3} (\pi \times r^2 \times h)$$

$$= \frac{2}{3} \pi \times r^2 \times h$$

$$= \frac{2}{3} \pi \times r^2 \times 2r$$

$$= \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

### معلومة مفيدة :

أهم ما توصل إليه العالم أرخميدس هو العلاقة بين حجم الكرة وحجم الأسطوانة المحيطة بها ( الأسطوانة التي قطرها يساوي قطر الكرة ، وارتفاعها يساوي قطر الكرة أيضاً ، أي حجم الكرة يساوي ثلثي  $\left(\frac{2}{3}\right)$  حجم الأسطوانة المحيطة بها .



## مثال (١) :

أوجد حجم كرة طول نصف قطرها ٦ سم . ( بدلالة  $\pi$  )

الحلّ :

$$\begin{aligned} \text{حجم الكرة} &= \frac{4}{3} \pi \times 6^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi \times (6)^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi \times 6 \times 6 \times 6 \\ &= 72 \times \pi \times 4 \\ &= 288 \pi \text{ سم}^3 \end{aligned}$$

## دورك الآن (١)

أوجد حجم كرة طول نصف قطرها ٣ سم . ( بدلالة  $\pi$  )

$$\begin{aligned} \text{حجم الكرة} &= \frac{4}{3} \pi \times 3^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi \times (3)^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi \times 3 \times 3 \times 3 \\ &= 36 \pi \text{ سم}^3 \end{aligned}$$

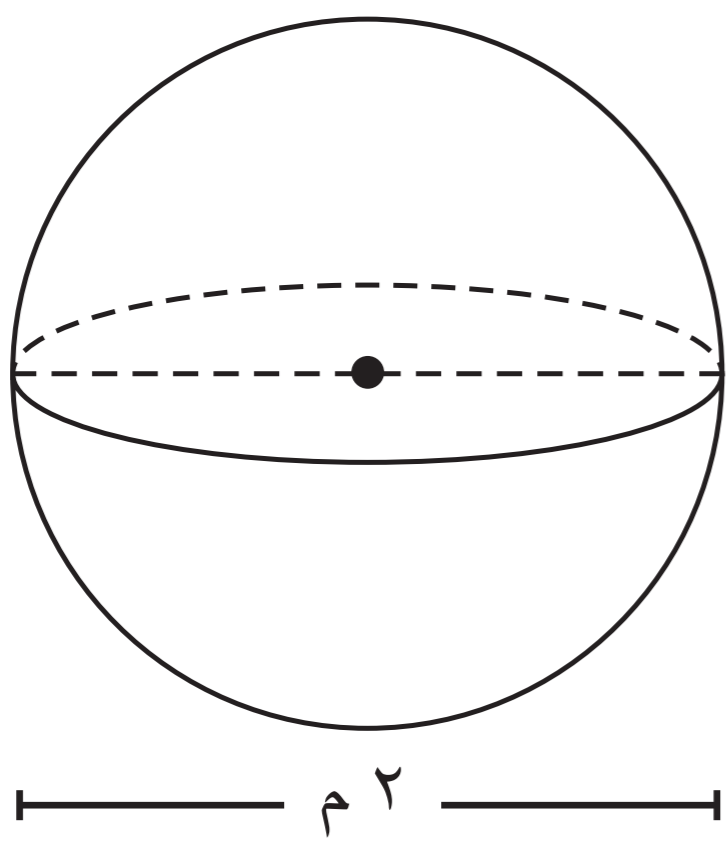
## مثال (٢) :

أوجد حجم الكرة المرسومة . ( اعتبر  $\pi = \frac{22}{7}$  )

الحلّ :

نق = ١ م

$$\begin{aligned} \text{حجم الكرة} &= \frac{4}{3} \pi \times 1^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi \times (1)^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi \times 1 \times 1 \times 1 \\ &= \frac{4}{3} \pi \\ &= \frac{44}{21} \\ &= \frac{4}{21} \text{ م}^3 \end{aligned}$$



صفوة معلمي الكويت

مثال (٣):

وعاء على شكل نصف كرة طول قطرها ١٢ م .  
أوجد حجم الوعاء بدلالة  $\pi$  .

الحل:

$$\text{نق} = 12 \times \frac{1}{2} = 6 \text{ م}$$

$$\text{حجم الوعاء} = \text{حجم نصف الكرة} = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{12}{2}\right)^3$$

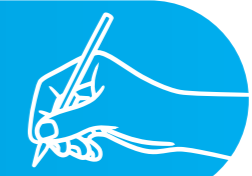
$$= \frac{1}{2} \times \pi \times 6^3$$

$$= \frac{1}{2} \times \pi \times 6 \times 6 \times 6$$

$$= \pi \times 6 \times 6 \times 6$$

$$= 144\pi \text{ م}^3$$

دورك الآن (٢)



أوجد ثلاثة أرباع حجم كرة فولاذية طول قطرها ٢٠ سم . (اعتبر  $\pi = 3,14$ )

نق = ١٠ سم

$$\text{حجم ثلاثة أرباع الكرة} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{20}{2}\right)^3 \times \pi$$

$$= \frac{3}{4} \times (10)^3 \times 3,14$$

$$= \frac{3}{4} \times 10 \times 10 \times 10 \times 3,14$$

$$= 2355 \text{ سم}^3$$

مثال (٤):

لدى مريم مصباح مزخرف كروي الشكل حجمه  $\frac{256}{3}\pi$  سم<sup>٣</sup> ، أوجد طول قطر المصباح .

الحل:

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^3$$

$$\frac{256}{3}\pi = \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^3$$

$$\frac{256}{3} = \frac{4}{3} \times \left(\frac{d}{2}\right)^3$$

$$64 = \left(\frac{d}{2}\right)^3$$

$$\therefore \text{نق} = \sqrt[3]{64} = 4 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{طول قطر المصباح} = 4 \times 2 = 8 \text{ سم}$$

تذكر



$$2 = \sqrt[3]{8}$$

$$3 = \sqrt[3]{27}$$

$$4 = \sqrt[3]{64}$$



كرة حجمها  $\frac{2}{3}\pi$  م<sup>٣</sup>. أوجد طول نصف قطرها.

$$\begin{aligned} \text{حجم الكرة} &= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi \\ \frac{4}{3}\pi r^3 &= \frac{2}{3}\pi \\ r^3 &= \frac{2}{4} \\ r^3 &= \frac{1}{2} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

عبر عن فهمك

يقول محمد إن حجم الكرة يساوي  $\frac{2}{3}$  حجم أي أسطوانة. في رأيك، هل محمد على صواب؟ وضّح إجابتك.

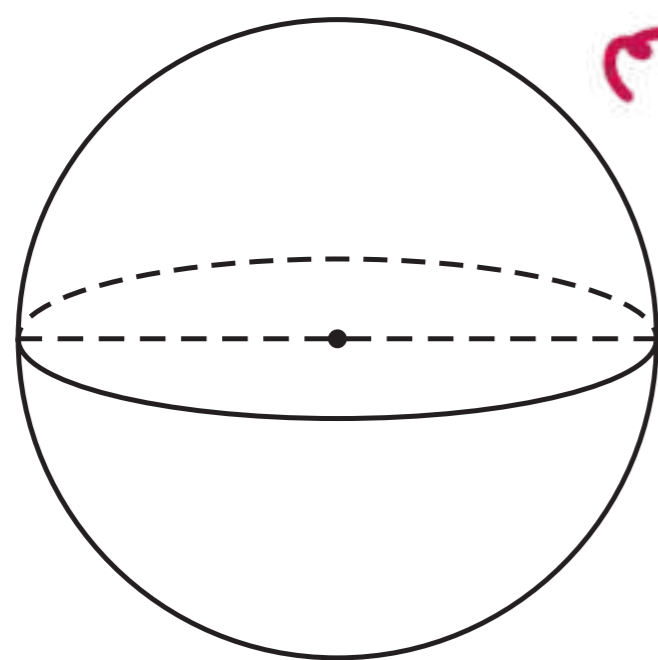
نعم  
لأنه الكرة تستغل نصف حجم الأسطوانة

تمارين ذاتية:

١ أوجد حجم كرة طول نصف قطرها ٩ سم. (بدلالة  $\pi$ )

$$\begin{aligned} \text{حجم الكرة} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi (9)^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi 9 \times 9 \times 9 \\ &= 108\pi \text{ سم}^3 \end{aligned}$$

٢ من خلال الشكل المقابل، أوجد حجم الكرة المرسومة. (بدلالة  $\pi$ )



٤ سم

$$\begin{aligned} \text{حجم الكرة} &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi (2)^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi 8 \\ &= \frac{32}{3}\pi \end{aligned}$$

٣ قبة مسجد على شكل نصف كرة، إذا كان طول قطر القبة ١٢ م،

فاحسب حجم قبة المسجد. (إعتبر  $\pi = \frac{22}{7}$ )

$$\begin{aligned} \text{حجم نصف كرة} &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi (6)^3 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi 6 \times 6 \times 6 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi 216 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi 216 \\ &= \frac{1}{2} \times 2816 \\ &= 1408 \text{ م}^3 \end{aligned}$$

٤ إذا كان حجم كرة  $36\pi$  سم<sup>٣</sup> ، فاحسب طول قطرها .

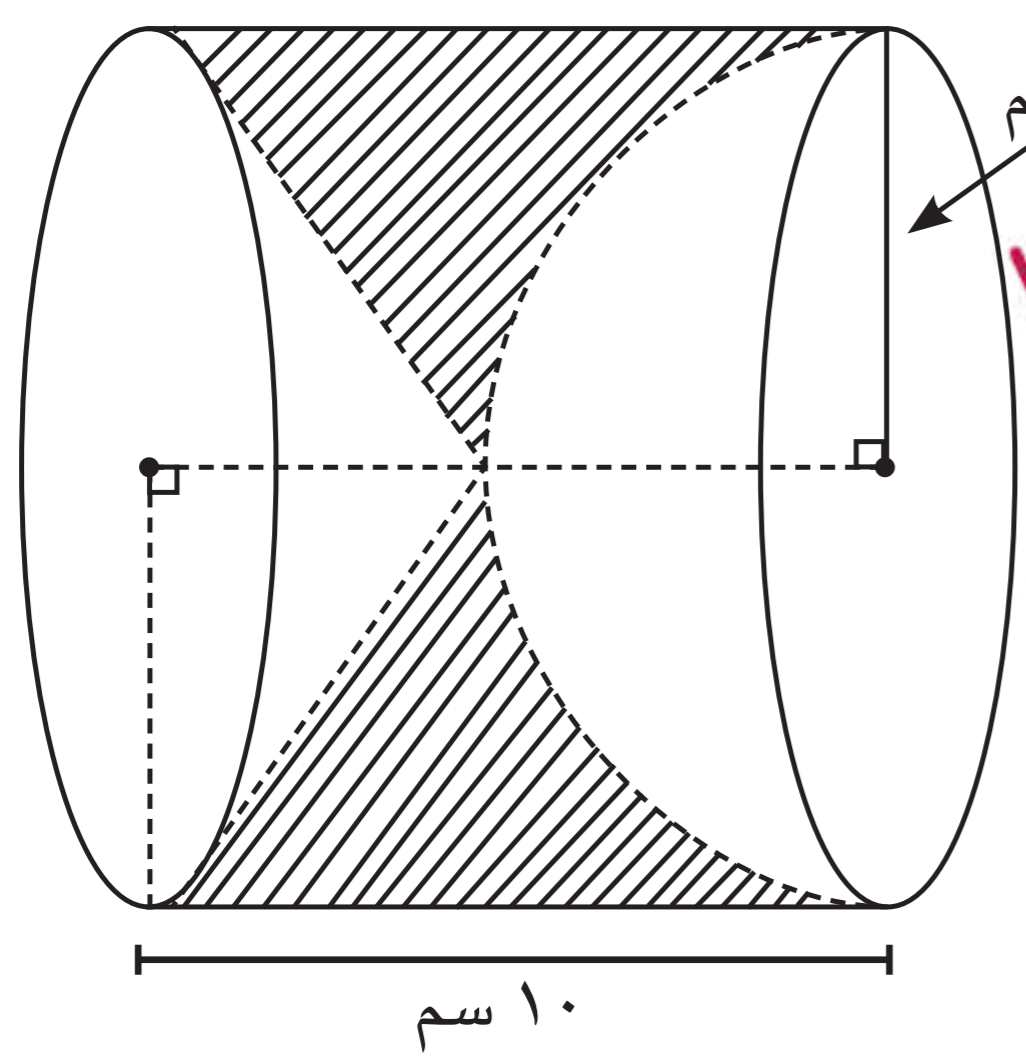
حجم الكرة =  $\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi$   
 $\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi$   
 $\frac{4}{3}r^3 = 36$   
 $r^3 = 36 \times \frac{3}{4} = 27$   
 $r = \sqrt[3]{27} = 3$  سم

∴ طول القطر =  $2 \times 3 = 6$  سم

مهارات تفكير عليا :

حجم نصف كرة =  $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$   
 $\frac{2}{3}\pi r^3 = 36\pi$

اختر الإجابة الصحيحة .



٥ مجسم أسطواني في داخله تجويفان أحدهما مخروطي الشكل والثاني نصف كرة . بحسب المعطيات على الرسم ، فإن حجم الجزء المتبقي من الجسم ( بدلالة  $\pi$  )

- حجم المخروط =  $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 5^2 \times 6 = 50\pi$   
 حجم الكرة =  $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times 5^3 = \frac{500}{3}\pi$   
 حجم الأسطوانة =  $\pi r^2 h = \pi \times 5^2 \times 6 = 150\pi$   
 الحجم المتبقي =  $150\pi - 50\pi - \frac{500}{3}\pi = \frac{100}{3}\pi$
- أ  $360\pi$  سم<sup>٣</sup>      ب  $144\pi$  سم<sup>٣</sup>  
 ج  $192\pi$  سم<sup>٣</sup>      د  $168\pi$  سم<sup>٣</sup>

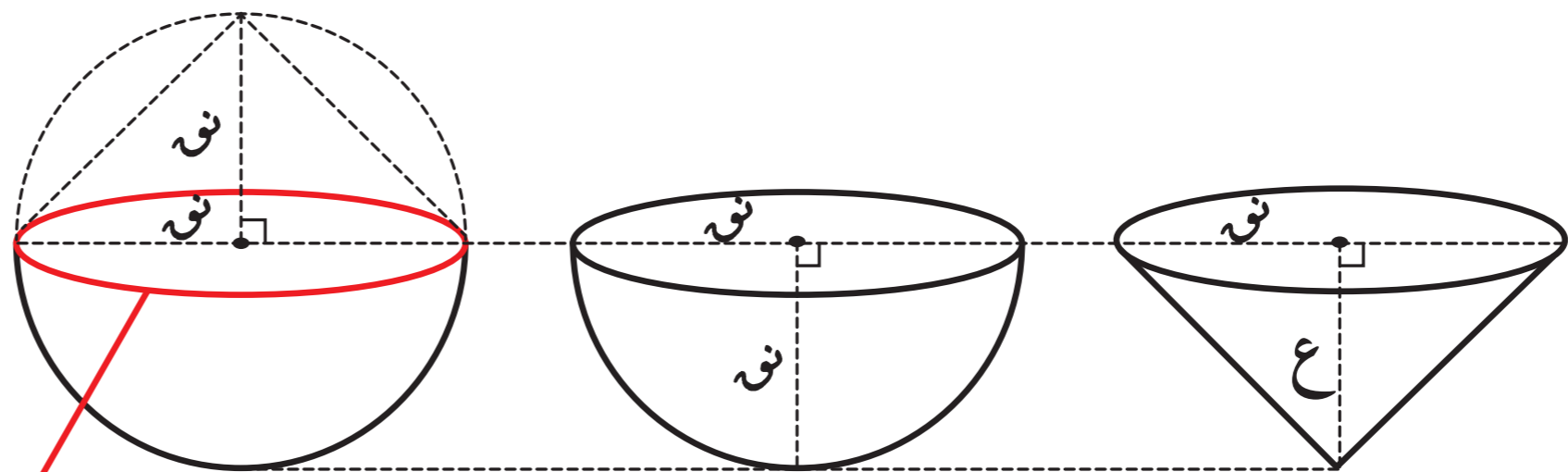
٦ لدى عمر قالبان أحدهما مخروطي الشكل والآخر كروي ، إذا كانت قاعدة المخروط هي دائرة عظمى للكرة ، وارتفاع المخروط هو نصف قطر الكرة .

فإن حجم الكرة يساوي :

- أ  $4 \times$  حجم المخروط      ب  $2 \times$  حجم المخروط  
 ج  $\frac{1}{4} \times$  حجم المخروط      د  $\frac{1}{2} \times$  حجم المخروط

تذكر

- حجم الأسطوانة الدائرية القائمة =  $\pi r^2 h$  ع
- حجم المخروط الدائري القائم =  $\frac{1}{3}\pi r^2 h$  ع



دائرة عظمى للكرة

حجم المخروط =  $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

∴  $\frac{1}{3}\pi r^2 h \times 4 = \frac{4}{3}\pi r^3$

=  $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

حجم الكرة =  $\frac{4}{3}\pi r^3$   
 صفة معلم الكيمياء =  $4 \times$  حجم المخروط

# تقويم الوحدة التعليمية الثامنة Unit Eight Assessment

## أولاً: البنود المقالية

١) قَدِّر ما يلي :

أ) ١٨٪ من ١٥٢

$$102 \times 18\% = 18.36$$

$$102 \times \frac{18}{100} = 18.36$$

ب) ٦٢٪ من ٦٢

$$62 \times 62\% = 38.44$$

$$62 \times \frac{62}{100} = 38.44$$

ج) ٥٣٪ من ٤٥٨

$$458 \times 53\% = 242.74$$

$$458 \times \frac{53}{100} = 242.74$$

د) ٣٤٪ من ٤٠٠

$$400 \times 34\% = 136$$

$$400 \times \frac{34}{100} = 136$$

٢) تقدّم إحدى شركات التغذية لزبائنها عرضاً للاشتراك الشهري بخصم نسبته ١٥٪.

كم سيدفع المشترك إذا كان السعر الأصلي للاشتراك الشهري ٢٠٠ دينار؟

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (النسبة المئوية للنقص)

$$= 200 \times (100\% - 15\%)$$

$$= 200 \times 85\%$$

$$= \frac{170}{100} \times 200 = 170 \text{ دينار}$$

٣) بلغ عدد زوّار المركز العلمي (قاعة الأحياء البحرية) يوم الأربعاء ٨٠ زائرًا، وفي يوم الجمعة زاد عدد

الزوّار إلى ٢٤٠ زائرًا. أوجد النسبة المئوية للتزايد في عدد الزوّار يوم الجمعة.

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (النسبة المئوية للتزايد)

$$240 = 80 \times (100\% + x\%)$$

$$\frac{240}{80} = 1 + x\%$$

$$3 = 1 + x\%$$

$$2 = x\% \quad \text{النسبة المئوية للتزايد} = 100 \times 2 = 200\%$$

٤) رفع أحد معارض السيارات أسعاره بنسبة ٢٠٪، ثمّ منح هذا المعرض موظّفيه خصمًا يبلغ ١٠٪. فكم

سيدفع أحد الموظّفين في هذا المعرض ثمنًا لشراء سيارة كان سعرها الأصلي ٨٠٠٠ دينار قبل الزيادة؟

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (النسبة المئوية للتزايد) : القيمة الأصلية × (النسبة المئوية للنقص)

$$= 8000 \times (100\% - 10\%)$$

$$= 8000 \times 90\%$$

$$= \frac{9}{10} \times 8000 = 7200 \text{ دينار}$$

$$= 8000 \times (100\% + 20\%)$$

$$= 10000 \times 120\%$$

$$= \frac{120}{100} \times 8000 = 9600 \text{ دينار}$$

٥ قام أحد متاجر الأجهزة الإلكترونية بعمل تخفيضات على أجهزة التلفاز قدره ٣٠٪ من ثمنها الأصلي. إذا كان ثمن جهاز تلفاز بمواصفات معيّنة بعد التخفيض ٢٨٠ دينارًا، فما هو ثمنه قبل التخفيض؟

$$\begin{aligned} \text{القيمة النهائية} &= \text{القيمة الأصلية} \times (100\% - \text{النسبة المئوية للتناقص}) \\ 280 &= \text{القيمة الأصلية} \times (100\% - 30\%) \\ 280 &= \text{القيمة الأصلية} \times 70\% \\ \text{القيمة الأصلية} &= \frac{280}{70\%} \\ \text{القيمة الأصلية} &= 280 \times \frac{100}{70} \\ \text{القيمة الأصلية} &= 400 \text{ دينار} \end{aligned}$$

٦ قامت مالكة مشروع، يُصنّف من المشاريع الصغيرة، بتخفيض سعر سلعة لديها إلى ٣٠٠ دينار بنسبة خصم ٤٠٪. أوجد ما يلي:

أ) القيمة الأصلية للسلعة.

$$\begin{aligned} \text{القيمة النهائية} &= \text{القيمة الأصلية} \times (100\% - \text{النسبة المئوية للتناقص}) \\ 300 &= \text{القيمة الأصلية} \times (100\% - 40\%) \\ 300 &= \text{القيمة الأصلية} \times 60\% \\ \text{القيمة الأصلية} &= \frac{300}{60\%} \\ \text{القيمة الأصلية} &= 300 \times \frac{100}{60} \\ \text{القيمة الأصلية} &= 500 \text{ دينار} \end{aligned}$$

ب) ما النسبة المئوية للتزايد التي تُعيد سعر السلعة إلى سعرها الأصلي؟

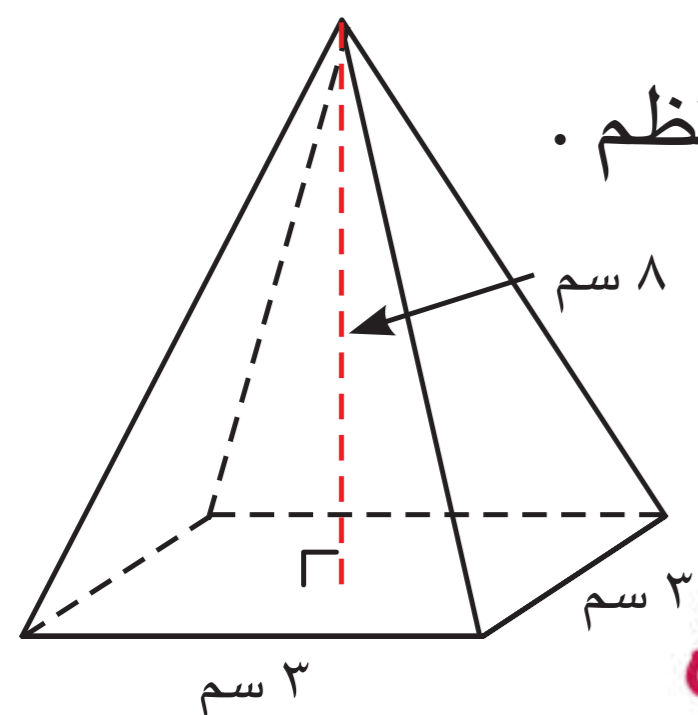
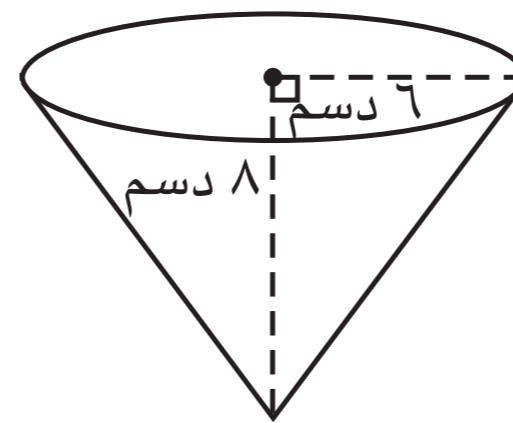
$$\begin{aligned} \text{القيمة النهائية} &= \text{القيمة الأصلية} \times (100\% + \text{النسبة المئوية للتزايد}) \\ 500 &= 300 \times (100\% + x\%) \\ \frac{500}{300} &= 1 + x \\ \frac{5}{3} &= 1 + x \\ \frac{5}{3} - 1 &= x \\ \frac{2}{3} &= x \\ \text{النسبة المئوية للتزايد} &= \frac{2}{3} \times 100 = 66,66\% \end{aligned}$$

٧ أوجد كلاً ممّا يلي (بدلالة  $\pi$ ):

أ) المساحة السطحية للمخروط

الدائري القائم.

$$\begin{aligned} \text{ح.} &= (\pi r^2) + (\pi r l) \\ &= 36\pi + 16\pi \\ &= 52\pi \end{aligned}$$



ب) حجم الهرم القائم المنتظم.

$$\begin{aligned} \text{حجم الهرم القائم المنتظم} &= \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع} \\ &= \frac{1}{3} \times (3 \times 3) \times 8 \\ &= \frac{1}{3} \times 9 \times 8 \\ &= 24 \text{ سم}^3 \end{aligned}$$

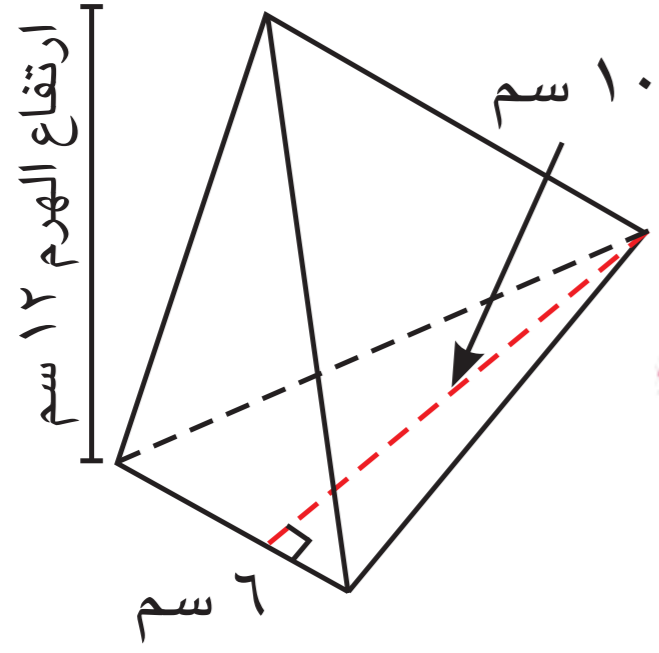
المساحة السطحية =  $\pi r^2 + (\pi r l)$

$$= \pi (6^2) + (\pi \cdot 6 \cdot 8)$$

$$= 36\pi + 48\pi$$

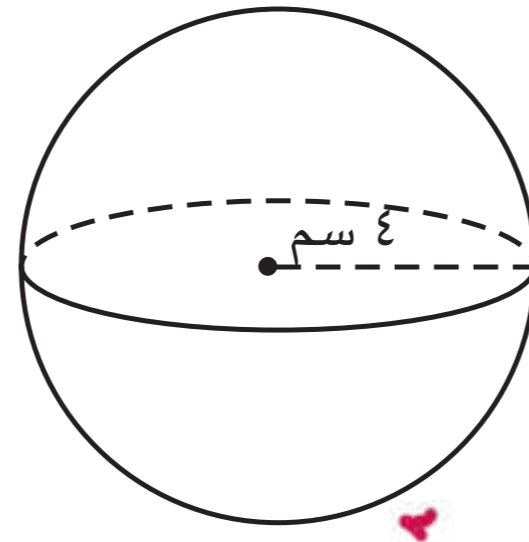
$$= 84\pi$$





د) حجم الهرم القائم .

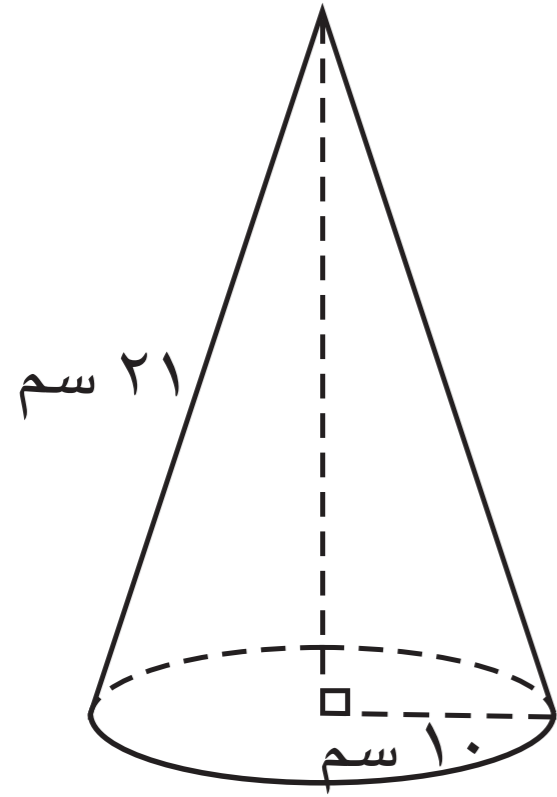
$$\begin{aligned} \text{حجم الهرم القائم} &= \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 12 \\ &= \frac{1}{3} \times 432 \\ &= 144 \text{ سم}^3 \end{aligned}$$



ج) حجم الكرة .

$$\begin{aligned} \text{حجم الكرة} &= \frac{4}{3} \pi r^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi (4)^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi \times 64 \\ &= \frac{256}{3} \pi \text{ سم}^3 \end{aligned}$$

٨) أراد عثمان صنع قمع على شكل مخروط دائري قائم طول نصف قطره ١٠ سم ، وطول الرأس ٢١ سم ، أحسب المساحة الجانبية للقمع . ( اعتبر  $\pi = \frac{22}{7}$  )



$$\begin{aligned} \text{المساحة الجانبية} &= \pi r l \\ &= \frac{22}{7} \times 10 \times \frac{29}{2} \\ &= 770 \text{ سم}^2 \end{aligned}$$

٩) ملأ راشد كرة شاطئية ملونة بالماء ، إذا كان طول نصف قطر الكرة ١٢ سم . أوجد حجم الكرة ( بدلالة  $\pi$  ) .



أوجد حجم الكرة ( بدلالة  $\pi$  ) .

$$\begin{aligned} \text{حجم الكرة} &= \frac{4}{3} \pi r^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi (12)^3 \end{aligned}$$

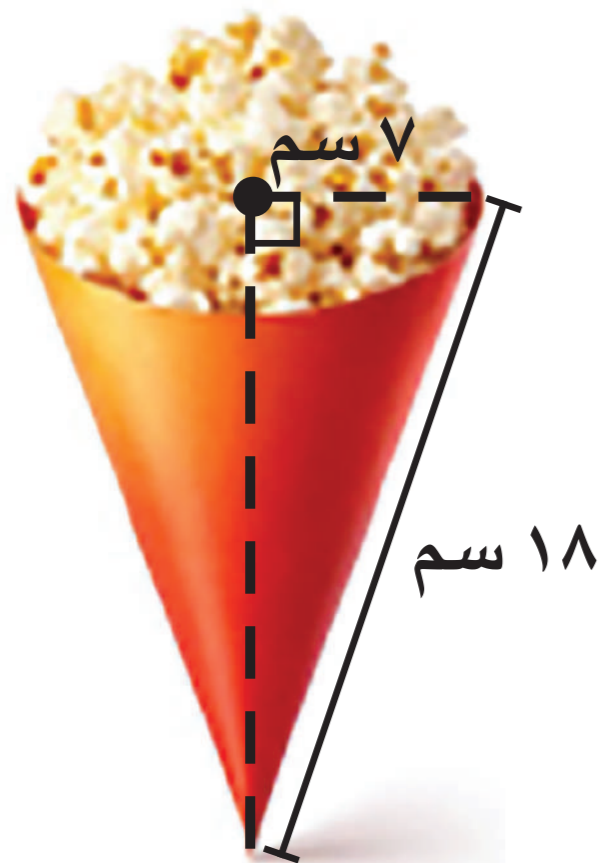
$$= \frac{4}{3} \pi \times 1728 = 2304 \pi \text{ سم}^3$$

١٠) في بداية عصر التقدم الفضائي ، صُنعت كبسولة كروية الشكل حجمها  $972000 \pi \text{ م}^3$  . أوجد طول نصف قطر الكبسولة .

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \pi r^3 &= 972000 \pi \\ r^3 &= \frac{972000 \times 3}{4} \\ r^3 &= 729000 \\ r &= \sqrt[3]{729000} \\ r &= 90 \text{ م} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \pi r^3 &= 972000 \pi \\ r^3 &= \frac{972000 \times 3}{4} \\ r^3 &= 729000 \\ r &= 90 \text{ م} \end{aligned}$$

١١) أرادت ياسمين القيام بتوزيعات لزميلاتها . اختارت شكل المخروط الموضح في الشكل المقابل لتعبئته بالفشار . أحسب المساحة الجانبية للمخروط . ( اعتبر  $\pi = \frac{22}{7}$  )

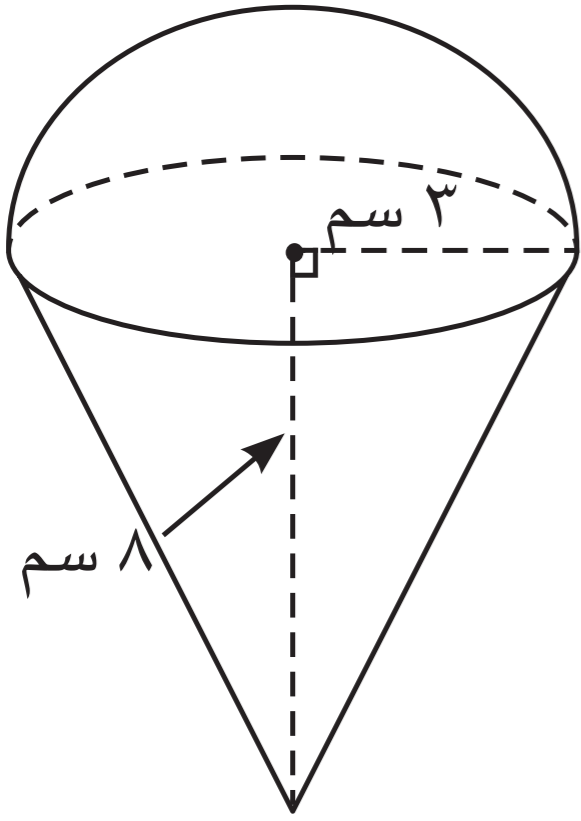


$$\text{المساحة الجانبية للمخروط} = \pi r l$$

$$\begin{aligned} &= \frac{22}{7} \times 7 \times \frac{19}{2} \\ &= 299 \text{ سم}^2 \end{aligned}$$



١٢ اشترى نايف مثلجات لأصدقائه وكان أحد هذه المثلجات على شكل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٣ سم وارتفاعه ٨ سم ، يعلوه نصف كرة ( كما في الشكل ) .



أحسب حجم الجسم ( بدلالة  $\pi$  ) .

حجم المثلج =  $\frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 8 = 24\pi$

حجم نصف كرة =  $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = 36\pi$

حجم الجسم =  $24\pi + 36\pi = 60\pi$

ثانياً: البنود الموضوعية

في البنود (١-٦) ، ظلّل  أ إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل  ب إذا كانت العبارة غير صحيحة .

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> أ	١ جهاز سعره الأصلي ٢٥٠ ديناراً وقد أصبح ثمنه خلال فترة الخصومات ١٥٠ ديناراً ، فإن النسبة المئوية للخصم هي ٢٥٪ .
<input type="checkbox"/> ب	<input type="checkbox"/>	٢ قلادة ذهبية سعرها ١٠٠٠ دينار بيعت بسعر ١٢٠٠ دينار ، فإن النسبة المئوية للتزايد ٢٠٪ . $1200 = \frac{120}{100} \times 1000$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> أ	٣ إذا انخفض سعر سلعة بنسبة ١٠٪ ثم ارتفع بنسبة ١٠٪ ، فإن سعر السلعة سيعود إلى سعرها الأصلي .
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> أ	٤ حجم الكرة يساوي $\frac{3}{8}\pi$ سم <sup>٣</sup> . $\leftarrow \frac{4}{3}\pi$ سم <sup>٣</sup> نصف
<input type="checkbox"/> ب	<input type="checkbox"/>	٥ حجم الهرم القائم يساوي ثلث حاصل ضرب مساحة القاعدة في الارتفاع .
<input type="checkbox"/> ب	<input type="checkbox"/>	٦ هرم قائم قاعدته مربعة طول ضلعها ٤ سم وارتفاعه ٦ سم ، فإن حجمه يساوي ٣٢ سم <sup>٣</sup> . الحجم = $\frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times 6 = 32$

في البنود (٧-١٤) ، لكل بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الإجابة الصحيحة .

٧ إذا أنفق عبدالله ٣٠ ديناراً في الشهر على تعبئة بطاقات الاتصال ( شحن الرصيد ) ، ثم أنفق ٤٠٪ زيادة مما أنفقه في الشهر السابق ، فإن مقدار المال الذي أنفقه في تعبئة بطاقات الاتصال في الشهر الحالي يساوي :

- أ ٣٥ ديناراً       ب ٤٢ ديناراً       ج ١٨ ديناراً       د ٧٠ ديناراً

القيمة الحالية =  $30 \times (1 + 40\%) = 42$

$30 \times 1.4 = 42$

٤٢ دينار

معلمي الكويت

$$\frac{100}{10} \times \frac{70}{100} \times \frac{100}{100} = 70 \times \frac{100}{100} = 70$$

القيمة الأصلية = 70 دينار

٨ في أحد التنزيلات ، انخفضت الأسعار بنسبة ٣٥٪ . إذا كان سعر غسّالة بعد التنزيلات ٦٥ دينارًا ، فإن سعرها قبل التنزيلات يساوي :

- أ ١٣٥ دينارًا      ب ٩٠ دينارًا      ج ١٠٠ دينار      د ٦٥ دينارًا

٩ إذا انخفض سعر سهم ٥٠٪ عن سعره في العام الماضي ، فإن النسبة المئوية للزيادة التي تُعيده إلى سعره الأصلي هي :

- أ ١٠٠٪      ب ٥٠٪      ج ١٥٠٪      د ٢٠٠٪

١٠ كرة طول قطرها ٦ سم ، فإن ثلث حجمها بدلالة  $\pi$  يساوي :  $\frac{1}{3} \times \frac{4}{3} \pi \times 2^3 = \frac{32}{3} \pi$

- أ  $36\pi$  سم<sup>٣</sup>      ب  $12\pi$  سم<sup>٣</sup>      ج  $27\pi$  سم<sup>٣</sup>      د  $9\pi$  سم<sup>٣</sup>

١١ هرم قائم قاعدته مربعة طول ضلعها ٦ سم وارتفاعه ٩ سم ، فإن حجمه يساوي :  $\frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 9 = 108$

- أ ١٠٨ سم<sup>٣</sup>      ب ٣٢٤ سم<sup>٣</sup>      ج ٥٤ سم<sup>٣</sup>      د ٣٦٩ سم<sup>٣</sup>

١٢ إذا كان طول نصف قطر قاعدة مخروط دائري قائم ٥ سم وراسمه ١٣ سم ، فمساحته الجانبية بدلالة  $\pi$  تساوي :

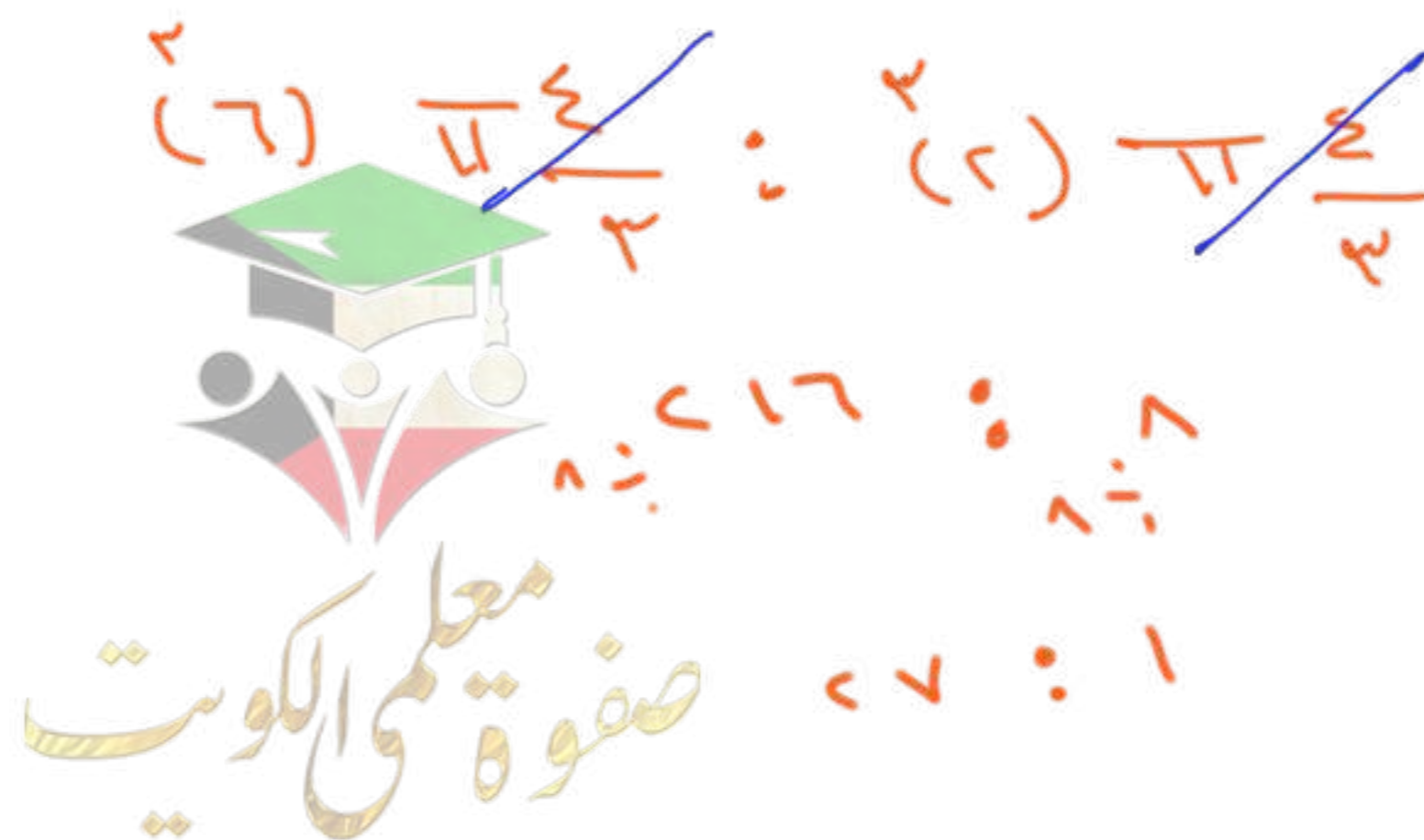
- أ  $18\pi$  سم<sup>٢</sup>      ب  $60\pi$  سم<sup>٢</sup>      ج  $30\pi$  سم<sup>٢</sup>      د  $13\pi$  سم<sup>٢</sup>

١٣ إذا كان حجم كرة  $288\pi$  سم<sup>٣</sup> ، فإن طول نصف قطرها يساوي :  $\frac{4}{3} \pi r^3 = 288\pi$

- أ ٣ سم      ب ٤ سم      ج ٦ سم      د ٨ سم

١٤ النسبة بين حجمي كرتين طول نصف قطرهما ٢ سم ، ٦ سم على الترتيب تساوي :

- أ ٢:١      ب ٣:١      ج ٩:١      د ٢٧:١



# المشروع الرابع : الرياضيات والحياة

يمكننا استخدام النسب المئوية التزايدية والتناقصية في حياتنا اليومية .



## خطة العمل :

قُم باختيار خمسة منتجات ، وحدد سعرها الأصلي وسعرها في فترة التنزيلات .

## خطوات تنفيذ المشروع :

- ◀ قُم باختيار خمسة منتجات وحدد سعرها الأصلي .
- ◀ أحسب سعر المنتجات بعد خصم ٢٠% من السعر الأصلي .
- ◀ قُم بصنع جدول لعرض المنتجات ، موضحاً سعرها الأصلي والسعر بعد التخفيض .

## علاقات وتواصل :

يمكن للمجموعات تبادل المشروع للتأكد من صحة ودقة تطبيق المشروع .

## عرض العمل :

تعرض كل مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذ العمل وتتأكد من صحة البيانات .



## المراجع

- الرياضيات ، الصف التاسع ، الطبعة الأولى ٢٠٢٤ - ٢٠٢٥ م ، وزارة التربية ، قطاع البحوث التربوية والمناهج .
- الرياضيات ، الصف التاسع ، الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ - ٢٠٢٤ م ، وزارة التربية ، قطاع البحوث التربوية والمناهج .

## مصادر بعض الصور

- صفحة ٢١٨ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ٢٢٢ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ٢٢٦ : الصور مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ٢٣٤ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ٢٣٩ : الصورة مزوّدة من لجنة الرياضيات .





# 9



قيّم مناهجنا



الكتاب كاملاً

صفوة معلمى الكويت