تجميع قوانين ونظريات الرياضيات

فصل ثانى صف 12 علمى

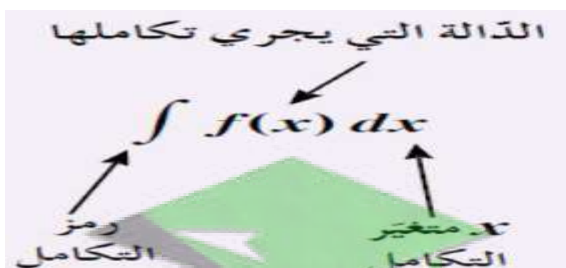
مذكره مجانية ... المرجع: الكتاب المدرسى وكراسة التمارين وزارة التربية والتعليم الكويتية

تعريف: المشتقة العكسية

تسمى الدالة F مشتقة عكسية للدالة f المعرفة على مجالها I.

إذا كان: $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

التكامل غير المحدد للدالة f بالنسبة إلى x يكتب $\int f(x)\,dx$ ويساوي $F(x)+C$ حيث $F(x)$ هي المشتقة العكسية و C ثابت التكامل.



قواعد التكامل غير المحدد Rules of Indefinite Integral

1. $\int k\,dx = kx + C$ k عدد ثابت
2. قاعدة القوى: $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \in Q - \{-1\}$

خواص التكامل غير المحدد Properties of Indefinite Integral

1. خاصية الضرب بعدد ثابت: $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \quad , \quad k \neq 0$
2. خاصية الجمع والطرح: $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Rule of Integration by Substitution قاعدة التكامل بالتعويض

إذا كانت F هي مشتقة عكسية للدالة f فإن:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

وإذا كان $u = g(x)$ ، $du = g'(x)dx$ فإن:

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

تمكننا قاعدة التكامل بالتعويض من تعميم قاعدة القوى في التكامل غير المحدد كالتالي:

$$\int (g(x))^n g'(x)dx = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \in \mathbb{Q} - \{-1\} \quad , \quad C \text{ ثابت}$$

تكامل الدوال المثلثية:

التكامل غير المحدد	
1	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
2	$\int \sin kx\, dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$
3	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
4	$\int \cos kx\, dx = \frac{\sin kx}{k} + C$
5	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$
6	$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$
7	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$
8	$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$

Redian

shift + [5]

الآلة الحاسبة

$$\frac{d}{dx}\sin x \longrightarrow \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x \longrightarrow -\sin x$$

tan x

sec x sec x

cot x

−

csc x csc x

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x = (\sec x)^2$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \tan x \cdot \sec x$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x = -(\csc x)^2$$

$$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cdot \cot x$$

على الآلة الحاسبة

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

متطابقة فيثاغورس

أشتقاق الدوال الاسيه واللوغارتمية:

قاعدة (1)

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$$

إذا كانت u دالة في x قابلة للاشتقاق فإن:

$$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

قاعدة (2)

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

وفي حالة u دالة في x قابلة للاشتقاق فإن:

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

تذكر:

$\ln e = 1$

$\ln e^m = m$

$m > 0 \quad , \quad n > 0$

(1) $\ln(m \cdot n) = \ln m + \ln n$

(2) $\ln \frac{m}{n} = \ln m - \ln n$

(3) $\ln m^k = k \ln m$

(4) $e^{\ln m} = m$

قاعدة (3)

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

إذا كانت u دالة في x قابلة للاشتقاق:

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

لاحظ أن: $\frac{d}{dx}(\ln g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

قاعدة (4)

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

تكامل الدوال الاسيه واللوغارتمية:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

والجدول التالي يبيّن تكامل بعض الدوال الأسية واللوغاريتمية حيث: $u = g(x)$

قاعدة المشتقة	التكامل غير المحدد
$\frac{d}{dx}e^x = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx} = u'e^u$	$\int u'e^u\,dx = e^u + C$
$\frac{d}{dx}\ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\frac{d}{dx}\ln\lvert u\rvert = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$	$\int \frac{u'}{u}dx = \ln\lvert u\rvert + C$

لاحظ أن: $\int \frac{g'(x)dx}{g(x)} = \ln|g(x)| + C$

تكامل بالتجزىء:

Integration by Parts Formula قاعدة التكامل بالتجزيء

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

معلومة:
للمساعدة يمكننا استخدام النمط التالي:

$u = \square \;,\; dv = \square$

$du = \square \;,\; v = \square$

تذكر:

$$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$$

الكسور الجزئية:

المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية غير مكررة.

لتكن $f(x) = \frac{r(x)}{h(x)}$ حيث المقام $h(x)$ على الصورة:

$$h(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\ldots(a_kx + b_k)$$

حيث لا يوجد عوامل مكررة ولا يوجد عامل ثابت مضروب بآخر.

في هذه الحالة تكون الدالة f على صورة كسور جزئية كالتالي:

$$\frac{r(x)}{h(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \ldots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

ثانيًا: المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية بعضها متكرر

المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية بعضها متكرر. لكل عامل من عوامل $h(x)$ على الصورة $(mx+n)^k$، يجب أن يحتوي التفكيك إلى كسور جزئية على مجموع حدود عددها k:

$$\frac{A_1}{mx+n} + \frac{A_2}{(mx+n)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(mx+n)^k}$$

عندما تكون درجة البسط في الحدودية النسبية $f(x) = \frac{r(x)}{h(x)}$ مساوية أو أكبر من درجة المقام، نوجد أولًا ناتج القسمة $q(x)$ باستخدام القسمة المطولة ثم نكتب الدالة على الصورة: $f(x) = q(x) + \frac{p(x)}{h(x)}$ حيث $p(x)$ هو الباقي.

التكامل المحدد :

معلومة:

عند كتابة $\int_a^b f(x)\,dx$ يأخذ المتغيّر x كلّ القيم من a إلى b.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

خواص التكامل المحدد Properties of the Definite Integral

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة I ، $k \in \mathbb{R}$ ، $a, b, c \in I$ فإن:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
3. $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$
4. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

لاحظ في خاصية 3 أنه: إذا كان $k = 1$ فإن: $\int_a^b dx = b - a$

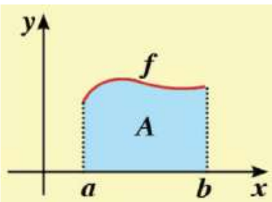
لتكن f دالة متصلة على $[a, b]$

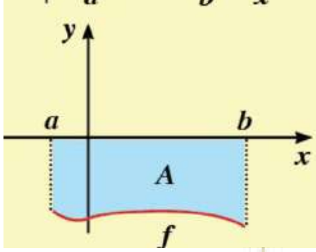
6. إذا كانت: $f(x) \geq 0 \quad \forall \quad x \in [a, b]$
فإن: $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
7. إذا كانت: $f(x) \leq 0 \quad \forall \quad x \in [a, b]$
فإن: $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

8. لتكن الدالتين f, g متصلتين على $[a, b]$ وكانت: $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$
فإن: $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

في المستوى الإحداثي لتكن f دالة متصلة على $[a, b]$،
A تمثل مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات
والمستقيمين $x = b$ ، $x = a$

1. إذا كانت: $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$
فإن: $\int_a^b f(x)\,dx = A$
2. إذا كانت: $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$
فإن: $\int_a^b f(x)\,dx = -A$





المساحة فى المستوى

أولًا: مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة $[a, b]$

علمنا من دراستنا السابقة أنه إذا كانت f دالة متصلة على $[a, b]$ فإن مساحة المنطقة A المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = a$, $x = b$

إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a, b]$

فإن $A = \int_a^b f(x)dx$

إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in [a, b]$

فإن $A = -\int_a^b f(x)dx$

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ ، $c \in (a, b)$ حيث $f(c) = 0$

فإن مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة $[a, b]$ هي:

$$A = \left|\int_a^c f(x)dx\right| + \left|\int_c^b f(x)dx\right|$$

وهذه القاعدة صحيحة عند وجود: ... ، c_1 ، c_2 ، c_3 تنتمي إلى (a, b)

حيث $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = ... = 0$

ثانيًا: مساحة منطقة محددة بمنحنيي دالتين في الفترة $[a, b]$

مساحة منطقة محددة بين منحنيين

إذا كانت كل من g ، f متصلتين على الفترة $[a, b]$، حيث

$$f(x) \geqslant g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين g ، f والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$ هي:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

يمكن إيجاد المساحة A باستخدام القيمة المطلقة دون الحاجة لاستخدام القيمة الاختيارية كالتالي:

$$A = \left|\int_{-1}^2 (y_1 - y_2)dx\right| = \left|\int_{-1}^2 (y_2 - y_1)dx\right|$$

حجوم الأجسام الدورانية

دالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = b$, $x = a$ حيث $a < b$ دورة كاملة حول محور السينات فإن حجم هذا المجسم يساوي:

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx$$

إذا نتج مجسم عن دوران منطقة محددة بمنحنيي الدالتين g , f والمستقيمين $x = b$, $x = a$ دورة كاملة حول محور السينات، بحيث f, g لهما الإشارة نفسها في الفترة $[a, b]$، فإن حجم هذا المجسم يعطى بالقاعدة:

$$V = \pi\int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2]dx$$

حيث: $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ أو $f(x) \leqslant g(x) \leqslant 0$

طول القوس

قاعدة طول القوس

إذا كانت الدالة f' متصلة على $[a, b]$ فإن طول القوس من منحنى $y = f(x)$ في $[a, b]$ هو:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

معادلة منحنى الدالة

- يمكن إيجاد معادلة منحنى دالة بمعلومية ميل المماس على المنحنى ومعلومية نقطة محددة يمر بها هذا المنحنى.

معادلة المنحنى هي: $f(x) = \int f'(x)dx$

ميل العمودي $= \dfrac{-1}{f'(x)}$ حيث $f'(x) \neq 0$

المعادلات التفاضلية

تعريف (1)

المعادلات التفاضلية: هي معادلات تحتوي على دالّة مجهولة وبعض مشتقاتها.

نستخدم عادة y بدلًا من $f(x)$.

تعريف (2)

رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة لمشتقة دالة موجودة في هذه المعادلة.

تعريف (3)

درجة المعادلة التفاضلية: هي أكبر أس لأعلى المشتقات رتبة.

I المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى التي على الصورة $y' = f(x)$ حلها يكون على الصورة: $y = \int f(x)dx$

II بعض المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى تحوي المتغيرين: y , x على الصورة: $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$ يتم حلها بطريقة فصل المتغيرات بالصورة التالية:

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx$$

ونكامل الطرفين وصولًا إلى حل المعادلة التفاضلية وهو إيجاد y.

III المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay$ حيث $a \neq 0$ حلولها هي $y = k e^{ax}$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$.

IV المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay + b$ حيث $b \neq 0$, $a \neq 0$ تكون حلولها: $y = k e^{ax} - \frac{b}{a}$

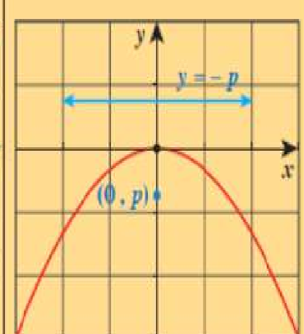
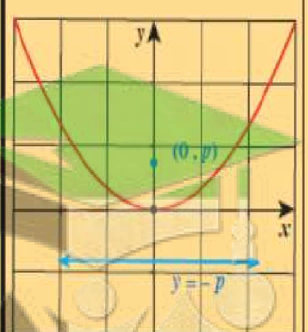
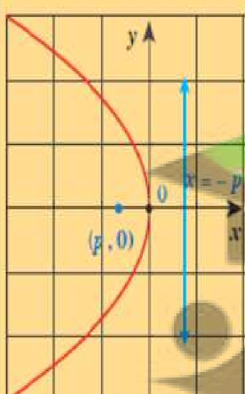
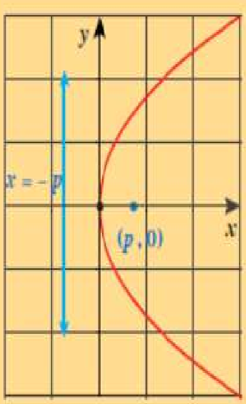
V المعادلات التفاضلية على الصورة: $y'' = f(x)$

يتم حل هذه المعادلات بخطوتين: $y' = \int f(x) dx = F(x) + C_1$

ثم $y = \int (F(x) + C_1) dx$

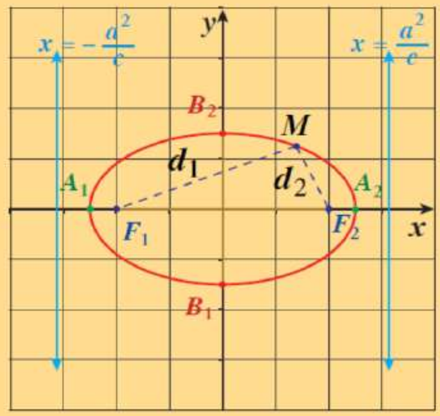
القطع المكافىء

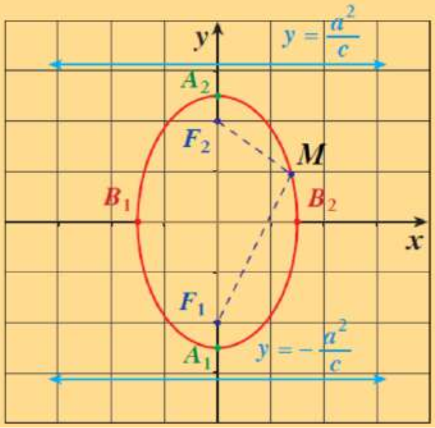
قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل $(0, 0)$

الصورة العامة	$x^2 = 4py$		$y^2 = 4px$	
الفتحة	إلى أعلى أو إلى أسفل		إلى اليمين أو إلى اليسار	
البؤرة	$(0, p)$		$(p, 0)$	
الدليل	$y = -p$		$x = -p$	
محور التناظر	محور الصادات $(y - axis)$		محور السينات $(x - axis)$	
المسافة من الرأس إلى البؤرة	$\|p\|$			
المسافة من الرأس إلى الدليل				
إشارة p	$p < 0$	$p > 0$	$p < 0$	$p > 0$
الشكل				

القطع الناقص

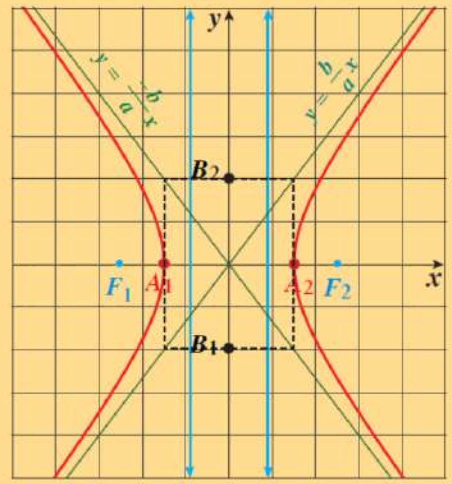
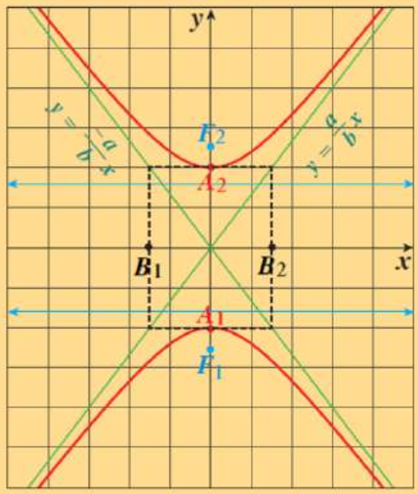
بيان القطع





	$a > b > 0$	$a > b > 0$
المعادلة	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
المحور الأكبر	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
الرأسان طرفا المحور الأكبر	$A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$	$A_1(0, -a)$, $A_2(0, a)$
طول المحور الأكبر	$2a$	
طرفا المحور الأصغر	$B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$	$B_1(-b, 0)$, $B_2(b, 0)$
طول المحور الأصغر	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$
العلاقة الأساسية	$a^2 = b^2 + c^2$	
معادلتا الدليلين	$x = -\frac{a^2}{c}$, $x = \frac{a^2}{c}$	$y = -\frac{a^2}{c}$, $y = \frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع الناقص متناظر حول كل من محوريه ومركزه	

القطع الزائد

بيان القطع		
المعادلة	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
طرفا المحور القاطع الرأسان	$A_1(-a,0)\ ,\ A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)\ ,\ A_2(0,a)$
المحور القاطع (الأساسي)	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
طول المحور القاطع	$2a$	
طرفا المحور المرافق	$B_1(0,-b)\ ,\ B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)\ ,\ B_2(b,0)$
طول المحور المرافق	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0)\ ,\ F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)\ ,\ F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$c^2=a^2+b^2$	
معادلة الخطين المقاربين	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
معادلة الدليلين	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$y=\pm\frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع متناظر حول محوريه ومركزه	

القطع الناقص:

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

القطع الزائد:

$$MF_2 - MF_1 = 2a$$

الأختلاف المركزى

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

a إذا $e = 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا مكافئًا**

b إذا $e < 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا ناقصًا**

c إذا $e > 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا زائدًا**

الأحصاء

المتغيرات العشوائيه المتقطعة

المتغيّر العشوائي: هو دالة مجالها فضاء العينة S ومجالها المقابل هو $\mathbb{R}$ ومداها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ حيث $X : S \to \mathbb{R}$

(X هو المتغير العشوائي، S فضاء العينة، $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية).

- يكون المتغير العشوائي X متغيرًا عشوائيًا متقطعًا إذا كانت مجموعة القيم الممكنة له (المدى) $X(S)$: هي مجموعة متقطعة أي قابلة للعد، من الأعداد الحقيقية سواء أكانت منتهية أم غير منتهية.
- إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متقطعًا مداه $\{x_1 , x_2 , x_3 , ...\}$، فإن دالة التوزيع الاحتمالي f تعرّف كالتالي:

$$f(x_i) = P(X = x_i), \ i = 1, 2, 3, 4, ...$$

- دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X تحقق الشرطين:

1. $0 \le f(x) \le 1$
2. مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي f تساوي الواحد الصحيح،

أي أن: $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + ... = 1$

- إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي f،

مدى $X = \{x_1 , x_2 , x_3 , ...\}$

فإن التوقع للمتغير العشوائي X يكون:

التوقع: $\mu = \sum x_i f(x_i)$

أي أن: $\mu = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + x_3 f(x_3) + ...$

- إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي f، فإن التباين للمتغير العشوائي يعطى بالصيغة:

التباين: $\sigma^2 = \sum x_i^2 f(x_i) - \mu^2$ حيث μ هو التوقع.

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\text{التباين}}$

تعريف:

دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة a هي احتمال وقوع المتغير العشوائي X بحيث يكون X أصغر من أو يساوي a

أي أن: $F(a) = P(X \leqslant a)$

$$P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a) = 1 - F(a)$$

1. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
2. $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$
3. $P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$

المتغيرات العشوائية المستمرة (المتصلة)

تعريف: المتغير العشوائي المتصل **Continuous Random Variable**

هو المتغير التي تكون مجموعة القيم الممكنة له عبارة عن فترة من الأعداد الحقيقية أي أن مدى المتغير العشوائي المتصل $X = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$ وهي مجموعة غير قابلة للعد.

خواص دالة كثافة الاحتمال $f(x)$

1. $f(x)$ هي دالة متصلة على مجالها.
2. $f(x) \geqslant 0$ لكل قيم x التي تنتمي لمجال الدالة.
3. قيمة المساحة المحددة بمنحنى الدالة $f(x)$ ومحور السينات تساوي الواحد الصحيح.
4. يمكن إيجاد الاحتمال $P(a \leq X \leq b)$ بحساب المساحة تحت المنحنى f بين القيمة a, b من الشكل السابق.
5. تنعدم المساحة المظللة في الشكل السابق إذا كان $a = b$
   أي أنه لأي متغير عشوائي متصل فإن: $P(X = a) = 0$

القوانين

إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا له دالة التوزيع الاحتمالي f فان التوقع و التباين للمتغير العشوائي يعطى بالصيغة:

التوقع : $\mu = \sum\left(x_i f(x_i)\right)$

التباين : $\sigma^2 = \sum\left((x_i)^2 f(x_i)\right) - \mu^2$

الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

خواص دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X

$$(1) \quad P(X > a) = 1 - P(X \le a) = 1 - F(a)$$
$$(2) \quad P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$$

دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الاحتمالي المنتظم على $[a, b]$ هي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & : a \le x \le b \\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

التوقع (الوسط) للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو: $\mu = \frac{a+b}{2}$

التباين للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو: $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$
