قوانين الصف الحادي عشر علمي (الفصل الدراسي الثاني)

أولاً : الأعداد المركبـــــــة

١- الوحدة التخيلية : $i^4 = 1$, $i^3 = -i$, $i^2 = -1$, $i = \sqrt{-1}$

٢- الصورة الجبرية للعدد المركب : $z = a + bi$

٣- الصورة الديكارتية للعدد المركب : $M(a, b)$

٤- المعكوس الجمعي للعدد المركب : $-z = -a - bi$

٥- مرافق العدد المركب : $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

٦- المعكوس الضربي للعدد المركب : $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{a^2 + b^2}$

٧- القيمة المطلقة للعدد المركب : $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

٨- الصورة القطبية للعدد المركب : $M(r, \theta)$

٩- التحويل من الاحداثيات القطبية الي الديكارتية :

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

١٠- التحويل من الاحداثيات الديكارتية الي القطبية :

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan\alpha = \left|\dfrac{y}{x}\right|$

١١- الصورة المثلثية للعدد المركب : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

١٢- الصورة المثلثية في حالاتها الخاصة :

العدد	المقياس	سعة (بالراديان) (rad)
a	a	0
$-a$	$\lvert -a \rvert = a$	π
bi	b	$\frac{\pi}{2}$
$-bi$	$\lvert -b \rvert = b$	$\frac{3\pi}{2}$

١٣- الجذر التربيعي للعدد المركب : $|w^2| = |z|$, $w^2 = z$, $w = m + ni$

ثانياً : حســـــاب المثلثات

١- خصائص الدوال المثلثية باعتبار $n \in \mathbb{Z}$

الخاصية	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
الدورة	2π	2π	π
المجال	$(-\infty , \infty)$	$(-\infty , \infty)$	$\mathbb{R}-\left\{x , x=\frac{\pi}{2}+n\pi\right\}$
المدى	$[-1 , 1]$	$[-1 , 1]$	$(-\infty , \infty)$
الأصفار	$x = n\pi$	$x=\frac{\pi}{2}+n\pi$	$x = n\pi$
زوجية أو فردية	فردية	زوجية	فردية

٢- **دالة الجيب ، دالة جيب التمام** sin , cos

الدورة : $\frac{2\pi}{|b|}$ ، **السعـــة** : $|a|$

٣- **دالة الظل** : tan **الدورة** : $\frac{\pi}{|b|}$ ، **ليس لها سعة**

٤- **قانون الجيب** : (**ضلع وزاويتان** ، **طول ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما**)

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

٥- **قانون جيب التمام** : (**ضلعان والزاوية المحصورة بينهما** ، **ثلاثة أضلاع**)

$$\cos \alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c} \quad , \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$\cos \beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2\,a\,c} \quad , \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2\,a\,b} \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

٦- **مساحة المثلث** :

$A = \frac{1}{2}$ (**حاصل ضرب طول ضلعين**) $\times$ Sin (**الزاوية المحصورة بينهما**)

$$S = \frac{1}{2}(a+b+c) \quad , \quad A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ثالثاً : تطبيقات علي حســــاب المثلثات

١- المتطابقات المثلثية الأساسية

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad , \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad , \quad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

٢- حل المعادلات المثلثية

$\cos\theta = \cos\alpha$

إما $\theta = \alpha + 2k\pi$

أو $\theta = -\alpha + 2k\pi$

$\sin\theta = \sin\alpha$

إما $\theta = \alpha + 2k\pi$

أو $\theta = (\pi - \alpha) + 2k\pi$

$\tan\theta = \tan\alpha$

$\theta = \alpha + k\pi$

٣- متطابقات الدوال المتكافئة

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta \quad , \quad \tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta \quad , \quad \sec(\frac{\pi}{2} - \theta) = \csc\theta$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta \quad , \quad \cot(\frac{\pi}{2} - \theta) = \tan\theta \quad , \quad \csc(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sec\theta$$

٤- متطابقات المجموع والفرق

$$\cos(\beta + \alpha) = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha$$

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\beta + \alpha) = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha$$

$$\tan(\beta + \alpha) = \frac{\tan\beta + \tan\alpha}{1 - \tan\beta\tan\alpha}$$

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha}$$

٥- متطابقات ضعف الزاوية

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

٦- متطابقات نصف الزاوية

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

رابعاً : هندســـــــة الفضـاء

١- مسـلمات الفضـاء

أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد (واحد فقط).

كل مستقيم يحوي على الأقل نقطتين مختلفتين.

من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بالنقطة ويوازي المستقيم المعلوم.

في كل مستوٍ يوجد على الأقل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

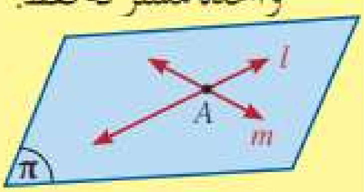
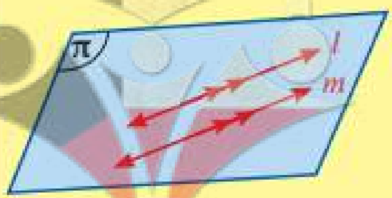
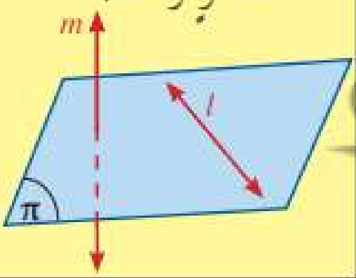
أي ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة واحدة يحويها مستوٍ وحيد.

يحوي الفضاء على الأقل أربع نقاط مختلفة غير مستوية.

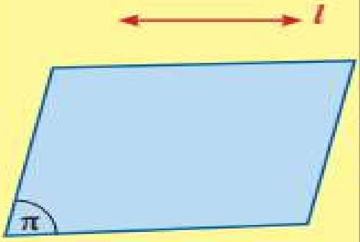
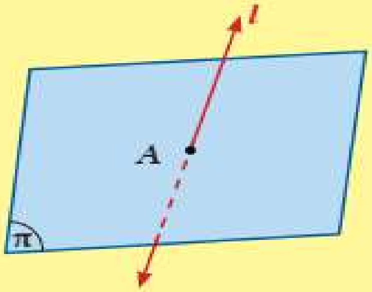
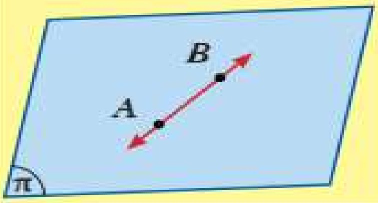
٢- حـالات تعـيين المسـتوي في الفضـاء

- أي ثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة واحدة تعيّن مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيم ونقطة خارجة عنه يعيّنان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متقاطعان يعينان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متوازيان مختلفان يعينان مستويًا واحدًا فقط.

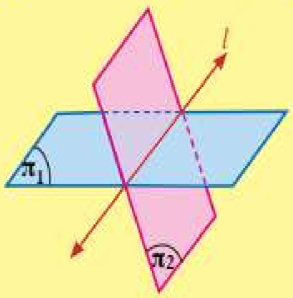
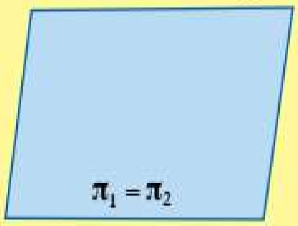
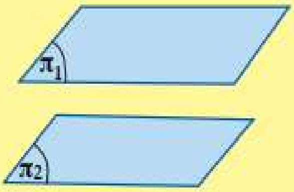
٣- أوضـاع المسـتقيمات في الفضـاء

a متقاطعان	b متوازيان	c متخالفان
إذا وقعا في مستوٍ واحد وكان بينهما نقطة واحدة مشتركة فقط. 	إذا وقعا في مستوٍ واحد وكانا غير متقاطعين. 	إذا كان لا يحويهما مستوٍ واحد. 
$\overleftrightarrow{l}\cap\overleftrightarrow{m}=\{A\}$ مستقيمان متقاطعان	$\overleftrightarrow{l}\subset\pi\ ,\ \overleftrightarrow{m}\subset\pi\ ,$ $\overleftrightarrow{l}\cap\overleftrightarrow{m}=\phi\Longrightarrow\overleftrightarrow{l}\parallel\overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متوازيان	$\overleftrightarrow{l}\subset\pi\ ,\ \overleftrightarrow{m}\not\subset\pi$ $\Longrightarrow\overleftrightarrow{l}\cap\overleftrightarrow{m}=\phi$ مستقيمان متخالفان

٤- أوضاع مستقيم ومستوي في الفضاء

a صفر نقطة مشتركة:	b نقطة مشتركة واحدة:	c نقطتان مختلفتان مشتركتان على الأقل
المستقيم موازٍ للمستوي (في هذه الحالة يكون البعد بينهما ثابت). 	المستقيم يقطع المستوي. 	المستقيم يقع بكامله (بتمامه) في المستوي (المستقيم يوازي المستوي). 
$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \phi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \pi$	$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \{A\}$	$\overleftrightarrow{AB} \cap \pi = \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$ $\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \pi$

٥- أوضاع مستويين في الفضاء

a المستويان متقاطعان في مستقيم.	b المستويان منطبقان (يشتركان في جميع النقاط).	c المستويان متوازيان (لا توجد نقاط مشتركة بينهما).
		
$\pi_1 \cap \pi_2 \neq \phi \Longrightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$	$\pi_1 = \pi_2 \Longrightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$	$\pi_1 \cap \pi_2 = \phi \Longrightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$

٦- نظريات ونتائج

نظرية (1)

إذا وازى مستقيم خارج مستوٍ مستقيمًا في المستوي، فإنه يوازي المستوي.

نظرية (2)

إذا وازى مستقيم مستويًا، فكل مستوٍ مار بالمستقيم ويقطع المستوي، يقطعه في مستقيم موازٍ للمستقيم المعلوم.

نظرية (3)

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيان.

نتيجة (1)

إذا توازى مستقيمان ومرّ بهما مستويان متقاطعان،
فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلًّا من هذين المستقيمين.

نظرية (4)

إذا قطع مستوٍ مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين.

نظرية (5)

المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديًّا على مستويهما.

نتيجة (2)

جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي إلى هذا المستقيم تكون محتواة في مستوٍ واحد عموديًّا على المستقيم المعلوم.

نظرية (6)

إذا كان مستقيم عموديًّا على كلٍّ من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيين.

نظرية (7)

إذا كان مستقيم عموديًّا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديًّا على المستوي الآخر.

نظرية (8)

المستقيمان العموديان على مستوٍ متوازيان.

نظرية (9)

إذا توازى مستقيمان أحدهما عموديًا على مستوٍ كان المستقيم الآخر عموديًا على المستوي أيضًا.

نظرية (10)

إذا كان مستقيم عموديًا على مستوٍ، فكل مستوٍ يمر بذلك المستقيم يكون عموديًا على المستوي.

نتيجة (3)

إذا تعامد مستويان ورسم في أحدهما مستقيم عمودي على خط تقاطعهما فإنه يكون عموديًا على المستوي الآخر.

نتيجة (4)

إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودي على مستوٍ ثالث فإن خط تقاطع المستويين يكون عموديًا على هذا المستوي الثالث.

خامساً : الإحصـــــــاء

١- **التباديل** :

$$_{n}P_{r} = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$$

$$_{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ملاحظـــة : $_{n}P_{0} = 1 \quad , \quad _{n}P_{n} = n! \quad , \quad _{n}P_{1} = n$

٢- **التوافيق** :

$$_{n}C_{r} = \frac{nPr}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

ملاحظـــة : $_{n}C_{0} = 1 \quad , \quad _{n}C_{n} = 1 \quad , \quad _{n}C_{1} = n$

٣- **نظرية ذات الحدين** :

$$(x+y)^n = {_nC_0}x^n + {_nC_1}x^{n-1}y + {_nC_2}x^{n-2}y^2 + \ldots\ldots + {_nC_r}x^{n-r}y^r + \ldots\ldots + {_nC_{n-1}}xy^{n-1} + {_nC_n}y^n$$

٤- **الحد العام** :

$$T_{r+1} = {_nC_r} \cdot X^{n-r} \cdot y^r$$

٥- **الاحتمال** :

$$P(E) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث } E}{\text{عدد نواتج فضاء العينة } S} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

A، B حدثان فإن		$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
A، B حدثان متنافيان	$\Leftrightarrow$	$P(A \cap B) = 0$
A، B حدثان مستقلان	$\Leftrightarrow$	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$\bar{A}$ هو الحدث المتمم للحدث A	$\Leftrightarrow$	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

٦- **احتمال ذات الحدين** :

$$P(E) = {_nC_k} \cdot m^k \cdot (1-m)^{n-k}$$