رياضيات

الصف العاشر

الدائرة

الفصل الدراسي الثاني

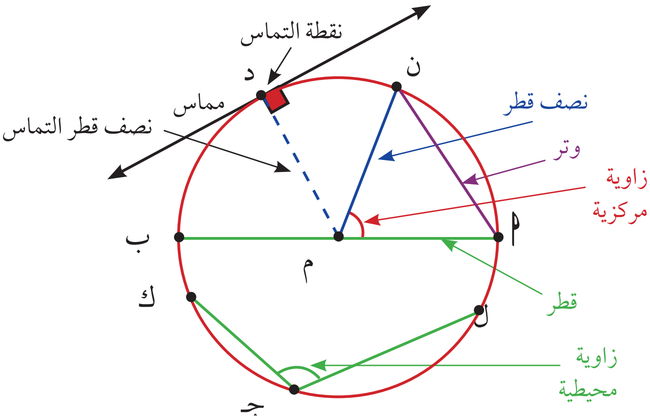
2025 - 2026

أ : سلامة علي الركاض

تعريف الدائرة

الدائرة هي مجموعة نقاط المستوى التي تبعد كل منها عن نقطة ثابتة م في المستوى بعدًا ثابتًا.

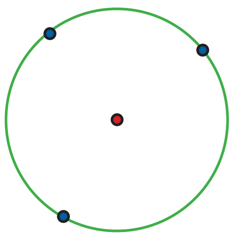
تسمى النقطة الثابتة **مركز الدائرة** ويسمى البعد الثابت طول نصف القطر ويرمز إليه عادة بالرمز **نق**.



نظرية 1

نظرية (١)

كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.



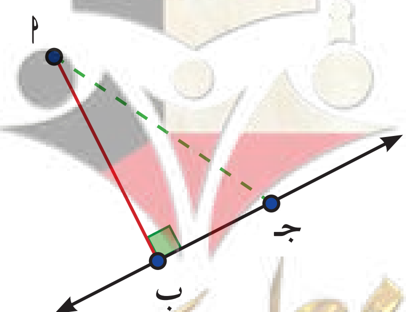
استنتاج

استنتاج ١ : من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بهذه النقطة وعمودي على المستقيم المعلوم.

لاحظ أنه في Δأب جـ، أب < أجـ مهما كان موضع النقطة جـ على المستقيم (جـ لا تنطبق على ب).

استنتاج ٢ : أقصر بعد بين نقطة ومستقيم هو البعد العمودي.

كلما ابتعدت جـ عن ب على المستقيم أصبح طول $\overline{\text{أجـ}}$ أكبر.



المماس

المماس للدائرة هو مستقيم في المستوي يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة.

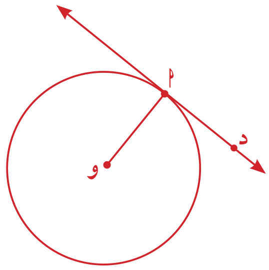
نقطة التقاطع تسمى نقطة التماس.

$\overleftrightarrow{\text{مد}}$ مماس.

$\overrightarrow{\text{مد}}$ شعاع مماس.

$\overline{\text{مد}}$ قطعة مماسية

$\overline{\text{مو}}$ نصف قطر التماس

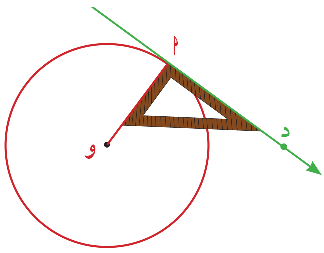


نظرية 2

المماس عمودي على نصف قطر التماس.

إذا كان مستقيم مماسًّا لدائرة، فإنه يكون متعامدًا مع نصف القطر المار بنقطة التماس.

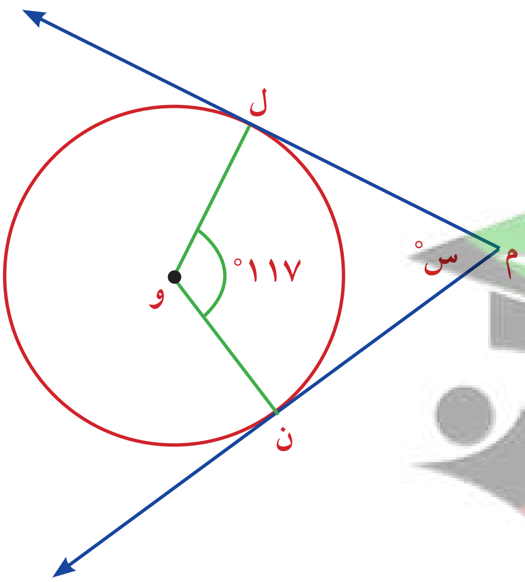
أي أن $\overline{\text{وم}} \perp \overleftrightarrow{\text{دم}}$.



مثال 2

في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{مل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{من}}$ مماسان للدائرة التي مركزها و.

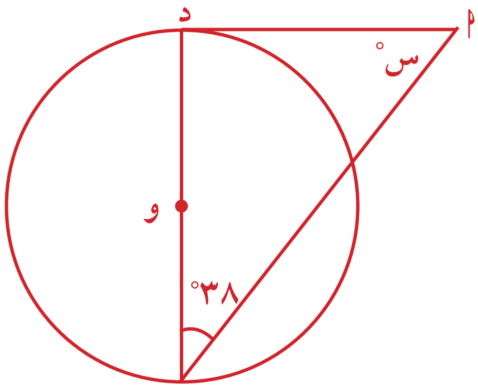
أوجد قياس الزاوية ل$\hat{\text{م}}$ن.



حاول أن تحل 2

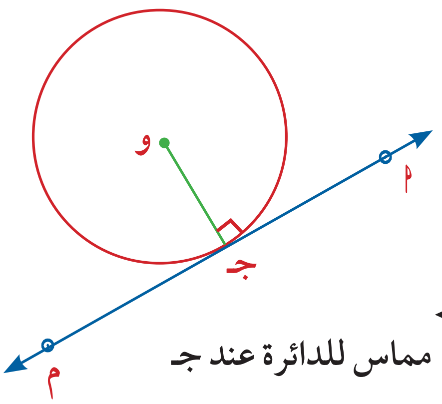
في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ مماس للدائرة التي مركزها و.

أوجد قيمة س°.



نظرية 3

المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماسًا لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

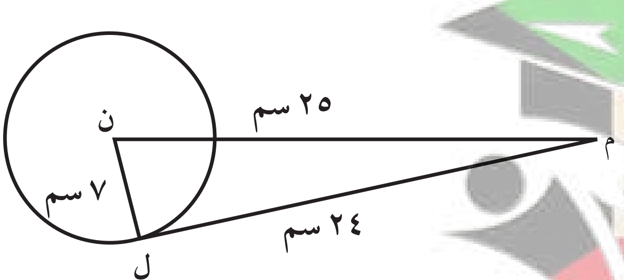


$\overleftrightarrow{\text{أم}}$ مماس للدائرة عند جـ

مثال 4

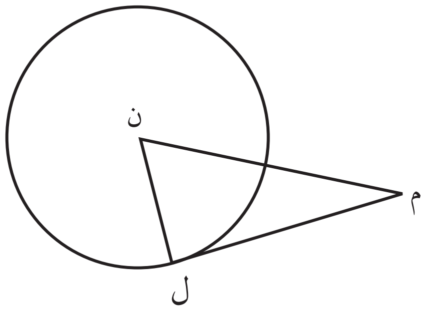
في الشكل المقابل، ن ل = ٧ سم ، ل م = ٢٤ سم ، ن م = ٢٥ سم.

أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة التي مركزها ن.



حاول أن تحل 4

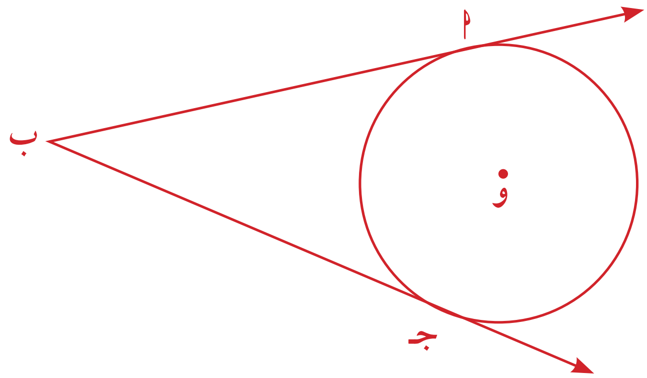
في الشكل المقابل، إذا كان ن ل = ٤ ، ل م = ٧ ، ن م = ٨،
فهل $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة؟ فسِّر إجابتك.



نظرية 4

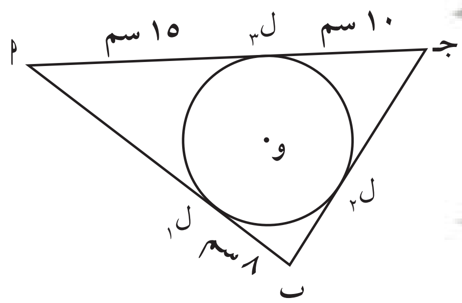
القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

$\overline{\text{أب}} \cong \overline{\text{جـ ب}}$

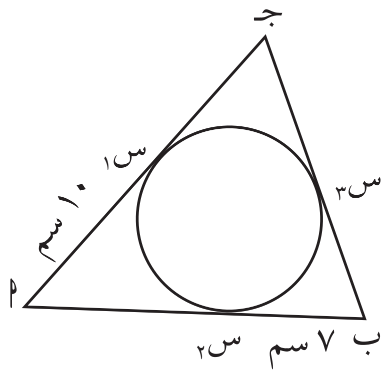


مثال 6

في الشكل المقابل، أوجد محيط المثلث أ ب جـ.



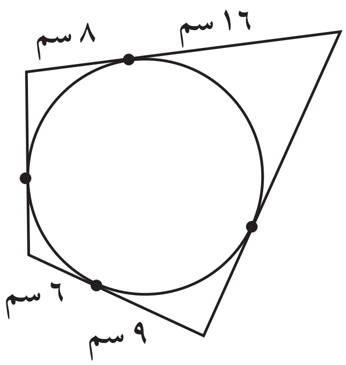
حاول أن تحل 6



في الشكل المقابل إذا كان محيط المثلث أ ب جـ = ٥٠ سم،

فأوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$.

كراسة التمارين



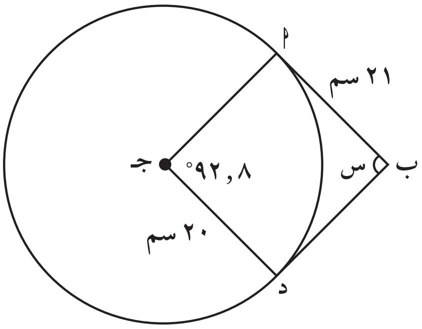
في التمرين (٧)، يحيط المضلّع بدائرة. أوجد محيط المضلع.

(٥) $\overleftrightarrow{\text{بأ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{بد}}$ مماسان للدائرة.

(أ) أوجد قيمة س.

(ب) أوجد محيط الشكل الرباعي ب أ جـ د.

(جـ) أوجد ب جـ.



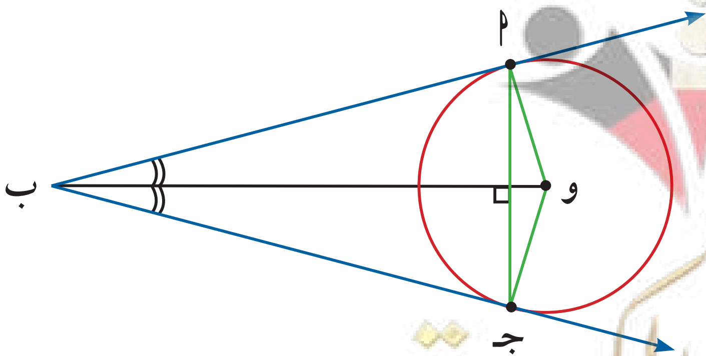
نتائج النظرية

Δ ب أ جـ متطابق الضلعين من النظرية السابقة.

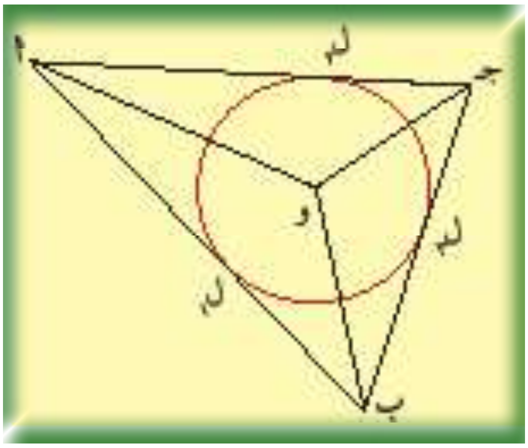
١ $\overleftarrow{\text{بو}}$ منصف الزاوية أ $\hat{\text{ب}}$ جـ

٢ $\overleftarrow{\text{وب}}$ منصف الزاوية أ $\hat{\text{و}}$ جـ

٣ $\overline{\text{وب}} \perp \overline{\text{أجـ}}$



(الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة



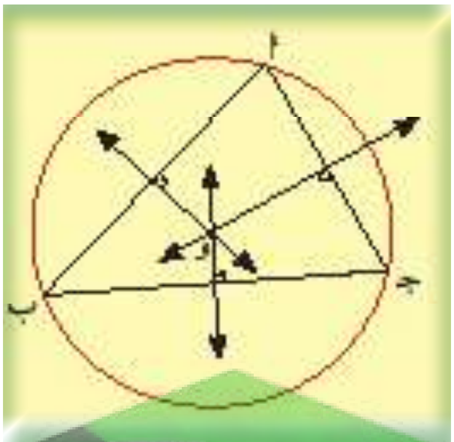
هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل.

مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث

الدائرة المحيطة لمثلث (الخارجة)

هي دائرة تمر برؤوس المثلث الثلاثة.

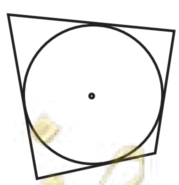
مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث (نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع المثلث).



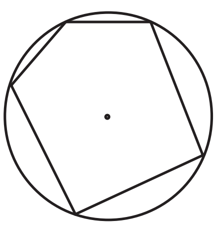
كراسة التمارين

في التمرينين (٥–٦)، حدّد ما إذا كانت الدائرة محاطة بمضلع (داخلة) أو محيطة بمضلع (خارجة).

(٥)

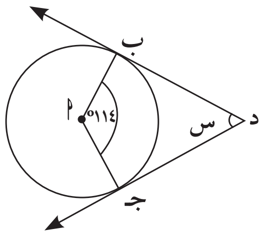


(٦)



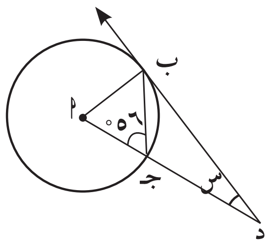
كراسة التمارين

في التمارين (٨–١١)، اختر الإجابة الصحيحة:



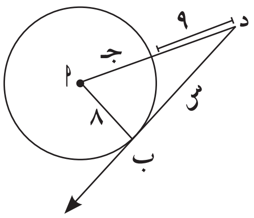
(٨) إذا كان $\overleftarrow{\text{دب}}$، $\overleftarrow{\text{دجـ}}$ مماسان للدائرة. فإن س =

(أ) ٢٦° (ب) ٥٧° (جـ) ٦٦° (د) ١١٤°



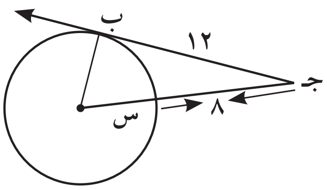
(٩) إذا كان $\overleftarrow{\text{دب}}$ مماس للدائرة. فإن س =

(أ) ٢٢° (ب) ٢٨° (جـ) ٣٤° (د) ٤٠°



(١٠) إذا كان $\overleftarrow{\text{دب}}$ مماس للدائرة. فإن س =

(أ) ٨ (ب) ٩ (جـ) ١٥ (د) ١٧



(١١) إذا كان $\overleftarrow{\text{جـب}}$ مماس للدائرة. فإن س =

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

الأوتار و الأقواس

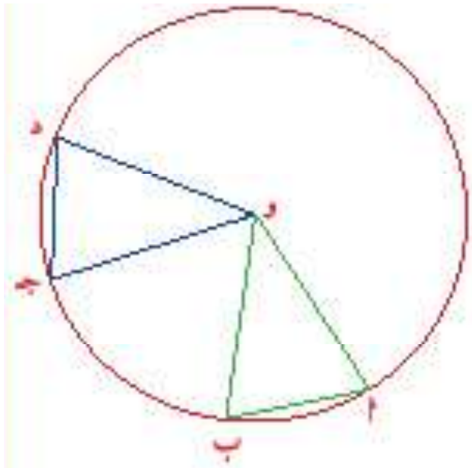
نظرية 1

في دائرة أو في دوائر متطابقة:

١ للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة.

٢ الأوتار المتطابقة تقابل أقواسًا متطابقة.

٣ للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة.



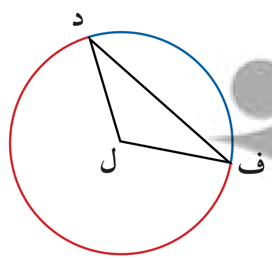
١ ق(∠أ و ب) = ق(∠جـ و د) ← $\overline{\text{أب}} \cong \overline{\text{جـد}}$.

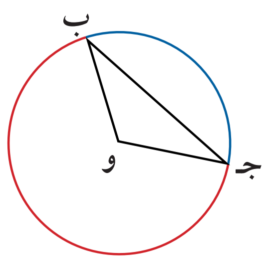
٢ $\overline{\text{أب}} \cong \overline{\text{جـد}}$ ← $\overset{\frown}{\text{أب}} \cong \overset{\frown}{\text{جـد}}$

٣ $\overset{\frown}{\text{أب}} \cong \overset{\frown}{\text{جـد}}$ ← ق(∠أ و ب) = ق(∠جـ و د)

مثال 1

في الشكل المقابل الدائرتان متطابقتان، $\overset{\frown}{\text{ب جـ}} \cong \overset{\frown}{\text{د ف}}$. ماذا تستنتج؟





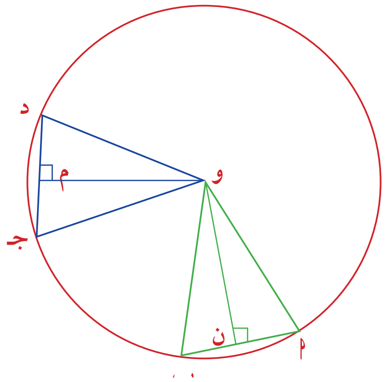
حاول أن تحل 1

في الرسم أعلاه، إذا كان $\overline{\text{ب جـ}} \cong \overline{\text{دف}}$ ، فماذا تستنتج؟

نظرية 2

١ الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.

٢ الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.



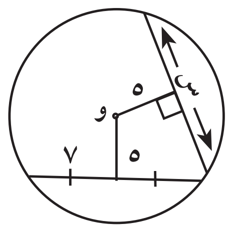
$\overline{\text{أب}} \cong \overline{\text{جـ د}}$ ← $\overline{\text{ون}} \cong \overline{\text{وم}}$.

$\overline{\text{ون}} \cong \overline{\text{وم}}$ ← $\overline{\text{أب}} \cong \overline{\text{جـ د}}$.

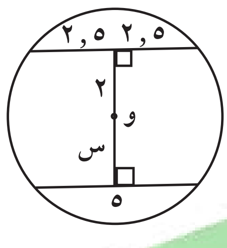
كراسة التمارين

(١) أوجد قيمة س في الأشكال التالية:

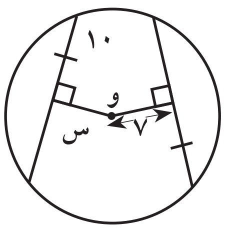
(أ)



(ب)

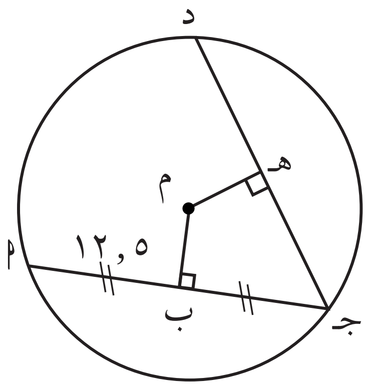


(جـ)



مثال 2

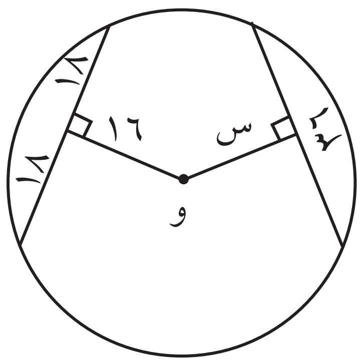
في الشكل المقابل ليكن م مركز الدائرة. م ب = م هـ ، أوجد طول $\overline{\text{جـ د}}$. فسّر.



حاول أن تحل 2

دائرة مركزها و.

أوجد قيمة س في الشكل المقابل، وفسّر إجابتك.



نظرية 3

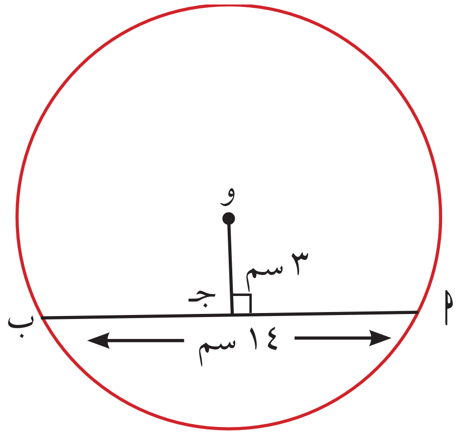
١ القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلًّا من قوسيه.

٢ القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) في دائرة يكون عموديًا على هذا الوتر.

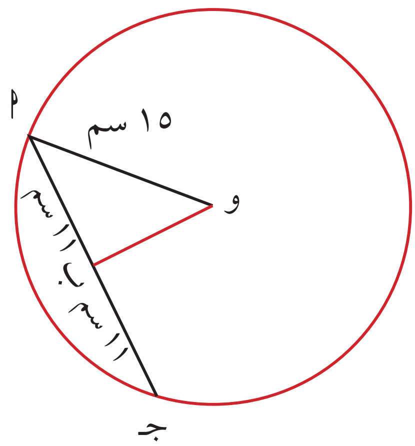
٣ العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة.

مثال 3

أ في الشكل المقابل، أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و.



ب في الشكل المقابل أوجد البعد بين مركز الدائرة والوتر.

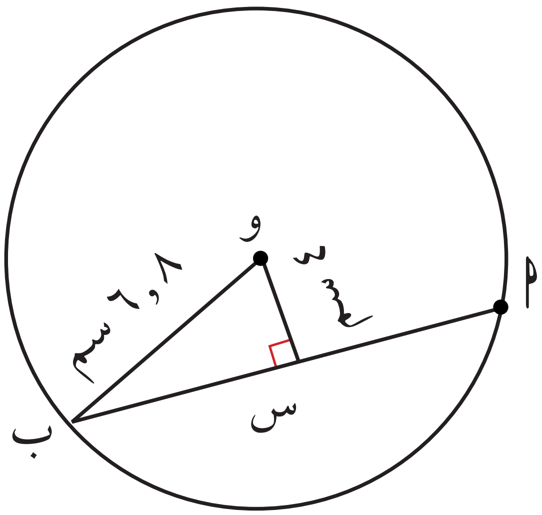


حاول أن تحل 3

استخدم الشكل المقابل لإيجاد:

أ طول الوتر $\overline{أب}$.

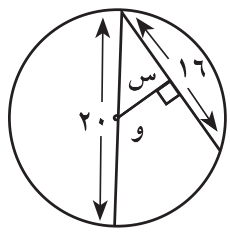
ب المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر $\overset{\frown}{أب}$.



كراسة التمارين

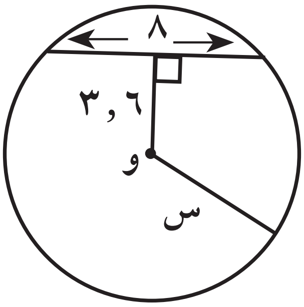
(٣) أوجد قيمة س في الأشكال التالية:

(أ)

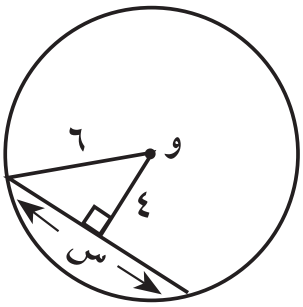


(٣) أوجد قيمة س في الأشكال التالية:

(ب)

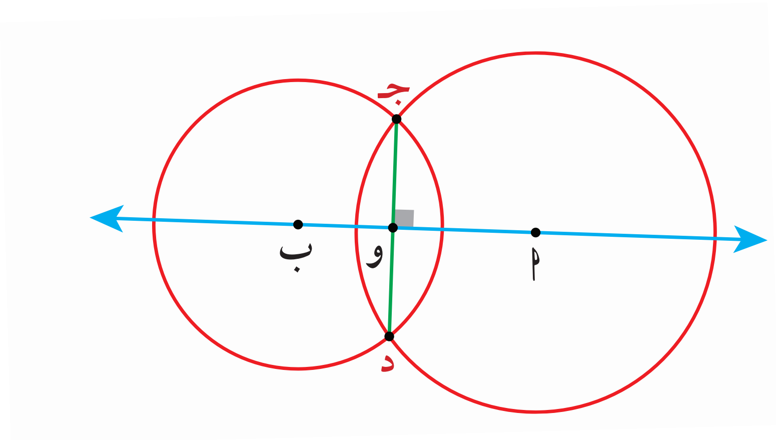


(جـ)



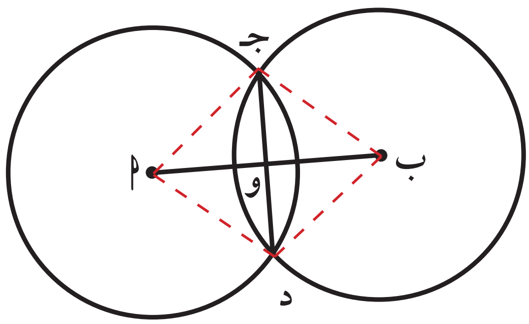
نتيجة

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًّا على الوتر المشترك بينهما وينصفه.



مثال 4

يمثل الشكل المقابل دائرتين متطابقتين. $\overline{\text{جـ د}}$ وتر مشترك. إذا كان أ ب = ٢٤ سم، نق = ١٣ سم. فما طول $\overline{\text{جـ د}}$؟



حاول أن تحل 4

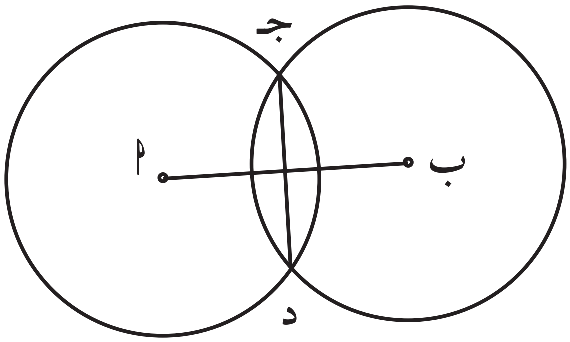
في مثال (٤)، إذا كان جـ د = ١٤ سم، نق = ١٣ سم ، فأوجد طول $\overline{\text{أ ب}}$.

كراسة التمارين

(٥) ﺃ، ب مركزا دائرتين متطابقتين. $\overline{\text{جـ د}}$ وتر مشترك للدائرتين.

(أ) إذا كان ﺃب = ٨ سم، جـ د = ٦ سم. فما طول نصف القطر؟

(ب) إذا كان ﺃب = ٢٤ سم، نصف القطر = ١٣ سم. فما طول $\overline{\text{جـ د}}$؟

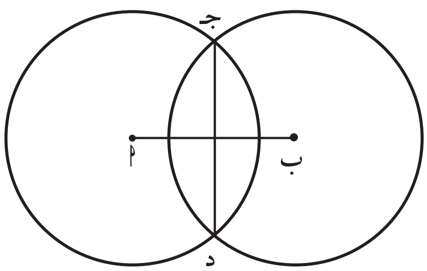


كراسة التمارين

(٨) دائرتان مركزاهما على الترتيب ﺃ، ب تتقاطعان بالنقطتين جـ ، د.

وطول نصف قطر كل دائرة ٦ سم.

أوجد طول جـ د إذا كان طول ﺃب يساوي ٨ سم.



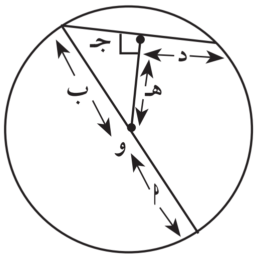
في التمرينين (٩–١٠)، اختر الإجابة الصحيحة:

(٩) إذا كان طول قطر دائرة يساوي ٢٥ سم وطول أحد أوتارها ١٦ سم فإن البعد بين مركز الدائرة والوتر هو تقريبًا:

(أ) ٩ سم　　(ب) ٩,٦ سم　　(جـ) ١٨ سم　　(د) ١٩,٢ سم

---

(١٠) في الشكل المقابل العبارة الخاطئة فيما يلي هي:



(أ) جـ = د　　(ب) م = ب

(جـ) جـ^{٢} + هـ^{٢} = ب^{٢}　　(د) هـ = د

الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

تعريف

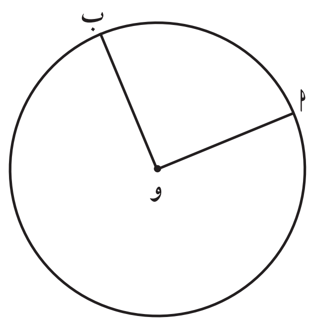
١ الزاوية التي رأسها مركز الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى **بالزاوية المركزية**.

٢ الزاوية التي رأسها إحدى نقاط الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى **بالزاوية المحيطية**.

نظرية 1

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة.

مثال 1



في الشكل المقابل دائرة مركزها و. إذا كان ق(أب⌢) = ٩٠°.
فأوجد ق(أوب).

....

....

....

حاول أن تحل 1

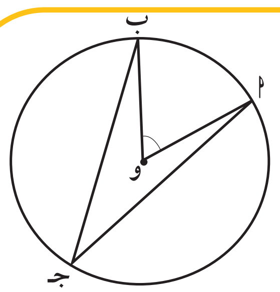
إذا كان قياس زاوية مركزية ٣٥°، فأوجد قياس القوس على الدائرة المحصور بين ضلعيها.

....

....

نظرية 2

في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

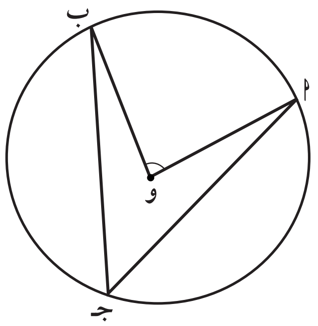


ق(أجب) = $\frac{1}{2}$ ق(أوب) = $\frac{1}{2}$ ق(أب⌢)

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه.

مثال 2

في الشكل المقابل: إذا كان ق(⌒أب) = ٨٠° فأوجد ق(أجب).



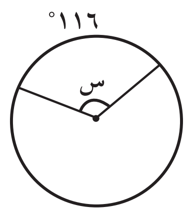
حاول أن تحل 2

إذا كان قياس زاوية محيطية في دائرة يساوي ٥٤°، فأوجد قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

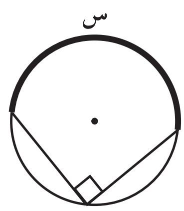
كراسة التمارين

(١) أوجد قيمة المجهول في كل من الأشكال التالية:

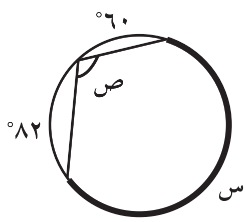
(أ)



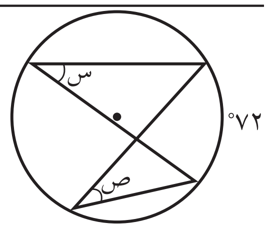
(ب)



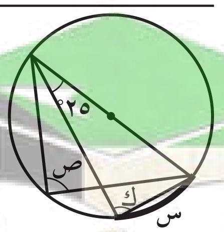
(جـ)



(د)



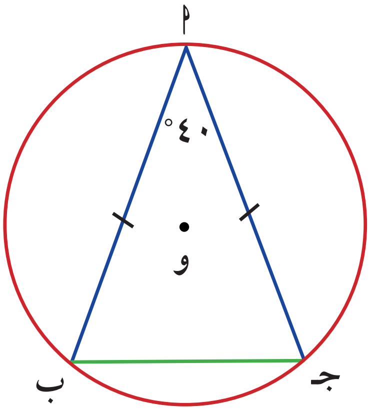
(هـ)



مثال 3

في الشكل المقابل ٲب جـ مثلث متطابق الضلعين حيث ٲ، ب، جـ نقاط على الدائرة التي مركزها و، ق(ب ٲ̂ جـ) = ٤٠°.

أوجد قياس كل من الأقواس ٲب⌒، ب جـ⌒، ٲجـ⌒ .



حاول أن تحل 3

في المثال (٣) إذا كان جـ هـ←، منصف الزاوية الداخلية ٲجـ̂ب ويقطع الدائرة في النقطة هـ.

ما قياس القوس الأصغر ٲهـ⌒؟

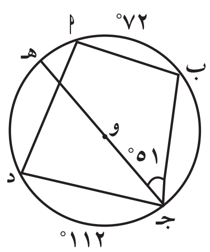
كراسة التمارين

(٤) في الشكل المقابل، أوجد قياس كل من:

(أ) القوس الأصغر ب جـ⌒.

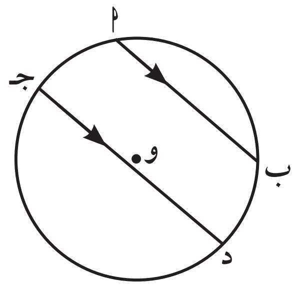
(ب) ق(بَ̂).

(جـ) ق(ب جـ̂ د).



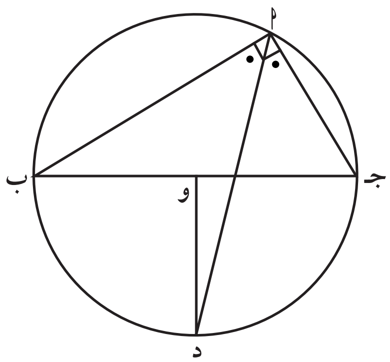
(٥) في الشكل المقابل فيه الوتر $\overline{\text{ب ج}}$.

أثبت أن: $\overset{\frown}{\text{أ ج}} \cong \overset{\frown}{\text{ب د}}$.



مثال 4

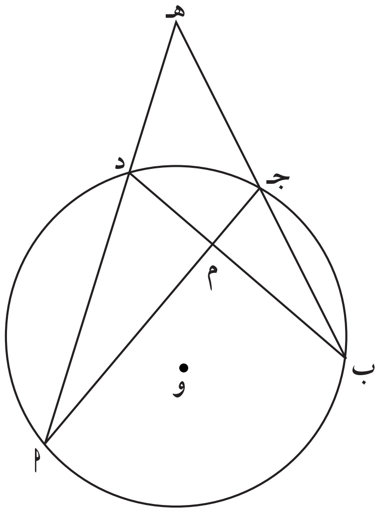
في الشكل المقابل دائرة مركزها و. أثبت أن $\overline{\text{د و}} \perp \overline{\text{ب ج}}$.



حاول أن تحل 4

في المثال (٤)، إذا كان ق(∠أ ب ج) = ٣٠°، أوجد ق(∠أ د ب).

مثال 5

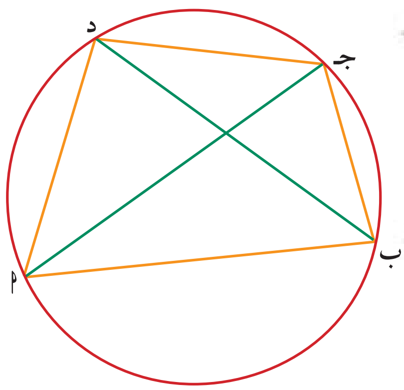


في الشكل المقابل، أثبت أن: $ق(\widehat{ب م أ}) = \dfrac{ق(\overset{\frown}{بأ}) + ق(\overset{\frown}{جـ د})}{٢}$.

حاول أن تحل 5

في المثال (٥)، أثبت أن $ق(\widehat{ب هـ أ}) = \dfrac{ق(\overset{\frown}{بأ}) - ق(\overset{\frown}{جـ د})}{٢}$

مثال 6



أ ب جـ د شكل رباعي دائري.

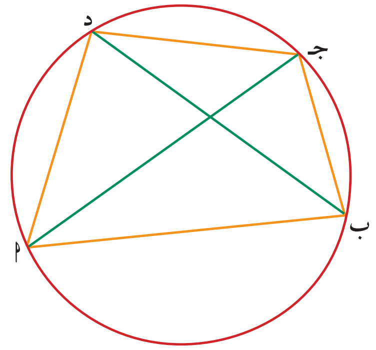
أثبت أن $ق(\widehat{أ ب د}) = ق(\widehat{أ جـ د})$.

معلومة رياضية:

الشكل الرباعي الدائري هو مضلع رباعي تقع رؤوسه على دائرة.

حاول أن تحل 6

في المثال (٦)، أثبت أن ق (أ دَ ب) = ق (أ جَـ ب)



....

....

....

....

....

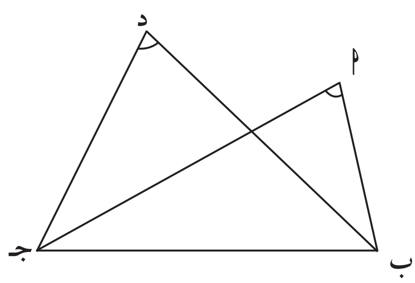
نتائج

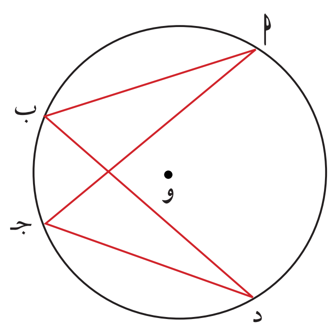
١ كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.

٢ كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.

٣ كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة)، تكون زواياه المتقابلة متكاملة.

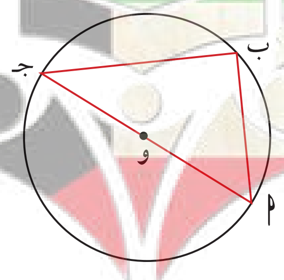
٤ في الشكل إذا تطابقت الزاويتان أ، د المرسومات على القاعدة ب جـ وفي جهة واحدة منها. كان الشكل أ ب جـ د رباعيًا دائريًا.





أب̂د ، أجـ̂د تحصران ⌒أد

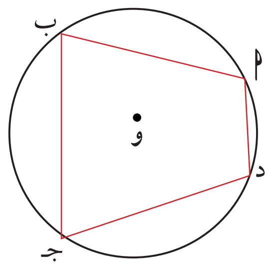
∴ ق(أب̂د) = ق(أجـ̂د)



أب̂جـ تحصر ⌒أجـ (نصف دائرة)

∴ ق(أب̂جـ) = ٩٠°

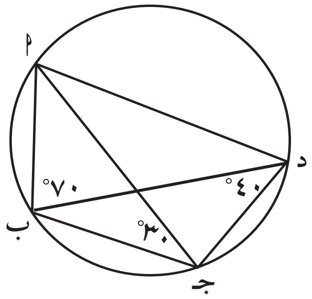
(أب̂جـ) زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة وهي زاوية قائمة



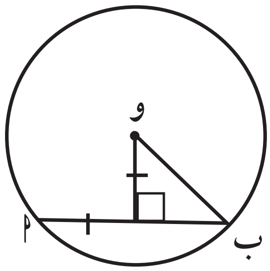
ق(أ̂) + ق(جـ̂) = ١٨٠°

ق(ب̂) + ق(د̂) = ١٨٠°

(٧) في الشكل المقابل أوجد ن(جـ بَ د).



(٨) في الشكل المقابل، أوجد قياس القوس الأصغر أب⌒.



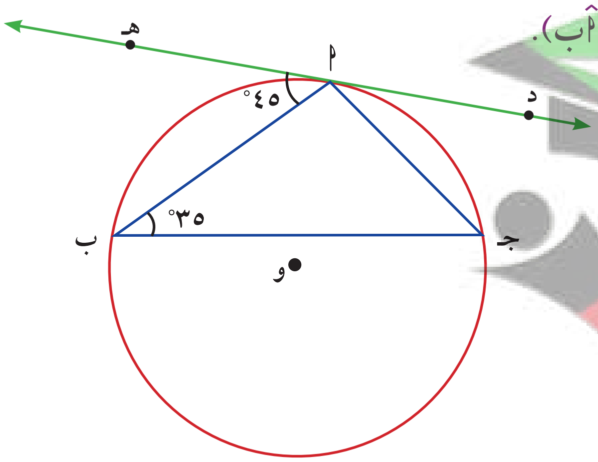
نظرية 3

(١) قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.

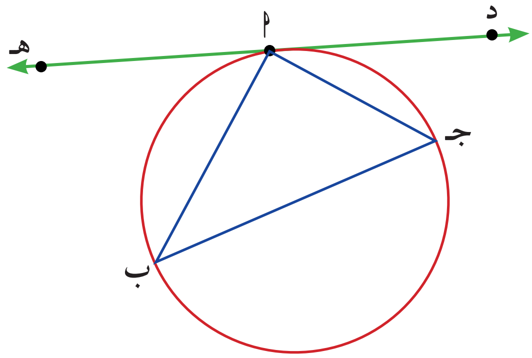
(٢) قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

مثال 7

في الشكل المقابل إذا كان د هـ↔ مماسًّا للدائرة عند أ، فأوجد ن(جـ أَ ب).



حاول أن تحل 7



في الشكل المقابل، لدينا: ق(دأ̂جـ) = ٤٠°، ق(هـأ̂ب) = ٥٠°.

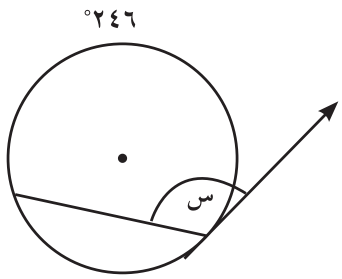
أ أوجد قياسات زوايا المثلث أب جـ.

ب أثبت أن $\overline{\text{جـ ب}}$ قطر للدائرة.

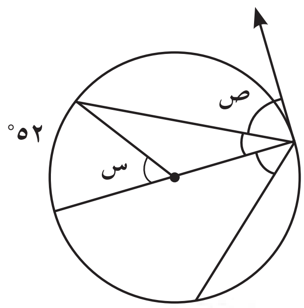
كراسة التمارين

(٢) أوجد قيمة المجهول في كل من الأشكال التالية بمعلومية أن الشعاع في كل رسم يمثل مماسًا للدائرة.

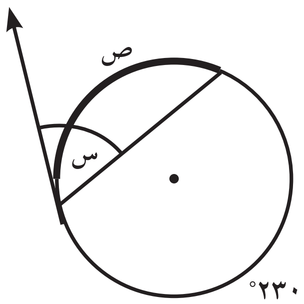
(أ)



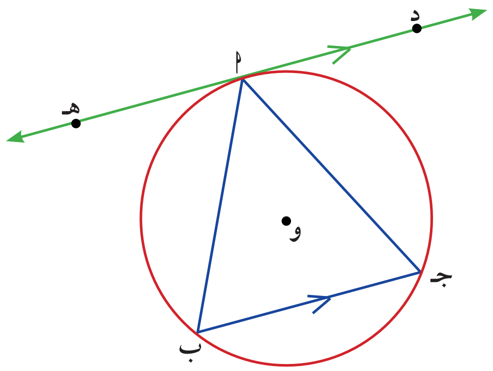
(ب)



(جـ)

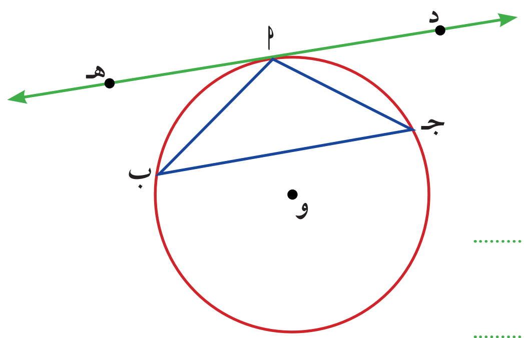


مثال 9



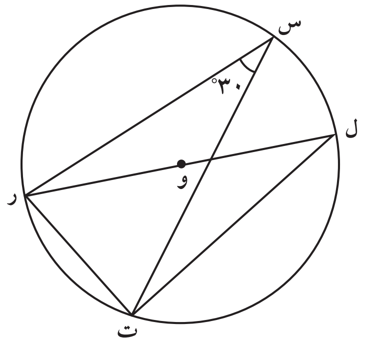
في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة أ،
$\overline{\text{ب جـ}}$ وتر في الدائرة موازٍ للمماس $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$.
أثبت أن المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين.

حاول أن تحل 9



في الشكل المقابل، إذا كان لدينا $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة أ.
المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين (أ ب = أ جـ).
أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

(١١) مستخدمًا معطيات الشكل المقابل حيث و مركز الدائرة:



(أ) ما نوع المثلث ر ل ت؟ ____________

(ب) أوجد ق(ل رَ ت). ____________

(جـ) أوجد محيط Δر ل ت بدلالة نق. ____________

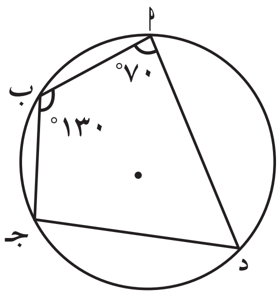
....

....

....

(٤) أب جـ د رباعي دائري (محوط بدائرة). ق(أَ) = ٧٠°، ق(بَ) = ١٣٠°.

أوجد ق(جـَ)، ق(دَ).

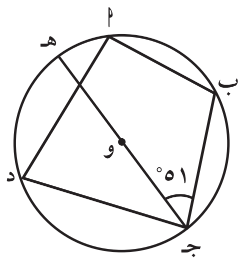


....

....

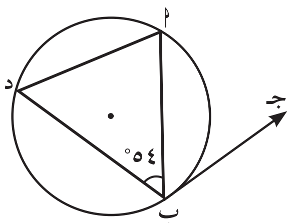
(٦) في الشكل المقابل، إذا كان ق(أب⌒) = ٧٢°، ق(ب جـَ هـ) = ٥١°.

فإن قياس القوس هـ أ⌒ =



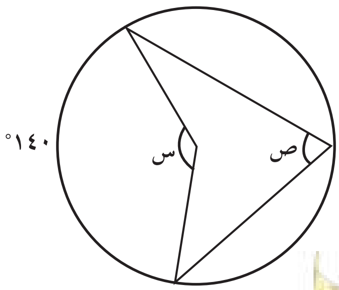
(أ) ٣٠° (ب) ١٠٢° (جـ) ٧٢° (د) ٦٨°

(٧) في الشكل المقابل، إذا كان ق(ب د⌒) = ١٤٠°، فإن ق(أبَ جـ) =



(أ) ٧٠° (ب) ٥٠° (جـ) ٥٦° (د) ١٢٤°

(٨) في الشكل المقابل، قيمة كل من س، ص على الترتيب هما:



(أ) ٢٨٠°، ١٤٠° (ب) ٧٠°، ٣٥°

(جـ) ١٤٠°، ٤٠° (د) ١٤٠°، ٧٠°

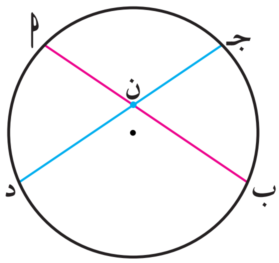
الدائرة : الأوتار المتقاطعة - المماس

أولاً : تقاطع الأوتار داخل الدائرة

نظرية 1

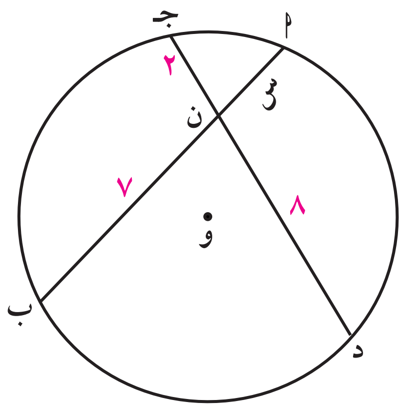
إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولي جزءي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزءي الوتر الآخر.

ن أ × ن ب = ن جـ × ن د



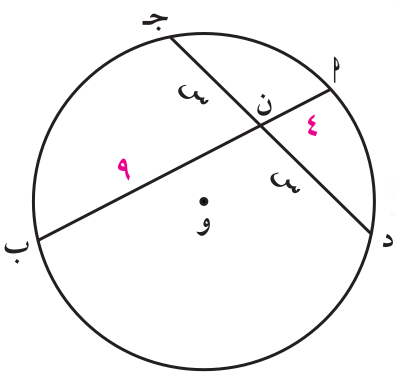
مثال 1

في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



حاول أن تحل 1

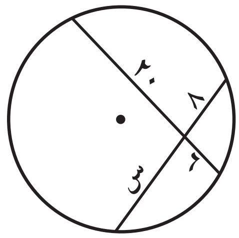
في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



كراسة التمارين

في التمرينين (٣–٤)، أوجد قيمة كل متغيّر.

(٣)



....

....

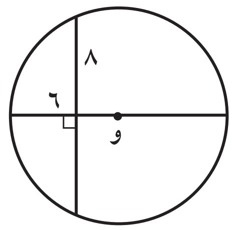
....

....

....

في التمرينين (٥–٦)، أوجد طول قطر كل دائرة.

(٥)



....

....

....

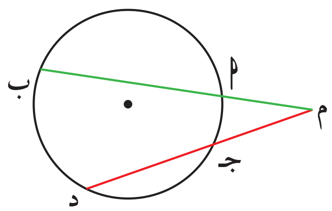
....

ثانياً : تقاطع الأوتار خارج الدائرة

نتيجة 1

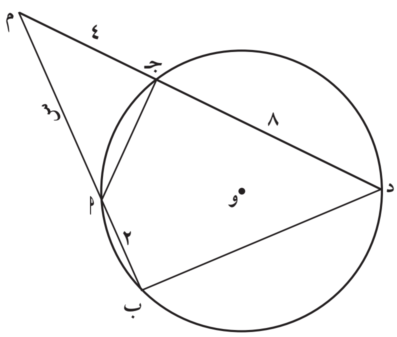
إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.

م أ × م ب = م جـ × م د.



مثال 3

في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



....

....

....

....

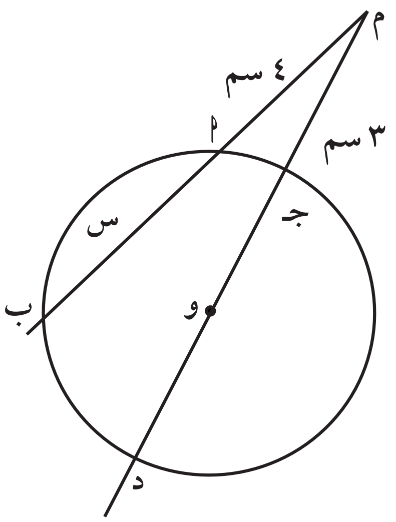
....

....

حاول أن تحل 3

في الشكل المقابل، دائرة مركزها و. طول نصف قطرها يساوي ٤ سم.

أوجد قيمة س.



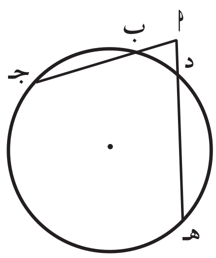
كراسة التمارين

(١) في الشكل المقابل:

أجـ = ٢٠، ب جـ = ١٥

أهـ = ٢٥.

أوجد: د هـ.

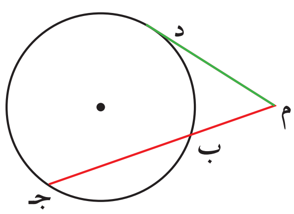


ثالثاً : تقاطع مماس وقاطع الدائرة من نقطة خارج دائرة

نتيجة 2

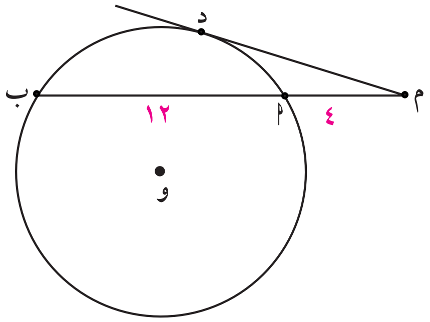
إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.

(م د)^2 = م ب × م جـ .



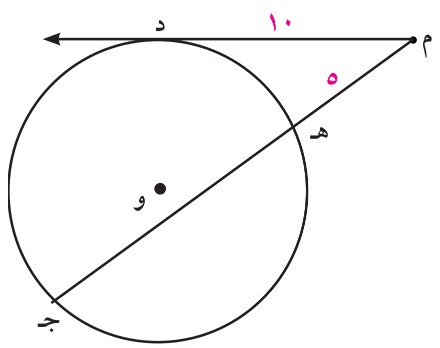
مثال 4

في الشكل المقابل، أوجد طول القطعة المماسية م د علمًا بأن: أم = ٤ سم ، أب = ١٢ سم.



حاول أن تحل 4

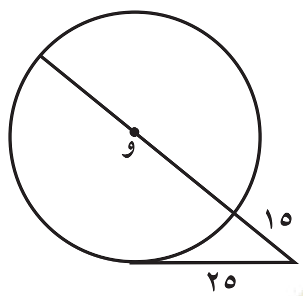
في الشكل المقابل، م د قطعة مماسية حيث م د = ١٠



كراسة التمارين

أوجد طول قطر كل دائرة.

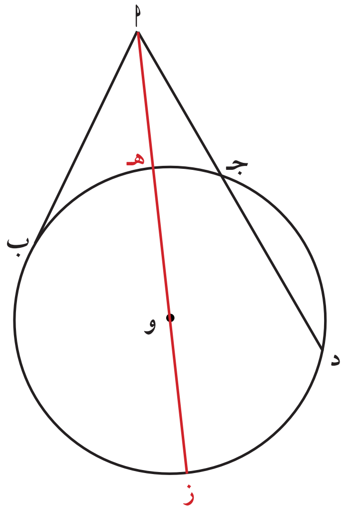
(٦)



مثال 5

أراد أحد الأشخاص معرفة طول القطعة المماسية من النقطة أ إلى النقطة ب على الدائرة، فأخذ مسطرة ووضع الصفر عند النقطة أ فوجد أن المسطرة تتقاطع مع الدائرة عند النقطة جـ بحيث أجـ = ٤ سم وعند النقطة د بحيث أ د = ٩ سم.

ما طول القطعة المماسية $\overline{أب}$؟



حاول أن تحل 5

في المثال (٥). أوجد طول نصف قطر الدائرة إذا كانت أ هـ = ٢سم.

كراسة التمارين

(٤) أوجد قيمة كل من س ، ص.