رياضيات

الصف العاشر

المصفوفات

الفصل الدراسي الثاني

2025 - 2026

أ : سلامة علي الركاض

صفوة معلمي الكويت

تنظيم البيانات في مصفوفات

تعريف

المصفوفة هي تنظيم من الأعداد المرتبة في صفوف وأعمدة

الأعداد المكونة للمصفوفة تسمى عناصر

رتبة المصفوفة

نرمز إلى المصفوفة بأحد حروف الهجاء ونضع تحته خطًّا، نكتب $\underline{أ}$ ونقرأ **المصفوفة أ**.

عدد الصفوف (م) وعدد الأعمدة (ن) يحددان **رتبة المصفوفة** وتكتب م × ن.

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ٦ & ٧ & ٠ \end{bmatrix}$$

المصفوفة $\underline{أ}$ هي من **الرتبة** ٢ × ٣.

ملاحظة

لكتابة رتبة المصفوفة نكتب أولًا عدد الصفوف يليه عدد الأعمدة.

مثال ١

اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٥ \\ ٢ & -٣ & -٧ \\ ١ & ٠ & ٩ \end{bmatrix}$$

$$\underline{ب} = \begin{bmatrix} -٤ & \frac{٢}{٣} & -٣ \end{bmatrix}$$

$$\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \\ ٠,٥ \end{bmatrix}$$

صفوة معلمي الكويت

حاول أن تحل 1 اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ٠ \\ ٢- & ٠,٥ & ٧ \end{bmatrix}$ $\quad \underline{ب} = [٨- \quad ٣ \quad ١٠]$ $\quad \underline{جـ} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ١ & ٥- \\ ٠,٦ & ٩ \end{bmatrix}$

ترميز عناصر المصفوفة

يحدد أي عنصر في المصفوفة بدلالة رقمي الصف والعمود الواقع فيهما، فمثلًا، في المصفوفة $\underline{أ}$ العنصر الذي في الصف الأول والعمود الثالث نرمز إليه بالرمز $أ_{٣١}$ (الصف أولًا والعمود ثانيًا).

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{bmatrix}$$

العنصر في الصف الأول والعمود الثالث: $أ_{٣١}$

مثال 3

في المصفوفة: $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١٢ & ١ & ٥ & ٤ \\ ٢ & ٦ & ٢ & ٣,٥ \\ ١ & ٠ & ١ & ٤- \end{bmatrix}$ اكتب قيمة كل عنصر مما يلي:

أ) $ب_{٢٢}$ ب) $ب_{١٣}$ جـ) $ب_{١١}$

حاول أن تحل 3 في المثال (٣)، أوجد $ب_{٢٣}$ من المصفوفة $\underline{ب}$.

منصة معلمي الكويت

أنواع المصفوفات

- **المصفوفة المربعة:** هي مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.

وفي ما عدا ذلك، تسمى المصفوفة: مصفوفة مستطيلة Rectangular Matrix.

- **المصفوفة الأفقية:** هي مصفوفة مكونة من صف واحد Horizontal Matrix.
- **المصفوفة العمودية:** هي مصفوفة مكونة من عمود واحد Vertical Matrix.
- **فكر وناقش:** هل يمكن لمصفوفة أن تكون عمودية وأفقية معًا؟

مثال 4 صنّف كلًّا من المصفوفات التالية:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & -٥ & ٠ \\ ٠ & ٤ & ٧ \\ ٣ & ٢ & ٨ \end{bmatrix} \qquad \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٠,٢ \end{bmatrix}$$

$$\underline{جـ} = [٣ \quad ٤ \quad -٥] \qquad \underline{د} = \begin{bmatrix} -٢ & ٣ & ١,٤ \\ ١٢ & ٨ & ٥ \end{bmatrix}$$

معلومة رياضية

المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار تسمى مصفوفة صفرية **Zero Matrix**

ويرمز إليها بالرمز $\underline{٠}_{م \times ن}$

صفوة معلمي الكويت

حاول أن تحل 4 صنّف المصفوفات في المثال (١).

اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٥ \\ ٢ & -٣ & -٧ \\ ١ & ٠ & ٩ \end{bmatrix} \qquad \underline{ب} = \begin{bmatrix} -٤ & \frac{٢}{٣} & -٣ \end{bmatrix} \qquad \underline{جـ} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \\ ٠,٥ \end{bmatrix}$$

.....

.....

.....

المصفوفات المتساوية

تكون **مصفوفتان متساويتين** إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها، وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية والعكس صحيح.

المصفوفة التي عدد صفوفها (جـ)، وعدد أعمدتها (د) هي من الرتبة جـ × د.

مثال 5

هل المصفوفتان $\underline{أ}$، $\underline{ب}$ متساويتان؟ فسّر.

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} -٠,٧٥ & \frac{١}{٥} \\ \frac{١}{٢} & -٢ \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} \frac{-٣}{٤} & ٠,٢ \\ ٠,٥ & -٢ \end{bmatrix}$$

.....

.....

حاول أن تحل 5 هل المصفوفتان $\underline{س}$، $\underline{ص}$ متساويتان؟ فسّر.

$$\underline{س} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{ص} = \begin{bmatrix} -١ & ٩ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$$

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

يمكنك أن تستخدم تعريف المصفوفات المتساوية لحلّ المعادلات.

مثال 6

إذا كانت: $\begin{bmatrix} ٢س - ٥ & ٤ \\ ٣ & ٣ص + ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٤ \\ ٣ & ص + ١٨ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

حاول أن تحل 6

أ إذا كانت $\begin{bmatrix} ٣٨ & ٥ \\ ٣ & ٤ص - ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س + ٨ & ٥ \\ ٣ & -ص \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

ب إذا كانت $[٣س \quad س + ص \quad س - ص] = [-٩ \quad ٤ \quad -١٠]$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

صفوة معلمي الكويت

كراسة التمارين

في التمرينين (١–٢)، اذكر رتبة كل مصفوفة.

(١) $[٢ \quad \sqrt{٥}]$

_____

(٢) $\begin{bmatrix} ٤ & -٢ & ٢ \\ ١ & ٤ & ١ \\ ٠ & ٥ & -٧ \end{bmatrix}$

_____

حدّد ما إذا كان زوج المصفوفات متساويًا أم لا. علّل إجابتك.

(٣) $\begin{bmatrix} ٤ \\ -٦ \\ ٨ \end{bmatrix}$ ، $[\sqrt{٦٤} \quad -٦ \quad \sqrt{١٦}]$

_____

اذكر رتبة (أبعاد) المصفوفة، مع ذكر العنصر $أ_{٣٢}$.

(٤) $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٥ \\ ٢ & -٣ & -٧ \\ ١ & ٠ & ٩ \end{bmatrix}$

_____

(٥) أي زوج من المقادير التالية يحقّق ما يلي: $[٢س \quad س - ص] = [أ \quad ب]$؟

_____

(أ) $س = ٢أ$ ، $ص = \frac{١}{٢}أ - ب$

(ب) $س = \frac{١}{٢}أ$ ، $ص = \frac{١}{٢}أ + ب$

(جـ) $س = \frac{١}{٢}أ$ ، $ص = \frac{١}{٢}أ - ب$

(د) $س = ٢أ$ ، $ص = \frac{١}{٢}أ + ب$

في التمرين (٦)، أوجد قيم كل من س، ص.

(٦) $\begin{bmatrix} س^{٢} & ٤ \\ -٢ & ص^{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٤ \\ -٢ & ٥ص \end{bmatrix}$

صفوة معلمي الكويت

في التمرينين (٩–١٠)، أوجد قيم المتغيرات بحيث تكون المصفوفتان متساويتين.

(٩)
$$\begin{bmatrix} ٢س - ٥ & ٣ \\ ٥ & ٢ص + ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ١٢ \\ ٤ص + ١٩ & ٥ \end{bmatrix}$$

(١٠)
$$\begin{bmatrix} ٤س & ٢ - ص & ٥ \\ ٣- & ١- & ٢ \\ ٠ & ١٠- & ١٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢س + ٥ & ٤ص & ل \\ ٣- & م & ك - ل \\ ٠ & ٤-س & ١٥ \end{bmatrix}$$

صفوة معلمي الكويت

جمع وطرح المصفوفات

لجمع مصفوفتين أ، ب يجب أن تكونا من **الرتبة نفسها**.

نجمع كل عنصرين لهما الموقع نفسه في أ، ب. مصفوفة الجمع لها رتبة كل من المصفوفتين أ، ب.

جـ = أ + ب

أ من الرتبة م × ن ، ب من الرتبة م × ن

∴ جـ من الرتبة م × ن.

$جـ_{وس} = أ_{وس} + ب_{وس}$.

مثال 1

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٠ \\ ٣ & -٥ & ٧ \end{bmatrix}$ $ب = \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & -٤ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix}$ $جـ = \begin{bmatrix} ٣ & ٩ & -٣ \\ -٩ & ٦ & ١٢ \end{bmatrix}$

فأوجد إن أمكن:

أ) أ + ب

ب) أ + جـ

وإذا لم يكن الجمع ممكنًا، فاذكر السبب.

صفوة معلمي الكويت

حاول أن تحل 6 أوجد ناتج ما يلي: $\begin{bmatrix} -١٢ & ٢٤ \\ -٣ & ٥ \\ -١ & ١٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & -١ \\ -٥ & ٤ \\ ١ & -٧ \end{bmatrix}$

مثال 3

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$ $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix}$

فأوجد: $\underline{أ} + \underline{ب}$ ، $\underline{ب} + \underline{أ}$ ، $(\underline{أ} + \underline{ب}) + \underline{جـ}$ ، $\underline{أ} + (\underline{ب} + \underline{جـ})$ ، $\underline{أ} + \underline{٠}_{٢\times٢}$ ، $\underline{أ} + (-\underline{أ})$.

صفوة معلمي الكويت

حاول أن تحل 3 في المثال (٣)، أوجد $\underline{جـ} + \underline{ب}$ ، $(\underline{جـ} + \underline{ب}) + \underline{أ}$.

خواص جمع المصفوفات

إذا كان $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ ، $\underline{جـ}$ مصفوفات من الرتبة م × ن فإن:

- $\underline{أ} + \underline{ب}$ هي من الرتبة م × ن — خاصية الإقفال (الانغلاق)
- $\underline{أ} + \underline{ب} = \underline{ب} + \underline{أ}$ — خاصية الإبدال Commutative
- $(\underline{أ} + \underline{ب}) + \underline{جـ} = \underline{أ} + (\underline{ب} + \underline{جـ})$ — خاصية التجميع Associative
- $\underline{٠}_{م\times ن} + \underline{أ} = \underline{أ} + \underline{٠}_{م\times ن} = \underline{أ}$ — المصفوفة الصفرية هي العنصر المحايد الجمعي من الرتبة م × ن
- $\underline{أ} + (-\underline{أ}) = \underline{٠}_{م\times ن}$ — خاصية المعكوس الجمعي (النظير الجمعي).

كراسة التمارين

في التمرينين (١ – ٢)، أوجد ناتج كلّ مما يلي:

(٢) $\begin{bmatrix} ٦ & ٣- \\ ٧- & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٦- \\ ٢- & ٧ \end{bmatrix}$

صفوة معلمي الكويت

طرح المصفوفات

يمكن طرح المصفوفات باستخدام خاصية مصفوفة المعكوس الجمعي.

إذا كان للمصفوفتين $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ الرتبة نفسها، فإن $\underline{أ} - \underline{ب} = \underline{أ} + (-\underline{ب})$.

ملاحظة: إذا كان $\underline{أ} \neq \underline{ب}$ ولهما الرتبة نفسها فإن: $\underline{أ} - \underline{ب} \neq \underline{ب} - \underline{أ}$ وبالتالي، عملية طرح المصفوفات ليست إبدالية.

مثال 4

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ ٤ & ١- & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ ٢- & ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

أوجد $\underline{أ} - \underline{ب}$ ، $\underline{ب} - \underline{أ}$

كراسة التمارين

في التمرينين (١ – ٢)، أوجد ناتج كلّ مما يلي:

(١) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

صفوة معلمي الكويت

حاول أن تحل 4

أوجد ناتج كل مما يلي:

أ $\begin{bmatrix} ٦ & -٩ & ٧ \\ -٢ & ١ & ٨ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٤ & ٣ & ٠ \\ ٦ & ٥ & ١٠ \end{bmatrix}$

ب $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ -١ & ١٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$

كراسة التمارين

في التمرينين (٣–٤)، استخدم الحساب الذهني أو الورقة والقلم أو الآلة الحاسبة لإيجاد الناتج:

(٣) $\begin{bmatrix} ٦ & -٩ & ٠ \\ -٨ & ٥ & ٧ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٢ & -٤ & ١ \\ ٣ & ١١ & ١٠ \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \\ ٦ & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ -٣ & ٦ \\ -٥ & ٧ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ ٣ & -٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$

صفوة معلمي الكويت

في التمارين (٥–٩)، اذكر ما إذا كان الجمع أو الطرح ممكنًا أو غير ممكن مع تفسير إجابتك:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & \frac{١}{٢} & ٤ & ٥ \\ ٢ & \frac{٣}{٥} & ٨ & ٩ \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٠,٣٣ & ٤ \\ ٧- & ٠,١٥ \end{bmatrix}$$

$$\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤٤ \\ ١ & ٠ \\ ١٤ & ٢٣,٣ \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{د} = \begin{bmatrix} ٢- & ٤- & \frac{٧}{٨} & \frac{١١}{٢} \\ ٣ & ٢ & ١- & \frac{١٠}{١١}- \end{bmatrix}$$

(٥) $\underline{أ} + \underline{د}$ .....

(٦) $\underline{جـ} + \underline{ب}$ .....

(٧) $\underline{أ} + \underline{ب}$ .....

(٨) $\underline{جـ} - \underline{د}$ .....

(٩) $\underline{ب} + \underline{جـ}$ .....

حل المعادلات المصفوفية

المعادلة المصفوفية هي معادلة إحدى مصفوفاتها غير معلومة (المتغير).

يمكنك استخدام خواص المساواة لحل المعادلات المصفوفية.

لأي مصفوفات $\underline{أ}$، $\underline{ب}$، $\underline{جـ}$ لها الرتبة نفسها إذا كان: $\underline{أ} = \underline{ب}$، فإن: $\underline{أ} + \underline{جـ} = \underline{ب} + \underline{جـ}$، $\underline{أ} - \underline{جـ} = \underline{ب} - \underline{جـ}$.

مثال 5

حل المعادلة المصفوفية التالية:

$$\underline{س} - \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٩ & ٨ \end{bmatrix}$$

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

حاول أن تحل 5

أوجد س حيث:

$$\text{س} - \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٧ \\ -٤ & ٤ \end{bmatrix}$$

كراسة التمارين

في التمارين (١٠–١٣)، أوجد س في كل مما يلي:

(١٠)

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{bmatrix} + \text{س} = \begin{bmatrix} ٥ & ١ & ٨ \\ -٦ & ٠ & ٥ \end{bmatrix}$$

(١١)

$$\text{س} - \begin{bmatrix} ٤ & ١٢ \\ ٧٥ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٥٠ \\ ٥٠ & -١٠ \end{bmatrix}$$

صفوة معلمي الكويت

(١٢)

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٥- \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ ٣- & ٥ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٩ & ٥ & ٠ \\ ٣- & ٨ & ١٢ \end{bmatrix} + \underline{س} -$$

(١٣)

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٢٤ & ١٣ \\ ١ & ١٧- & ٦- \end{bmatrix} - \underline{س} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٢٤- & ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

صفوة معلمي الكويت

ضرب المصفوفات

ضرب مصفوفة في عدد

يمكنك أن تضرب عدد حقيقي في مصفوفة مثل:

$$٣\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٤ & -٣ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ٦ & ١٥ \\ ١٢ & -٩ \end{bmatrix}$$

الضرب القياسي

الضرب القياسي هو عملية ضرب مصفوفة $\underline{أ}$ في عدد حقيقي ك : ك $\neq$ ٠

الناتج هو المصفوفة ك $\underline{أ}$.

نحصل على المصفوفة ك $\underline{أ}$ بضرب كل عنصر من $\underline{أ}$ في ك.

إذا كان ك = ٠، يكون الناتج مصفوفة صفرية.

مثال3

حل المعادلة: ٤$\underline{س}$ + ٢$\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$، ثم تحقق من إجابتك.

الحل:

صفوة معلمي الكويت

حاول أن تحل 3 حل كل معادلة مما يلي:

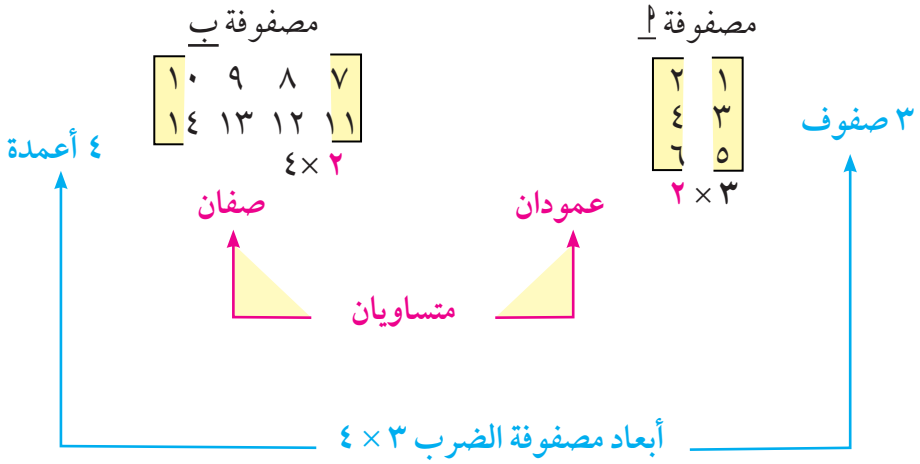
أ $\underline{س}_{٢} = \begin{bmatrix} ٤ & ١٢ \\ ١ & ٤- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢- & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$

ب $-٣\underline{س} + \begin{bmatrix} ٧ & ٠ & ١- \\ ٢ & ٣- & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ١٩- & ١٨- \end{bmatrix}$

صفوة معلمي الكويت

ضرب المصفوفات

المصفوفة $\underline{أ}$ هي مصفوفة من الرتبة م × ن والمصفوفة $\underline{ب}$ هي مصفوفة من الرتبة ن × ر، عندئذٍ مصفوفة الضرب $\underline{أ} \times \underline{ب}$ هي مصفوفة من الرتبة م × ر.



تكون مصفوفة الضرب معرّفة إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساويًا لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

$\underline{أ}_{م \times ن} \times \underline{ب}_{ن \times ر} = \underline{جـ}_{م \times ر}$

مثال 4

أوجد ناتج $\underline{أ} \times \underline{ب}$.

حيث $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -١ & -٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$

صفوة معلمي الكويت

حاول أن تحل 4

ب أوجد ناتج الضرب: $\begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$

مثال5

بفرض $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٨ & -١ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ٨ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix}$

حدّد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب: $\underline{أ} \times \underline{ب}$، $\underline{ب} \times \underline{أ}$ معرّفة أو غير معرّفة.

أوجد رتبة كل مصفوفة ضرب معرّفة.

حاول أن تحل 5

بفرض: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٨ & ٠ & -١ \\ ٢ & -٥ & ١ \end{bmatrix}$

أ حدّد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب $\underline{أ} \times \underline{ب}$، $\underline{ب} \times \underline{أ}$ معرّفة أو غير معرّفة.

ب أوجد ناتج الضرب المعرّف.

جـ بفرض أن المصفوفة $\underline{أ}$ هي مصفوفة من الرتبة ٢ × ٣، المصفوفة $\underline{ب}$ هي مصفوفة من الرتبة ٣ × ٢.

هل $\underline{أ} \times \underline{ب}$، $\underline{ب} \times \underline{أ}$ متساويتان؟ وضّح إجابتك.

صفوة معلمي الكويت

خواص ضرب المصفوفات المربعة

إذا كانت $\underline{أ}$، $\underline{ب}$ ، $\underline{جـ}$ مصفوفات من الرتبة م × م. فإن:

- $\underline{أ} \times \underline{ب}$: مصفوفة من الرتبة م × م.
- $(\underline{أ} \times \underline{ب}) \times \underline{جـ} = \underline{أ} \times (\underline{ب} \times \underline{جـ})$ خاصية التجميع للضرب
- $\underline{أ} \times (\underline{ب} + \underline{جـ}) = \underline{أ} \times \underline{ب} + \underline{أ} \times \underline{جـ}$ خاصية التوزيع
- $(\underline{ب} + \underline{جـ}) \times \underline{أ} = \underline{ب} \times \underline{أ} + \underline{جـ} \times \underline{أ}$
- $\underline{ص}_{م \times م} \times \underline{أ} = \underline{أ} \times \underline{ص}_{م \times م} = \underline{ص}_{م \times م}$ خاصية الضرب في الصفر

ملاحظة: عملية ضرب المصفوفات **ليست إبدالية**.

كراسة التمارين

في التمارين (١–٣)، أوجد ناتج ضرب كلّ مما يلي:

(١) $\begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$

صفوة معلمي الكويت

(٢) $\begin{bmatrix} -٣ \\ ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ -١ & -٥ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$

(٤) أوجد رتبة مصفوفة الضرب، ثم أوجد الناتج.

$$\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ١ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & ٧ & -٢ \\ \frac{-٤}{٥} & ٣ & ٦ \\ ٠ & \frac{-٢}{٣} & ٤ \end{bmatrix}$$

صفوة معلمي الكويت

في التمارين (٥–٩)، حدّد ما إذا كان الضرب معرّفًا أم لا.

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٦ & ٩ \end{bmatrix} \quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣- & ٦ \\ ٢ & ٤- \end{bmatrix} \quad \underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٥- \\ ٦ \end{bmatrix} \quad \underline{د} = \begin{bmatrix} ٠ & ٧ \end{bmatrix}$$

(٥) $\underline{أ} \times \underline{ب}$ .....

(٦) $\underline{أ} \times \underline{جـ}$ .....

(٧) $\underline{جـ} \times \underline{ب}$ .....

(٨) $\underline{د} \times \underline{أ}$ .....

(٩) $\underline{د} \times \underline{جـ}$ .....

في التمارين (١٠–١٢)، أوجد ناتج ضرب كلّ مما يلي:

(١٠) $٢ \begin{bmatrix} ٤ & ١- \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$

(١١) $٠,٥ \begin{bmatrix} ١٤ & ٣ \\ ٤- & ٧ \end{bmatrix}$

(١٢) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ ١- & ٠ \end{bmatrix}$

(٢٠) أوجد قيمة كل من س ، ص: $\begin{bmatrix} ٢س & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ص- & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩- & ٤- \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

مربع المصفوفة

إذا كانت $\underline{أ}$ مصفوفة مربعة، فإن المصفوفة $\underline{أ} \times \underline{أ}$ يرمز إليها بالرمز $\underline{أ}^{٢}$.
وتقرأ مربع المصفوفة $\underline{أ}$. وبالمثل $\underline{أ}^{٣} = \underline{أ} \times \underline{أ} \times \underline{أ}$، $\underline{أ}^{٤} = \underline{أ}^{٣} \times \underline{أ}$ ،....

مثال 6 إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

أوجد: $\underline{أ}^{٢}$ ، $\underline{أ}^{٣}$

حاول أن تحل 6 إذا كانت $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$. أوجد: $\underline{ب}^{٢}$ ، $\underline{ب}^{٣}$.

صفوة معلمي الكويت

كراسة التمارين

(١٦) أوجد قيمة كل من س ، ص إذا كانت:

$$\begin{bmatrix} ٢س & ١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٢س & -ص \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -٤ & -٩ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$$

.....

.....

.....

.....

.....

٤-٧ مصفوفات الوحدة والنظير الضربي

مصفوفة الوحدة

المصفوفة المربعة التي عناصر قطرها الرئيسي ١، وبقية العناصر صفر تسمى **مصفوفة الوحدة** للضرب. ويرمز إليها بِـ $\underline{و}$.

$\underline{و}_{٢\times٢}=\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$، $\underline{و}_{٣\times٣}=\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$

بفرض أن $\underline{أ}=\begin{bmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{bmatrix}$، $\underline{و}=\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$$\underline{أ}\times\underline{و}=\begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} أ\times١+ب\times٠ & أ\times٠+ب\times١ \\ جـ\times١+د\times٠ & جـ\times٠+د\times١ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}=\underline{أ}$$

كذلك $\underline{و}\times\underline{أ}=\begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}=\underline{أ}$

أي أن: $\underline{أ}\times\underline{و}=\underline{و}\times\underline{أ}=\underline{أ}$

$\underline{و}=\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية.

وبصورة عامة $\underline{و}_{ن\times ن}$ هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة ن.

صفوة معلمي الكويت

النظير الضربي

إذ كانت أ ، س مصفوفتين مربعتين من الرتبة نفسها بحيث يكون أ × س = و ، فإن س هي النظير الضربي للمصفوفة أ .
ويرمز إليها بِـ $أ^{-١}$.

إذًا $أ \times أ^{-١} = أ^{-١} \times أ = و$

مثال 1

أثبت أن ب = $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$.

حاول أن تحل 1

أ) أثبت أن المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢,٥ & ١ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي لِـ $\begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$

ب) في المثال (١)، أثبت أن أ هي النظير الضربي لِـ ب.

صفوة معلمي الكويت

كراسة التمارين

في التمرينين (١ – ٢)، بيّن أن كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى.

(١) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٤- & ٣ \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٥} & \frac{١}{١٠}- \\ ٠ & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$

محدد مصفوفة مربعة

ترتبط كل مصفوفة مربعة $\underline{أ}$ بعدد حقيقي يسمى **محدد $\underline{أ}$** ويرمز إلى هذا العدد بالرمز $|\underline{أ}|$ ويقرأ **محدد المصفوفة $\underline{أ}$**.

سنقتصر في هذا الدرس على محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثانية.

محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{bmatrix}$ هو أ د – ب جـ

نكتب $|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{vmatrix}$ = أ د – ب جـ

تسمى المصفوفة التي محددها يساوي الصفر **بالمصفوفة المنفردة**

صفوة معلمي الكويت

مثال 2

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{bmatrix}$ $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} س & ٠ \\ ٠ & س \end{bmatrix}$

حاول أن تحل 1

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية:

أ) $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ب) $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٨ & ٧ \\ ٢ & ١٠ \end{bmatrix}$ جـ) $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ك & ٣ \\ ك - ٣ & -٣ \end{bmatrix}$

ملاحظة

ليس لكلّ المصفوفات المربّعة نظير ضربي (معكوسات). سوف يساعدك الاختبار التالي على استنتاج ما إذا كانت المصفوفة ٢ × ٢ لها نظير ضربي، وكيف يمكنك إيجاده إن وجد.

صفوة معلمي الكويت

خاصية

بفرض أن: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$ إذا كان أ د − ب جـ ≠ ٠ ، فإن $\underline{أ}$ لها نظير ضربي $\underline{أ}^{-١}$ حيث:

$$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{|\underline{أ}|} \begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{bmatrix}$$

$$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{أ د - ب جـ} \begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{bmatrix}$$

معلومة رياضية:

المصفوفة التي محددها الصفر ليس لها نظير ضربي وتسمى مصفوفة منفردة.

مثال 3 إذا كانت المصفوفة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} س & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{bmatrix}$ منفردة أوجد قيمة س.

حاول أن تحل 3 إذا كانت المصفوفة $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ -٤ & ٢س \end{bmatrix}$ منفردة، أوجد قيمة س.

مثال 4 هل للمصفوفة: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} -١ & ٥ \\ ٨ & -٢ \end{bmatrix}$ نظير (معكوس) ضربي؟ في حالة الإيجاب أوجده.

صفوة معلمي الكويت

حاول أن تحل 4

هل $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

هل $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ -٣ & -٤ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

مثال5

حدّد أي مصفوفة مما يلي لها نظير (معكوس) ضربي، ثم أوجده.

أ $\underline{م} = \begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$

ب $\underline{ن} = \begin{bmatrix} ٣ & ٩ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

صفوة معلمي الكويت

حاول أن تحل 5

حدّد أي مصفوفة من المصفوفات التالية لها نظير ضربي (معكوس)، ثم أوجده.

أ $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

ب $\begin{bmatrix} ٠,٥ & ٢,٣ \\ ٣ & ٧,٢ \end{bmatrix}$

كراسة التمارين

في التمارين (٣–٥)، أوجد محدّد كل مصفوفة.

(٣) $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٦ & -٢ \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{٢}{٣} \\ \frac{٣}{٥} & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$

(٥) $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

صفوة معلمي الكويت

في التمارين (٦–٩)، أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة إن وجد، وإذا لم يوجد فاكتب «لا يوجد نظير ضربي» مع ذكر السبب.

(٦) $\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

(٧) $\begin{bmatrix} ٤ & ٨ \\ ٣- & ٢- \end{bmatrix}$

في التمارين (١٠–١٢)، حلّ كل معادلة في س. وإذا كان من غير الممكن حلها، فاكتب السبب.

(١٠) $\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \underline{س} \times \begin{bmatrix} ١٢ & ٧ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$

صفوة معلمي الكويت

(١٢) $\underline{س} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٦ & ٣١ \\ ١٢ & ٢٧ \end{bmatrix}$

(١٨) أوجد المصفوفة $\underline{س}$: $\begin{bmatrix} ٧ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \underline{س} + \begin{bmatrix} ٧ & ٢ \\ ٤ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$

صفوة معلمي الكويت

٥-٧

حل نظام من معادلتين خطيتين

الحل باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة المربعة

مثال1 حلّ النظام: $\begin{cases} س + ص = ٣ \\ س - ص = ٧ \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

حاول أن تحل 1 حلّ النظام: $\begin{cases} ٥س + ٣ص = ٧ \\ ٣س + ٢ص = ٥ \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

صفوة معلمي الكويت

استخدام قاعدة كرامر (المحددات) لحل معادلتين

مثال1

استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام: $\begin{cases} ٤س - ٥ص + ٧ = ٠ \\ ٣ص - ٦س + ٣ = ٠ \end{cases}$

حاول أن تحل 1

استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام: $\begin{cases} ٣س + ٢ص = -٦ \\ -٤س - ٣ص - ٧ = ٠ \end{cases}$

صفوة معلمي الكويت