٦-١ الدائرة

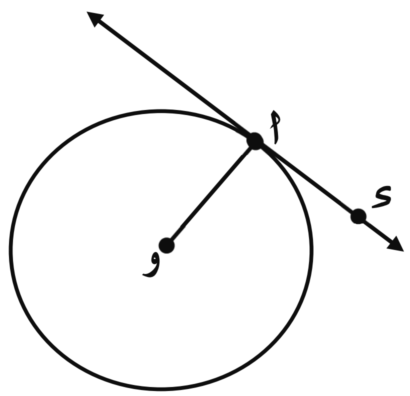
نظرية ١

كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.

مماس الدائرة

المماس للدائرة هو مستقيم في المستوي يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة.

نقطة التقاطع تسمى نقطة التماس.



$\overleftrightarrow{\text{أء}}$ مماس.

$\overrightarrow{\text{أء}}$ شعاع مماس.

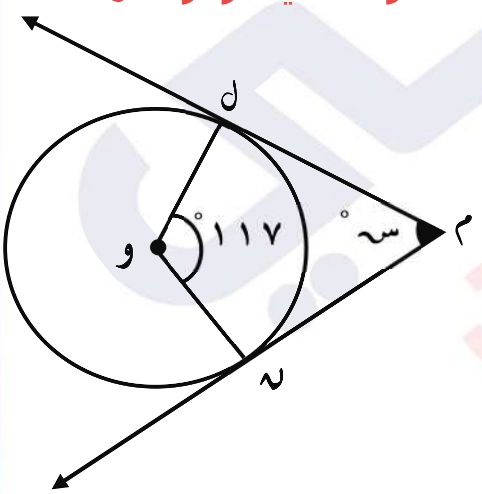
$\overline{\text{أء}}$ قطعة مماسية

$\overline{\text{أو}}$ نصف قطر التماس

نظرية ٢

المماس عمودي على نصف قطر التماس.

مثال ١ في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{مل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{من}}$ من مماسان للدائرة التي مركزها و أوجد قياس الزاوية ل $\hat{\text{م}}$ ن.



الحـــل

البرهان :- ∵ $\overleftrightarrow{\text{مل}}$ مماس ، $\overline{\text{ول}}$ نصف قطر التماس

∴ $\overleftrightarrow{\text{مل}} \perp \overline{\text{ول}}$

∴ ق$(\hat{\text{ل}}) = ٩٠°$ نظرية

∵ $\overleftrightarrow{\text{من}}$ مماس ، $\overline{\text{ون}}$ نصف قطر التماس

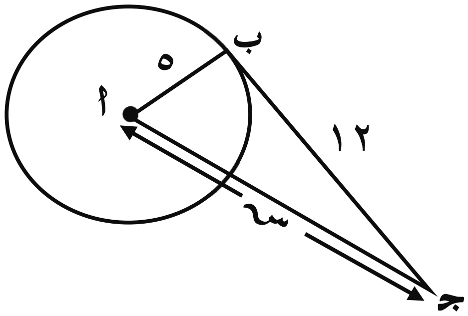
∴ $\overleftrightarrow{\text{من}} \perp \overline{\text{ون}}$

∴ ق$(\hat{\text{ن}}) = ٩٠°$ نظرية

∴ ق$(\hat{\text{م}}) = ٣٦٠° - (٩٠° + ٩٠° + ١١٧°) = ٦٣°$

لأن مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي $= ٣٦٠°$

مثال ٢ ب ج مماس للدائرة. أوجد قيمة س .



الحل

البرهان :-

∵ $\overleftrightarrow{\text{ب ج}}$ مماس ، $\overline{\text{ب أ}}$ نصف قطر التماس

∴ $\overleftrightarrow{\text{ب ج}} \perp \overline{\text{ب أ}}$

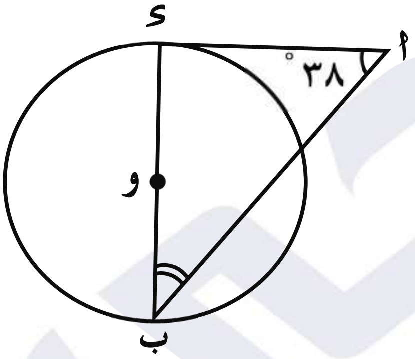
∴ ق$(\hat{\text{ب}})$ = ٩٠° نظرية

من نظرية فيثاغورث

أ ج = $\sqrt{(١٢)^٢ + (٥)^٢}$ = ١٣سم

مثال ٣ في الشكل المقابل ، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة التي مركزها و .

أوجد قيمة س° .



الحل

البرهان :-

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس ، $\overline{\text{ء و}}$ نصف قطر التماس

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ء و}}$

∴ ق$(\hat{\text{ء}})$ = ٩٠° نظرية

س° = ١٨٠° − (٩٠° + ٣٨°) = ٥٢°

لأن مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

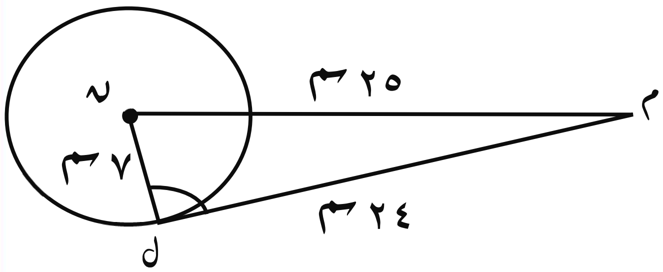
نظرية ٣

المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماساً لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

مثال ٤ في الشكل المقابل ، ن ل = ٧ سم ، ل م = ٢٤ سم ، ن م = ٢٥ سم .

أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة التي مركزها ن .

الحل



البرهان :-

$(\text{م ن})^{٢} = (٢٥)^{٢} = ٦٢٥$

$(\text{م ل})^{٢} + (\text{ل ن})^{٢} = (٢٤)^{٢} + (٧)^{٢} = ٦٢٥$

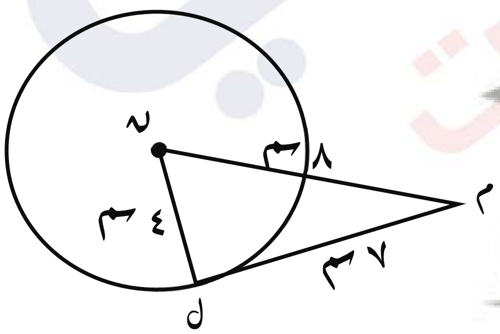
$\because (\text{م ن})^{٢} = (\text{م ل})^{٢} + (\text{ل ن})^{٢}$

$\therefore$ $\triangle$ م ل ن قائم الزاوية في ل

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة

مثال ٥ في الشكل المقابل، إذا كان ن ل = ٤ ، ل م = ٧ ، ن م = ٨ ، فهل $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة؟ فسر إجابتك.

الحل



البرهان :-

$(\text{م ن})^{٢} = (٨)^{٢} = ٦٤$

$(\text{م ل})^{٢} + (\text{ل ن})^{٢} = (٧)^{٢} + (٤)^{٢} = ٦٥$

$\because (\text{م ن})^{٢} \neq (\text{م ل})^{٢} + (\text{ل ن})^{٢}$

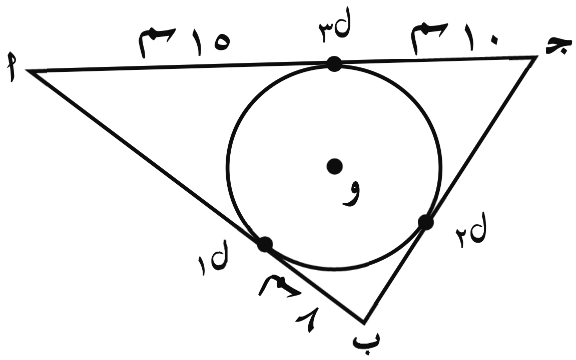
$\therefore$ $\triangle$ م ل ن ليس قائم الزاوية في ل

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ ليس مماساً للدائرة

نظرية ٤

القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

مثال ٦ في الشكل المقابل، أوجد محيط المثلث أ ب جـ



الحل

البرهان :-

∵ $\overline{\text{أ ل}_1}$ ، $\overline{\text{أ ل}_3}$ قطعتان مماستان للدائرة

∴ أ ل$_1$ = أ ل$_3$ = ١٥سم نظرية

∵ $\overline{\text{ب ل}_1}$ ، $\overline{\text{ب ل}_2}$ قطعتان مماستان للدائرة

∴ ب ل$_1$ = ب ل$_2$ = ٨سم نظرية

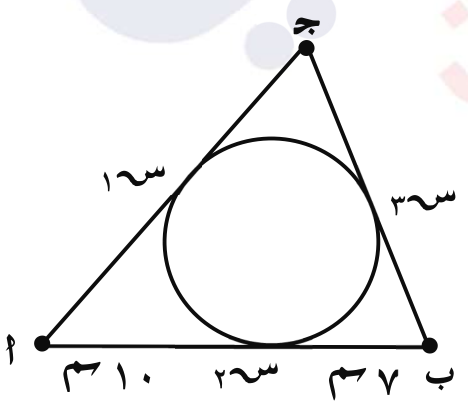
∵ $\overline{\text{جـ ل}_2}$ ، $\overline{\text{جـ ل}_3}$ قطعتان مماستان للدائرة

∴ جـ ل$_2$ = جـ ل$_3$ = ١٠سم نظرية

∴ محيط Δ أ ب جـ = ١٥+١٠+١٠+٨+٨+١٥ = ٦٦سم

مثال ٧ في الشكل المقابل إذا كان محيط المثلث أ ب جـ = ٥٠سم

فأوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$



الحل

البرهان :-

∵ $\overline{\text{أ س}_1}$ ، $\overline{\text{أ س}_2}$ قطعتان مماستان للدائرة

∴ أ س$_1$ = أ س$_2$ = ١٠سم

∵ $\overline{\text{ب س}_2}$ ، $\overline{\text{ب س}_3}$ قطعتان مماستان للدائرة

∴ ب س$_2$ = ب س$_3$ = ٧سم

∵ $\overline{\text{جـ س}_1}$ ، $\overline{\text{جـ س}_3}$ قطعتان مماستان للدائرة

∴ جـ س$_1$ = جـ س$_3$ = $\frac{٥٠ - (٧+٧+١٠+١٠)}{٢}$ = ٨سم

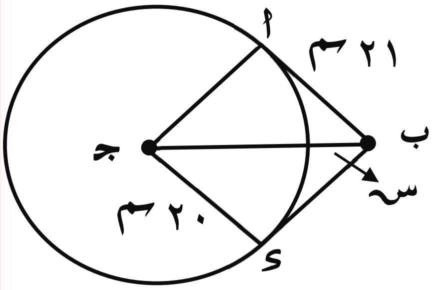
∴ ب جـ = ٨ + ٧ = ١٥سم

مثال ٨ $\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ مماسان للدائرة ق(جـ) = ٩٢,٨° .

(أ) أوجد قيمة س.

(ب) أوجد محيط الشكل الرباعي ب أ جـ ء .

(جـ) أوجد ب جـ.



الحــل

البرهان :-

(أ) ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس ، $\overline{\text{أ جـ}}$ نصف قطر التماس

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ ق(أ) = ٩٠° نظرية

∵ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ مماس ، $\overline{\text{جـ ء}}$ نصف قطر التماس

∴ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ء}}$

∴ ق(ء) = ٩٠°

∴ س° = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٩٢,٨°) = ٨٧,٢°

(ب) ∵ $\overline{\text{ب أ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ قطعتان مماستان للدائرة

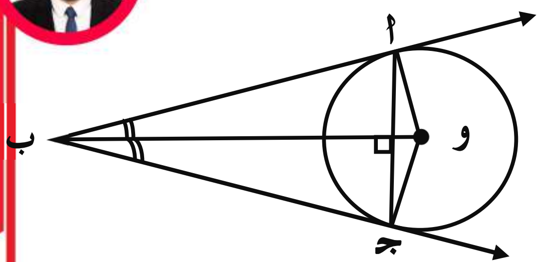
∴ ب أ = ب ء = ٢١ سم نظرية

∵ جـ ء = جـ أ = ٢٠ سم (انصاف اقطار)

∴ محيط الشكل = ٢١ + ٢١ + ٢٠ + ٢٠ = ٨٢ سم

(جـ) من نظرية فيثاغورث

ب جـ = $\sqrt{(٢١)^٢ + (٢٠)^٢}$ = ٢٩ سم



نتائج النظرية

Δ ب أ جـ متطابق الضلعين من النظرية السابقة .

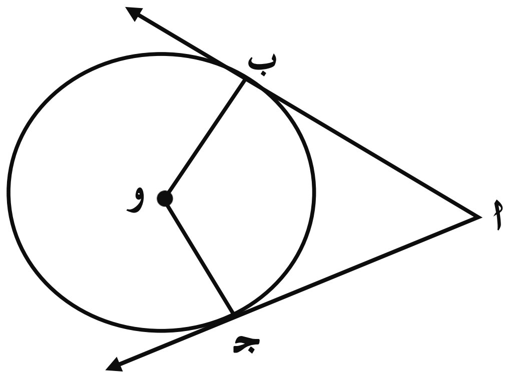
١ $\overleftrightarrow{\text{ب و}}$ منصف الزاوية أ $\hat{\text{ب}}$ جـ

٢ $\overleftrightarrow{\text{و ب}}$ منصف الزاوية أ $\hat{\text{و}}$ جـ

٣ $\overline{\text{و ب}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$

مثال ٩ في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ مماسان للدائرة عند

أ ب = ٤سم ، و ب = ٣ سم ، ق(ب $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ٧٤°



أوجد:

ⓐ ق(أ $\hat{\text{ب}}$ و).

ⓑ ق(ب $\hat{\text{و}}$ جـ).

ⓒ محيط الشكل أ ب و جـ.

الحل

ⓐ ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة عند ب ، $\overline{\text{و ب}}$ نصف قطر التماس

∴ ق(أ $\hat{\text{ب}}$ و) = ٩٠° (نظرية)

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ مماس للدائرة عند جـ ، $\overline{\text{و جـ}}$ نصف قطر التماس

∴ ق(أ $\hat{\text{ب}}$ و) = ٩٠° (نظرية)

ⓑ ∵ ق(ب $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ٧٤°

∴ ق(ب $\hat{\text{و}}$ جـ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٧٤°) = ١٠٦°

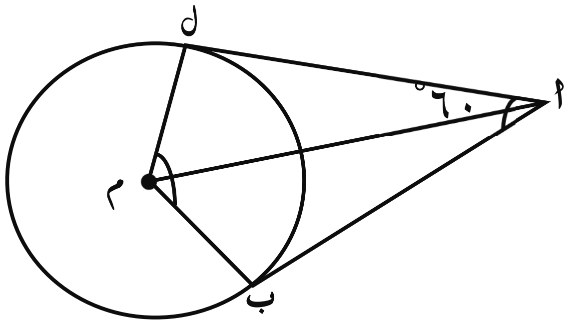
(مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي ٣٦٠°)

ⓒ ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ مماسان للدائرة ∴ أ ب = أ جـ = ٤ سم

∵ $\overline{\text{و ب}}$ ، $\overline{\text{و جـ}}$ (أنصاف أقطار في الدائرة) ∴ و ب = و جـ = ٣ سم

محيط الشكل أ ب و جـ = ٤ + ٤ + ٣ + ٣ = ٢٠ سم

مثال ١٠ في الشكل المقابل : دائرة مركزها م ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ل}}$ مماسان للدائرة من النقطة ق(ل أ ب) = ٦٠° ، أوجد:



(أ) ق(ل م ب).

(ب) ق(ل أ م).

الحل

(أ) ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس ، $\overline{\text{م ب}}$ نصف قطر التماس

∴ $\overline{\text{أ ب}} \perp \overline{\text{م ب}}$

∴ ق(أ ب م) = ٩٠°

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ل}}$ مماس ، $\overline{\text{م ل}}$ نصف قطر التماس

∴ $\overline{\text{أ ل}} \perp \overline{\text{م ل}}$

∴ ق(أ ل م) = ٩٠°

∵ ل أ ب م شكل رباعي

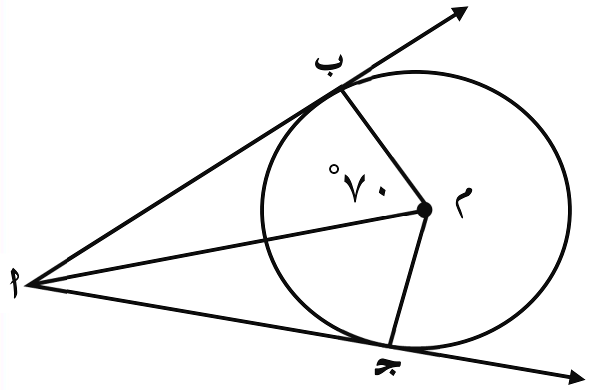
∵ مجموع قياسات الشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(ل م ب) = ٣٦٠° − (٦٠° + ٩٠° + ٩٠°) = ١٢٠°

(ب) ∵ $\overrightarrow{\text{أ م}}$ منصف (ل أ ب) **(نتيجة)**

∴ ق(ل أ م) = ٣٠°

مثال ١١ في الشكل المقابل : دائرة مركزها م ، أ نقطة خارج الدائرة حيث $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ مماسان للدائرة عند ب ، جـ على الترتيب ق(ب م̂ أ) = ٧٠° فأوجد :



(أ) ق(م جـ̂ أ).

(ب) ق(جـ أ̂ ب).

الحـــل

(أ) $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ مماس للدائرة عند جـ ، $\overline{\text{م جـ}}$ نصف قطر التماس

∴ ق(م جـ̂ أ) = ٩٠° (المماس عمودي على نصف قطر التماس)

(ب) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ مماسان للدائرة عند ب ، جـ على الترتيب

∴ $\overrightarrow{\text{م أ}}$ منصف (ب م̂ جـ)

∴ ق(ب م̂ جـ) = ١٤٠° (نتيجة)

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة عند ب ، $\overline{\text{م ب}}$ نصف قطر التماس

∴ ق(م ب̂ أ) = ٩٠° (المماس عمودي على نصف قطر التماس)

مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي ٣٦٠°

∴ ق(جـ أ̂ ب) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ١٤٠°) = ٤٠°

أسئلة موضوعية

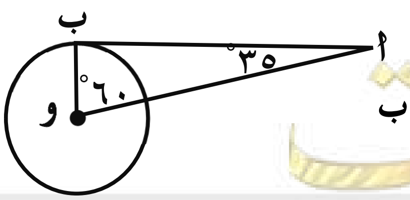
١ أى ثلاث نقاط تمر بها دائرة واحدة (✗)

٢ مركز الدائرة المحيطة لمثلث هو نقطة تلاقى منصفات زواياه الداخلية (✗)

٣ كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة (✓)

٤ المماس عمودي علي وتر التماس (✗)

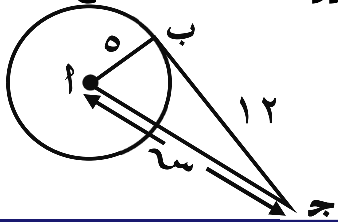
٥ فى الشكل المقابل : $\overline{\text{أ ب}}$ يكون مماساً للدائرة عند ب (✗)



❻ مركز الدائرة المحاطة بمثلث هي نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث (✗)

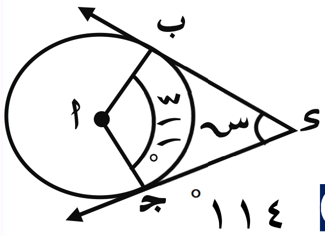
❼ فى الشكل المقابل : إذا كان $\overleftrightarrow{ب جـ}$ مماس للدائرة

فان قيمة س = ١٣ (✓)



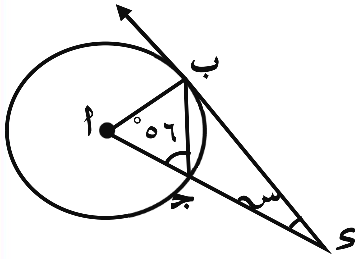
اختر الإجابة الصحيحة :-

❶ إذا كان $\overleftrightarrow{ء ب}$ ، $\overleftrightarrow{ء جـ}$ مماسان للدائرة. فإن س = ...



(أ) ٢٦° (ب) ٥٧° (جـ) ٦٦° (ء) ١١٤°

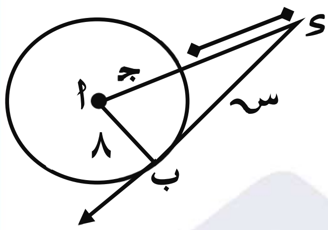
❷ إذا كان $\overleftrightarrow{ء ب}$ مماس للدائرة. فإن س = ...



(أ) ٢٢° (ب) ٢٨°

(جـ) ٣٤° (ء) ٤٠°

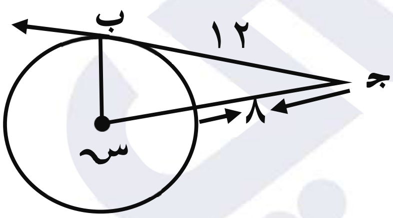
❸ إذا كان $\overleftrightarrow{ء ب}$ مماس للدائرة. فإن س = ...



(أ) ٨ (ب) ٩

(جـ) ١٥ (ء) ١٧

❹ إذا كان $\overleftrightarrow{جـ ب}$ مماس للدائرة. فإن س = ...

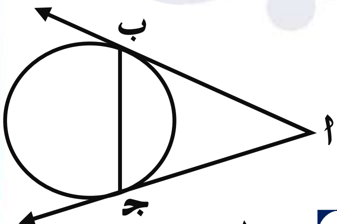


(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤ (ء) ٥

❺ في الشكل المقابل : اذا كان $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{أ جـ}$ مماسان للدائرة ،

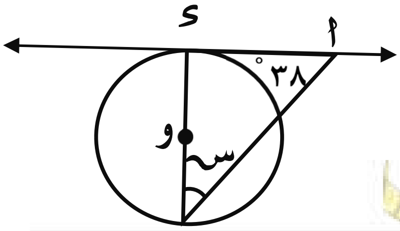
محيط المثلث أ ب جـ = ٢٤ سم فإن ب جـ = ...



(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (ء) ١٠

❻ في الشكل المقابل : اذا كان $\overleftrightarrow{أ ء}$ مماس للدائرة عند ء حيث و مركز الدائرة ،

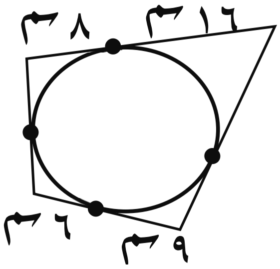
فإن قيمة س = ...



(أ) ٥٢° (ب) ٩٠°

(جـ) ٣٨° (ء) ١٢٨°

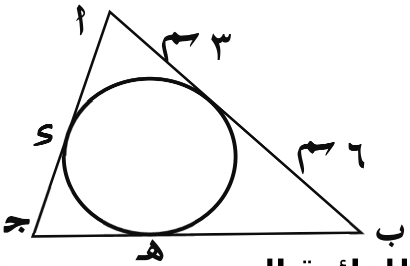
٧ في الشكل المقابل : محيط المضلع الذي يحيط بالدائرة = ...



أ ٣٩ سم
ب ٧٨ سم
ج ٥٠ سم
د ١٠٠ سم

٨ في الشكل المقابل : اذا كان محيط المثلث أ ب جـ = ٢٦ سم

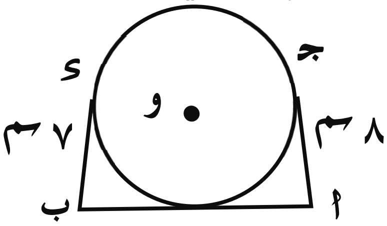
فإن ب جـ = ...



أ ١٢ سم
ب ١٠ سم
ج ٦ سم
د ٤ سم

٩ في الشكل المقابل : أ جـ ، أ ب ، ب ء ، قطع مماسية للدائرة التي

مركزها " و " فان طول أ ب = ...

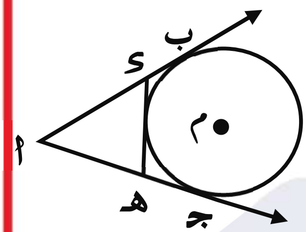


أ ٨ سم
ب ٧ سم
ج ٥٦ سم
د ١٥ سم

١٠ في الشكل المقابل : دائرة مركزها م ، أ ب ، أ جـ مماسان

للدائرة عند ب ، جـ ، علي الترتيب ، ء هـ مماس لها أ ب = ٥ سم

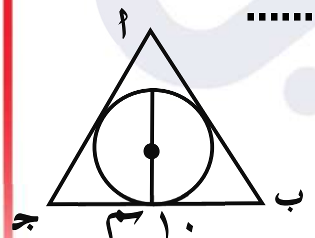
فان محيط المثلث أ هـ ء= ....



أ ٥ سم
ب ١٠ سم
ج ١٥ سم
د ٢٠ سم

١١ في الشكل المقابل : دائرة داخلة للمثلث أ ب جـ ، إذا كان المثلث أ ب جـ

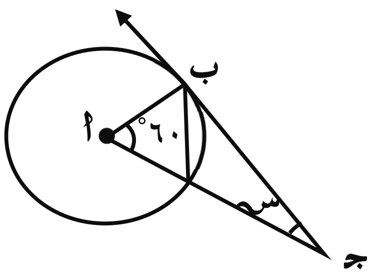
متطابق الأضلاع ، ب ء= ١٠ سم فان محيط المثلث أ ب جـ = ...



أ ٤٥ سم
ب ٥٤ سم
ج ٥٥ سم
د ٦٠ سم

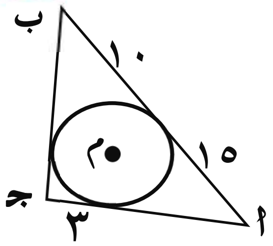
١٢ في الشكل المقابل : اذا كان ب جـ مماس للدائرة عند ب حيث أ مركز الدائرة ،

فان قيمة س = ...



أ ٦٠°
ب ٩٠°
ج ٣٠°
د ١٢٠°

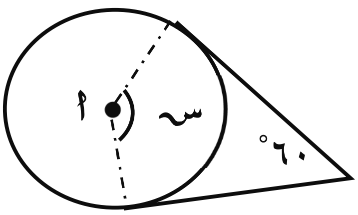
⓭ في الشكل المقابل : دائرة مركزها م ، محيط المثلث أ ب جـ = ...



(أ) ٤٣ (ب) ٥٦

(جـ) ٦٦ (د) ٧٠

⓮ في الشكل المقابل : في الشكل المقابل : اذا كانت القطع المستقيمة تمس الدائرة التي مركزها أ فان قيمة س = ...

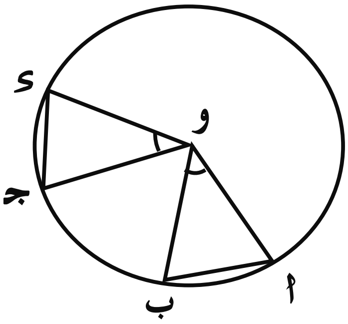


(أ) ٦٠° (ب) ٩٠°

(جـ) ٣٠° (د) ١٢٠°

٦-٢ الأوتار والأقواس

نظرية ١



في دائرة أو في دوائر متطابقة :

١ للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة.

٢ الأوتار المتطابقة تقابل أقواسًا متطابقة.

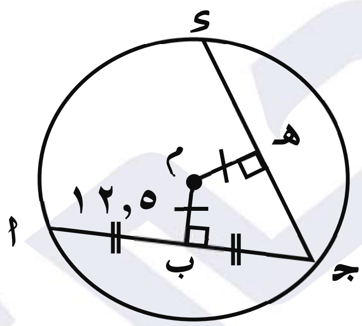
٣ للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة.

نظرية ٢

١ الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.

٢ الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.

مثال ١ في الشكل المقابل ليكن م مركز الدائرة. م ب = م هـ ، أوجد طول جـ ء. فسّر.



الحل

البرهان :-

∵ م ب = م هـ

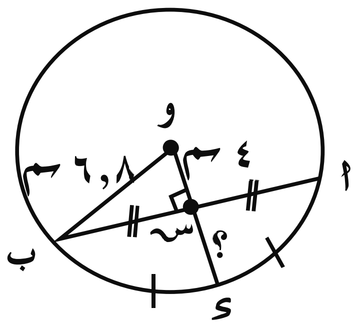
∴ أ جـ = ء جـ نظرية

∴ ء جـ = ١٢,٥ + ١٢,٥ = ٢٥

مثال ٢ استخدم الشكل المقابل لإيجاد:

(أ) طول الوتر $\overline{أب}$.

(ب) المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر $\overset{\frown}{أب}$.



الحل

البرهان :-

من نظرية فيثاغورث

ب س = $\sqrt{(٦,٨)^٢ - (٤)^٢}$ = ٥,٤٩سم

∵ س منتصف $\overline{أب}$

أ س = س ب = ٥,٤٩سم

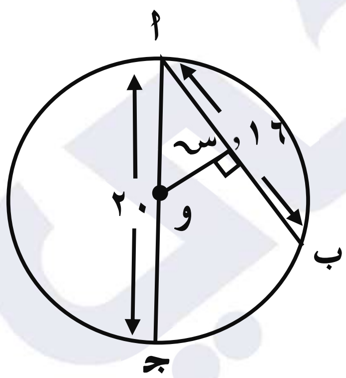
∴ أ ب = ٥,٤٩ + ٥,٤٩ = ١٠,٩٨سم

∵ و ء = و ب = ٦,٨ (أنصاف اقطار)

∴ س ء = ٦,٨ − ٤ = ٢,٨سم

مثال ٣ أوجد قيمة س في الأشكال التالية:

(أ) أوجد قيمة س



الحل

البرهان :-

∵ $\overline{وء} \perp \overline{أب}$

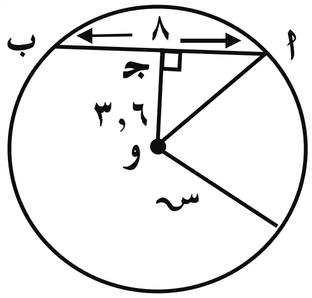
∴ ء منتصف $\overline{أب}$

∴ أ ء = ء ب = ٨سم نظرية

∵ أ و = و جـ = ١٠سم أنصاف أقطار

من نظرية فيثاغورث

∴ و ء = $\sqrt{(١٠)^٢ - (٨)^٢}$ = ٦سم



ج) أوجد قيمة س

الحـــــل

البرهان :-

∵ $\overline{\text{و جـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

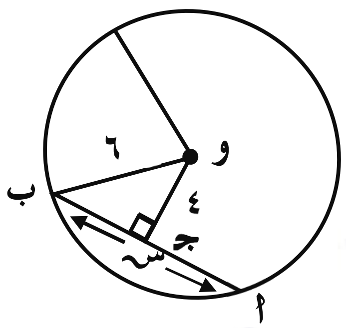
∴ جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

∴ أ جـ = جـ ب = ٤سم نظرية

من نظرية فيثاغورث

∴ أ و = $\sqrt{(٤)^٢ - (٣,٦)^٢}$ = ٥,٣٨سم

∴ س = ٥,٣٨سم



د) أوجد قيمة س

الحـــــل

البرهان :-

من نظرية فيثاغورث

ب جـ = $\sqrt{(٦)^٢ - (٤)^٢}$ = ٤,٤٧

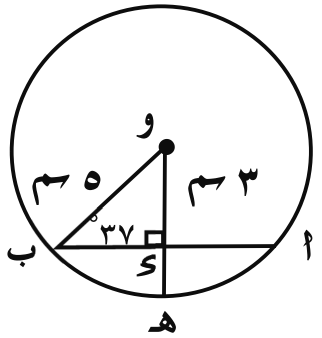
∵ $\overline{\text{و جـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

∴ جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

∴ أ جـ = جـ ب = ٤,٤٧سم

∴ أ ب = ٤,٤٧ + ٤,٤٧ = ٨,٩٤سم

مثال ٤ في الشكل المقابل :



دائرة مركزها و $\overline{\text{و هـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، ق (أ $\hat{\text{ب}}$ و) = ٣٧°

أوجد : (أ) طول $\overline{\text{أ ب}}$

(ب) ق ($\overset{\frown}{\text{ب هـ}}$)

الحل

(أ) ∵ المثلث و ء ب قائم الزاوية في ء

∴ ب ء = $\sqrt{(٥)^٢ - (٣)^٢}$ = ٤ (نظرية فيثاغورث)

∵ $\overline{\text{و ء}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

∴ أ ء = ب ء = ٤ سم

∴ أ ب = ٢ × أ ء

= ٢ × ٤ = ٨ سم

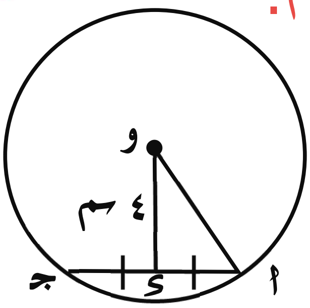
(ب) ∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ ق (ب $\hat{\text{و}}$ ء) = ١٨٠° − (٩٠° − ٣٧°) = ٥٣°

∵ (ب $\hat{\text{و}}$ هـ) زاوية مركزية مرسومة على القوس $\overset{\frown}{\text{ب هـ}}$

∴ ق ($\overset{\frown}{\text{ب هـ}}$) = ق (ب $\hat{\text{و}}$ ء) = ٥٣°

مثال ٥ في الشكل المقابل دائرة مركزها و فيها نق = ٥سم .



و ى = ٤سم منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

أوجد بذكر السبب طول $\overline{\text{أ جـ}}$

الحل

$\overline{\text{و أ}}$ نصف قطر ، $\overline{\text{أ جـ}}$ وتر

، ى منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ $\overline{\text{و ى}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$

∴ Δ أ و ى قائم الزاوية في ى

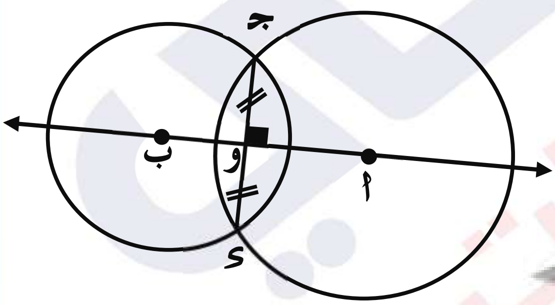
(أ ى)^{٢} = (أ و)^{٢} − (و ى)^{٢}

= (٥)^{٢} − (٤)^{٢} = ٢٥ − ١٦ = ٩

أ ى = ٣ سم

∴ أ جـ = ٦ سم

نتيجة النظرية



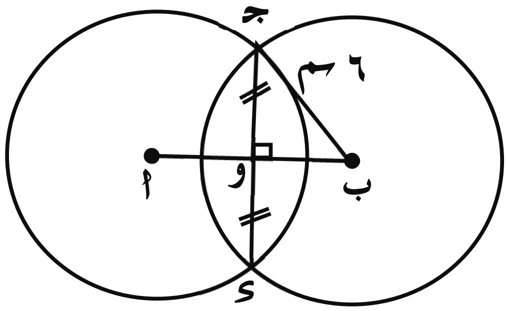
خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديا على الوتر المشترك بينهما وينصفه.

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp \overline{\text{جـ ى}}$

، جـ و = و ى

مثال ٦ دائرتان مركز اهما على الترتيب أ ، ب تتقاطعان بالنقطتين جـ ، ى . وطول نصف قطر كل دائرة ٦سم .

أوجد طول جـ ى إذا كان طول أ ب يساوي ٨سم .



الحـــل

البرهان :-

∵ الدائرتان متقاطعتان

∴ $\overline{أب} \perp \overline{جـى}$ وينصفه

∵ الدائرتان متطابقتان

∴ أ و = و ب = ٤سم

من نظرية فيثاغورث

∴ جـ و = $\sqrt{(٦)^٢ - (٤)^٢}$ = ٤,٤٧ سم

∴ جـ ى = ٤,٤٧ + ٤,٤٧ = ٨,٩٤ سم

أسئلة موضوعية

١ القطر العمودى على وتر فى دائرة ينصفه وينصف كلا من قوسيه (✓)

٢ إذا كان طول قطر دائرة يساوى ٢٠ سم وطول أحد أوتارها ١٦ سم ، فإن البعد بين مركز الدائرة وهذا الوتر يساوى ١٠ سم (✗)

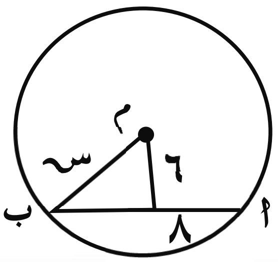
٣ الأوتار في الدائرة الواحدة علي أبعاد متساوية من مركز الدائرة (✗)

إختر الأجابة الصحيحة :-

١ إذا كان طول قطر دائرة يساوي ٢٥ سم ، وطول أحد أوتارها ١٦ سم ، فان البعد بين مركز الدائرة والوتر هو تقريبا :

أ ٩ سم   ب ٩,٦ سم   جـ ١٨ سم   ى ١٩,٢ سم

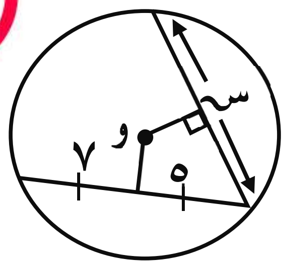
٢ في الشكل المقابل : قيمة س = ...



أ ٨   ب ٦

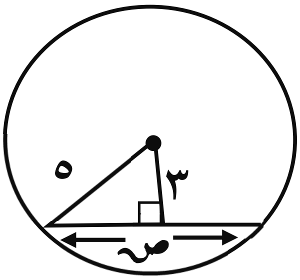
جـ ١٠   ى ١٦

❸ في الشكل المقابل : قيمة س = ...



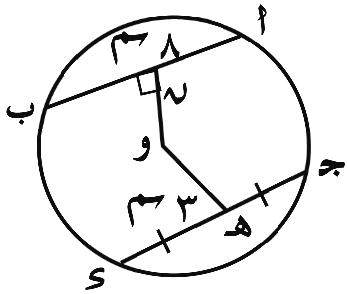
أ ٧	ب ١٠
جـ ٥	د ١٤

❹ في الشكل المقابل : قيمة ص = ...



أ ٤	ب ١٠
جـ ٦	د ٨

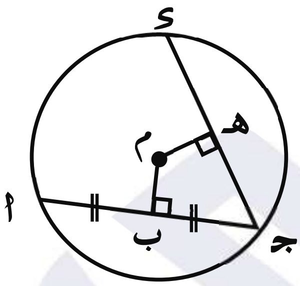
❺ في الشكل المقابل : دائرة مركزها و ، و هـ = ٣ سم ، هـ منتصف
$\overline{\text{و ن}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، فإن طول نصف قطر الدائرة يساوي ....



أ ٤ سم	ب ٥ سم
جـ ١١ سم	د ٢٥ سم

❻ في الشكل المقابل إذا كان م مركز الدائرة ، أ ب = ١٢ سم ، م ب = م هـ

فإن جـ د = ...



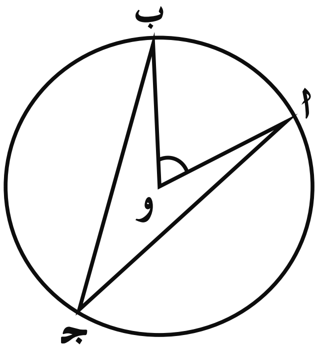
أ ٦ سم	ب ١٢ سم
جـ ٢٤ سم	د ٣٦ سم

٦-٣ الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

تعريف :

١ الزاوية التي رأسها مركز الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى بالزاوية المركزية.

٢ الزاوية التي رأسها إحدى نقاط الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى بالزاوية المحيطية



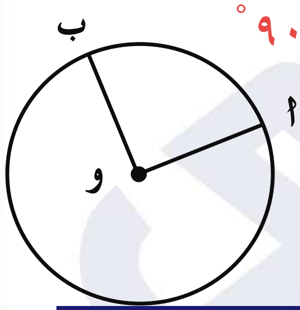
نظرية ١

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة .

نظرية ٢

- في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.
- قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه.

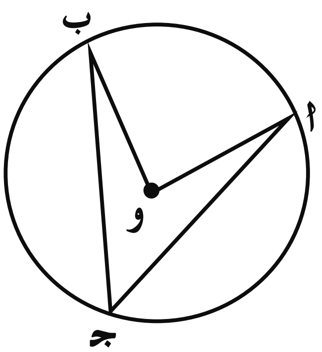
مثال ١ في الشكل المقابل دائرة مركزها و إذا كان ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ٩٠°



الحل

ق(أ وَ ب) المركزية = ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ٩٠°

مثال ٢ في الشكل المقابل : إذا كان ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ٨٠° فأوجد ق(أ جَ ب)

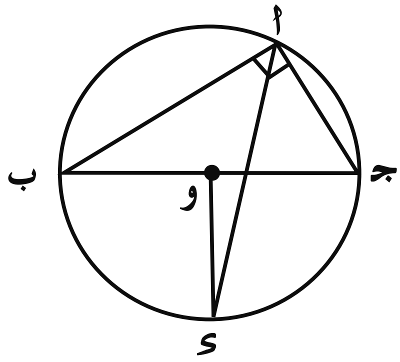


الحل

ق(أ جَ ب) المحيطية = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$)

∴ ق(أ جَ ب) = $\frac{٨٠°}{٢}$ = ٤٠°

مثال ٣ في الشكل المقابل دائرة مركزها و أثبت أن $\overline{\text{ء و}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$



الحل

البرهان :-

$\because$ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ب $\hat{\text{أ}}$ جـ

$\therefore$ ق (ب $\hat{\text{أ}}$ ء) = ق (جـ $\hat{\text{أ}}$ ء) = ٤٥°

$\therefore$ ق (ب $\hat{\text{أ}}$ ء) المحيطية = $\frac{١}{٢}$ ق (ب $\hat{\text{و}}$ ء) المركزية

$\therefore$ ق (ب $\hat{\text{و}}$ ء) = ق (جـ $\hat{\text{أ}}$ ء) = ٤٥ × ٢ = ٩٠° نظرية

$\therefore$ $\overline{\text{و ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

مثال ٤ أوجد قياسات الزوايا والأقواس التالية مستخدما الرسم المقابل:

أ) ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٤٠°

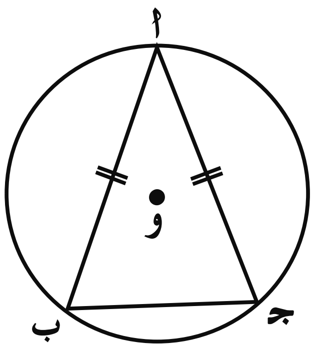
ب) ق ($\overset{\frown}{\text{جـ هـ}}$) = ٥٠°

جـ) ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٤٠°

ء) ق (أ $\overset{\frown}{\text{ب}}$ هـ) = ٦٥°

مثال ٥ في الشكل المقابل أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين حيث أ ، ب ، جـ نقاط على الدائرة التي مركزها و ، $ق(\angle ب\,أ\,جـ) = ٤٠^\circ$

أوجد قياس كل من الأقواس $\overset{\frown}{أ\,ب}$ ، $\overset{\frown}{ب\,جـ}$ ، $\overset{\frown}{أ\,جـ}$



الحل

البرهان :-

$\because$ أ ب = أ جـ

$\therefore ق(\hat{ب}) = ق(\hat{جـ}) = \frac{١٨٠^\circ - ٤٠^\circ}{٢} = ٧٠^\circ$

$ق(\hat{أ})$ المحيطية $= \frac{١}{٢}\, ق(\overset{\frown}{ب\,جـ})$

$\therefore ق(\overset{\frown}{ب\,جـ}) = ٤٠^\circ \times ٢ = ٨٠^\circ$

بالمثل $ق(\overset{\frown}{أ\,جـ}) = ٧٠^\circ \times ٢ = ١٤٠^\circ$

$ق(\overset{\frown}{أ\,ب}) = ٧٠^\circ \times ٢ = ١٤٠^\circ$

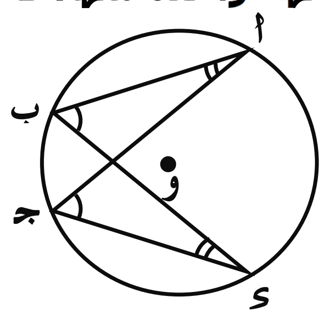
نتائج النظرية

١ كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.

٢ كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.

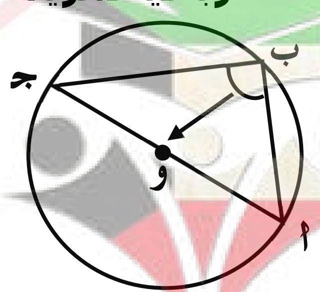
٣ كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة)، تكون زواياه المتقابلة متكاملة.

٤ في الشكل إذا تطابقت الزاويتان $\hat{أ}$ ، $\hat{ء}$ المرسومات على القاعدة $\overline{ب\,جـ}$ وفي جهة واحدة منها. كان الشكل أ ب جـ ء رباعيا دائريا.



$\angle$ أ ب ء ، $\angle$ أ جـ ء تحصران $\overset{\frown}{أ\,ء}$

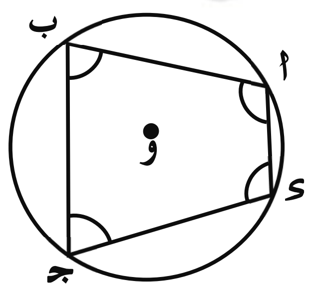
$\therefore ق(\angle أ\,ب\,ء) = ق(\angle أ\,جـ\,ء)$



$\angle$ أ ب جـ تحصر $\overset{\frown}{أ\,جـ}$ (نصف دائرة)

$\therefore ق(\angle أ\,ب\,جـ) = ٩٠^\circ$

$ق(\angle أ\,ب\,جـ)$ زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة وهي زاوية قائمة

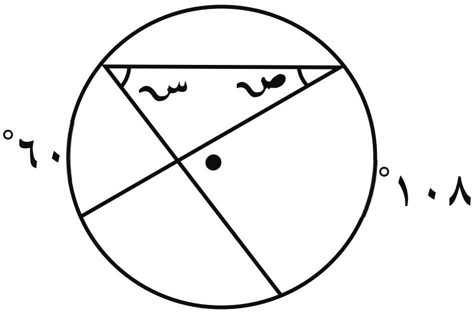


$ق(\hat{أ}) + ق(\hat{جـ}) = ١٨٠^\circ$

$ق(\hat{ب}) + ق(\hat{ء}) = ١٨٠^\circ$

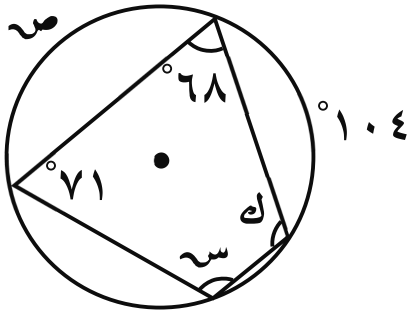
مثال ٦ أوجد قياسات الزوايا والأقواس المجهولة في كلّ من الأشكال الهندسية التالية:

الحل



(أ) $\text{س} = \frac{١٠٨^\circ}{٢} = ٥٤^\circ$

$\text{ص} = \frac{٦٠^\circ}{٢} = ٣٠^\circ$

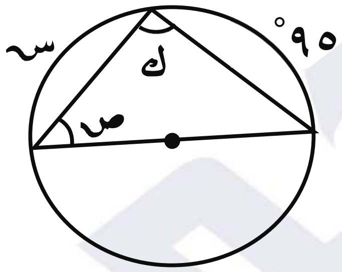


(ب)

$\text{س} = ١٨٠^\circ - ٦٨^\circ = ١١٢^\circ$

$\text{ك} = ١٨٠^\circ - ٧١^\circ = ١٠٩^\circ$

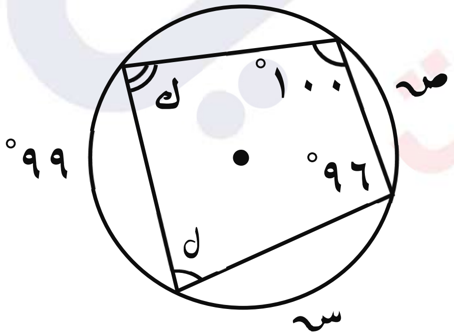
$\text{ص} = ٢٢٤ - ١٠٤ = ١٢٠^\circ$



(ج) $\text{ك} = ٩٠^\circ$

$\text{ص} = \frac{٩٥^\circ}{٢} = ٤٧,٥^\circ$

$\text{س} = ١٨٠^\circ - ٩٥^\circ = ١٢٠^\circ$



(د)

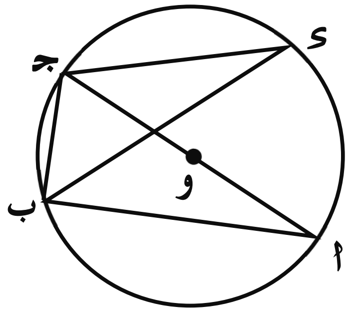
$\text{ل} = ١٨٠^\circ - ١٠٠^\circ = ٨٠^\circ$

$\text{ك} = ١٨٠^\circ - ٩٦^\circ = ٨٤^\circ$

$\text{س} = ٢٠٠ - ٩٩ = ١٠١^\circ$

$\text{ص} = ١٦٨ - ١٠١ = ٦٧^\circ$

مثال ٧ في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، هـ جـ قطر فيها ، إذا كان
ق(جـ ء̂ ب) = ٣٠° ، ق(أ ب̂ ء) = ٥٠° فأوجد كلا من :



١ ق(جـ أ̂ ب)

٢ ق(أ ب̂ جـ)

٣ ق(⌒أ ء)

الحــل

١ ق(جـ أ̂ ب) = ق(جـ ء̂ ب) = ٣٠°

(زاويتان محيطيتان مشتركتان في نفس القوس)

٢ ق(أ ب̂ جـ) = ٩٠°

(زاوية محيطية مرسومه على قطر الدائرة)

٣ ق(⌒أ ء) = ٢ × ق(أ ب̂ ء)

= ٢ × ٥٠° = ١٠٠°

(قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها)

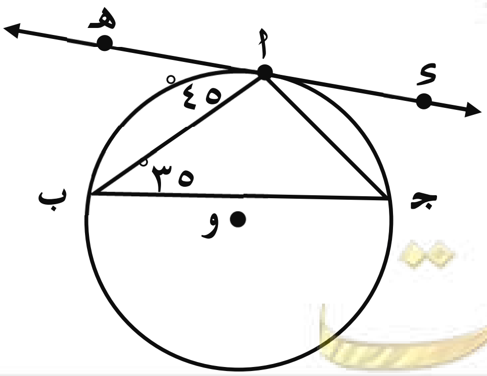
نظرية ٣

١ قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.

٢ قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

مثال ٨ في الشكل المقابل إذا كان ء هـ مماسا للدائرة عند أ ، فأوجد ق(جـ أ̂ ب).

الحــل



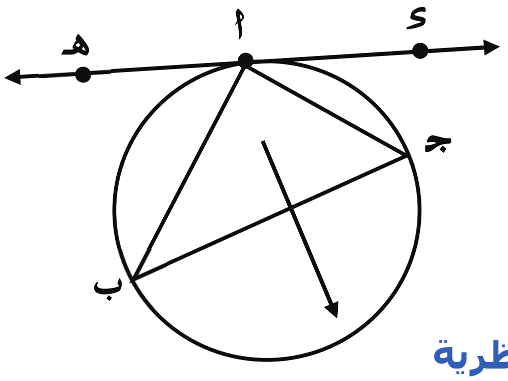
البرهان :-

ق(جـ̂) = ق(هـ أ̂ ب) = ٤٥° مشتركتان في ⌒أ ب

∴ ق(جـ أ̂ ب) = ١٨٠° − (٤٥° + ٣٥°) = ١٠٠°

لأن مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

مثال ٩ في الشكل المقابل، لدينا: ق(∠ء أ جـ) = ٤٠° ، ق(∠هـ أ ب) = ٥٠° .



ⓐ أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ.

ⓑ أثبت أن $\overline{\text{جـ ب}}$ قطر للدائرة.

الحـــل

البرهان :-

ⓐ ق(∠ب) = ق(∠ء أ جـ) = ٤٠° مشتركتان في ⌒أ جـ نظرية

ق(∠جـ) = ق(∠هـ أ ب) = ٥٠° مشتركتان في ⌒أ ب

∴ ق(∠جـ أ ب) = ١٨٠° − (٥٠° + ٤٠°) = ٩٠°

لأن مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

ⓑ ∵ ق(∠جـ أ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(⌒ب جـ)

∴ ق(⌒ب جـ) = ٩٠° × ٢ = ١٨٠°

∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ قطر في الدائرة.

مثال ١٠ في الشكل المقابل : دائرة مركزها و ، $\overleftrightarrow{\text{هـ جـ}}$ مماس للدائرة عند

ق(∠ب جـ هـ) = ٢٨° ، أوجد كل من : ق(∠أ ب جـ) ، ق(∠ب أ جـ) ، ق(∠أ ء ب)

الحـــل

∵ ∠أ ب جـ محيطية مرسومة في نصف الدائرة ∴ ق(∠أ ب جـ) = ٩٠°

∵ ∠ب جـ هـ مماسية ، ∠ب أ جـ محيطية (مشتركتان في ⌒ب جـ)

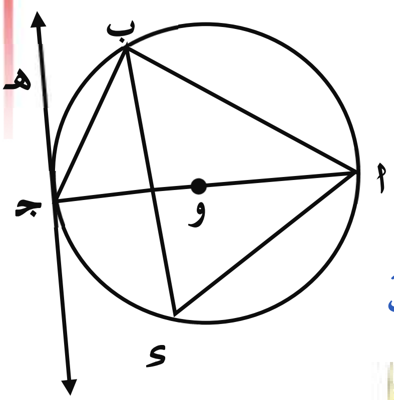
∴ ق(∠ب جـ هـ) = ق(∠ب أ جـ) = ٢٨°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي = ١٨٠°

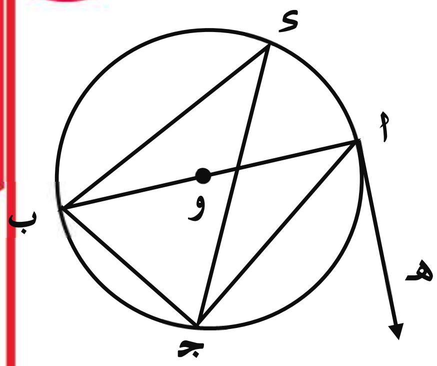
∴ ق(∠أ جـ ب) = ١٨٠° − (٢٨° + ٩٠°) = ٦٣°

∵ ∠أ جـ ب ، ∠أ ء ب محيطيتان مرسومتان على القوس ⌒أ ب

∴ ق(∠أ ء ب) = ق(∠أ جـ ب) = ٦٢°



مثال ١١ في الشكل المقابل :



دائرة مركزها و ، $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فيها ، $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ مماس للدائرة عند أ ، ق(ب ءَ جـ) = ٣٠°

أوجد:

١ ق(أ جَ ب)

٢ ق(أ بَ جـ)

٣ ق(جـ أَ هـ)

الحـــل

١ ∵ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة ، الزاوية (أ جَ ب) هي زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة

∵ ق(أ جَ ب) = ٩٠°

---

٢ ∵ ق(ب ءَ جـ) = ٣٠°

∴ ق(ب أَ جـ) = ٣٠° زاويتان محيطيتان لهما نفس القوس

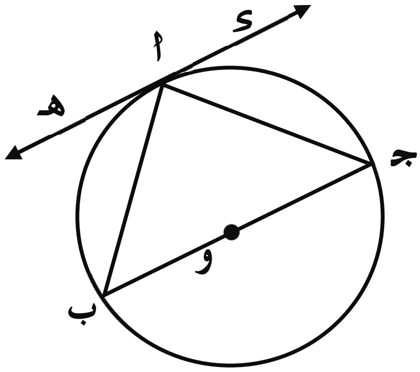
∴ ق(أ بَ جـ) = ٦٠° مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

---

٣ ∵ قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.

∴ ق(جـ أَ هـ) = ق(أ بَ جـ) = ٦٠°

مثال ١٢ في الشكل المقابل : دائرة مركزها و ، إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ مماسًا للدائرة عند أ ، ق(ج أ ء) = ٥٠° أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب ج



الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ مماساً للدائرة عند أ

∴ ق(أ بَ ج) = ق(ء أ ج) = ٥٠° (نظرية)

∵ $\overleftrightarrow{\text{ب ج}}$ قطر الدائرة

∴ ق($\overset{\frown}{\text{ب ج}}$) = ١٨٠°

∵ ج أ ب محيطة.

∴ ق(ج أ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{ب ج}}$)

∴ ق(ج أ ب) = ٩٠°

∴ ق(أ جَ ب) = ١٨٠° − (٥٠° + ٩٠°) = ٤٠°

وهو المطلوب إثباته

أسئلة موضوعية

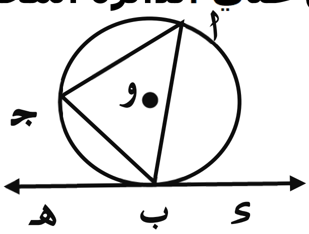
❶ قياس الزاوية المركزية يساوي نصف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس (✗)

❷ كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان (✓)

❸ كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون قائمة (✓)

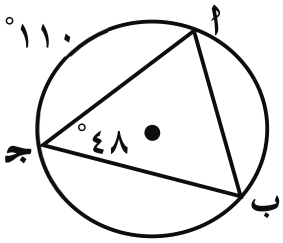
❹ قياس الزاوية المماسية يساوي قياس القوس المحصور بين المماس والوتر (✗)

❺ اذا كان قياس الزاوية المركزية = ٣٥° فان قياس القوس علي الدائرة المحصور بين ضلعيها = ٧٠° (✗)



❻ في الشكل المقابل : دائرة مركزها و اذا كان ق(ء بَ أ) = ٦٠° ، أ ج = أ ب فان المثلث أ ب ج متطابق الأضلاع (✓)

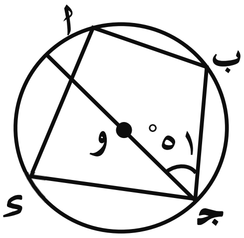
❼ اذا كان أ ب ج ء شكل رباعي دائري فان ق(أ) + ق(جَ) = ١٨٠° (✓)



٨ في الشكل المقابل : ق(ب جـ) = ١٥٤° (✓)

٩ قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه (✓)

اختر الإجابة الصحيحة :-

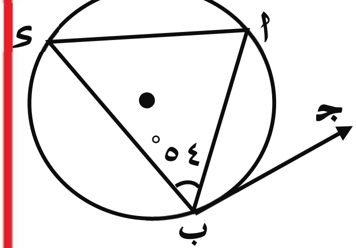


١ في الشكل المقابل ، إذا كان

ق(أ ب) = ٧٢° ، ق(ب جـ هـ) = ٥١° فإن قياس القوس هـ أ =

أ ٣٠° ب ١٠٢° جـ ٧٢° ء ٦٨°

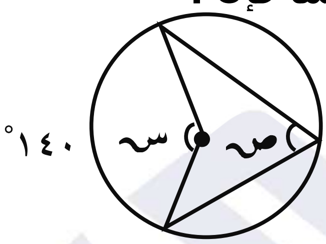
٢ في الشكل المقابل ، إذا كان ق(أ ب) = ١٤٠° فإن ق(أ ب جـ) = ...



أ ٧٠° ب ٥٠°

جـ ٥٦° ء ١٢٤°

٣ في الشكل المقابل ، قيمة كل من س ، ص على الترتيب هما فإن :



أ ٢٨٠° ، ١٤٠° ب ٧٠° ، ٣٥°

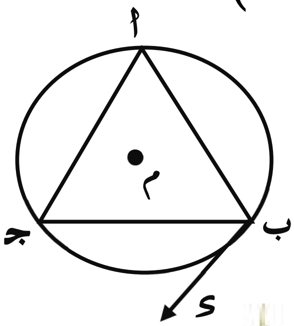
جـ ١٤٠° ، ٤٠° ء ١٤٠° ، ٧٠°

٤ في الشكل المجاور قيمة ص = ...

أ ٧١° ب ١٤٢°

جـ ١٠٩° ء ٢١٨°

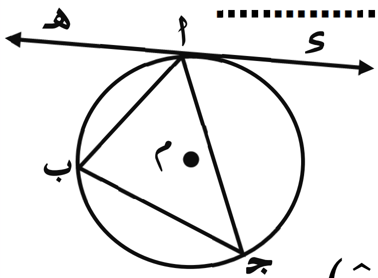
٥ في الشكل المقابل إذا كان ق(ب جـ) = ٨٠° فإن ق(ء ب جـ) = ...



أ ٨٠° ب ٤٠°

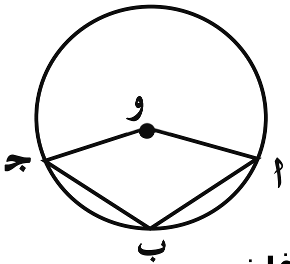
جـ ١٦٠° ء ٦٠°

٦ في الشكل المقابل إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ءهـ}}$ مماسا للدائرة عند ا ، ق(هـ أ̂ ب) = ٧٠° ، ق(جـ ب̂ ا) = ٦٠° فإن ق(جـ أ̂ ب) = ...



- ا) ٥٠°
- ب) ٦٠°
- جـ) ٧٠°
- د) ١٣٠°

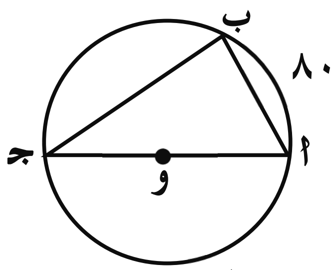
٧ في الشكل المقابل إذا كان ا ، ق(ا و̂ جـ) = ١٦٠° فإن ق(ب̂) = ...



- ا) ٨٠°
- ب) ٢٠°
- جـ) ١٠٠°
- د) ١٦٠°

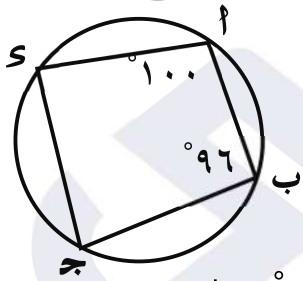
٨ في الشكل المقابل دائرة مركزها و إذا كان ق($\overset{\frown}{\text{ا ب}}$) = ٨٠° ، فإن

ق(ب أ̂ جـ) = ...



- ا) ٨٠°
- ب) ٤٠°
- جـ) ١٠٠°
- د) ٥٠°

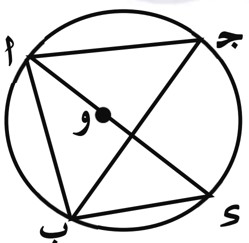
٩ في الشكل المقابل : فإن ق(ب جـ̂ د) = ...



- ا) ١٦٠°
- ب) ٨٤°
- جـ) ٨٠°
- د) ١٠٠°

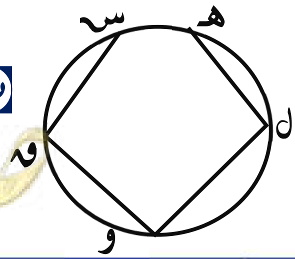
١٠ في الشكل المقابل : دائرة مركزها و إذا كان ق($\overset{\frown}{\text{ا ب}}$) = ١٠٠° ، فإن

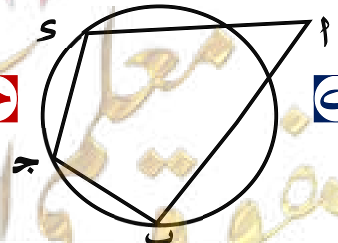
ق(ب أ̂ د) = ...

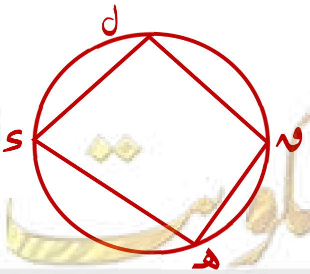


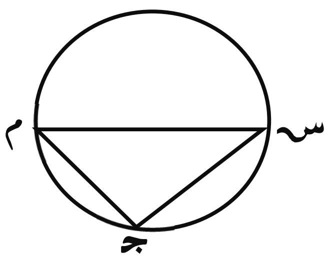
- ا) ٤٠°
- ب) ٥٠°
- جـ) ٨٠°
- د) ١٠٠°

١١ أى من الأشكال الأتية تمثل شكل رباعي دائري : ....

ا) 

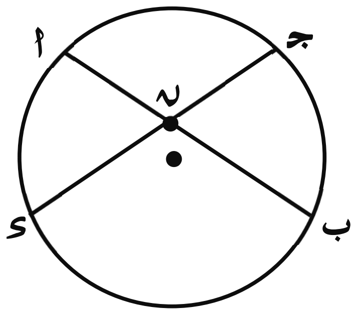
ب) 

جـ) 

د) 

٦-٤ الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس تقاطع الأوتار داخل الدائرة

نظرية ١

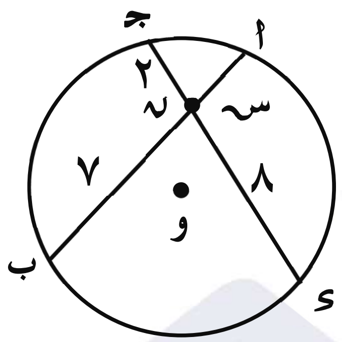


إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولي جزءي أحد الوترين يساوي

ناتج ضرب طولي جزءي الوتر الآخر.

$$\text{هـأ} \times \text{هـب} = \text{هـج} \times \text{هـد}$$

مثال ١ في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



الحل

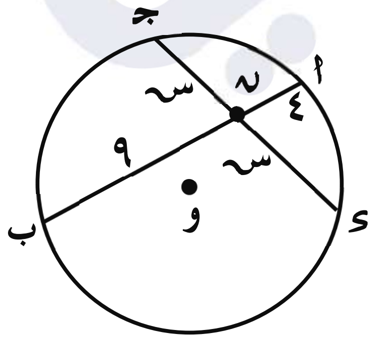
$$\text{هـأ} \times \text{هـب} = \text{هـج} \times \text{هـد}$$

$$\text{س} \times ٧ = ٢ \times ٨$$

$$\frac{\cancel{٧}\,\text{س}}{\cancel{٧}} = \frac{١٦}{٧}$$

$$\text{س} = \frac{١٦}{٧} = ٢,٢٨٥$$

مثال ٢ في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



الحل

$$\text{هـأ} \times \text{هـب} = \text{هـج} \times \text{هـد}$$

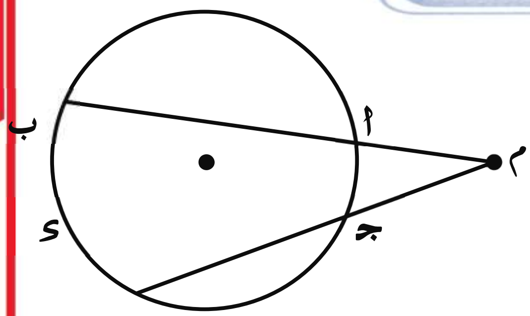
$$٤ \times ٩ = \text{س} \times \text{س}$$

$$٣٦ = \text{س}^٢$$

$$\text{س} = \sqrt{٣٦} = ٦$$

تقاطع الأوتار خارج الدائرة

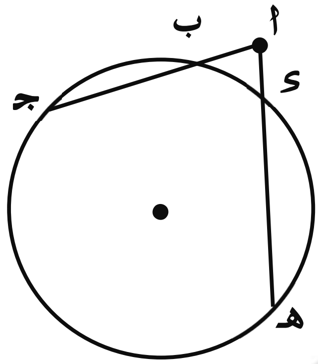
نتيجة 1



إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.

م أ × م ب = م جـ × م ء

مثال 3 في الشكل المقابل :



أ جـ = ٢٠ ، ب جـ = ١٥

أ هـ = ٢٥

أوجد: ء هـ

الحل

أ ء × أ هـ = أ ب × أ جـ

س × ٢٥ = ٥ × ٢٠

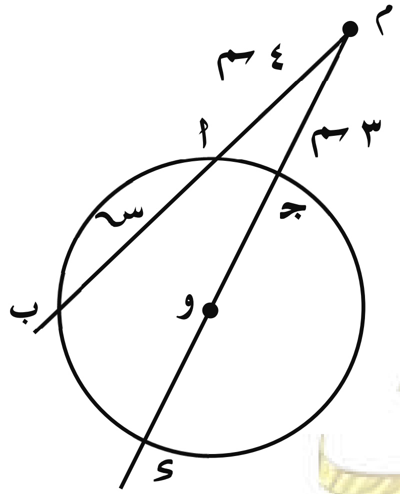
$\frac{\cancel{٢٥} س}{\cancel{٢٥}} = \frac{١٠٠}{٢٥}$

س = ٤

∴ ء هـ = ٢٥ − ٤ = ٢١

مثال 4 في الشكل المقابل دائرة مركزها و طول نصف قطرها يساوي ٤ سم

أوجد قيمة س.



الحل

م أ × م ب = م جـ × م ء

٤ × (س + ٤) = ٣ × ١١

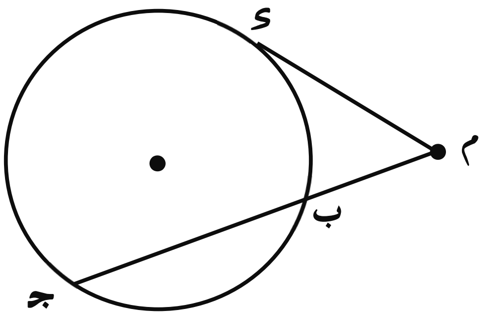
٤س + ١٦ = ٣٣

٤س = ٣٣ − ١٦

$س = \frac{١٧}{٤} = ٤,٢٥$

تقاطع مماس وقاطع الدائرة من نقطة خارج دائرة

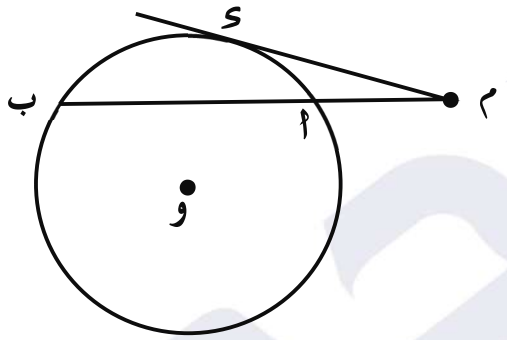
نتيجة ٢



إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.

(م ء)^{٢} = م ب × م جـ

مثال ٥ في الشكل المقابل، أوجد طول القطعة المماسية $\overline{\text{م ء}}$ علما بأن: أ م = ٤ سم ، أ ب = ١٢ سم



الحل

(م ء)^{٢} = م أ × م ب

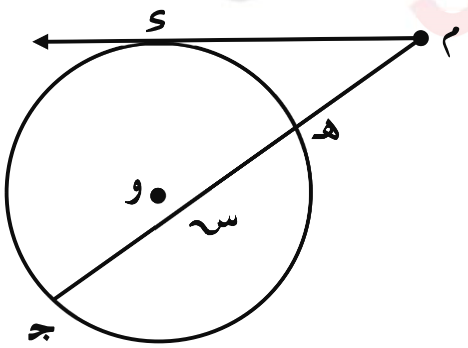
س^{٢} = ٤ × ١٦

س^{٢} = ٦٤

س = $\sqrt{٦٤}$ = ٨

مثال ٦ في الشكل المقابل ، $\overline{\text{م ء}}$ قطعة مماسية حيث $\overline{\text{م ء}}$ = ١٠ ، $\overline{\text{م هـ}}$ = ٥

أوجد طول $\overline{\text{هـ جـ}}$



الحل

(م ء)^{٢} = م أ × م ب

(١٠)^{٢} = ٥ × (س + ٥)

١٠٠ = ٥س + ٢٥

١٠٠ − ٢٥ = ٥س

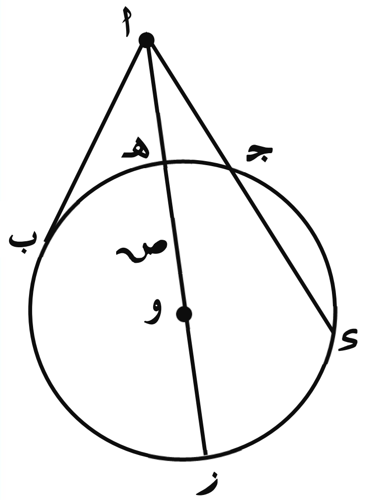
$\frac{٧٥}{٥} = \frac{\cancel{٥}\text{س}}{\cancel{٥}}$

س = ١٥

مثال ٧ المعطيات: أ جـ = ٤ سم ، أ ء = ٩ سم ، أ ب قطعة مماسية.

المطلوب: إيجاد طول $\overline{\text{أ ب}}$

أوجد طول نصف قطر الدائرة إذا كانت أ هـ = ٢ سم .



الحل

(أ ب)^{٢} = أ جـ × أ ء

س^{٢} = ٤ × ٩

س^{٢} = ٣٦

س = $\sqrt{٣٦}$ = ٦

أ جـ × أ ء = أ هـ × أ ز

٤ × ٩ = ٢ × (ص + ٢)

٣٦ = ٢ص + ٤

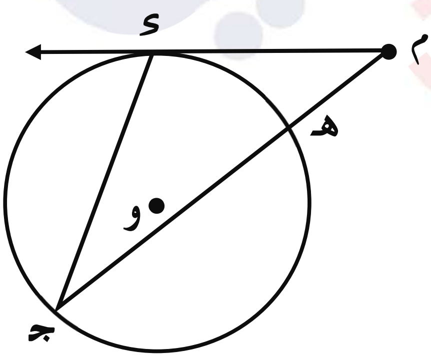
٣٦ − ٤ = ٢ص

$\frac{٣٢}{٢} = \frac{\cancel{٢}\text{ص}}{\cancel{٢}}$

ص = ١٦

مثال ٨ في الشكل المقابل : $\overline{\text{م ء}}$ قطعة مماسية حيث م ء = ١٠ ، م هـ = ٥

أوجد بذكر السبب : طول كلا من : $\overline{\text{م جـ}}$ ، $\overline{\text{هـ جـ}}$



الحل

(م ء)^{٢} = م هـ × م جـ

(٥)^{٢} = م جـ

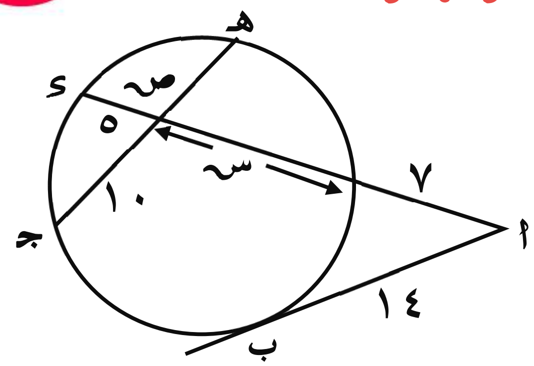
١٠٠ = ٥ × م جـ

م جـ = ١٠٠ ÷ ٥ = ٢٠

هـ جـ = م جـ − م هـ

= ٢٠ − ٥ = ١٥

مثال ٩ من الشكل المقابل : أوجد قيمة كل من س ، ص



الحل

$٧ \times (س + ١٢) = (١٤)^٢$

$٧ \times (س + ١٢) = ١٩٦$

$س + ١٢ = \frac{١٩٦}{٧}$

$س + ١٢ = ٢٨$

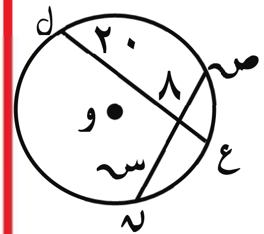
$س = ٢٨ - ١٢ = ١٦$

$١٠ \times ص = ١٦ \times ٥$

$ص = \frac{١٦ \times ٥}{١٠}$

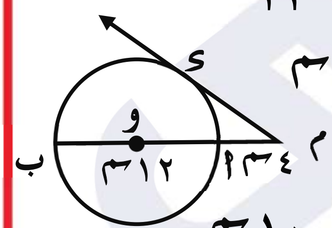
$ص = ٨$

أسئلة موضوعية



❶ فى الشكل المقابل: دائرة مركزها و ، $\overline{صن}$ ، $\overline{عل}$ وترين متقاطعين فيها كما هو موضح فى الشكل،فإن قيمة س = ...

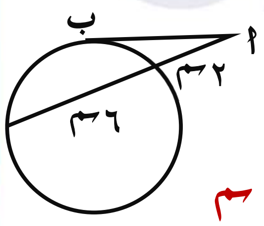
(أ) ٢٢ (ب) ١٥ (جـ) ٨ (د) ١٢



❷ فى الشكل المقابل: دائرة مركزها و ، م أ = ٤سم ، أ ب = ١٢سم

طول القطعة المماسية $\overline{مء}$ يساوى ....

(أ) ٤سم (ب) ١٦سم (جـ) ٨سم (د) ١٠سم



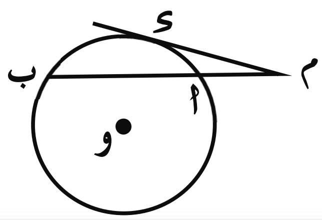
❸ فى الشكل المقابل: $\overline{أب}$ قطعة مماسية للدائرة عند ب

فإن طول $\overline{أب}$ يساوى ....

(أ) ٢سم (ب) ١٠سم (جـ) ٦سم (د) ٤سم

❹ فى الشكل المقابل: دائرة مركزها و ، $\overline{مب}$ يقطع الدائرة ، م أ = ٤سم

، أ ب = ١٢سم ، $\overline{مء}$ قطعة مماسية عند نقطة ء فإن طول $\overline{مء}$ = ...



(أ) ٦سم (ب) ٨سم

(جـ) ١٢سم (د) ١٠سم

١-٧ الوحدة السابعة (المصفوفات)

تنظيم البيانات في مصفوفات

تعريف :

المصفوفة : هي تنظيم من الأعداد المرتبة في صفوف وأعمدة.

الأعداد المكونة للمصفوفة تسمى عناصر

رتبة المصفوفة

ترمز إلى المصفوفة بأحد حروف الهجاء ونضع تحته خطاً ، نكتب أ ونقرأ المصفوفة أ .

عدد الصفوف (م) وعدد الأعمدة (ن) يحددان رتبة المصفوفة وتكتب م×ن.

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ٦ & ٧ & ٠ \end{bmatrix}$$

المصفوفة أ هي من الرتبة ٢×٣.

ملاحظة : لكتابة رتبة المصفوفة نكتب أولًا عدد الصفوف يليه عدد الأعمدة.

مثال ١ أكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

١) $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٥ \\ ٢ & -٣ & -٧ \\ ١ & ٠ & ٩ \end{bmatrix}$ الحل ٣×٣

٢) $\text{ب} = \begin{bmatrix} -٤ & \frac{٢}{٣} & -٣ \end{bmatrix}$ الحل ١×٣

٣) $\text{جـ} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠,٥ \end{bmatrix}$ الحل ٣×١

٤) $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ٠ \\ -٢ & ٠,٥ & ٧ \end{bmatrix}$ الحل ٢×٣

٥ ب = $\begin{bmatrix} ١٠ & ٣ & -٨ \end{bmatrix}$ الحـــل ١×٣

٦ جـ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١٠ \\ -٥ & -١ \\ ٩ & ٠,٦ \end{bmatrix}$ الحـــل ٣×٢

مثال ٢ في المصفوفة ب = $\begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ١ & ١٢ \\ ٣,٥ & ٢ & ٦ & ٢ \\ -٤ & ١ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ أكتب قيمة كل عنصر مما يلي:

أ) $ب_{٢٢} = ٦$

ب) $ب_{١٣} = ١$

جـ) $ب_{١١} = ١٢$

المصفوفات : المربعة ، الأفقية ، العمودية

مثال ٣ صنف كلًا من المصفوفات التالية:

١ أ = $\begin{bmatrix} ٠ & -٥ & ١ \\ ٧ & ٤ & ٠ \\ ٨ & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ الحـــل مربعة

٢ ب = $\begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٠,٢ \end{bmatrix}$ الحـــل عمودية

٣ جـ = $\begin{bmatrix} -٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ الحـــل أفقية

٤ ء = $\begin{bmatrix} ١,٤ & ٣ & -٢ \\ ٥ & ٨ & ١٢ \end{bmatrix}$ الحـــل مستطيلة

المصفوفات المتساوية

تكون مصفوفتان متساويتين إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها، وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية والعكس صحيح.

مثال ٤ إذا كانت: $\begin{bmatrix} ٢س - ٥ & ٤ \\ ٣ & ٣ص + ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٤ \\ ٣ & ص + ١٨ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س ، ص.

الحل

٢س − ٥ = ٢٥

٢س = ٢٥ + ٥

$\frac{\cancel{٢}س}{\cancel{٢}} = \frac{٣٠}{٢}$

س = ١٥

٣ص + ١٢ = ص + ١٨

٣ص − ١ص = ١٨ − ١٢

$\frac{\cancel{٢}ص}{\cancel{٢}} = \frac{٦}{٢}$

ص = ٣

مثال ٥ إذا كانت: $\begin{bmatrix} ٣٨ & ٥ \\ ٣ & ٤ص - ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س + ٨ & ٥ \\ ٣ & -ص \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س ، ص.

الحل

س + ٨ = ٣٨

س = ٣٨ − ٨

س = ٣٠

٤ص − ١٠ = −ص

٤ص + ص = ١٠

$\frac{\cancel{٥}ص}{\cancel{٥}} = \frac{١٠}{٥}$

ص = ٢

مثال ٦ أوجد قيم كل من س ، ص $\begin{bmatrix} ٤ & س^{٢} \\ ص^{٢} & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٩ \\ ٥ص & ٢- \end{bmatrix}$.

الحـــل

$س^{٢} = ٩$

$س = \pm\sqrt{٩}$

$س = \pm ٣$

$ص^{٢} = ٥ص$

$ص^{٢} - ٥ص = ٠$

ص = ٥ أو ص = ٠

أسئلة موضوعية

١ المصفوفة العمودية هي مصفوفه تتكون من صف واحد (✗)

٢ المصفوفة التي تتكون من ٥ صفوف وعمود واحد تكون من الرتبة ١ × ٥ (✗)

٣ إذا كانت هـ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ل = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ فإن هـ = ل (✗)

٤ إذا كانت $\begin{bmatrix} ٥ & ٢س - ١ \\ ٧ & ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٧ & ٣ص + ١ \end{bmatrix}$ فإن (س ، ص) = (٣ ، ٢) (✗)

اختر الإجابة الصحيحة :-

١ إذا كانت ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٤- & ١ \\ ٥ & ٢ & ٣ \\ ٤- & ٩ & ٤ \end{bmatrix}$ فإن $ب_{٣٢}$ = ...

أ ٩ ب ٢ ج ٥ د ٤–

٢ إذا كانت ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ & ١ \\ ١- & ٣- & ٢ \\ ٩ & ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ فإن $ب_{٢٣} \times ب_{٢١}$ = ...

أ ٢٠ ب ٢– ج ١٠ د ٤–

٣ أي زوج من المقادير التالية يحقق : [٢س   س − ص] = [٤   ١] ....

أ س = ٤ ، ص = ١   ب س = ١ ، ص = ٤

ج س = ١ ، ص = ٢   د س = ٢ ، ص = ١

٤ إذا كانت [س   ص] = [٢   −٢] فإن ٢س − ص = ...

أ ١   ب −١   ج ٦   د −٦

٢-٧ جمع وطرح المصفوفات

لجمع مصفوفتين أ ، ب يجب أن تكونا من الرتبة نفسها.

نجمع كل عنصرين لهما الموقع نفسه في أ ، ب . مصفوفة الجمع لها رتبة كل من المصفوفتين أ ، ب .

مثال ١ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٠ & -٢ & ١ \\ ٧ & -٥ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ -٤ & ٢ \\ ٥ & -١ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} -٣ & ٩ & ٣ \\ ١٢ & ٦ & -٩ \end{bmatrix}$

فأوجد إن أمكن:

(أ) أ + ب

(ب) أ + جـ

وإذا لم يكن الجمع ممكنا ، فأذكر السبب

الحل

(أ) أ + ب لا يمكن لان المصفوفتين ليس لهم نفس الرتبه

(ب) $أ + جـ = \begin{bmatrix} ٠ & -٢ & ١ \\ ٧ & -٥ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & ٩ & ٣ \\ ١٢ & ٦ & -٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & ٧ & ٤ \\ ١٩ & ١ & -٦ \end{bmatrix}$

$أ - جـ = \begin{bmatrix} ٠ & -٢ & ١ \\ ٧ & -٥ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٣ & ٩ & ٣ \\ ١٢ & ٦ & -٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -١١ & -٢ \\ -٥ & -١١ & ١٢ \end{bmatrix}$

ضرب مصفوفة في عدد

١ الضرب القياسي هو عملية ضرب مصفوفة أ في عدد حقيقي ك : ك ≠ ٠

٢ الناتج هو المصفوفة ك أ

٣ نحصل على المصفوفة ك أ بضرب كل عنصر من أ في ك

٤ إذا كان ك = ٠ ، يكون الناتج مصفوفة صفرية.

مثال ٢ إذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ فأوجد:

(أ) $5\underline{\text{أ}} - 3\underline{\text{ب}}$

(ب) $\underline{\text{ب}} - 4\underline{\text{أ}}$

الحل

(أ) $5\underline{\text{أ}} - 3\underline{\text{ب}} = 5\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 15 & -20 \\ 25 & 20 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 12 & -26 \\ 31 & 23 & 6 \end{bmatrix}$$

(ب) $\underline{\text{ب}} - 4\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 12 & -16 \\ 20 & 16 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & -11 & 18 \\ -22 & -17 & -9 \end{bmatrix}$$

حل المعادلات المصفوفية

مثال ٣ حل المعادلة المصفوفية التالية: $\underline{\text{س}} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$

الحل

$\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 11 \end{bmatrix}$

٧-٤ مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات)

مصفوفة الوحدة

المصفوفة المربعة التي عناصر قطرها الرئيسي ١ ، وبقية العناصر صفر تسمى مصفوفة الوحدة

$$\underline{و}_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \qquad \underline{و}_{٣\times٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\underline{أ} \times \underline{و} = \underline{و} \times \underline{أ} = \underline{أ}$$

النظير الضربي

إذ كانت $\underline{أ}$ ، $\underset{\sim}{س}$ مصفوفتين مربعتين من الرتبة نفسها بحيث يكون $\underline{أ} \times \underset{\sim}{س} = \underline{و}$ ،

فإن $\underset{\sim}{س}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{أ}$. ويرمز إليها بـ $\underline{أ}^{-١}$

إذا $\underline{أ} \times \underline{أ}^{-١} = \underline{أ}^{-١} \times \underline{أ} = \underline{و}$

مثال ١ إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$

أوجد: (أ) $٢\underline{أ} - \underline{ب}$ (ب) $\underline{ب}^{-١}$

الحل

(أ) $٢\underline{أ} - \underline{ب} = ٢ \times \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٤ & -٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠-(-٢) & ٢-٢ \\ ٤-٥ & -٦-(-٤) \end{bmatrix}$$

$$\therefore ٢\underline{أ} - \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix}$$

ت) $\underline{\text{ب}}^{-1}$

$$\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$$

$$|\underline{\text{ب}}| = \begin{vmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{vmatrix}$$

$$= -٢ \times (-٤) - ٢ \times ٥$$

$$= ٨ - ١٠ = -٢ \neq ٠$$

$$\underline{\text{ب}}^{-1} = \frac{1}{|\underline{\text{ب}}|} \times \begin{bmatrix} \text{ء} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} -٤ & -٢ \\ -٥ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢{,}٥ & ١ \end{bmatrix}$$

محدد مصفوفة مربعة من الرتبة

محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{ء} \end{bmatrix}$ هو أ ء − ب جـ

تكتب $|\underline{\text{أ}}| = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{ء} \end{bmatrix} = $ أ ء − ب جـ

تسمى المصفوفة التي محددها يساوي الصفر بالمصفوفة المنفردة

مثال ٢ أوجد محدد كل من المصفوفات التالية :

$أ = \begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $ج = \begin{bmatrix} س & ٠ \\ ٠ & س \end{bmatrix}$

الحـــل

$$|أ| = \begin{vmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{vmatrix} = (-٣ \times -٥) - (٤ \times ٢) = ٧$$

$$|ب| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix} = (٢ \times -٢) - (-٣ \times ٣) = ٥$$

$$|ج| = \begin{vmatrix} س & ٠ \\ ٠ & س \end{vmatrix} = (س \times س) - (٠ \times ٠)$$

$$= س^٢ - ٠ = س^٢$$

مثال ٣ إذا كانت المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} س & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{bmatrix}$ منفردة أوجد قيمة س .

الحـــل

$\because$ أ منفردة

$\therefore |أ| =$ صـــفر

$(س \times ٦) - (٤ \times ١٢) =$ صـــفر

$٦س - ٤٨ =$ صـــفر

$$\frac{\cancel{٦}س}{\cancel{٦}} = \frac{٤٨}{٦} \leftarrow \boxed{س = ٨}$$

مثال ٣ إذا كانت المصفوفة $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ -٤ & ٢س \end{bmatrix}$ منفردة ، أوجد قيمة س .

الحــــل

$\because$ $\underline{ب}$ منفردة

$\therefore$ $|\underline{ب}|$ = صــفر

$(٥ \times ٢س) - (١٠ \times -٤) =$ صــفر

$١٠س - (-٤٠) =$ صــفر

$١٠س + ٤٠ =$ صــفر

$\frac{\cancel{١٠}س}{\cancel{١٠}} = \frac{٤٠}{١٠} \leftarrow \boxed{س = -٤}$

أسئلة موضوعية

❶ إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} س & -٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ مصفوفه منفرده فإن س = ٦ (✗)

❷ العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية هو $\underline{و} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ (✓)

❸ المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} -١ & -١ \\ -٣ & -٢ \end{bmatrix}$ (✓)

❹ إذا كانت المصفوفة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٨ & س \\ ١٢ & ٦ \end{bmatrix}$ منفردة فإن : س = −٤ (✗)

❺ لأي مصفوفة $\underline{أ}$ يمكن إيجاد النظير الضربي $\underline{أ}^{-١}$ (✗)

اختر الإجابة الصحيحة :-

❶ إذا كانت $\underline{ج} = \begin{bmatrix} س & ٠ \\ ٠ & س \end{bmatrix}$ فإن $|\underline{ج}|$ = ...

(أ) $س^٢$ (ب) ٢س (ج) س (د) صــفر

❷ إذا كانت $\begin{bmatrix} ٤ & س \\ ٦ & ١٢ \end{bmatrix}$ مصفوفة منفردة فإن س = ...

أ ٦ ب ٧ ح ٨ د ١٠

❸ المصفوفة المنفردة فيما يلي هي : ....

أ $\begin{bmatrix} -٣ & ٣ \\ ٥ & ٥ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ -٥ & ٥ \end{bmatrix}$ ح $\begin{bmatrix} -٣ & ٣ \\ -٥ & ٥ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} -٣ & ٣ \\ -٥ & -٥ \end{bmatrix}$

❹ قيمة ص التي تجعل للمصفوفة $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ص & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ نظير ضربي يجب ان لا تساوي ....

أ -٦ ب ٥ ح -٥ د ٦

❺ إذا كانت $\begin{bmatrix} ٤ & س \\ س & ٩ \end{bmatrix}$ مصفوفة منفردة فإن س = ...

أ ٦ فقط ب -٦ فقط ح ٦ ، -٦ د ٣٦

❻ إذا كانت $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ فإن قيمة $|\underline{ب}| - ب_{٢١}$ = ...

أ ١ ب ٢ ح ٤ د ٧

❼ مصفوفة الوحدة فيما يلي هي : ....

أ $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ح $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

❽ إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$ فإن قيمة $\underline{أ} \times \underline{أ}^{-١}$ = ...

أ $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} -٥ & ٦ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ ح $\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

٧-٥ قاعدة كرامر (المحددات)

استخدام قاعدة كرامر (المحددات) لحل معادلتين خطيتين :

مثال ١ استخدم قاعدة كرامر لحل النظام:
$$\begin{cases} ٤س - ٥ص + ٧ = ٠ \\ ٣ص - ٦س + ٣ = ٠ \end{cases}$$

الحل

$٤س - ٥ص = -٧$

$-٦س + ٣ص = -٣$

١ $\Delta = \begin{vmatrix} ٤ & -٥ \\ -٦ & ٣ \end{vmatrix} = (٤ \times ٣) - (-٥ \times -٦) = -١٨ \neq ٠$

٢ $\Delta س = \begin{vmatrix} -٧ & -٥ \\ -٣ & ٣ \end{vmatrix} = (-٧ \times ٣) - (-٥ \times -٣) = -٣٦$

٣ $\Delta ص = \begin{vmatrix} ٤ & -٧ \\ -٦ & -٣ \end{vmatrix} = (٤ \times -٣) - (-٧ \times -٦) = -٥٤$

٤ $س = \dfrac{\Delta س}{\Delta} = \dfrac{-٣٦}{-١٨} = ٢$ ✓

٥ $ص = \dfrac{\Delta ص}{\Delta} = \dfrac{-٥٤}{-١٨} = ٣$ ✓

حل النظام هو $س = ٢$ ، $ص = ٣$

$م . ح = \{(٢ ، ٣)\}$

مثال ٢ استخدم قاعدة كرامر لحل النظام : $\left\{\begin{array}{l}\text{٣س} + \text{٢ص} = -\text{٦} \\ -\text{٤س} - \text{٣ص} - \text{٧} = \text{٠}\end{array}\right.$

الحل

$\text{٣س} + \text{٢ص} = -\text{٦}$

$-\text{٤س} - \text{٣ص} = \text{٧}$

١ دلتا ← $\Delta = \begin{vmatrix} \text{٣} & \text{٢} \\ -\text{٤} & -\text{٣} \end{vmatrix} = (\text{٣} \times -\text{٣}) - (\text{٢} \times -\text{٤}) = -\text{١} \neq \text{٠}$

٢ $\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} -\text{٦} & \text{٢} \\ \text{٧} & -\text{٣} \end{vmatrix} = (-\text{٦} \times -\text{٣}) - (\text{٢} \times \text{٧}) = \text{٤}$

٣ $\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} \text{٣} & -\text{٦} \\ -\text{٤} & \text{٧} \end{vmatrix} = (\text{٣} \times \text{٧}) - (-\text{٦} \times -\text{٤}) = -\text{٣}$

٤ $\text{س} = \dfrac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \dfrac{\text{٤}}{-\text{١}} = -\text{٤}$ ✓

٥ $\text{ص} = \dfrac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \dfrac{-\text{٣}}{-\text{١}} = \text{٣}$ ✓

حل النظام هو س = −٤ ، ص = ٣

م . ج = $\{(-\text{٤} \,،\, \text{٣})\}$

أسئلة موضوعية

❶ إذا كان النظام = $\left\{\begin{array}{l}\text{٢س} + \text{٣ص} = \text{٥} \\ \text{٣س} + \text{٥ص} = \text{٧}\end{array}\right.$ ، فإن : $\Delta_{\text{ص}} = \text{٢}$ (✗)

حل المعادلات باستخدام النظير الضربي

مثال ١ استخدم النظير الضربي للمصفوفة لحل النظام:

$$\begin{cases} \text{س} + ٣\text{ص} = ٥ \\ \text{س} + ٤\text{ص} = ٦ \end{cases}$$

الحل

نكتب النظام مع معادلة المصفوفات :

$$\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix} \longrightarrow (١)$$

حيث $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ع}} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$

$$|\underline{\text{أ}}| = \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = ١ \times ٤ - ٣ \times ١ = ١ \neq ٠$$

$$\underline{\text{أ}}^{-١} = \frac{١}{١} \times \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$$

وبضرب طرفي المعادلة (١) من جهة اليمين في $\underline{\text{أ}}^{-١}$:

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \times ٥ + (-٣) \times ٦ \\ (-١) \times ٥ + ١ \times ٦ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \end{bmatrix}$$

$\therefore$ س $= ٢$ ، ص $= ١$

مثال ٢ حل النظام $\left\{\begin{array}{l} ٥س + ٣ص = ٧ \\ ٣س + ٢ص = ٥ \end{array}\right.$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة

الحـــل

المعادلة المصفوفية للنظام هي :

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix} \longrightarrow (١)$$

حيث $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ع = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix}$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٥ \times ٢ - ٣ \times ٣ = ١ \neq ٠$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{١} \times \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix}$$

وبضرب طرفي المعادلة (١) من جهة اليمين في $أ^{-١}$:

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٤ \end{bmatrix}$$

∴ س = −١ ، ص = ٤

مثال ٣ أوجد سـ بحيث : $\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix} \times \underset{\sim}{س} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ١٠ \end{bmatrix}$

الحـــل

توجد النظير الضربي للمصفوفة $\underset{-}{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٥ & -٣ \\ ٤ & -٢ \end{vmatrix} = ٥ \times (-٢) - (-٣) \times ٤ = ٢ \neq ٠$$

$$\underset{-}{أ}^{-١} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix}$$

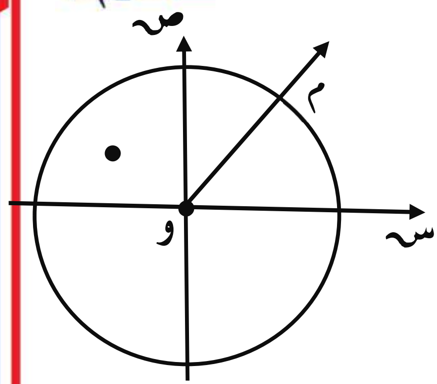
$$\underset{\sim}{س} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ \\ ١٠ \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{س} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} -٢ \times ٥ + ٣ \times ١٠ \\ -٤ \times ٥ + ٥ \times ١٠ \end{bmatrix} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} ٢٠ \\ ٣٠ \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{س} = \begin{bmatrix} ١٠ \\ ١٥ \end{bmatrix}$$

٨-١ حساب المثلثات

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)



دائرة الوحدة

هي دائرة مركزها نقطة الأصل و، وطول نصف قطرها واحد وحدة.

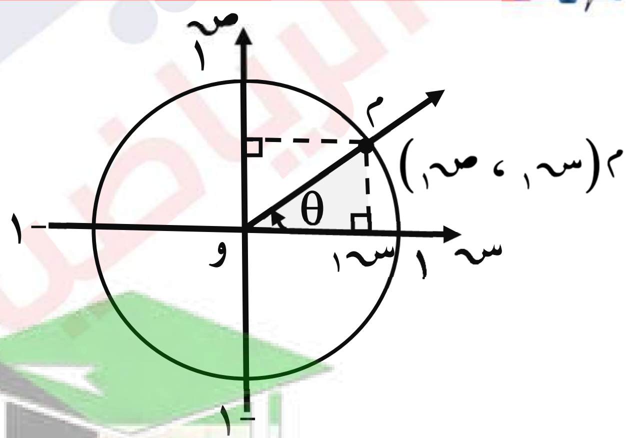
النقطة المثلثية

هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة.

ملاحظة : تكون النقطة (س ، ص) نقطة مثلثية إذا وفقط إذا كان

$س^2 + ص^2 = ١$ سوف نستخدم الرمز θ لترمز إلى قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي.

النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ



جتا θ = س١   جتا θ = ص١

ظا $\theta = \frac{ص_١}{س_١}$ ، س١ $\neq$ ٠   ظتا $\theta = \frac{س_١}{ص_١}$ ، ص١ $\neq$ ٠

قا $\theta = \frac{١}{س_١}$ ، س١ $\neq$ ٠   قتا $\theta = \frac{١}{ص_١}$ ، ص١ $\neq$ ٠

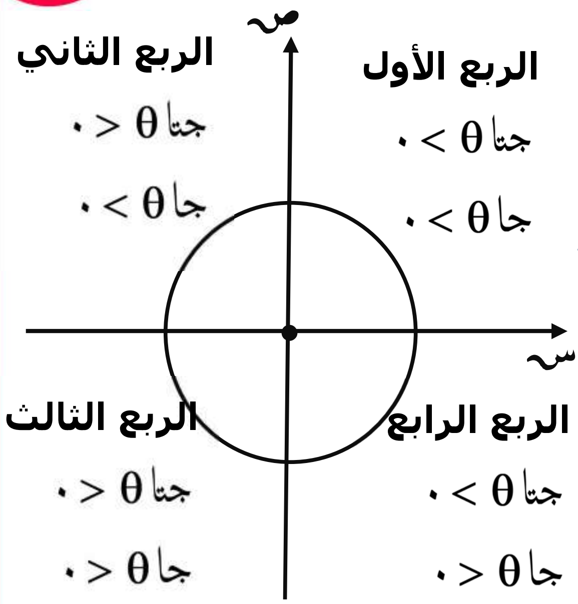
ملحوظة هامة :

إذا كانت θ في الربع الأول فإن: جا θ > ٠ ، جتا θ > ٠

إذا كانت θ في الربع الثاني فإن: جا θ > ٠ ، جتا θ < ٠

إذا كانت θ في الربع الثالث فإن : جا θ < ٠ ، جتا θ < ٠

إذا كانت θ في الربع الرابع فإن: جا θ < ٠ ، جتا θ > ٠



كل جميلة ظريفة جاتها عريس

مثال ١ حدد إشارة جا θ ، جتا θ في كل مما يلي:

(أ) $\theta = ١٣٥^\circ$

(ب) $\theta = \frac{٧\pi}{٦}$

(ج) $\theta = ٣٠٥^\circ$

الحل

(أ) $\because$ θ تقع في الربع الثاني

جا θ > ٠

جتا θ < ٠

ظا θ < ٠

(ب) $\theta = \frac{٧ \times ١٨٠^\circ}{٦} = ٢١٠^\circ$

$\because$ θ تقع في الربع الثالث

جا θ < ٠

جتا θ < ٠

ظا θ > ٠

(ج) $\because$ θ تقع في الربع الرابع

جا θ < ٠

جتا θ > ٠

ظا θ < ٠

زاوية الإسناد

زاوية الإسناد الموجهة (و ب⃡ ، و جـ⃡) التي في وضع قياسي هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات.

فإذا كان α زاوية الإسناد فإن: $٠^\circ < \alpha < ٩٠^\circ$

عندما θ تقع في الربع الثاني	عندما θ تقع في الربع الثالث	عندما θ تقع في الربع الرابع
$\alpha^\circ = ١٨٠^\circ - \theta^\circ$	$\alpha^\circ = \theta^\circ - ١٨٠^\circ$	$\alpha^\circ = ٣٦٠^\circ - \theta^\circ$
$\alpha^\circ = \pi - \theta^\circ$	$\alpha^\circ = \theta^\circ - \pi$	$\alpha^\circ = ٢\pi - \theta^\circ$

مثال ٢ ارسم كلًا من الزوايا الموجهة في وضع قياسي، ثم عين زاوية الإسناد وأوجد قياسها لكل مما يلي:

(أ) ١٢٥°

(ب) ٢١٠°

(جـ) $\frac{١١\pi}{٦}$

الحل

(أ) $\alpha = ١٨٠^\circ - ١٢٥^\circ$

$\alpha = ٥٥^\circ$

(ب) $\alpha = ٢١٠^\circ - ١٨٠^\circ$

$\alpha = ٣٠^\circ$

(جـ) $= \frac{١١ \times ١٨٠^\circ}{٦} = ٣٣٠^\circ$

$\alpha = ٣٦٠^\circ - ٣٣٠^\circ$

$\alpha = ٣٠^\circ$

أسئلة موضوعية

١ جتا$(-٣٠٠^\circ) = ٠,٥$ (✓)

٢ جا$(١٢٠^\circ) = ٠,٥$ (✗)

٣ ظا$(-١٥٠^\circ) = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ (✓)

٤ قا$(٣١٥^\circ) = \sqrt{٢}$ (✓)

❺ إشارة مقلوب دالة مثلثية هي إشارة الدالة المثلثية الاصلية نفسها (✓)

اختر الإجابة الصحيحة :-

❶ الزاوية التى يقع ضلعها النهائى فى الربع الرابع في ما يلي هي : ....

(أ) -٣٢٠° (ب) -٢٧٠° (جـ) $\frac{٥\pi}{٣}$ (د) $\frac{١٣\pi}{٩}$

❷ الزاوية التى في الوضع القياسى وقياس زاويه اسنادها يختلف عن الزوايا الاخرى هي : ....

(أ) $\frac{٧\pi}{٤}$ (ب) ١٣٥° (جـ) $\frac{٣\pi}{٤}$ (د) ٢١٥°

❸ الزاوية التى فى الوضع القياسى و زاوية اسنادها $\frac{\pi}{٣}$ هى : ....

(أ) $\frac{١١\pi}{٦}$ (ب) $\frac{٧\pi}{٨}$ (جـ) ٢٥٥° (د) $\frac{٥\pi}{٣}$

❹ زاوية في الوضع القياسى قياسها يساوى -٢٥٥° فان النقطة المثلثية التى يمكن ان تقع على الضلع النهائي لهذه الزاوية هي : ....

(أ) $\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢} ، -\frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$ (ب) $\left(-\frac{\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$ (جـ) $\left(-\frac{\sqrt{٢}}{٢} ، -\frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$ (د) $(-١ ، ١)$

❺ $[\text{جا}(-١٣٥)]^٢ + [\text{جتا}(-١٣٥)]^٢ =$ ....

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) صــفر

❻ الزاوية التي في الوضع القياسي وضلعها النهائي يمر بالنقطة $\left(-\frac{\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$ التي تقع على دائرة الوحدة هي : ....

(أ) ٤٥° (ب) ٢٢٥° (جـ) ١٣٥° (د) ٣٣٠°

❼ إذا كانت جتاس > ٠ ، جاس < ٠ فإن س تقع في الربع ....

(أ) الأول (ب) الثاني (جـ) الثالث (د) الرابع

٨-٢ العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

تسمى جا θ ، جتا θ ، ظا θ النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ وتدعى النسب المثلثية الأساسية

علما بأن : $-١ \leq$ جتا $\theta \leq ١$

$-١ \leq$ جا $\theta \leq ١$

ظا $\theta \in$ ح

النسب المثلثية للزاويتين θ ، $-\theta$

قانون :

جتا $(-\theta) =$ جتا θ

جا $(-\theta) = -$ جا θ

وبالتالي ظا $(-\theta) = -$ ظا θ بشرط أن يكون ظا θ معرف.

مثال ١ أكمل إذا كان :

ⓐ جا م $= ٠,٣$ فإن : جا $(-$ م$) = -$جا م $= -٠,٣$

ⓑ جتا ل $= ٠,٣٨$ فإن : جتا $(-$ ل$) =$ جتا ل $= ٠,٣٨$

ⓒ ظا س $= ٣,١٤$ فإن : ظا $(-$ س$) = -$ظا س $= -٣,١٤$

ⓓ جتا $(-$ ص$) = \frac{١}{٤}$ فإن : جتا ص $= \frac{١}{٤}$

النسب المثلثية للزاويتين θ ، $(\pi - \theta)$

قانون :

جتا $(\pi - \theta) = -$ جتا θ

جا $(\pi - \theta) =$ جا θ

وبالتالي ظا $(\pi - \theta) = -$ ظا θ بشرط أن يكون ظا θ معرفاً.

مثال ٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان :

(أ) $\text{جا}\ ٣٠^\circ = \frac{١}{٢}$ ، **فأوجد** $\text{جا}\ ١٥٠^\circ$

(ب) $\text{جتا}\ \text{س} = \frac{٤}{٥}$ ، **فأوجد** $\text{جتا}\ (\pi - \text{س})$

(ج) $\text{ظا}\ \text{س} = \frac{\pi}{١٢} = ٢ - \sqrt{٣}$ ، **فأوجد** $\text{ظا}\ \frac{١١\pi}{١٢}$

الحـــل

(أ) $\text{جا}\ ١٥٠^\circ = \text{جا}\ (١٨٠^\circ - ٣٠^\circ) = +\text{جا}\ ٣٠^\circ = \frac{١}{٢}$

$\text{جا}\ ١٣٥^\circ = \text{جا}\ (١٨٠^\circ - ٤٥^\circ) = +\text{جا}\ ٤٥^\circ = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

(ب) $\text{جتا}\ (\cancelto{١٨٠}{\pi} - \text{س}) = -\text{جتا}\ \text{س} = -\frac{٤}{٥}$

(ج) $\text{ظا}\ \frac{١١\pi}{١٢} = \text{ظا}\ \frac{١١ \times ١٨٠}{١٢} = \text{ظا}\ ١٦٥$

$= \text{ظا}\ (١٨٠ - ١٥) = -\text{ظا}\ ١٥ = -(٢ - \sqrt{٣})$

$\text{ظا}\ ١٥ = ٢ - \sqrt{٣}$

النسب المثلثية للزاويتين θ ، $(\pi + \theta)$

قانون :

$\text{جتا}\ (\pi + \theta) = -\text{جتا}\ \theta$

$\text{جا}\ (\pi + \theta) = -\text{جا}\ \theta$

وبالتالي $\text{ظا}\ (\pi + \theta) = \text{ظا}\ \theta$ **بشرط أن يكون** $\text{ظا}\ \theta$ **معرفاً.**