رياضيات

الصف العاشر

حساب المثلثات

الوحدة الثامنة

الفصل الدراسي الثاني

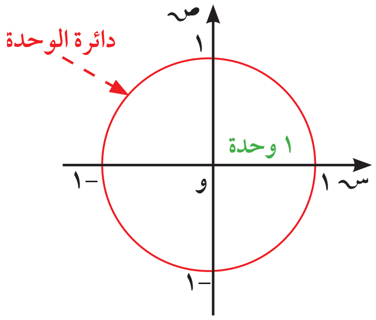
2025 - 2026

أ : سلامة علي الركاض

دائرة الوحدة في المستوي الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية

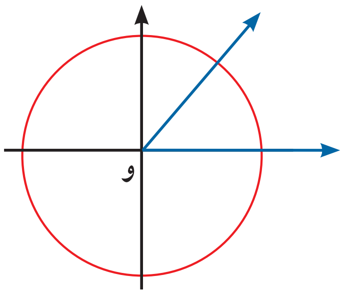
دائرة الوحدة

هي دائرة مركزها نقطة الأصل و، وطول نصف قطرها واحد وحدة.



النقطة المثلثية

هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة.

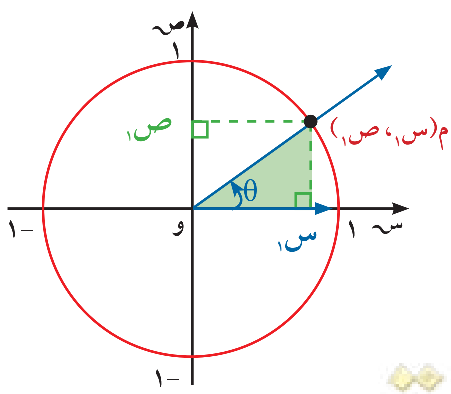


ملاحظة: تكون النقطة (س، ص) نقطة مثلثية إذا وفقط إذا كان س^{٢} + ص^{٢} = ١

سوف نستخدم الرمز θ لنرمز إلى قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي.

النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ

بفرض أنّ زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ، يقطع ضلعها النهائي دائرة الوحدة في النقطة م (س$_{١}$، ص$_{١}$).



النسب المثلثية للزاوية θ هي:

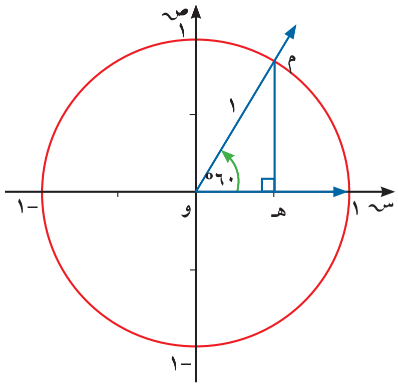
جتاθ = س$_{١}$ ، جاθ = ص$_{١}$

ظاθ = $\frac{ص_{١}}{س_{١}}$ ، س$_{١}$ ≠ ٠ ، ظتاθ = $\frac{س_{١}}{ص_{١}}$ ، ص$_{١}$ ≠ ٠

قاθ = $\frac{١}{س_{١}}$ ، س$_{١}$ ≠ ٠ ، قتاθ = $\frac{١}{ص_{١}}$ ، ص$_{١}$ ≠ ٠

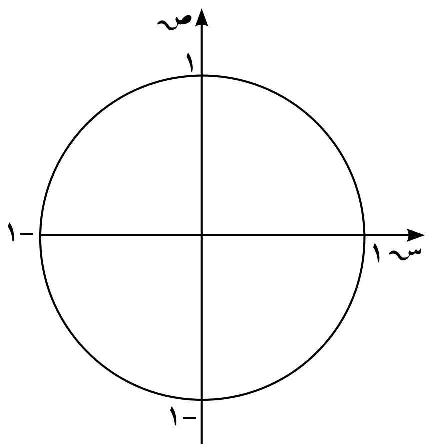
مثال 1

باستخدام دائرة الوحدة أوجد جا ٦٠°، جتا ٦٠°.



حاول أن تحل 1

على دائرة الوحدة، ارسم زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها ٤٥°. ثم أوجد جتا ٤٥°، جا ٤٥°.



يمكن استخدام مثلث قائم الزاوية لإيجاد جتاθ، جاθ لأي زاوية θ موجهة في الوضع القياسي لا يقع ضلعها النهائي في الربع الأول.

الدوال الدائرية -المثلثية

تعريف

إذا كانت (س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية قياسها θ حيث $٠ \leq \theta < ٢\pi$ فإن:

(١) دالة الجيب: د(θ) = جاθ حيث جاθ = ص **(الإحداثي الصادي للنقطة المثلثية)**

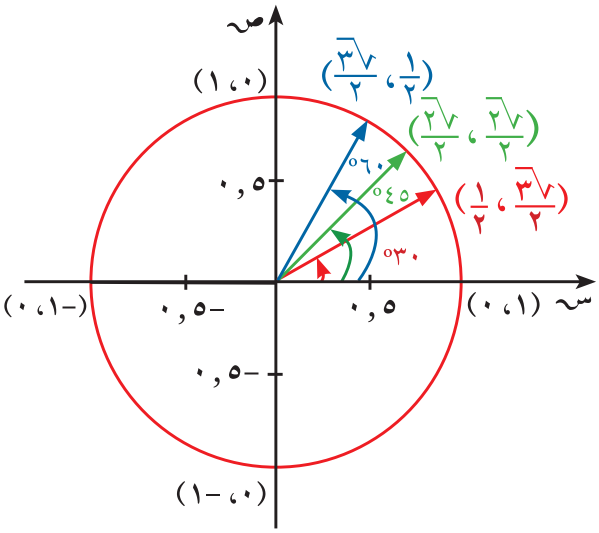
(٢) دالة جيب التمام: د(θ) = جتاθ حيث جتاθ = س **(الإحداثي السيني للنقطة المثلثية)**

(٣) دالة الظل: د(θ) = ظاθ حيث ظاθ = $\frac{ص}{س}$ ، س $\neq$ ٠

(٤) دالة القاطع: د(θ) = قاθ حيث قاθ = $\frac{١}{س}$ ، س $\neq$ ٠

(٥) دالة قاطع التمام: د(θ) = قتاθ حيث قتاθ = $\frac{١}{ص}$ ، ص $\neq$ ٠

(٦) دالة ظل التمام: د(θ) = ظتاθ حيث ظتاθ = $\frac{س}{ص}$ ، ص $\neq$ ٠



مكن بسهولة إيجاد قيم الدوال المثلثية لبعض قيم θ الخاصة.

الدالة / قياس الزاوية θ	٠°	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°	١٨٠°	٢٧٠°	٣٦٠°
	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π
جاθ	٠	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	١	٠	-١	٠
جتاθ	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	٠	-١	٠	١
ظاθ	٠	$\frac{\sqrt{٣}}{٣}$	١	$\sqrt{٣}$	غير معرّف	٠	غير معرّف	٠

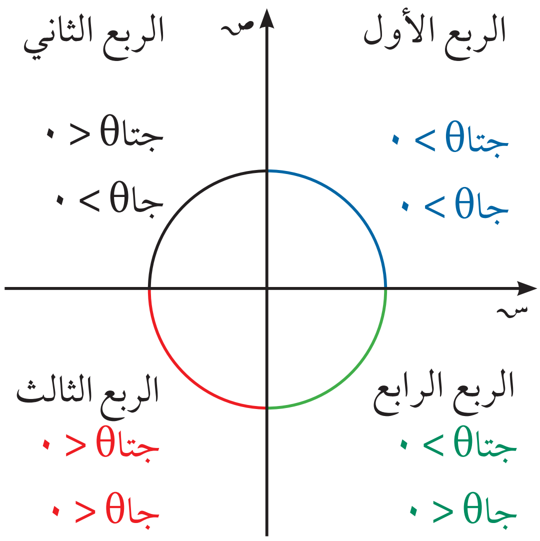
من الشكل: يمكن ملاحظة ما يلي:

إذا كانت θ في الربع الأول فإن: جاθ > ٠، جتاθ > ٠

إذا كانت θ في الربع الثاني فإن: جاθ > ٠، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الثالث فإن: جاθ < ٠، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الرابع فإن: جاθ < ٠، جتاθ > ٠



مثال 2

حدّد إشارة جاθ، جتاθ في كل مما يلي:

أ θ = ١٣٥°

ب θ = $\frac{٧\pi}{٦}$

ج θ = ٣٠٥°

حاول أن تحل 2

أ إذا كانت ٩٠° < θ < ٢٧٠°. ما هي إشارة جتاθ؟

ب إذا كانت ٠° < θ < π. ما هي إشارة جاθ؟

كراسة التمارين

(١) أكمل الجدول أدناه.

القياس بالدرجات	القياس بالراديان
٤٥°	
	$\frac{3\pi}{4}$
	$-\pi$
−١٥٠°	
−٢٢٥°	
	$\frac{5\pi}{6}$

(٢) اذكر النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها ٣٠°، ثمّ أوجد كلاً من:

(أ) جا٣٠°

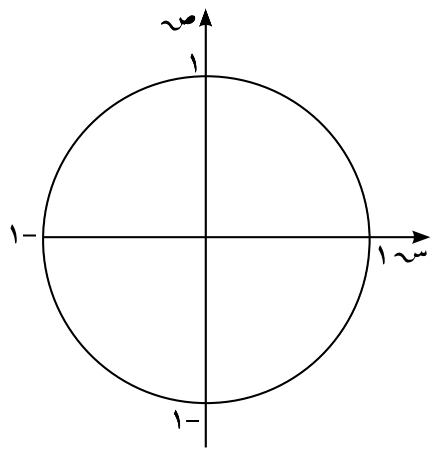
(ب) جتا٣٠°

(جـ) ظا٣٠°

(د) ظتا٣٠°

(هـ) قا٣٠°

(و) قتا٣٠°



في التمارين (٥–٧)، بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جيب تمام، جيب، ظل الزاوية على الترتيب لكلّ من الزوايا التالية:

(٥) $\frac{\pi}{٤}$ ________________

(٦) ٦٠° ________________

(٧) ٠° ________________

في التمارين (٨–١١)، في أيّ ربع أو على أيّ محور يقع الضلع النهائي لكلّ من الزوايا التالية:

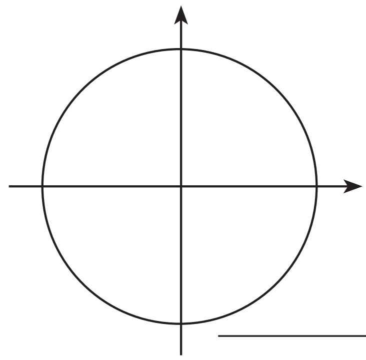
(٨) ١٥٠° ________________

(٩) $-\pi$ ________________

(١٠) -٦٠° ________________

(١١) $\frac{٧\pi}{٦}$ ________________

(١٢) (أ) أكمل الفراغ في الرسم أدناه.



الربع الثاني

جتاθ ________

جاθ ________

الربع الأول

جتاθ > ٠

جاθ > ٠

الربع الثالث

جتاθ ________

جاθ ________

الربع الرابع

جتاθ ________

جاθ ________

(ب) افترض أن جتاθ سالبة جاθ موجبة. يقع الضلع النهائي للزاوية θ في:

____

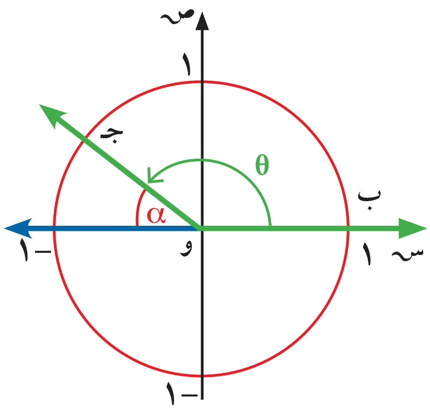
(أ) الربع الأول (ب) الربع الثاني (جـ) الربع الثالث (د) الربع الرابع

زاوية الاسناد

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة (وبَ، وجَ) التي في وضع قياسي هي الزاوية **الحادة** α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات.

فإذا كان α زاوية الإسناد فإن: $٠^{\circ} < \alpha < ٩٠^{\circ}$

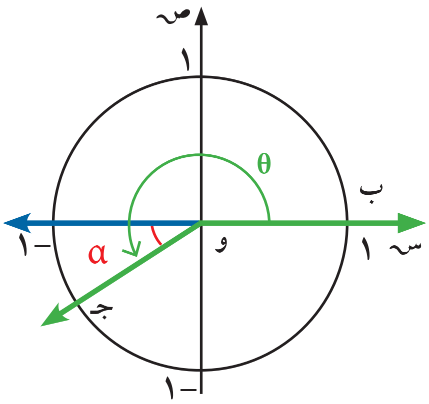
الأشكال التالية توضح الحالات المختلفة لإيجاد زاوية الإسناد:



عندما θ تقع في الربع الثاني

$\alpha^{\circ} = ١٨٠^{\circ} - \theta^{\circ}$

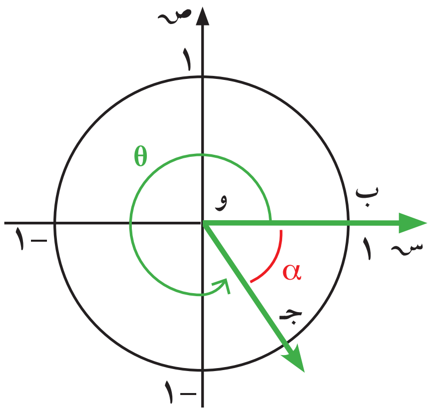
$\alpha' = \pi - \theta'$



عندما θ تقع في الربع الثالث

$\alpha^{\circ} = \theta^{\circ} - ١٨٠^{\circ}$

$\alpha' = \theta' - \pi$



عندما θ تقع في الربع الرابع

$\alpha^{\circ} = ٣٦٠^{\circ} - \theta^{\circ}$

$\alpha' = ٢\pi - \theta'$

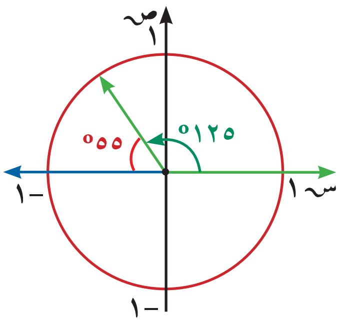
تذكر

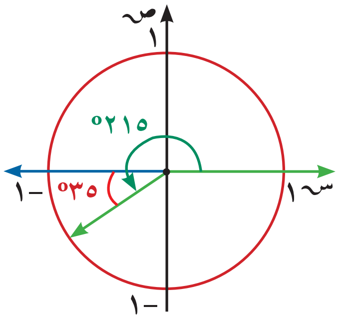
الزاوية الموجهة ب وْ جـ يمكن أن نرمز لها بالرمز (وبَ، وجَ) حيث وبَ الضلع الابتدائي، وجَ الضلع النهائي.

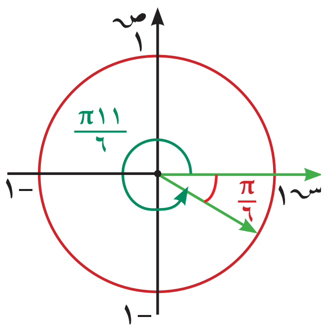
مثال 3

ارسم كلًّا من الزوايا الموجهة في وضع قياسي، ثم عيّن زاوية الإسناد وأوجد قياسها لكل مما يلي:

أ ١٢٥° ب ٢١٥° ج $\frac{١١\pi}{٦}$

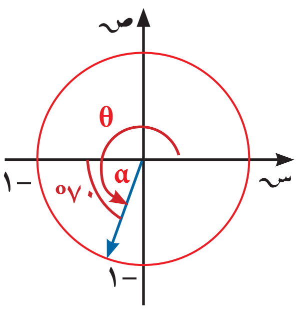






حاول أن تحل 3

يبيّن الشكل المقابل، زاوية الإسناد α° للزاوية θ°. أوجد θ.



كراسة التمارين

في التمارين (١٤–١٧)، ارسم كلًّا من الزوايا الموجهة التالية في وضع قياسي، ثم عيّن زاوية الإسناد وأوجد قياسها.

(١٤) °٢١٠ ______________ (١٥) $\frac{٢\pi}{٣}$ ______________

(١٦) °١٧٠ ______________ (١٧) $\frac{٧\pi}{٣}$ ______________

في التمرينين (١٨–١٩)، اختر الإجابة الصحيحة:

(١٨) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها تختلف عن الزوايا الأخرى هي:

(أ) °١٩٠ (ب) °١٧٠

(جـ) °٣٥٠ (د) °١١٠

(١٩) الزاوية التي في الوضع القياسي وضلعها النهائي يمر بالنقطة م$\left(\frac{-\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$ التي تقع على دائرة الوحدة هي:

(أ) °٤٥ (ب) °٢٢٥

(جـ) °١٣٥ (د) °٣٣٠

بنود موضوعية

في التمارين (١-٤)، إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

(١) جتا($-٣٠٠°$) = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(٢) جا($١٢٠°$) = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(٣) ظا($-١٥٠°$) = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (أ) (ب)

(٤) قا($٣١٥°$) = $\sqrt{٢}$ (أ) (ب)

في التمارين (٥-٩)، اختر الإجابة الصحيحة:

(٥) الزاوية التي يقع ضلعها النهائي في الربع الرابع في ما يلي هي:

(أ) $-٣٢٠°$ (ب) $-٢٧٠°$

(جـ) $\frac{٥\pi}{٣}$ (د) $\frac{١٣\pi}{٩}$

(٦) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها يختلف عن الزوايا الأخرى هي:

(أ) $\frac{٧\pi}{٤}$ (ب) $١٣٥°$

(جـ) $\frac{٣\pi}{٤}$ (د) $٢١٥°$

(٧) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها $\frac{\pi}{٣}$ هي:

(أ) $\frac{١١\pi}{٦}$ (ب) $٢٥٥°$

(جـ) $\frac{٧\pi}{٨}$ (د) $\frac{٥\pi}{٣}$

(٨) زاوية في الوضع القياسي قياسها يساوي $-٢٢٥°$. فإن النقطة المثلثية التي يمكن أن تقع على الضلع النهائي لهذه الزاوية هي:

(أ) $\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{-\sqrt{٢}}{٢}\right)$ (ب) $\left(\frac{-\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$

(جـ) $\left(\frac{-\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{-\sqrt{٢}}{٢}\right)$ (د) $(-١ ، ١)$

(٩) $[\text{جا}(-١٣٥°)]^{٢} + [\text{جتا}(-١٣٥°)]^{٢}$ =

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$

(جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) صفر

العلاقات بين الدوال المثلثية 1

تسمى جاθ، جتاθ، ظاθ النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ وتدعى **النسب المثلثية الأساسية**

علمًا بأن   −١ ≤ جتاθ ≤ ١

−١ ≤ جاθ ≤ ١

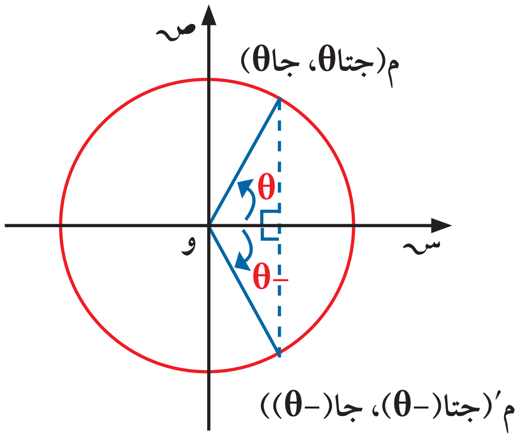
ظاθ ∈ ح

النسب المثلثية للزاويتين θ، −θ.

النقطة المثلثية م′ هي انعكاس للنقطة المثلثية م في محور السينات حيث م(س، ص) $\xrightarrow{ع_{س}}$ م′(س، −ص)

ويكون جتا(−θ) = جتاθ

جا(−θ) = −جاθ



تذكر

ع~س~ تعني انعكاس في محور السينات.

قانون

جتا(−θ) = جتاθ

جا(−θ) = −جاθ

وبالتالي ظا(−θ) = −ظاθ   بشرط أن يكون ظاθ معرّف.

مثال 1

إذا كان جتا $\frac{٣\pi}{٨}$ = $\frac{\sqrt{٢ - \sqrt{٢}}}{٢}$ ، فأوجد جتا $\left(-\frac{٣\pi}{٨}\right)$.

....

إذا كان جا ٣٦° ≃ ٠,٥٨٧٨ ، فأوجد جا(−٣٦°).

....

إذا كان ظا ٤٥° = ١ ، فأوجد ظا(−٤٥°).

....

حاول أن تحل 1

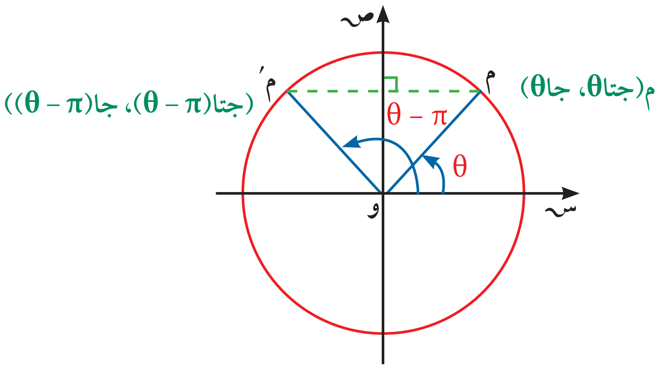
أكمل إذا كان:

أ جا م = ٠,٣ فإن جا(− م) = ...

ب جتا ل = ٠,٣٨ فإن جتا(− ل) = ...

ج ظا س = ٣,١٤ فإن ظا(− س) = ...

د جتا(− ص) = $\frac{1}{4}$ فإن جتا ص = ...



النسب المثلثية للزاويتين θ ، (π − θ).

النقطة المثلثية م′ هي انعكاس للنقطة المثلثية م في محور الصادات.

حيث م(س، ص) $\xrightarrow{ع_{ص}}$ م′(−س، ص)

فيكون: جتا(π − θ) = −جتاθ

جا(π − θ) = جاθ

قانون

جتا(π − θ) = −جتاθ

جا(π − θ) = جاθ

وبالتالي ظا(π − θ) = −ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

مثال 1

بدون استخدام الآلة الحاسبة

إذا كان:

أ جتا ٦٠° = $\frac{1}{2}$ ، أوجد جتا ١٢٠°.

ب جا $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، أوجد جا $\frac{3\pi}{4}$.

ج ظاθ = $\frac{3}{5}$ ، أوجد ظا(π − θ).

حاول أن تحل 2

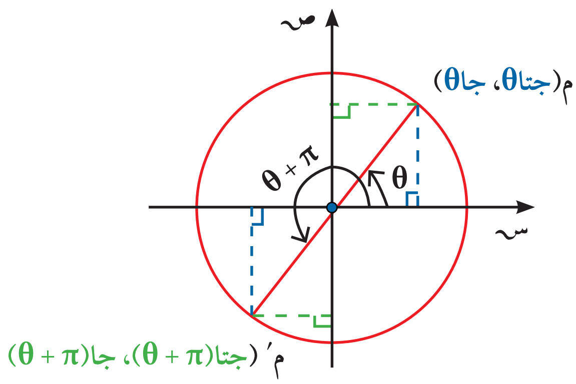
بدون استخدام الآلة الحاسبة. إذا كان:

أ) جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ ، فأوجد جا ١٥٠°.

ب) جتاس = $\frac{٤}{٥}$ ، فأوجد جتا(π − س).

ج) ظا $\frac{π}{١٢}$ = ٢ − $\sqrt{٣}$، فأوجد ظا $\frac{١١π}{١٢}$.

النسب المثلثية للزاويتين θ، (π + θ).



النقطة م′ هي انعكاس للنقطة م في نقطة الأصل.

حيث م(س، ص) $\xrightarrow[\text{نقطة الأصل}]{\text{انعكاس في}}$ م′(−س، −ص)

فيكون: جتا(π + θ) = −جتاθ

جا(π + θ) = −جاθ

قانون

جتا(π + θ) = −جتاθ

جا(π + θ) = −جاθ

وبالتالي ظا(π + θ) = ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

مثال 3

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان:

أ) جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ ، فأوجد جا ٢١٠°.

ب) ظا $\frac{π}{٨}$ = −١ + $\sqrt{٢}$ ، فأوجد ظا $\frac{٩π}{٨}$.

حاول أن تحل 3

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جتا ٤٠° $\simeq$ ٠,٧٦٦ . فأوجد جتا ٢٢٠°.

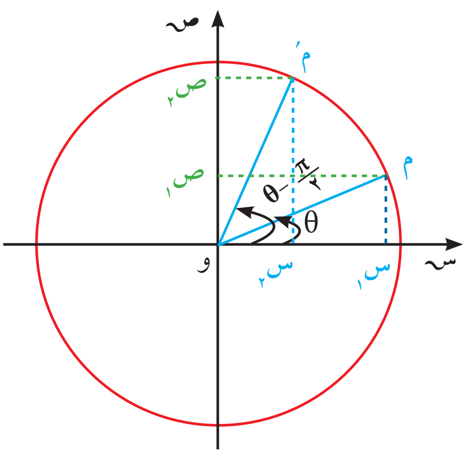
مثال 4

بدون استخدام الآلة الحاسبة، أوجد:

أ جا ١٥٠°.　　**ب** جتا ٢٤٠°.　　**ج** ظا $\frac{٢\pi}{٣}$.

حاول أن تحل 4

إذا كان جا ٥٦° $\simeq$ ٠,٨٢٩ . بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جا ٢٣٦°.



النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

Δو س١ م $\cong$ Δ و ص٢ م′　　لماذا؟

استخدم تطابق الأضلاع المتناظرة لإثبات:

جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جاθ

جا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جتاθ

استنتاج: لأي زاويتين متتامتين، فإن جيب إحداهما يساوي جيب تمام الأخرى.

قانون

جا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جتاθ

جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

الدوال المثلثية (الدائرية) على ح

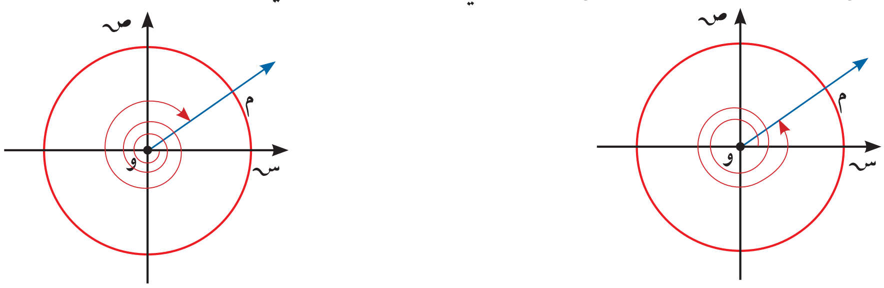
إذا كان ك عددًا صحيحًا فإن:

جا$(\theta + ٢$ك$\pi)$ = جاθ

جتا$(\theta + ٢$ك$\pi)$ = جتاθ

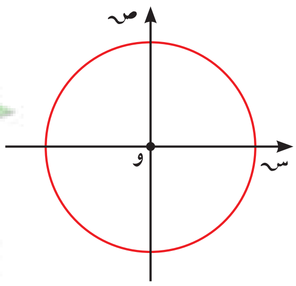
ظا$(\theta + $ك$\pi)$ = ظاθ حيث ظاθ معرّف

يبين الشكلان أدناه أن القوانين السابقة هي صحيحة أيضًا لأي زاوية قياسها θ:

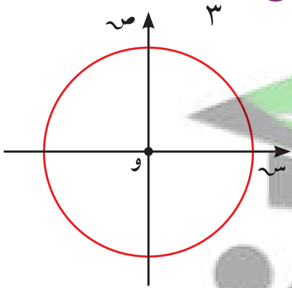


تدريب ارسم وحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية التي قياسها:

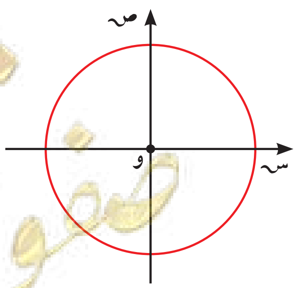
أ ٤٧٥°



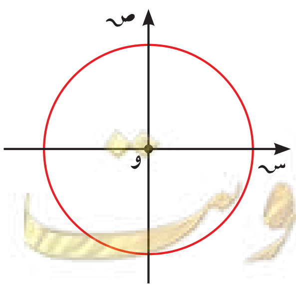
ب $\frac{١٧\pi}{٣}$



جـ $\frac{-١٦\pi}{٣}$



د −٨٩٠°



من العرض السابق يمكننا إعادة تعريف الدوال الدائرية باعتبار المجال هو ح فيكون:

تعريف

إذا كانت (س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ فإن:

١ جاθ = ص $\quad \forall\, \theta \in$ ح

٢ جتاθ = س $\quad \forall\, \theta \in$ ح

٣ ظاθ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، س $\neq$ ٠ $\quad$ حيث $\theta \in$ ح

٤ قاθ = $\frac{١}{\text{س}}$ ، س $\neq$ ٠ $\quad$ حيث $\theta \in$ ح

٥ قتاθ = $\frac{١}{\text{ص}}$ ، ص $\neq$ ٠ $\quad$ حيث $\theta \in$ ح

٦ ظتاθ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ، ص $\neq$ ٠ $\quad$ حيث $\theta \in$ ح

مثال 5

بسط التعبير التالي لأبسط صورة:

جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٩٠° – س).

....

....

....

....

حاول أن تحل 5

بسّط كلًّا من التعبيرات التالية لأبسط صورة:

أ جتا(θ + ٩π)

ب جتا$\left(-\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

كراسة التمارين

(١) اكتب النسب المثلثية التالية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ.

(أ) جا$(\pi + \theta)$

(ب) جتا$(\pi - \theta)$

(جـ) جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$

(د) جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

(٢) اكتب النسب المثلثية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية س.

(أ) ظا(١٨٠° − س)

(ب) جتا(١٨٠° + س)

(جـ) جا(− س)

(٤) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) جا١٥٠°

(ب) ظا(−٢٢٥°)

(جـ) جتا(−١٣٥°)

(٥) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) جتا $\frac{٧\pi}{٦}$

(ب) جا$\left(-\frac{٢\pi}{٣}\right)$

(جـ) ظا $\frac{١١\pi}{٦}$

بنود موضوعية

في التمارين (٧–١٠)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة .

(٧) إذا كانت جاθ = ٠,٢ فإن جا$(\pi + \theta)$ = ٠,٢ (أ) (ب)

(٨) إذا كانت جتا$\theta = \frac{٢}{٣}$ فإن قا$\theta = \frac{٣}{٢}$ (أ) (ب)

(٩) إذا كانت ظاθ = ٣ فإن ظتا$(\pi + \theta)$= ٣ (أ) (ب)

(١٠) إذا كانت جا$\theta = \frac{١}{٥}$ فإن قتا$(\pi + \theta)$ = –٥ (أ) (ب)

(١١) بسّط التعبيرات التالية لأبسط صورة:

(أ) جتا$(\pi - \theta)$ – جتا$(-\theta)$ + جا$(\pi + \theta)$ + جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$.

(ب) جا$(\pi + \theta)$ – جتا$\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$ + جتا$(\theta - \pi)$ + جا$\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$.

حل معادلات مثلثية

حل المعادلة: جتا س = جتاθ

هو س = θ + ٢ك π أو س = $-\theta$ + ٢ك π (ك $\in$ صـ)

لاحظ أن جيب تمام الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع.

مثال 6

حل كلًّا من المعادلتين:

أ جتا س = $\frac{١}{٢}$

....

....

....

....

....

ب ٢جتا س − $\sqrt{٣}$ = ٠

....

....

....

....

....

حاول ان تحل 6

حل المعادلة : $\sqrt{٢}$ جتا س = ١ .

حل المعادلة جا س = جاθ

هو س = θ + ٢كπ أو س = $(\pi - \theta)$ + ٢كπ ، (ك ∈ ص)

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني.

مثال 7

حل كلًّا من المعادلتين:

أ جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ب ٢جا س = $\sqrt{٢}$

....

....

....

....

....

حاول ان تحل 7

حل المعادلة: ٢جا س − ١ = ٠.

....

....

....

....

....

حل المعادلة ظا س = ظاθ هو س = θ + كπ، (ك ∈ ص)

لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث.

مثال 8 حل المعادلة: ظا س = $\sqrt{٣}$.

....

حاول ان تحل 8 حل المعادلة: $\sqrt{٣}$ ظا س = ١ .

....

كراسة التمارين

(١٢) حلّ المعادلات التالية:

(أ) جتا س = + $\frac{١}{٢}$

....

(ب) ظتا س = $\sqrt{٣}$

(جـ) ٢ جا س = +$\sqrt{٢}$

(٢) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

إذا كان جا س = $\sqrt{٣}$ فإن مجموعة الحل = $\varnothing$	أ	ب
إذا كان جتا س = $\frac{١}{٢}$ فإن س = $\frac{\pi}{٣}$	أ	ب
إذا كانت س = $\frac{\pi}{٦}$ فإن جا س = $\frac{١}{٢}$	أ	ب
مجموعة حل قا س = ٣,٠ هي $\varnothing$	أ	ب
ظا (١٥π) = صفر	أ	ب

في التمارين (٣-٥)، اختر الإجابة الصحيحة:

(٣) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها $\frac{١}{٢}$ هي:

(أ) جا(-٣٣٠°) (ب) جتا(-٢٤٠°) (جـ) ظتا(-١٥٠٠°) (د) ظا٧٦٥°

(٤) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$:

(أ) جتا $\frac{٣١\pi}{٦}$ (ب) جا$\left(-\frac{٣٥\pi}{٣}\right)$ (جـ) ظا $\frac{١٧\pi}{٦}$ (د) قا $\frac{١٣\pi}{٣}$

(٥) إن قيمة المقدار قا(٢π - θ) - قتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ + جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ + جاθ هي:

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

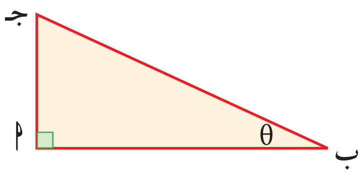
العلاقات بين الدوال المثلثية 2

تدريب

أكمل:

$\text{جا}\theta = \frac{\cdots}{\text{الوتر}}$ ، $\text{جتا}\theta = \frac{\cdots}{\text{الوتر}}$

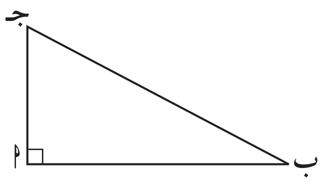
$\text{ظا}\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\cdots} = \frac{\frac{\cdots}{\text{الوتر}}}{\frac{\cdots}{\text{الوتر}}} = \frac{\cdots}{\cdots}$



المتطابقات المثلثية الأساسية

$\text{ظا}\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ ، $\text{ظتا}\theta = \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$ ، $\text{ظتا}\theta = \frac{1}{\text{ظا}\theta}$ حيث المقام ≠ ٠

$\text{قا}\theta = \frac{1}{\text{جتا}\theta}$ ، $\text{قتا}\theta = \frac{1}{\text{جا}\theta}$



متطابقات فيثاغورث

$\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta = 1$ تسمى متطابقة فيثاغورث

$1 + \text{ظا}^2\theta = \text{قا}^2\theta$

$1 + \text{ظتا}^2\theta = \text{قتا}^2\theta$

مثال 1

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جتاθ = ٠,٤ ، $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$. فأوجد جا$\theta$، ظا$\theta$.

أ أوجد جاθ.

ب استنتج ظاθ.

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل 1

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جاθ = $\frac{٣}{٥}$ ، $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$ فأوجد جتاθ، ظاθ.

....

....

....

....

....

....

مثال 2

بدون استخدام الآلة الحاسبة،
إذا كان ظاθ = ٢$\sqrt{٢}$، جتاθ > ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

حاول أن تحل 2

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان ظاθ = $\frac{٣}{٤}$ ، جا θ > ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

مثال 3

بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظاθ = $\frac{١٢}{٥}$، جاθ > ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

حاول أن تحل 3

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان ظاθ = $\frac{٢٤}{٧}$، جتاθ > ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

مثال 4 بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جاθ = $\frac{٣}{٧}$ ، جتاθ > ٠ فأوجد جتاθ، ظتاθ، ظاθ.

حاول أن تحل 4 بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان ظتاθ = $\frac{٥}{٨}$، جتاθ > ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

إذا كان ظتاθ = $\frac{٥}{٨}$، جتاθ > ٠ فأوجد جاθ.

مثال 5 أثبت صحة المتطابقة التالية: جا^{3}س + جاس × جتا^{2}س = جاس.

حاول أن تحل 5 أثبت صحة المتطابقة: جتا^{4}س + جا^{2}س × جتا^{2}س = جتا^{2}س.

مثال 6 أثبت صحة المتطابقة التالية:

$$\frac{(\text{قا}\theta + ١)(\text{قا}\theta - ١)}{\text{جا}^2\theta} = \text{قا}^2\theta$$

حيث المقام ≠ ٠

حاول أن تحل 6 أثبت صحة المطابقة: (قا² θ + قتا² θ) − (ظا² θ + ظتا² θ) = ٢.

كراسة التمارين

(١) إذا كانت جاθ = $\frac{١}{٥}$ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$.

فأوجد قيمة النسب المثلثية الأخرى للزاوية θ.

(٢) إذا كانت ظاθ = $\sqrt{٨}$ ، جتاθ > ٠

أوجد جاθ، جتاθ.

(٣) إذا كانت جتاθ = $\frac{١}{٣}$ ، جاθ < ٠

أوجد جاθ، ظتاθ.

في التمارين (٤–٧)، أوجد قيمة كلّ مما يلي:

(٤) (جاθ + جتاθ)^{٢} − ٢جاθ جتاθ.

(٥) (ظا^{٢} θ + ١)جتا^{٢} θ.

بنود موضوعية

في التمارين (١–٦)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

(١) $\text{قتا}\theta \times \text{جتا}\theta - \text{ظتا}\theta = ٠$ (أ) (ب)

(٢) $\text{ظتا}^{٢}(-\theta) - \text{قتا}^{٢}\theta = -١$ (أ) (ب)

(٣) $(\text{قا}\theta + \text{ظا}\theta)(\text{قا}\theta - \text{ظا}\theta) = ١$ (أ) (ب)

(٤) $\text{جا}\theta\ \text{قتا}\theta - \text{جتا}^{٢}\theta - \text{جا}^{٢}\theta = ٠$ (أ) (ب)

(٥) $\frac{\text{جا}^{٢}\theta}{١ - \text{جتا}\theta} - \text{جتا}\theta = -١$ (أ) (ب)

(٦) $\text{ظا}\theta + \text{ظتا}\theta - \text{قا}\theta\ \text{قتا}\theta = ٠$ (أ) (ب)

في التمرينين (٧–٨)، اختر الإجابة الصحيحة:

(٧) إذا كانت $\text{جتا}\theta = -\frac{٥}{٧}$ ، θ تقع في الربع الثالث. فإن $\text{جا}\,\theta =$

(أ) $\frac{-٧}{٢\sqrt{٦}}$ (ب) $\frac{٢\sqrt{٦}}{٧}$

(جـ) $\frac{-٢\sqrt{٦}}{٧}$ (د) $\frac{٧}{٢\sqrt{٦}}$

(٨) إذا كانت $\text{قا}\theta = \frac{٣}{٢}$ ، θ تقع في الربع الرابع. فإن $\text{ظا}\,\theta =$

(أ) $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

(جـ) $\frac{-٢}{\sqrt{٥}}$ (د) $\frac{-\sqrt{٥}}{٢}$

في التمرينين (٩–١٠)، أثبت صحة المتطابقات التالية:

(٩) $\text{جا}\theta\,(\text{ظتا}\theta + \text{ظا}\theta) = \text{قا}\theta$

(١٠) $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جا}\theta - \text{جتا}\theta} = \frac{١}{١ - \text{ظتا}\theta}$.