قناة الفلاح للرياضيات

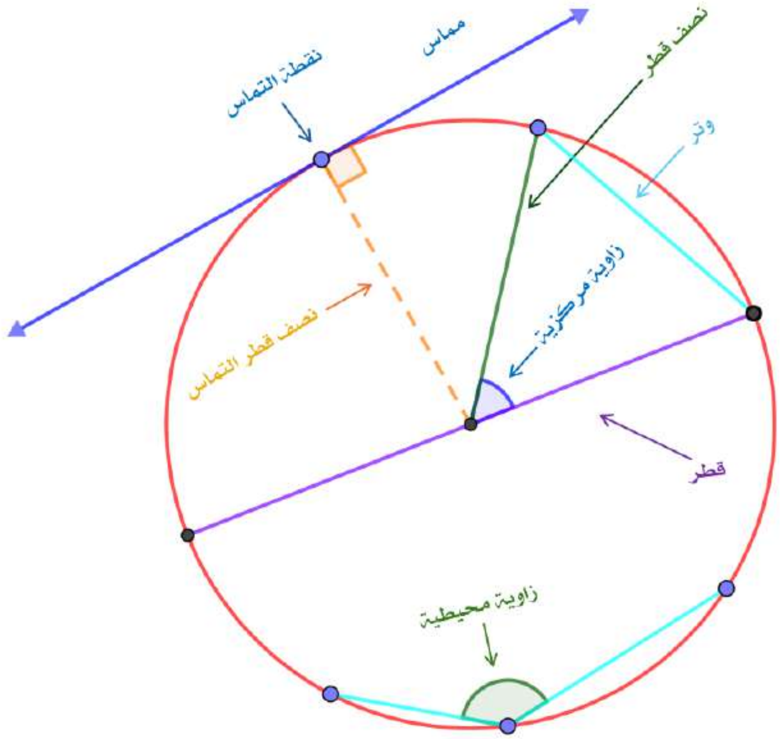
الفصل الدراسي الثاني

مذكرة الفلاح

الصف العاشر

أ / محمد نوري الفلاح

الوحدة السادسة : هندسة الدائرة بند ٦-١ (أ) الدائرة



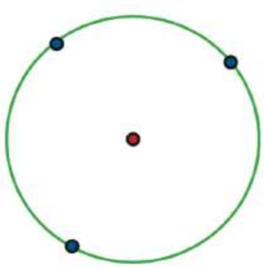
تعريف الدائرة :

الدائرة هي مجموعة نقاط المستوى التي تبعد كل منها عن نقطة ثابتة م في المستوى بعداً ثابتاً

تسمي النقطة الثابتة **مركز الدائرة** ويسمي البعد الثابت **طول نصف قطر الدائرة** ويرمز له عادة بالرمز **نق**

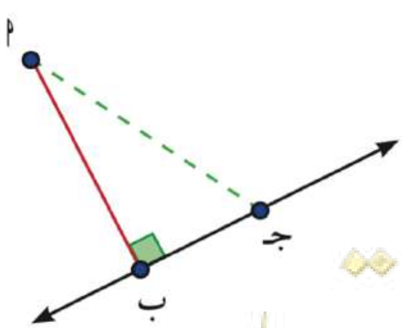
نظرية (١)

كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة



استنتاج ١ :

من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بهذه النقطة وعمودي علي المستقيم المعلوم .



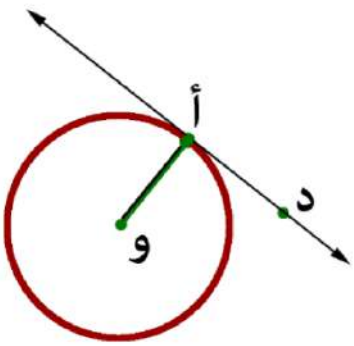
استنتاج ٢ :

أقصر بعد بين نقطة ومستقيم هو البعد العمودي .

بند ٦-١ (ب) مماس الدائرة

المماس للدائرة : هو مستقيم في المستوى يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة .

نقطة التقاطع تسمى نقطة التماس

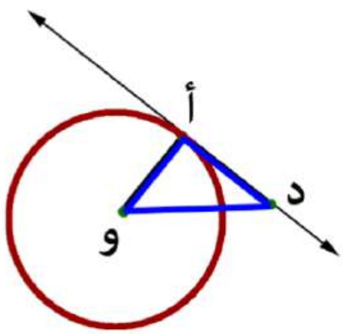


$\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ مماس $\overleftarrow{\text{أ د}}$ شعاع مماس

$\overline{\text{أ د}}$ قطعة مماسية $\overline{\text{أ و}}$ نصف قطر التماس

نظرية (٢)

المماس عمودي على نصف قطر التماس .



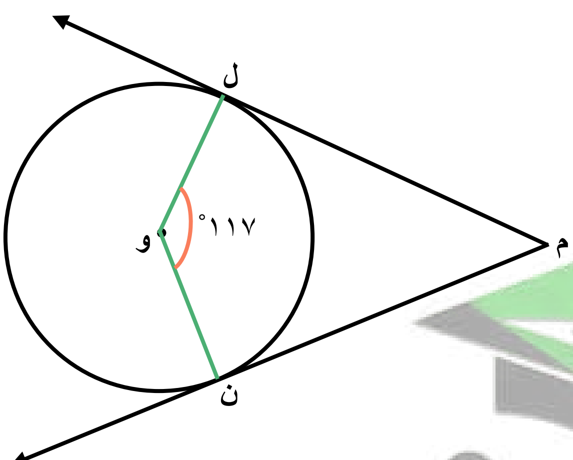
إذا كان مستقيم مماساً لدائرة فإنه يكون متعامداًمع نصف القطر المار بنقطة التماس . أي أن : $\overline{\text{و أ}} \perp \overleftrightarrow{\text{د أ}}$

مثال(٢) صـ ١٥:

في الشكل المقابل :

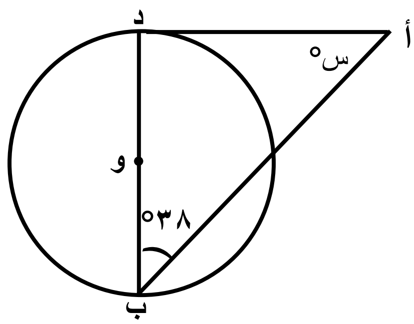
$\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ مماسان للدائرة التي مركزها و .

أوجد قياس الزاوية ل م ن .



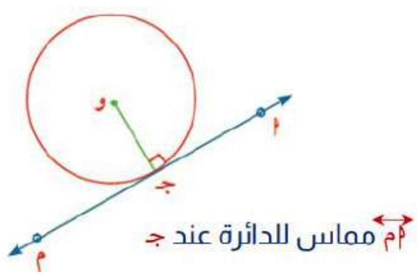
حاول(٢) صـ ١٥ :

<ins>في الشكل المقابل</ins> : أ د مماس للدائرة التي مركزها و .
أوجد قيمة س°



نظرية (٣)

المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي الي الدائرة يكون مماساً لهذه الدائرة عند هذه النقطة .

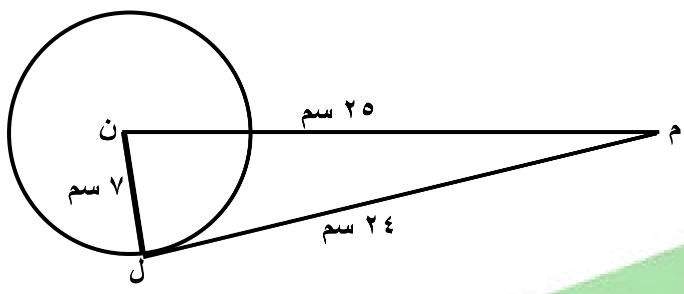


مثال (٤) صـ ١٨ :

في الشكل المقابل :

ن ل = ٧ سم ، ل م = ٢٤ سم ، ن م = ٢٥ سم .

أثبت أن م ل مماس للدائرة التي مركزها ن .

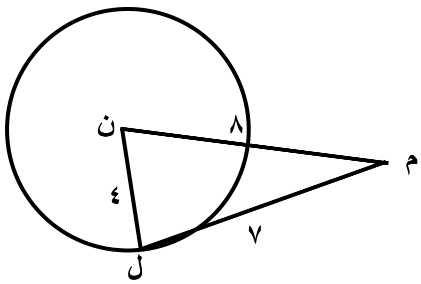


حاول (٤) صـ ١٨:

في الشكل المقابل :

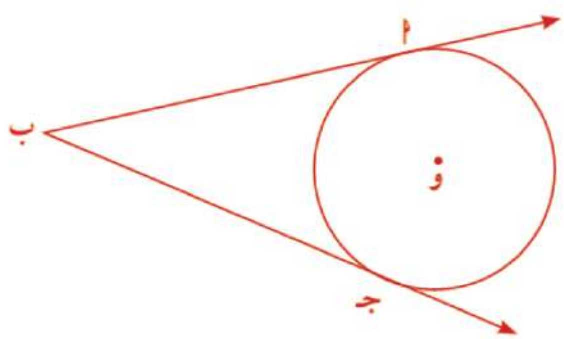
إذا كان ن ل = ٤ ، ل م = ٧ ، ن م = ٨ ،

فهل م ل مماس للدائرة ؟ فسر اجابتك .



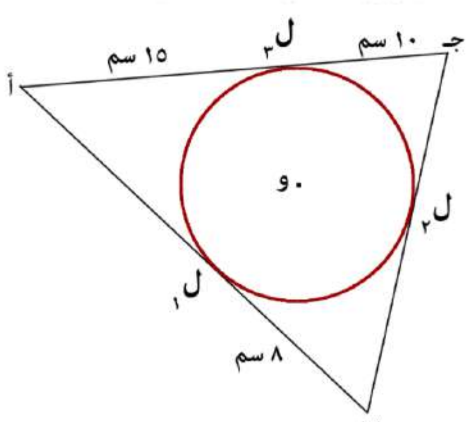
نظرية (٤)

القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان $\overline{أب} \cong \overline{جـ ب}$



مثال(٦) صـ ٢٠:

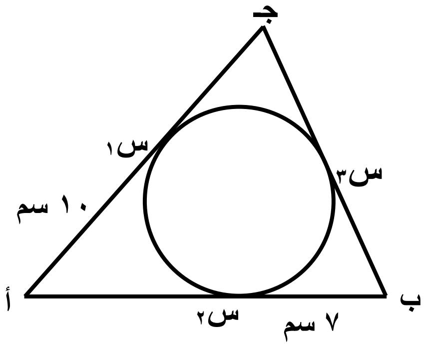
في الشكل المقابل : أوجد محيط المثلث أ ب جـ



حاول (٦) صـ ٢١ :

في الشكل المقابل: إذا كان محيط المثلث أ ب جـ = ٥٠ سم .

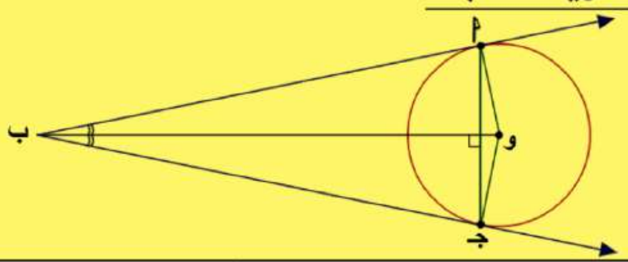
أوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$.



نتائج نظرية (٤)

نتائج النظرية

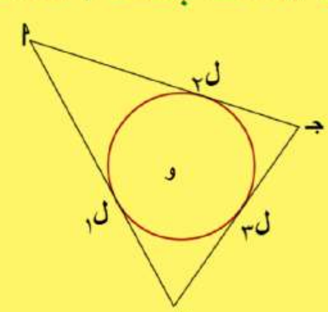
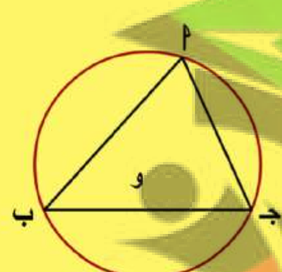
Δ ب أ جـ متطابق الضلعين من النظرية السابقة



$\overleftarrow{\text{ب و}}$ منصف الزاوية أ $\hat{\text{ب}}$ جـ

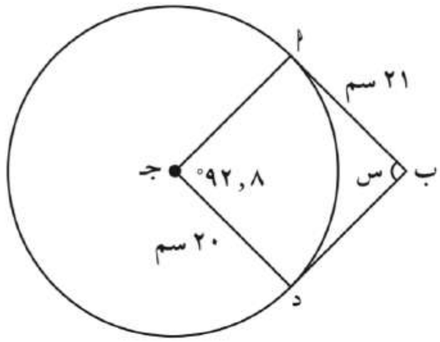
$\overleftarrow{\text{و ب}}$ منصف الزاوية أ $\hat{\text{و}}$ جـ

$\overline{\text{و ب}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$

الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة)	الدائرة المحيطة لمثلث (الخارجة)
	
هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل	هي دائرة تمر برؤوس المثلث الثلاثة
مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزاوية الداخلية للمثلث	مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث (نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع المثلث)

كراسة صـ ١١ رقم (٦) في الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ مماسان للدائرة.

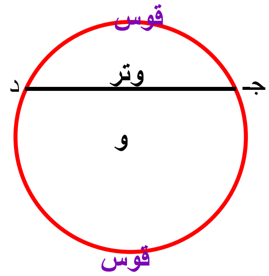


أ) أوجد قيمة س.

ب) أوجد محيط الشكل الرباعي ب أ جـ د

جـ) أوجد ب جـ

بند (٦ ــ ٢) الأوتار والأقواس



الوتر : هو قطعة مستقيمة ينتمي طرفاها إلى دائرة .

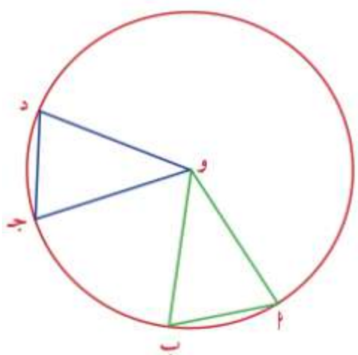
الوتر $\overline{\text{جـ د}}$ والقوس $\overset{\frown}{\text{جـ د}}$ المناظر لهذا الوتر

نظرية ١ في دائرة أو في دوائر متطابقة

١) للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة .

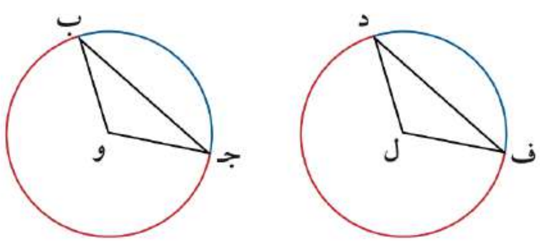
٢) الأوتار المتطابقة تقابل أقواساً متطابقة .

٣) للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة .

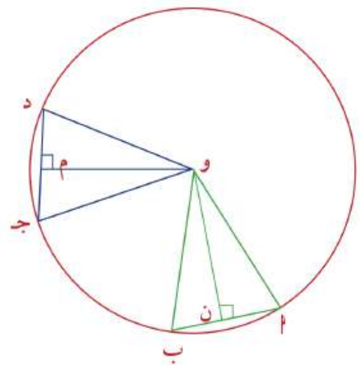


مثال(١) صـ ٢٦:

في الشكل المقابل الدائرتان متطابقتان، $\overset{\frown}{\text{ب جـ}} \cong \overset{\frown}{\text{د ف}}$. ماذا تستنتج؟



حاول(١) صـ ٢٦: في الرسم أعلاه ، إذا كان $\overline{\text{ب جـ}} \cong \overline{\text{د ف}}$ ، فماذا تستنتج ؟

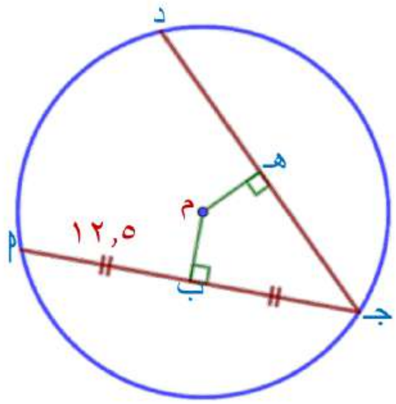


نظرية (٢)

(١) الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.

(٢) الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز الدائرة تكون متطابقة.

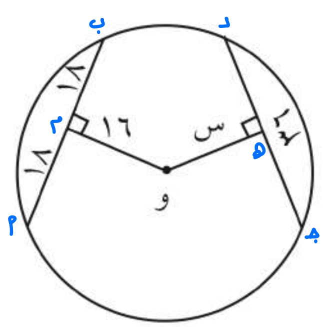
مثال(٢) صـ ٢٨:



في الشكل المقابل : ليكن م مركز الدائرة . م ب = م هـ ،

أوجد طول $\overline{\text{جـ د}}$. فسّر .

حاول(٢) صـ ٢٨:



دائرة مركزها و.

أوجد قيمة س في الشكل المقابل، وفسر اجابتك.

نظرية (٣)

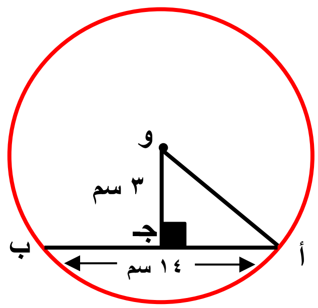
(١) القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلاً من قوسيه.

(٢) القطر الذي ينصف وتراً (ليس قطراً) في دائرة يكون عمودياً على هذا الوتر.

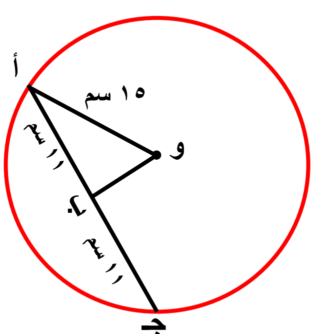
(٣) العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة .

مثال(٣) صـ ٢٩ :

(أ) في الشكل المقابل ، أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و.



(ب) في الشكل المقابل ، أوجد البعد بين مركز الدائرة والوتر.

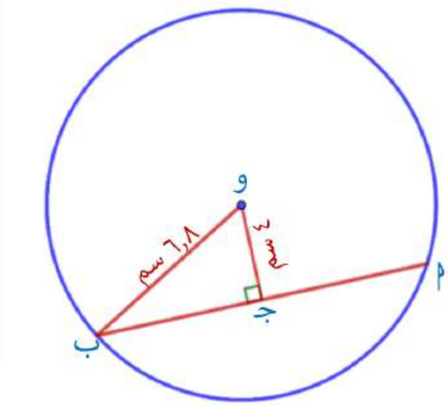


حاول (٣) صـ ٣٠:

استخدم الشكل المقابل لإيجاد :

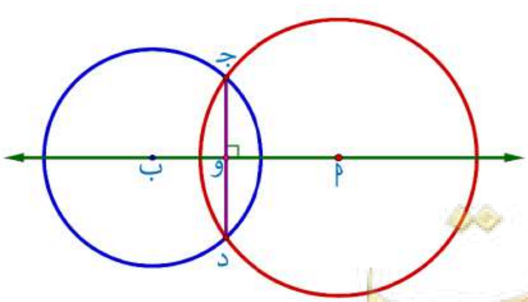
(أ) طول الوتر أ ب .

(ب) المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر أ ب

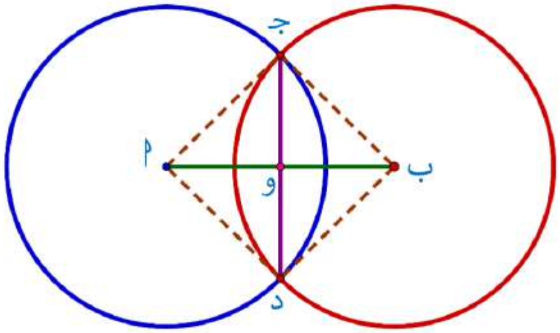


نتيجة :

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على الوتر المشترك بينهما وينصفه



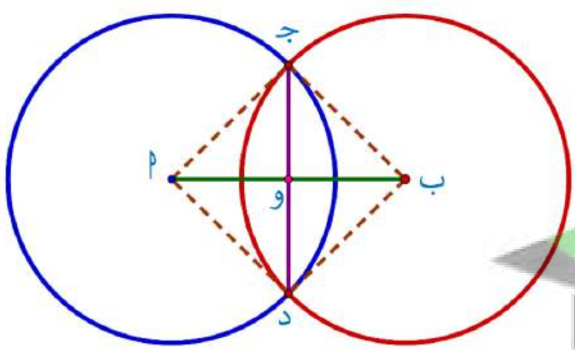
مثال(٤) صـ ٣٠:



يمثل الشكل المقابل دائرتين متطابقتين. $\overline{\text{جـ د}}$ وتر مشترك.

إذا كان أ ب = ٢٤ سم، نق = ١٣ سم . فما طول $\overline{\text{جـ د}}$؟

حاول(٤) صـ ٣١:



في مثال (٤) اذا كان جـ د = ١٤ سم، نق = ١٣ سم.

فأوجد طول $\overline{\text{أ ب}}$.

بند (٦ - ٣) الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

تعريف :

(١) الزاوية المركزية: الزاوية التي راسها ***مركز الدائرة*** وضلعاها يقطعان الدائرة .

(٢) الزاوية المحيطية: الزاوية التي راسها ***احدي نقاط الدائرة*** وضلعاها يقطعان الدائرة .

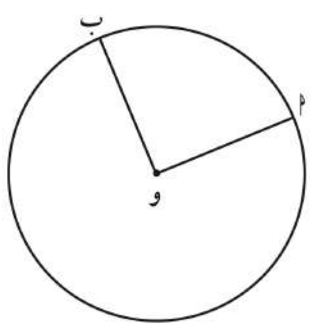
نظرية (١)

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة.

مثال(١) صـ ٣٣:

في الشكل المقابل دائرة مركزها و. إذا كان ق $(\overset{\frown}{\text{أ ب}})$ = ٩٠°

فأوجد ق (أ $\hat{\text{و}}$ ب).

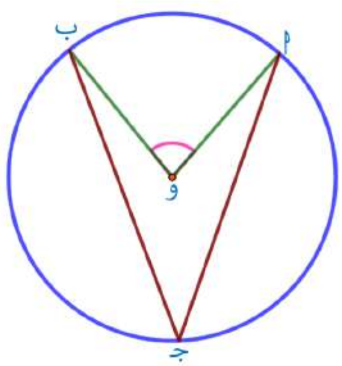


حاول (١) صـ ٣٣:

إذا كان قياس زاوية مركزية ٣٥° ، فأوجد قياس القوس على الدائرة المحصور بين ضلعيها.

نظرية (٢)

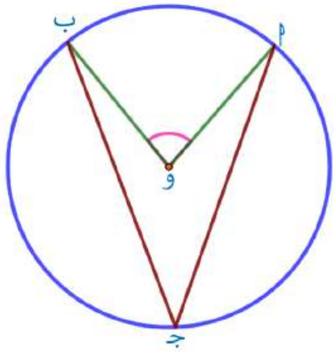
في الدائرة قياس الزاوية **المحيطية** يساوي ***نصف*** قياس القوس المحصور بين ضلعيها



$$\text{ق}(\text{أ}\hat{\text{جـ}}\text{ب}) = \frac{1}{2}\,\text{ق}(\text{أ}\hat{\text{و}}\text{ب}) = \frac{1}{2}\,\text{ق}(\overset{\frown}{\text{أب}})$$

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه

مثال(٢) صـ ٣٤:



في الشكل المقابل: إذا كان ق(أ⁀ب) = ٨٠° فأوجد ق(أجـ⁀ب).

حاول(٢) صـ ٣٤:

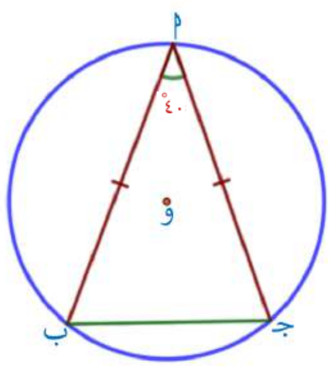
إذا كان قياس زاوية محيطية في دائرة يساوي ٥٤° ، فأوجد قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

مثال(٣) صـ ٣٤:

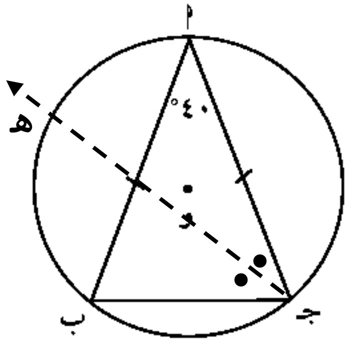
في الشكل المقابل : أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين حيث أ ، ب ، جـ نقاط على الدائرة التي مركزها و ،

ق (ب أ̂ جـ) = ٤٠°

أوجد قياس كل من الأقواس : أ⁀ب ، ب⁀جـ ، أ⁀جـ



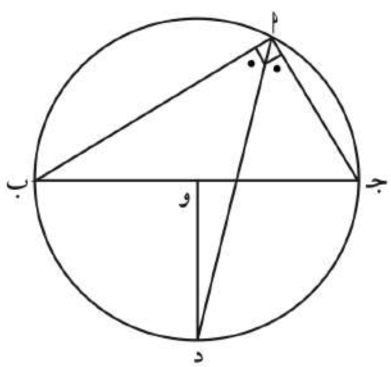
حاول(٣) صـ ٣٥:



إذا كان جـ هـ منصف الزاوية الداخلية أ جـ ب ويقطع الدائرة في النقطة هـ

ما قياس القوس الأصغر أ هـ ؟

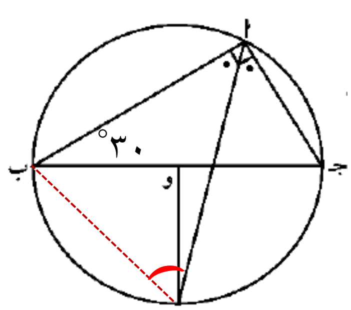
مثال(٤) صـ ٣٥:



دائرة مركزها و .

أثبت أن د و ⊥ ب جـ

حاول (٤) صـ ٣٥:

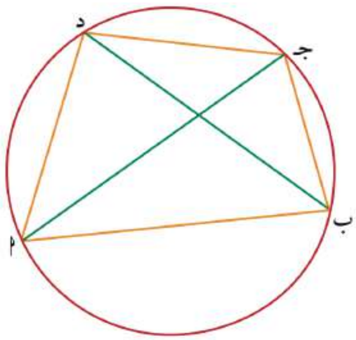


اذا كان ق (أ ب جـ) = ٣٠° ، أوجد : ق (أ د ب)

مثال(٦) صـ ٣٦:

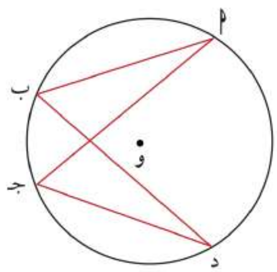
أ ب جـ د شكل رباعي دائري.

أثبت أن ق (أ ب̂ د) = ق (أ جـ̂ د)



نتائج :

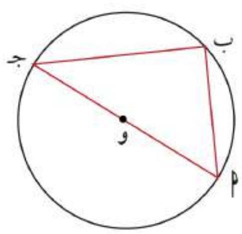
(١) كل زاويتان محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان



أ ب̂ د ، أ جـ̂ د تحصران ⌢أد

∴ ق(أ ب̂ د) = ق(أ جـ̂ د)

(٢) كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة

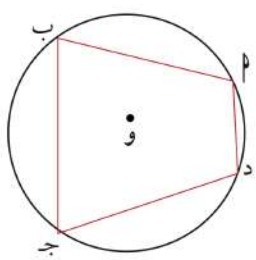


أ ب̂ جـ تحصر ⌢أجـ (نصف دائرة)

∴ ق(أ ب̂ جـ) = ٩٠°

(أ ب̂ جـ) زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة وهي زاوية قائمة

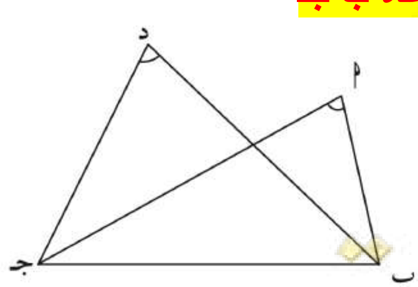
(٣) كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة) ، تكون زواياه المتقابلة متكاملة .



ق(أ̂) + ق(جـ̂) = ١٨٠°

ق(ب̂) + ق(د̂) = ١٨٠°

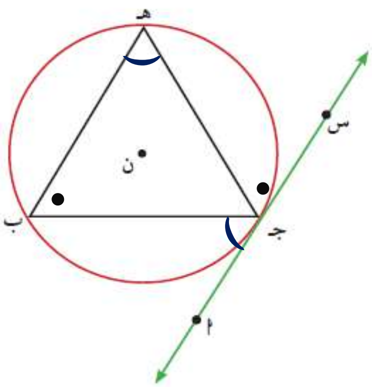
(٤) في الشكل إذا تطابقت الزاويتان أ̂ ، د̂ المرسومتان على القاعدة ب جـ وفي جهة واحدة منها . كان الشكل أ ب جـ د رباعياً دائرياً



نظرية (٣):

(١) قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه

(٢) قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر



لتكن ب نقطة تنتمي إلى الدائرة التي مركزها ن

$\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة جـ.

$\overline{\text{جـ ب}}$ وتر في الدائرة يمر بنقطة التماس جـ.

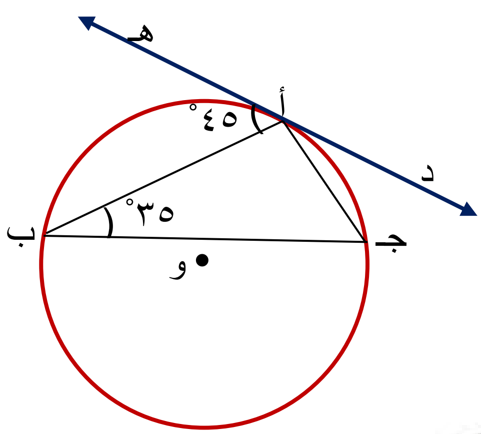
يسمى $\overline{\text{جـ ب}}$ وتر التماس

الزاوية (أ جـ^ ب) تسمى زاوية مماسية، الزاوية (س جـ^ ب) تسمى زاوية مماسية أيضًا.

مثال(٧) صـ ٣٩:

في الشكل المقابل إذا كان $\overleftrightarrow{\text{دهـ}}$ مماساً للدائرة عند أ،

فأوجد ق (جـ أ^ ب).

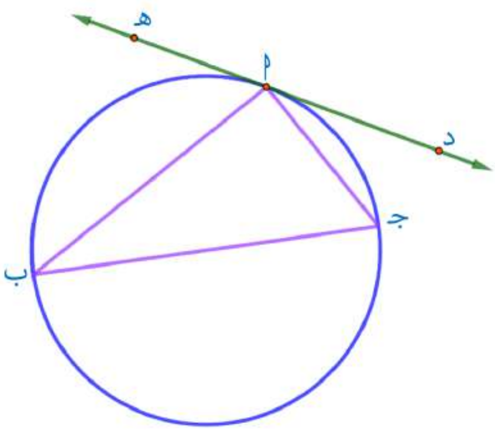


حاول أن تحل (٧) صـ ٣٩:

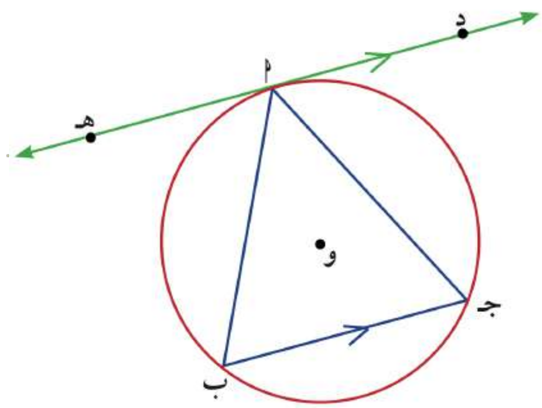
في الشكل المقابل ، لدينا ق (د أ̂ جـ)= ٤٠ ْ ، ق (هـ أ̂ ب) = ٥٠ ْ

(أ) أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ.

(ب) أثبت أن ب جـ قطر للدائرة.



مثال (٩) صـ ٤٠:

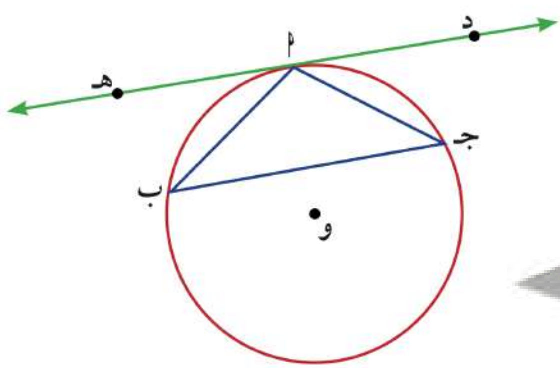


في الشكل المقابل، د هـ مماس للدائرة عند النقطة أ ،

ب جـ وتر في الدائرة مواز للمماس د هـ .

أثبت ان المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين.

حاول أن تحل (٩) صـ ٤١:



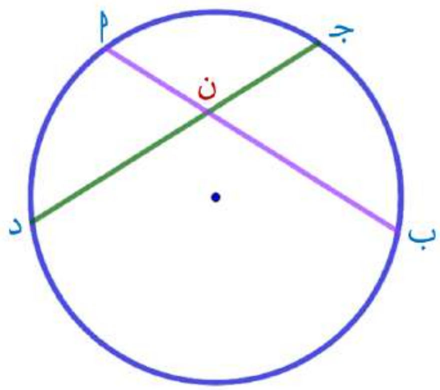
في الشكل المقابل، د هـ مماس للدائرة عند النقطة أ،

المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين (أ ب = أ جـ)

أثبت أن د هـ // ب جـ

الدائرة : الأوتار المتقاطعة ، المماس بند (٦ – ٤)

١ – تقاطع الأوتار داخل الدائرة



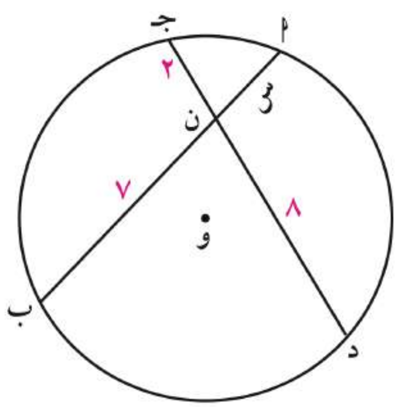
نظرية ١

إذا تقاطع وتران داخل دائرة ،
فإن ناتج ضرب طولي جزئي أحد الوترين
يساوي ناتج ضرب طولي جزئي الوتر الآخر .

ن م × ن ب = ن جـ × ن د

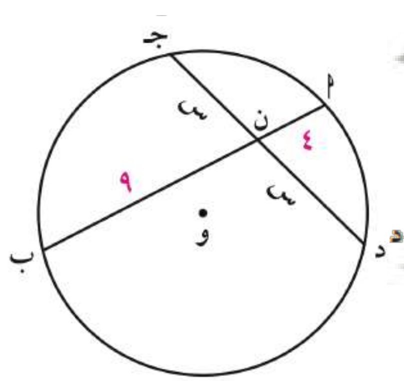
مثال (١) صـ ٤٣ :

في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.

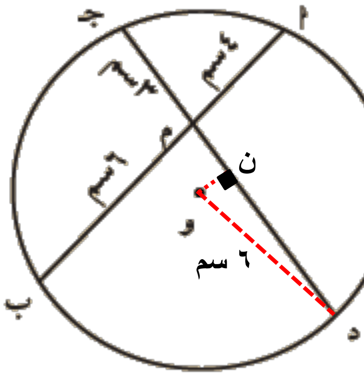


حاول أن تحل (١) صـ ٤٣ :

في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



حاول أن تحل (٢) صـ ٤٤:



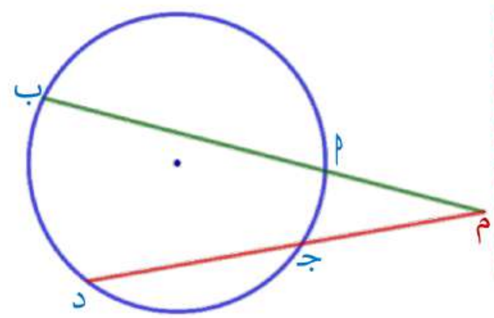
في الدائرة المقابلة التي مركزها و :

م أ = ٤ سم ، م جـ = ٣ سم ، م د = س .

(أ) أوجد قيمة س

(ب) أوجد البعد بين المركز (و) والوتر $\overline{\text{د جـ}}$ إذا علمت أن طول نصف قطر الدائرة يساوي ٦ سم

٣ – تقاطع الأوتار خارج الدائرة



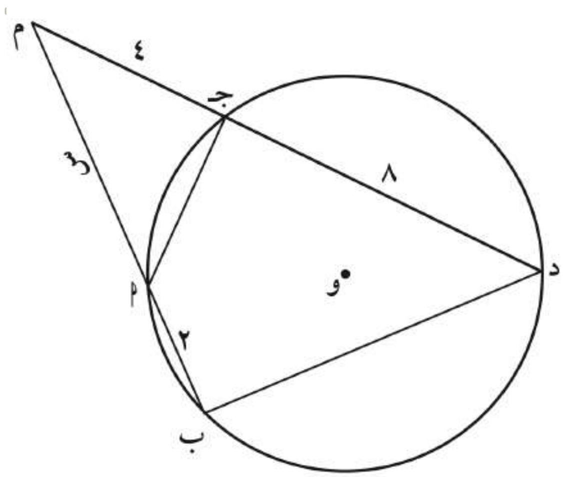
نتيجة ١ إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة ،

فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي

يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي .

م أ × م ب = م جـ × م د

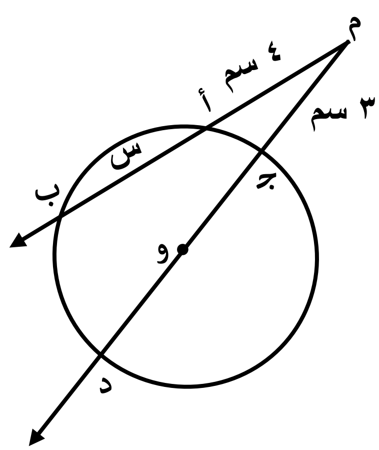
مثال(٣) صـ ٤٥: في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



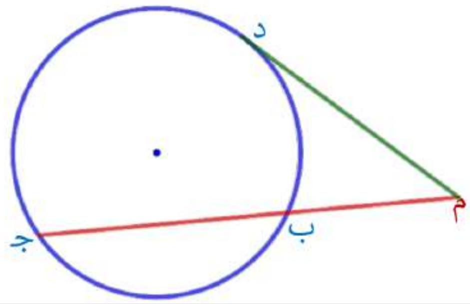
حاول أن تحل (٣) صـ ٤٥:

في الشكل المقابل ، دائرة مركزها و ، طول نصف قطرها يساوي ٤ سم

أوجد قيمة س .



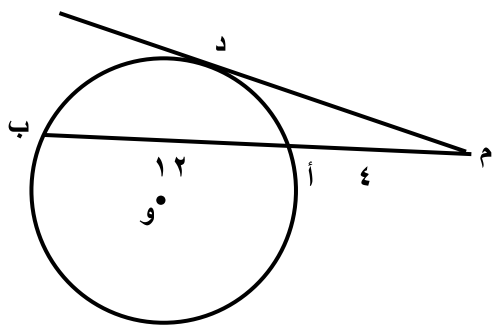
٣ – تقاطع الأوتار خارج الدائرة



نتيجة ٢

إذا رسم من نقطة خارج الدائرة قاطع و مماس ، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية . (م د)^{٢} = م ب × م جـ

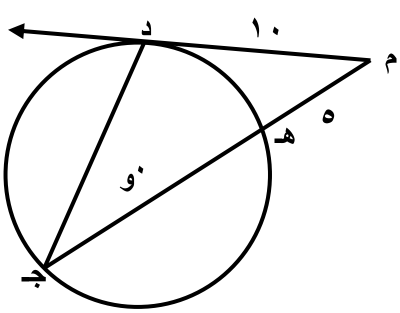
مثال(٤) صـ ٤٦ :



في الشكل المقابل ، أوجد طول القطعة المماسية $\overline{\text{م د}}$ علماً بأن :

أ م = ٤ سم ، أ ب = ١٢ سم .

حاول أن تحل (٤) صـ ٤٦ :



في الشكل المقابل، م د قطعة مماسية حيث م د = ١٠ ، م هـ = ٥

أوجد بذكر السبب : طول كلا من : $\overline{\text{م جـ}}$ ، $\overline{\text{هـ جـ}}$

البنود الموضوعية

في التمارين (١ - ١١) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

(١) كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة — (أ) (ب)

(٢) مركز الدائرة المحاطة بمثلث هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث — (أ) (ب)

(٣) مركز الدائرة المحيطة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث — (أ) (ب)

(٤) الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد غير متساوية من مركز الدائرة — (أ) (ب)

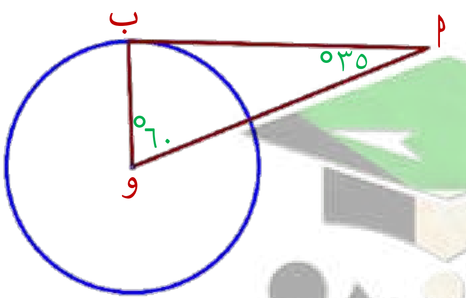
(٥) إذا كان طول قطر دائرة يساوي ٢٠ سم و طول أحد أوتارها ١٦ سم
فإن البعد بين مركز الدائرة و هذا الوتر يساوي ١٠ سم — (أ) (ب)

(٦) القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه و ينصف كلاً من قوسيه — (أ) (ب)

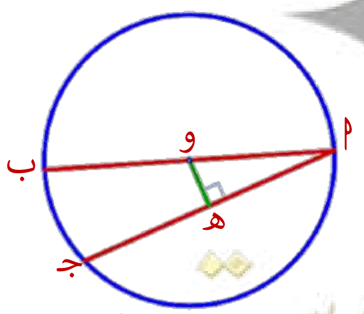
(٧) كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقان — (أ) (ب)

(٨) قياس الزاوية المركزية يساوي نصف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس — (أ) (ب)

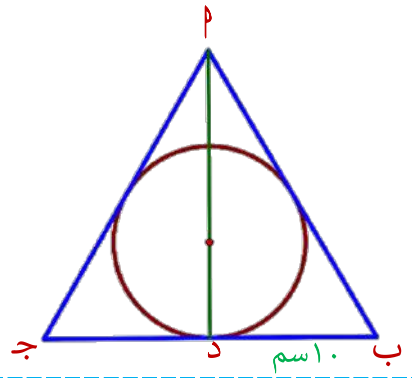
(٩) في الشكل المقابل $\overline{\text{أب}}$ يكون مماساً للدائرة عند ب — (أ) (ب)



(١٠) في الشكل المقابل : إذا كان طول قطر دائرة يساوي ١٠ سم ،
أجـ = ٨ سم فإن هـ و = ٣ سم — (أ) (ب)



(١١) في الشكل المقابل:دائرة داخلة للمثلث أ ب جـ ،
إذا كان المثلث أ ب جـ متطابق الأضلاع ،
ب د = ١٠ سم فإن محيط المثلث أ ب جـ يساوي ٤٥ سم

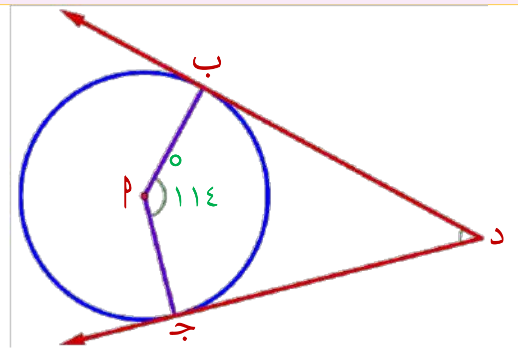


(أ) (ب)

في التمارين (١٢ - ٢٥) ظلل الرمز الدال على الإجابة صحيحة .

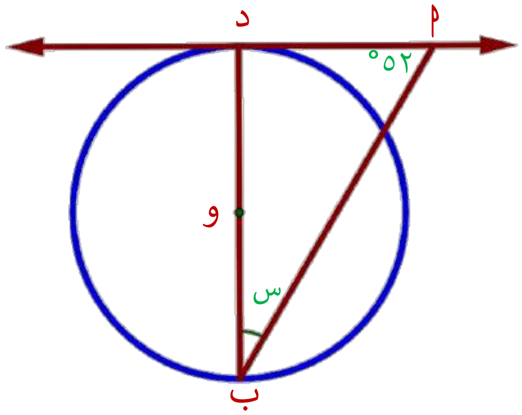
(١٢) إذا كان د ب ، د جـ مماسان للدائرة فإن س =

(أ) ٢٦° (ب) ٥٧° (ج) ٦٦° (د) ١١٤°



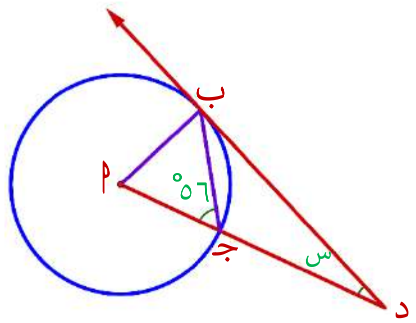
(١٣) إذا كان أ د مماس للدائرة عند د حيث و مركز الدائرة فإن قيمة س =

(أ) ٥٢° (ب) ٩٠° (ج) ٣٨° (د) ١٢٨°



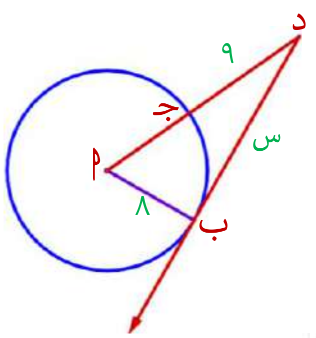
(١٤) إذا كان د ب مماس للدائرة فإن س =

(أ) ٢٢° (ب) ٢٨° (ج) ٣٤° (د) ٤٠°



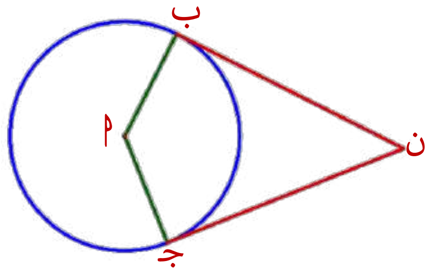
(١٥) إذا كان د ب مماس للدائرة فإن س =

(أ) ٨ (ب) ٩ (ج) ١٥ (د) ١٧



(١٦) في الشكل المقابل دائرة مركزها م، إذا كان ن ب ، ن جـ مماسان للدائرة من النقطة ن ، ن ب = ٩ سم ، م جـ = ٥ سم

فإن محيط الشكل الرباعي م ب ن جـ =

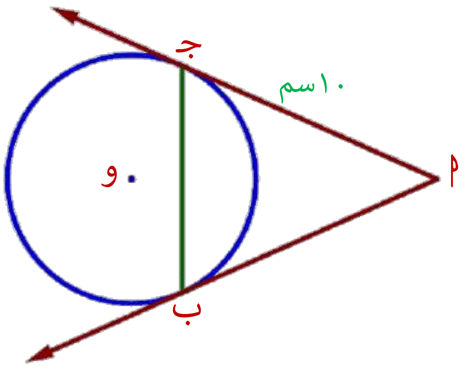


(أ) ١٤سم (ب) ٢٥سم (جـ) ٢٨سم (د) ٨١ سم

---

(١٧) من الشكل المقابل : إذا كان أب ، أجـ مماسان للدائرة

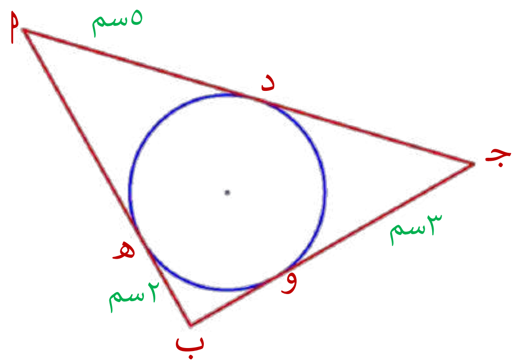
محيط المثلث أ ب جـ = ٢٤ سم فإن ب جـ =



(أ) ٢ سم (ب) ٤ سم (جـ) ١٠ سم (د) ٦ سم

---

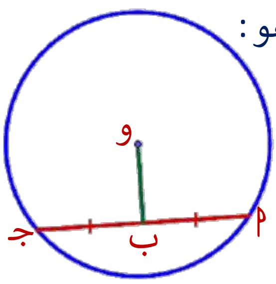
(١٨) في الشكل المقابل : دائرة مركزها م . محيط المثلث أب جـ يساوي :



(أ) ١٠ (ب) ٥ (جـ) ٢٠ (د) ٨

---

(١٩) في الشكل المقابل : دائرة مركزها و ، و ب = ٦ سم ، أجـ = ١٦ سم فإن طول نصف القطر هو :

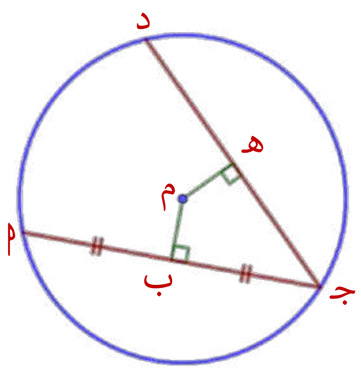


(أ) ٤ سم (ب) ٥ سم (جـ) ٨ سم (د) ١٠ سم

---

(٢٠) في الشكل المقابل دائرة مركزها م ، أب = ١٢ سم ، م ب = م هـ ،

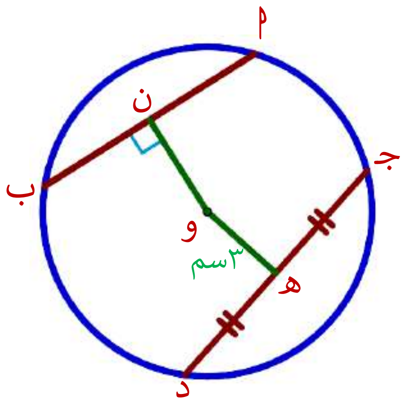
فإن جـ د =



(أ) ٦ سم (ب) ١٢ سم (جـ) ٢٤ سم (د) ٣٦ سم

(٢١) في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، وهـ = ٣سم ، هـ منتصف $\overline{\text{جـ د}}$ ،

$\overline{\text{ون}} \perp \overline{\text{أب}}$ فإذا كان أب = ٨سم فإن طول نصف قطر الدائرة يساوي :



(أ) ٤ سم (ب) ٥ سم (جـ) ١١ سم (د) ٢٥ سم

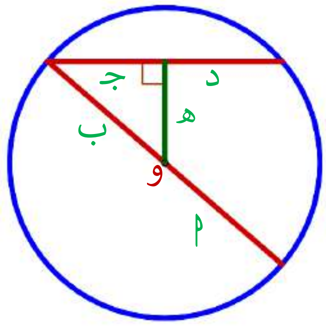
---

(٢٢) إذا كان طول قطر دائرة يساوي ٢٥ سم و طول أوتارها ١٦ سم فإن البعد بين مركز الدائرة و الوتر هو تقريباً :

(أ) ٩ سم (ب) ٩,٦ سم (جـ) ١٨ سم (د) ١٩,٢ سم

---

(٢٣) في الشكل المقابل العبارة الخاطئة فيما يلي هي :

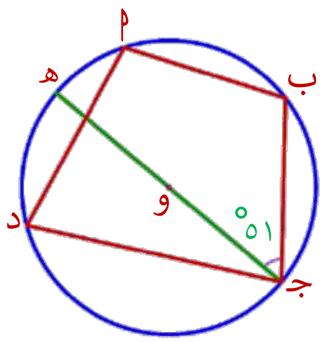


(أ) جـ = د (ب) أ = ب (جـ) جـ^2 + هـ^2 = ب^2 (د) هـ = د

---

(٢٤) في الشكل المقابل إذا كان ق(⌒أب) = ٧٢°، ق(∠ب جـ هـ) = ٥١°

فإن قياس القوس هـ أ =

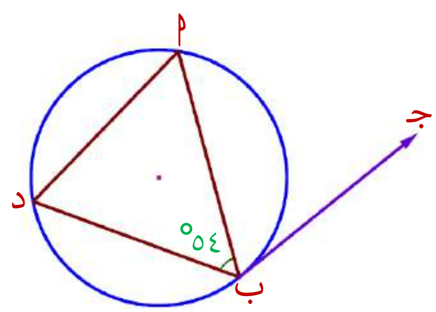


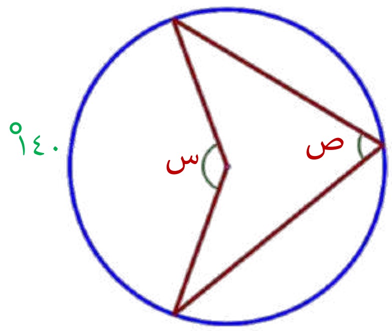
(أ) ٣٠° (ب) ١٠٢° (جـ) ٧٢° (د) ٦٨°

---

(٢٥) في الشكل المقابل إذا كان ق(⌒ب د) = ١٤٠°، فإن ق(∠أ ب جـ) =

(أ) ٧٠° (ب) ٥٠° (جـ) ٥٦° (د) ١٢٤°

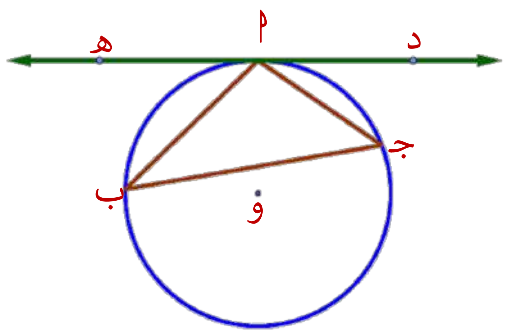




(٢٦) في الشكل المقابل ، قيمة كل من س ، ص على الترتيب هما :

(أ) ٢٨٠°، ١٤٠° (ب) ٧٠°، ٣٥°

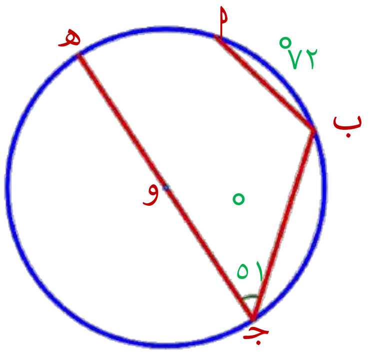
(ج) ١٤٠°، ٤٠° (د) ١٤٠°، ٧٠°



(٢٧) في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماس لها عند النقطة أ

ق(هـ أ̂ ب) = ٤٥°، ق(أ ب̂ جـ) = ٣٥° فإن ق(جـ أ̂ ب) =

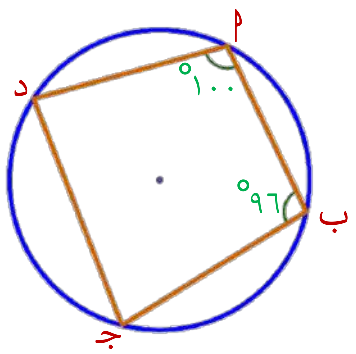
(أ) ٧٠° (ب) ٨٠° (ج) ٩٠° (د) ١٠٠°



(٢٨) من الشكل المقابل : إذا كان ق(أب⌒) = ٧٢°، ق(ب جـ̂ هـ) = ٥١°

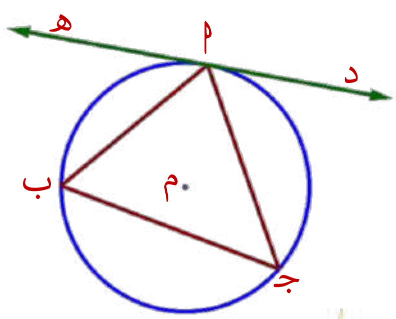
فإن ق(أ هـ⌒) =

(أ) ٣٠° (ب) ٦٨° (ج) ٧٢° (د) ١٠٢°



(٢٩) في الشكل المقابل : فإن ق(ب جـ̂ د) =

(أ) ١٦٠° (ب) ٨٤° (ج) ٨٠° (د) ١٠٠°

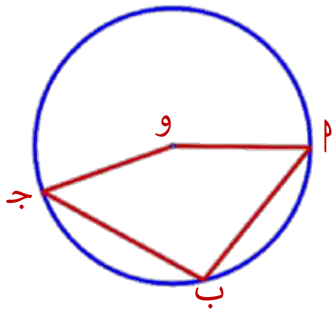


(٣٠) في الشكل المقابل : إذا كان $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماساً للدائرة عند ة ، ق(هـ أ̂ ب) = ٧٠°

ق(جـ ب̂ أ) = ٦٠° فإن ق(جـ أ̂ ب) =

(أ) ٥٠° (ب) ٦٠° (ج) ٧٠° (د) ١٣٠°

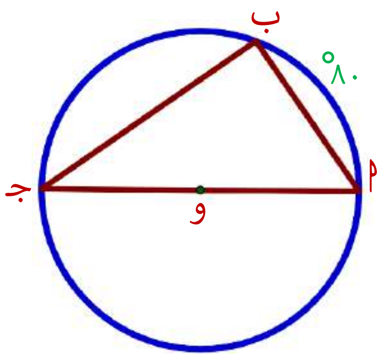
(٣١) في الشكل المقابل إذا كان ق(أ و̂ ج) = ١٦٠° فإن ق(ب̂) =



(أ) ٦٠°   (ب) ٨٠°   (ج) ١٠٠°   (د) ١٢٠°

---

(٣٢) في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، إذا كان ق(أ⌒ب) = ٨٠° فإن ق(ب أ̂ ج) =

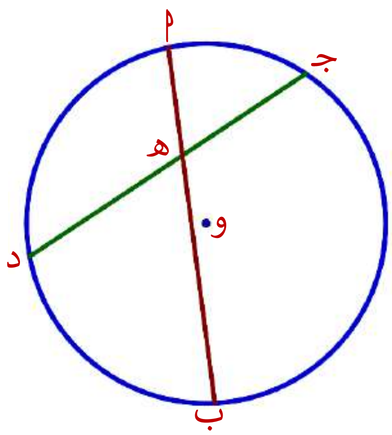


(أ) ٨٠°   (ب) ٤٠°   (ج) ١٠٠°   (د) ٥٠°

---

(٣٣) في الشكل المقابل : دائرة مركزها و ، هـ ج = ٥سم ، هـ أ = ٣سم ، هـ د = ٦سم

فإن هـ ب =

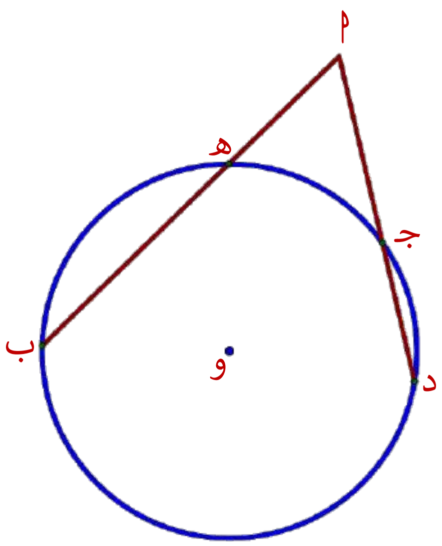


(أ) ٦ سم   (ب) ٨ سم   (ج) ٥ سم   (د) ١٠ سم

---

(٣٤) في الشكل المقابل : دائرة مركزها و ، أ هـ = ٨سم ، هـ ب= ١٢سم

أ ج = ١٠سم ، فإن ج د =

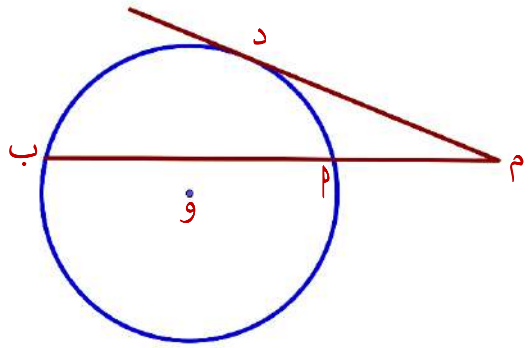


(أ) ٦ سم   (ب) ٨ سم   (ج) ١٦ سم   (د) ١٠ سم

(٣٥) في الشكل المقابل : دائرة مركزها و ، م ب يقطع الدائرة ،

م أ = ٤سم، أ ب = ١٢ سم ، د م قطعة مماسية عند نقطة د

فإن طول د م =

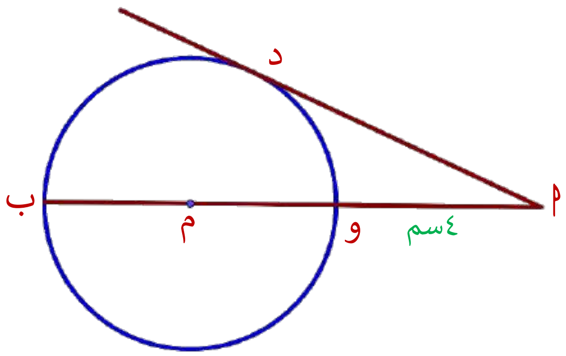


(أ) ٦ سم (ب) ٨ سم (ج) ١٢ سم (د) ١٠ سم

---

(٣٦) في الشكل المقابل : دائرة مركزها م ، أد مماساً للدائرة عند د

طول نصف قطرها ٦سم أو = ٤ سم فإن أد =



(أ) ١٢ سم (ب) ٦٤ سم (ج) ٤٨ سم (د) ٨ سم

الوحدة السابعة: المصفوفات بند (٧-١) تنظيم البيانات في مصفوفات

تعريف:

المصفوفة هي تنظيم من الأعداد المرتبة في صفوف وأعمدة

الأعداد المكونة للمصفوفة تسمى **عناصر**

رتبة المصفوفة

نرمز إلى المصفوفة بأحد حروف الهجاء ونضع تحته خط ، نكتب أ ونقرأ المصفوفة أ .

عدد الصفوف (م) وعدد الأعمدة (ن) يحددان رتبة المصفوفة وتكتب م × ن

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٩ & ٥- \\ ١- & ٣ \\ ٢ & ٨ \end{bmatrix}$$ المصفوفة أ من الرتبة ٣ × ٢

ملاحظة : لكتابة رتبة المصفوفة نكتب أولاً عدد الصفوف يليه عدد الأعمدة .

مثال (١) صـ ٥٥:

اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي :

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ٦ & ٤ \\ ٧- & ٣- & ٢ \\ ٩ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣- & \frac{٢}{٣} & ٤- \end{bmatrix}$$

$$\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \\ ٠,٥ \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل (١) صـ ٥٥:

اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & ٥ & ٤ \\ ٧ & ٠.٥ & ٢- \end{bmatrix}$$

$$\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٣ & ٨- \end{bmatrix}$$

$$\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٠ & ١٠ \\ ٥- & ١ \\ ٩ & ٠.٦ \end{bmatrix}$$

ترميز عناصر المصفوفة

يحدد أي عنصر في المصفوفة بدلالة رقمي الصف والعمود الواقع فيهما ، فمثلاً في المصفوفة أ

$$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{\text{٣١}} & \text{أ}_{\text{٢١}} & \text{أ}_{\text{١١}} \\ \text{أ}_{\text{٣٢}} & \text{أ}_{\text{٢٢}} & \text{أ}_{\text{١٢}} \\ \text{أ}_{\text{٣٣}} & \text{أ}_{\text{٢٣}} & \text{أ}_{\text{١٣}} \end{bmatrix}$$

العنصر في الصف الأول والعمود الثالث: $\text{أ}_{\text{٣١}}$

مثال (٣) صـ ٥٧:

في المصفوفة: $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} \text{٤} & \text{٥} & \text{١} & \text{١٢} \\ \text{٣,٥} & \text{٢} & \text{٦} & \text{٢} \\ -\text{٤} & \text{١} & \text{٠} & \text{١} \end{bmatrix}$ اكتب قيمة كل عنصر مما يلي:

(أ) $\text{ب}_{\text{٢٢}}$ (ب) $\text{ب}_{\text{١٣}}$ (جـ) $\text{ب}_{\text{١١}}$ (د) $\text{ب}_{\text{٢٣}}$

المصفوفات : المربعة ، الأفقية ، العمودية

المصفوفة المربعة : هي مصفوفة فيها عدد الصفوف = عدد الأعمدة . فيما عدا ذلك تسمي مصفوفة مستطيلة

المصفوفة الأفقية : هي مصفوفة مكونة من صف واحد

المصفوفة العمودية : هي مصفوفة مكونة من عمود واحد

مثال(٤) صـ ٥٨:

صنف كلاً من المصفوفات التالية :

$$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} \text{٠} & -\text{٥} & \text{١} \\ \text{٧} & \text{٤} & \text{٠} \\ \text{٨} & \text{٢} & \text{٣} \end{bmatrix} \qquad \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} \text{١} \\ \text{٣} \\ \text{٠,٢} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{جـ}} = \begin{bmatrix} -\text{٥} & \text{٤} & \text{٣} \end{bmatrix} \qquad \underline{\text{د}} = \begin{bmatrix} \text{١,٤} & \text{٣} & -\text{٢} \\ \text{٥} & \text{٨} & \text{١٢} \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل (٤) صـ ٥٨:

صنف المصفوفات في مثال (١)

$أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٦ & ٤ \\ -٧ & -٣ & ٢ \\ ٩ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -٣ & \frac{٢}{٣} & -٤ \end{bmatrix}$ ، $ج = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \\ ٠,٥ \end{bmatrix}$

المصفوفات المتساوية:

تكون مصفوفتان متساويتان إذا كانت :

(١) لهما نفس الرتبة (الأبعاد). (٢) عناصر هما المتناظرة متساوية. والعكس صحيح

كل عنصرين لهما الموقع نفسه في المصفوفتبن اللتين لهما الرتبة نفسها يسميان عنصرين متناظرين

مثال (٥) صـ ٥٩

هل المصفوفتان أ، ب متساويتان؟ فسّر. $أ = \begin{bmatrix} \frac{١}{٥} & -٠,٧٥ \\ -٢ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٠,٢ & -\frac{٣}{٤} \\ -٢ & ٠,٥ \end{bmatrix}$

حاول أن تحل (٥) صـ ٥٩

هل المصفوفتان س ، ص متساويتان ؟ فسّر.

$س = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} ٩ & -١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

مثال (٦) صـ ٥٩:

إذا كانت : $\begin{bmatrix} \text{٢س} - ٥ & ٤ \\ ٣ & \text{٣ص} + ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٤ \\ ٣ & \text{ص} + ١٨ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س ، ص

حاول أن تحل (٦) صـ :٥٩

(أ) إذا كانت : $\begin{bmatrix} ٣٨ & ٥ \\ ٣ & \text{٤ص} - ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ص} + ٨ & ٥ \\ ٣ & -\text{ص} \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س ، ص

(ب) إذا كانت $\begin{bmatrix} ٣س & س + ص & س - ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٩ & ٤ & ١٠ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س ، ص

كراسة التمارين صـ ٣٠ رقم ٦

أوجد قيمة كل من س ، ص

$$\begin{bmatrix} س^{٢} & ٤ \\ -٢ & ص^{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٤ \\ -٢ & ٥ص \end{bmatrix}$$

امتحان سابق:

إذا كانت : $\begin{bmatrix} ٣س + ٤ & ص - ٥ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٢ص - ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س ، ص

المصفوفات بند ٧-٢ جمع وطرح المصفوفات

لجمع مصفوفتين أ ، ب يجب أن تكونا من الرتبة نفسها .

ولإيجاد ناتج الجمع نجمع كل عنصرين لهما الموقع نفسه في أ ، ب .

مصفوفة الجمع لهما نفس رتبة كل من المصفوفتين أ ، ب .

مثال (١) صـ ٦١ :

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & -٢ & ١ \\ ٧ & -٥ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ -٤ & ٢ \\ ٥ & -١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} -٣ & ٩ & ٣ \\ ١٢ & ٦ & -٩ \end{bmatrix}$

فأوجد إن أمكن : (أ) $\underline{أ} + \underline{ب}$ (ب) $\underline{أ} + \underline{جـ}$

وإذا لم يكن الجمع ممكنًا، فاذكر السبب.

حاول أن تحل (١) صـ ٦١ :

أوجد ناتج ما يلي : $\begin{bmatrix} -١ & -٣ \\ ٤ & -٥ \\ -٧ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢٤ & -١٢ \\ ٥ & -٣ \\ ١٠ & -١ \end{bmatrix}$

مثال (٣) صـ ٦٣ :

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} -٢ & ٥ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٧ & -٢ \end{bmatrix}$

أوجد ما يلي:

معلومة رياضية:
المصفوفة $-\underline{أ}$ هي النظير الجمعي للمصفوفة $\underline{أ}$.

$\underline{أ} + \underline{ب} =$

$\underline{ب} + \underline{أ} =$

$\underline{ب} + \underline{جـ} =$

$(\underline{أ} + \underline{ب}) + \underline{جـ} =$

$\underline{أ} + (\underline{ب} + \underline{جـ}) =$

$\underline{أ} + \underline{٠}_{٢\times٢} =$

$\underline{أ} + (-\underline{أ}) =$

حاول أن تحل (٣) صـ ٦٣ :

في مثال (٣) اوجد :

$\underline{جـ} + \underline{ب} =$

$(\underline{جـ} + \underline{ب}) + \underline{أ} =$

طرح المصفوفات

إذا كان للمصفوفتين أ ، ب الرتبة نفسها فإن : **أ – ب = أ + (- ب)**

ملاحظة :

إذا كان أ ≠ ب ولهما نفس الرتبة فإن : أ – ب ≠ ب – أ وبالتالي عملية طرح المصفوفات ليست إبدالية.

مثال (٤) صـ ٦٤:

أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ -١ & ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ -٢ & ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

أوجد :

أ – ب ، ب – أ

حاول أن تحل (٤) صـ ٦٥:

أوجد ناتج ما يلي :

(أ) $\begin{bmatrix} ٦ & -٩ & ٧ \\ -٢ & ١ & ٨ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٤ & ٣ & ٠ \\ ٦ & ٥ & ١٠ \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ -١ & ١٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$

المعادلات المصفوفية

المعادلة المصفوفية: هي معادلة إحدى مصفوفاتها غير معلومة (المتغير)

يمكن استخدام خواص المساواة لحل المعادلات المصفوفية.

مثال (٥) صـ ٦٥:

حل المعادلة المصفوفية التالية :

$$\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٩ & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} - \underline{س}$$

حاول أن تحل (٥) صـ ٦٥:

أوجد $\underline{س}$ حيث :

$$\begin{bmatrix} ٧ & ١٠ \\ ٤ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} - س$$

كراسة التمارين صـ ٣٥:

(١٠)

$$\begin{bmatrix} ٨ & ١ & ٥ \\ ٥ & ٠ & -٦ \end{bmatrix} = \underline{س} + \begin{bmatrix} -٣ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$$

المصفوفات

بند ٧-٣ **ضرب المصفوفات**

ضرب مصفوفة في عدد

الضرب القياسي :

هو عملية ضرب مصفوفة أ في عدد حقيقي ك : ك ≠ ٠

الناتج هو المصفوفة ك أ ونحصل عليها بضرب كل عنصر من عناصر أ في ك .

إذا كان ك = ٠ يكون الناتج المصفوفة الصفرية .

مثال (١) صـ ٦٧:

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٧ & -٩ & ٦ \\ ٨ & ١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ٣ & -٤ \\ ١٠ & ٥ & ٦ \end{bmatrix}$

أوجد: ٥ أ ، ٣ ب ، ثم ٥ أ – ٣ ب

حاول أن تحل (١) صـ ٦٧ :

من المثال (١) ، أوجد :

(أ) ٥ ب – ٤ أ (ب) أ + ٦ ب

مثال (٣) صـ ٦٨:

حل المعادلة: ٤ س + ٢ $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ثم تحقق من إجابتك

امتحان سابق: حل المعادلة المصفوفية التالية: ٢ س - $\begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٨ & ٩ \end{bmatrix}$

حاول أن تحل (٣) صـ ٦٩ :

حل كل معادلة مما يلي:

(أ) $2\,\underline{س} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

(ب) $-3\,س + \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 8 \\ -19 & -18 & 10 \end{bmatrix}$

ضرب المصفوفات تكون مصفوفة الضرب **معرّفة** إذا كان:

عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساوياً لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية

$$أ_{م \times ن} \times ب_{ن \times ر} = جـ_{م \times ر}$$

مثال (٤) صـ ٧٠ :

أوجد ناتج أ × ب حيث أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٤ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$

امتحان سابق: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ فأوجد : أ × ب

مثال (٥) صـ ٧٢:

بفرض $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٨ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٨ & ٠ \\ ٢ & -٥ \end{bmatrix}$ حدد ما إذا كانت كل نواتج الضرب:

$\underline{أ} \times \underline{ب}$ ، $\underline{ب} \times \underline{أ}$ معرّفة أو غير معرّفة. أوجد رتبة كل مصفوفة ضرب معرّفة.

حاول أن تحل (٥) ص ٧٢:

بفرض: أ = $\begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٠ & ٨ \\ ٨ & ١ & -٥ & ٢ \end{bmatrix}$

(أ) حدد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب أ × ب ، ب × أ معرّفة أو غير معرّفة.

(ب) أوجد ناتج الضرب المعرّف.

(جـ) بفرض أن المصفوفة أ هي مصفوفة من الرتبة ٢ × ٣ ، المصفوفة ب من الرتبة ٣ × ٢

هل أ × ب ، ب × أ متساويتان ؟ وضح اجابتك.

الحل :

ملحوظة: عملية ضرب المصفوفات **ليست** إبدالية

مثال : إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix}$

أوجد : أ × ب ، ب × أ   ماذا تستنتج ؟

الحل :

امتحان سابق: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$ فأوجد : أ × ب

مربع المصفوفة إذا كانت المصفوفة أ مصفوفة مربعة، فإن المصفوفة أ × أ ويرمز إليها بالرمز أ^{٢}

وتقرأ مربع المصفوفة أ. وبالمثل أ^{٣} = أ × أ × أ ، أ^{٤} = أ^{٣} × أ ، ....

مثال (٦) صـ ٧٣:

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

أوجد: أ^{٢} ، أ^{٣}

حاول أن تحل (٦) صـ٧٣ :

إذا كانت ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$

أوجد: ب^{٢} ، ب^{٣}

المصفوفات — بند (٧-٤) — مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات)

مصفوفة الوحدة:

المصفوفة المربعة التي عناصر قطرها الرئيسي ١، وبقية العناصر صفر تسمى **مصفوفة الوحدة** للضرب. ويرمز لها بالرمز و

النظير الضربي:

إذا كانت أ ، س مصفوفتين مربعتين من الرتبة نفسها بحيث **أ × س = و** ، فإن **س** هي النظير الضربي للمصفوفة **أ**.

ويرمز لها بالرمز $أ^{-١}$.   **$أ × أ^{-١} = أ^{-١} × أ = و$**

مثال (١) صـ ٧٥ :

أثبت أن: $ب = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

حاول أن تحل (١) صـ ٧٥:

(أ) أثبت أن المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢٫٥ & ١ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$

محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية

محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} \text{ج} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{ب} \end{bmatrix}$ هو أد − ب ج نكتب $|\underline{\text{أ}}| = \begin{vmatrix} \text{ج} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{ب} \end{vmatrix} =$ أد − ب ج

تسمى المصفوفة التي محددها يساوي صفر بالمصفوفة المنفردة

مثال (٢) صـ ٧٦:

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية:

$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٤ & −٣ \\ −٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} −٣ & ٢ \\ −٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ج}} = \begin{bmatrix} ٠ & \text{س} \\ \text{س} & ٠ \end{bmatrix}$

الحل :

حاول أن تحل (٢) صـ ٧٦:

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية:

(أ) $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

(ب) $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٧ & ٨ \\ ١٠ & ٢ \end{bmatrix}$

(جـ) $\underline{\text{ج}} = \begin{bmatrix} ٣ & \text{ك} \\ −٣ & \text{٣ ـ ك} \end{bmatrix}$

مثال (٣) صـ ٧٧:

إذا كانت المصفوفة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & س \\ ٦ & ١٢ \end{bmatrix}$ منفردة أوجد قيمة س.

حاول أن تحل (٣) صـ ٧٧:

إذا كانت المصفوفة $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٥ \\ ٢س & -٤ \end{bmatrix}$ منفردة أوجد قيمة س.

خاصية: بفرض أن : $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ب & أ \\ د & جـ \end{bmatrix}$ إذا كان أد − ب جـ ≠ ٠ ، فإن $\underline{أ}$ لها نظير ضربي $\underline{أ}^{-1}$ حيث :

$$\underline{أ}^{-1} = \frac{١}{|\underline{أ}|} \begin{bmatrix} -ب & د \\ أ & -جـ \end{bmatrix} = \frac{١}{أد - ب جـ} \begin{bmatrix} -ب & د \\ أ & -جـ \end{bmatrix}$$

تذكر أن: المصفوفة التي محددها يساوي الصفر **ليس لها نظير ضربي** وتسمى مصفوفة منفردة

مثال (٤) صـ ٧٧:

هل للمصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ -٢ & ٨ \end{bmatrix}$ نظير (معكوس) ضربي ؟ في حالة الإيجاب أوجده

حاول أن تحل (٤) صـ ٧٧:

(أ) هل ب= $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي ؟ فسّر اجابتك

(ب) هل ب= $\begin{bmatrix} ٨ & ٦ \\ -٤ & -٣ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي ؟ فسّر اجابتك

مثال (٥) صـ ٧٨:

حدّد أي مصفوفة مما يلي لها نظير (معكوس) ضربي ، ثم أوجده.

(أ) م = $\begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix}$ (ب) ن = $\begin{bmatrix} ٩ & ٣ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$

حاول أن تحل (٥) صـ ٧٨:

حدّد أي مصفوفة مما يلي لها نظير (معكوس) ضربي ، ثم أوجده.

(أ) $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٢.٣ & ٠.٥ \\ ٧.٢ & ٣ \end{bmatrix}$

حل معادلات مصفوفية

كراسة التمارين صـ ٤٦ : حل كل معادلة في س.

(١٠) $\begin{bmatrix} ١٢ & ٧ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix} \times \underline{س} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

(١٢) $\underline{س} \times \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣١ & ١٦ \\ ٢٧ & ١٢ \end{bmatrix}$

امتحان سابق: إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$

١) أوجد : $\underline{أ} \times \underline{ب}$

٢) أوجد قيمة محدد المصفوفة $\underline{أ}$

امتحان سابق: إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix}$

١) أوجد : $٢\underline{أ} - \underline{ب}$ ٢) $\underline{ب}^{-١}$

المصفوفات بند (٧-٥) حل نظام من معادلتين خطيتين

١– الحل باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة المربعة

اكتب نظام المعادلات التالية علي شكل معادلة مصفوفية :

س + ص = ٥
س – ٢ص = ٤-

الحل :

اكتب المعادلة المصفوفية علي شكل نظام معادلات

$$\begin{bmatrix} ٣ & ١- \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١- \\ ٣ \end{bmatrix}$$

مثال (١) صـ ٧٩ : حل النظام :

س + ص = ٣

س – ص = ٧

باستخدام النظير الضربي للمصفوفة

حاول أن تحل (١) صـ ٨٠ :

حل النظام :

٥س + ٣ص = ٣

٣س + ٢ص = ٥

باستخدام النظير الضربي للمصفوفة

٣-استخدام قاعدة كرامر (المحددات) لحل معادلتين خطيتين :

لحل نظام معادلتين خطيتين:

أ س + ب ص = ل

جـ س + د ص = م

نكتب: $\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ب} \\ \text{م} & \text{د} \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات بعد استبدال العمود الزائد بعمود معاملات س

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ل} \\ \text{جـ} & \text{م} \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات بعد استبدال العمود الزائد بعمود معاملات ص

فإن س = $\frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}$ ، ص = $\frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$ (بشرط أن $\Delta \neq 0$)

امتحان سابق: حل النظام

٥س + ٣ ص = ٧

٣س +٢ ص = ٥

مثال (٢) صـ ٨١ :

استخدم قاعدة كرامر لحل النظام :

$$\begin{cases} ٤س - ٥ص + ٧ = ٠ \\ ٣ص - ٦س + ٣ = ٠ \end{cases}$$

حاول أن تحل (٢) صـ ٨١ :

استخدم قاعدة كرامر لحل النظام :

$$\begin{cases} ٣س + ٢ص = -٦ \\ -٤س - ٣ص - ٧ = ٠ \end{cases}$$

ملاحظة :

١ إذا كان $\Delta \neq ٠$ ، فإن للمعادلتين حلًّا وحيدًا

٢ إذا كان $\Delta = ٠$ ، $\Delta_{س} \neq ٠$ فالحل ϕ

وسنكتفي بهاتين الحالتين ولا نتعرض للحالة التي كل من Δ ، $\Delta_{س}$ مساويا الصفر

البنود الموضوعية

في التمارين (١ - ١٥) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

(١) المصفوفة $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ من الرتبة ٣×١	أ ب
(٢) في المصفوفة ب = $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ & ١ \\ ١١ & ٦ & ٥ \end{bmatrix}$ قيمة العنصر $ب_{٣٢}$ يساوي ٥	أ ب
(٣) إذا كانت $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س - ١ & ٣ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$ فإن س = ٢	أ ب
(٤) إذا كانت $\begin{bmatrix} س & ١ \\ ٢ & ٤ \\ ص & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ع & -١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٢ & ٣ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ فإن س + ص + ع = ١	أ ب
(٥) حل المعادلة المصفوفية $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ + س = $\begin{bmatrix} ١ & ٨ \\ -٦ & ٥ \end{bmatrix}$ هو س = $\begin{bmatrix} -١ & ١١ \\ -٦ & ٤ \end{bmatrix}$	أ ب
(٦) حل المعادلة المصفوفية ٢س = $\begin{bmatrix} ٤ & ١٢ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ هو س = $\begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$	أ ب
(٧) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -١ & ٢ & ٥ \end{bmatrix}$ فإن أ × ب من الرتبة ١ × ١	أ ب
(٨) لأي مصفوفتين أ ، ب يكون أ × ب = ب × أ	أ ب
(٩) إن ناتج ضرب : $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٣ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$ يساوي $\begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ -٢٩ & ٩ \end{bmatrix}$	أ ب
(١٠) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ فإن $أ^٢$ = $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$	أ ب
(١١) إن محدد المصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix}$ يساوي صفر	أ ب

(١٢) المصفوفة $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} -١ & -١ \\ -٢ & -٣ \end{bmatrix}$ — أ ، ب

---

(١٣) للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٠ & -٤ \\ -٢ & ٨ \end{bmatrix}$ نظير ضربي — أ ، ب

---

(١٤) إذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ س & ٦ \end{bmatrix}$ منفردة فإن قيمة س تساوي −٨ — أ ، ب

---

(١٥) إذا كان النظام $\begin{cases} ٢س + ٣ص = ٥ \\ ٣س + ٥ص = ٧ \end{cases}$ فإن $\Delta_{ص} = ٢$ — أ ، ب

في التمارين (١٦ - ٢٥) ظلل الرمز الدال على الإجابة صحيحة .

(١٦) إذا كانت $\begin{bmatrix} ٣ & ٢س - ٣ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ص - ٢ & -٢ \end{bmatrix}$ فإن قيمة كل من س ، ص

(أ) س = ٢ ، ص = −٢ (ب) س = ٢ ، ص = −٦ (ج) س = ٢ ، ص = ٦ (د) س = −٢ ، ص = −٢

---

(١٧) حل المعادلة المصفوفية س − $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٩ & ٨ \end{bmatrix}$ هو:

(أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -٧ & -٥ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١١ & ١١ \end{bmatrix}$

---

(١٨) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ فإن أ + ٢ ب =

(أ) $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ٧ & ٣ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix}$

---

(١٩) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٥ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$ فإن أ × ب =

(أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

---

(٢٠) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$ فإن أ × ب =

أ) $\begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ -١ & -٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$

---

(٢١) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ فإن أ^{٢} =

أ) ٢$\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

---

(٢٢) إذا كانت المصفوفة ب = $\begin{bmatrix} ١٠ & ٥ \\ ٢س & -٤ \end{bmatrix}$ منفردة فإن س تساوي :

أ) ٦   ب) ١٠   ج) -٤   د) -٤٠

---

(٢٣) المصفوفة المنفردة فيما يلي هي :

أ) $\begin{bmatrix} ٨ & ٦ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -٣ & ٩ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

---

(٢٤) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ فإن أ$^{-١}$ =

أ) $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} -٣ & -٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

---

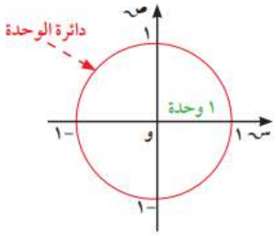
(٢٥) مجموعة حل المعادلة المصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ \\ ١٠ \end{bmatrix}$ هي :

أ) {(٢ ، ٦)}   ب) {(-٢ ، ٦)}   ج) {(-٦ ، ٢)}   د) {(٦ ، ٢)}

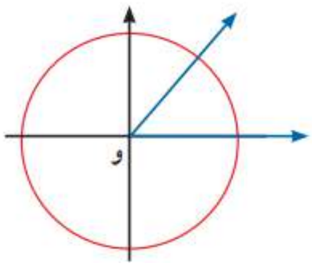
الوحدة الثامنة: حساب المثلثات بند (٨-١) دائرة الوحدة في المستوي الإحداثي والدوال المثلثية

دائرة الوحدة:

هي دائرة مركزها نقطة الأصل و ، وطول نصف قطرها واحد وحدة.



النقطة المثلثية: هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة.

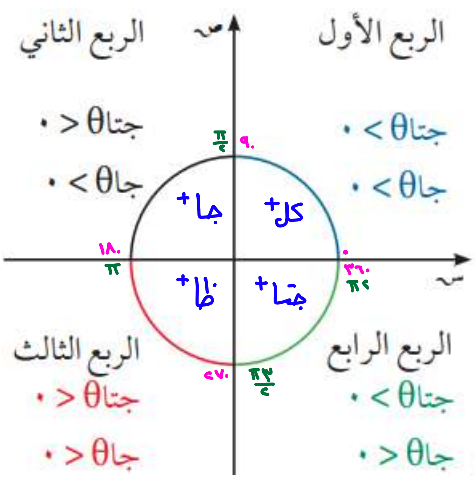


النسبة المثلثية للزاوية التي قياسها θ

$$\text{جا } \theta = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\text{جتا } \theta = \frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\text{ظا } \theta = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}}$$



الدوال المثلثية:

تعريف:

إذا كانت (س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية قياسها θ حيث $٠ \le \theta < ٢\pi$ فإن:

(١) دالة الجيب: د(θ) = جاθ حيث جاθ = ص (الإحداثي الصادي للنقطة المثلثية)

(٢) دالة جيب التمام: د(θ) = جتاθ حيث جتاθ = س (الإحداثي السيني للنقطة المثلثية)

(٣) دالة الظل: د(θ) = ظاθ حيث ظاθ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، س $\ne$ ٠

(٤) دالة القاطع: د(θ) = قاθ حيث قاθ = $\frac{١}{\text{س}}$ ، س $\ne$ ٠

(٥) دالة قاطع التمام: د(θ) = قتاθ حيث قتاθ = $\frac{١}{\text{ص}}$ ، ص $\ne$ ٠

(٦) دالة ظل التمام: د(θ) = ظتاθ حيث ظتاθ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ، ص $\ne$ ٠

<u>مثال(٢) صـ ٩٢:</u> حدد إشارة جا θ ، جتا θ في كل مما يلي:

(أ) $\theta = ١٣٥°$ **(ب)** $\theta = ٣٠٥°$ **(جـ)** $\theta = \frac{٧\pi}{٦}$

<u>حاول(٣) صـ ٩٢:</u> **(أ)** إذا كانت $٩٠° < \theta < ٢٧٠°$ ، ماهي إشارة جتا θ ؟

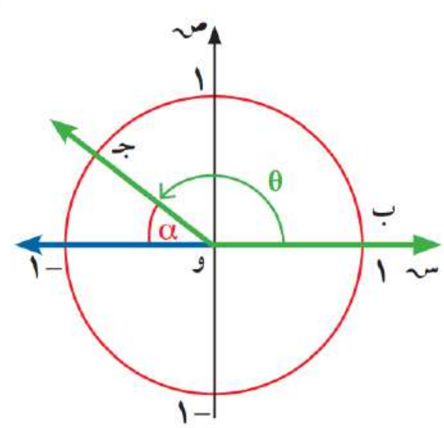
(ب) إذا كانت $٠^{د} < \theta < \pi$. ماهي إشارة جا θ ؟

<u>زاوية الإسناد:</u>

تعريف زاوية الإسناد :

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة $(\overleftarrow{وب}، \overleftarrow{وجـ})$ التي في الوضع القياسي هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات .

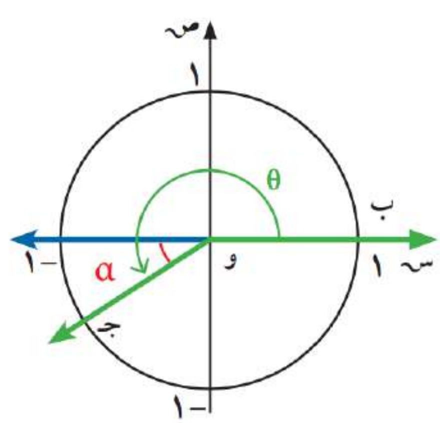
فإذا كان α زاوية الإسناد فإن : $٠° < \alpha < ٩٠°$



عندما θ تقع في الربع الثاني

$\alpha^\circ = ١٨٠^\circ - \theta^\circ$

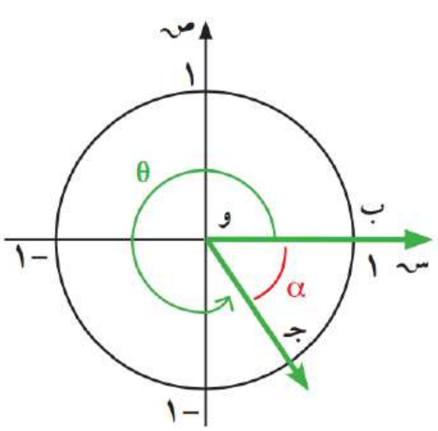
$\alpha' = \pi - \theta'$



عندما θ تقع في الربع الثالث

$\alpha^\circ = \theta^\circ - ١٨٠^\circ$

$\alpha' = \theta' - \pi$



عندما θ تقع في الربع الرابع

$\alpha^\circ = ٣٦٠^\circ - \theta^\circ$

$\alpha' = ٢\pi - \theta'$

مثال(٣) صـ ٩٣:

ارسم كلاً من الزوايا الموجهة في وضع قياسي ، ثم عين زاوية الإسناد وأوجد قياسها لكل مما يلي:

(أ) $\theta = ١٢٥^\circ$　　(ب) $\theta = ٢١٥^\circ$　　(جـ) $\theta = \frac{١١\pi}{٦}$

أ / محمد نوري الفلاح

الوحدة الثامنة: حساب المثلثات بند (٨-٢) العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

تسمى جا θ ، جتا θ ، ظا θ النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ وتدعى **النسب المثلثية الأساسية**

علمًا بأن
-١ ≤ جتاθ ≤ ١
-١ ≤ جاθ ≤ ١
ظاθ ∈ ح

النسب المثلثية للزاويتين θ ، (π + θ)

جا(π + θ) = −جاθ ، جتا(π + θ) = −جتاθ ، ظا(π + θ) = ظاθ

حاول(١) صـ ٩٦: أكمل إذا كان:

١) جا م = ٠,٣ فإن جا(– م)= ....

٢) جتا ل = ٠,٣٨ فإن جتا(– ل)= ....

٣) ظا س = ٣,١٤ فإن ظا(– س)=..........

٤) جتا (– ص) = $\frac{١}{٤}$ فإن جتا(ص)=.........

النسب المثلثية للزاويتين θ ، (π − θ)

جتا(π − θ) = −جتاθ ، جا(π − θ) = جاθ ، ظا(π − θ) = −ظاθ

حاول(٢) صـ ٩٧: أكمل بدون استخدام الآلة الحاسبة . إذا كان:

١) جا٣٠°= $\frac{١}{٢}$ ، فأوجد جا١٥٠°

٢) جتاس = $\frac{٤}{٥}$ ، فأوجد جتا (π – س)

٣) ظا$\frac{\pi}{١٢}$ = ٢ – $\sqrt{٣}$ ، فأوجد ظا $\frac{١١\pi}{١٢}$

أ / محمد نوري الفلاح

النسب المثلثية للزاويتين θ ، (θ + π)

جا(π + θ) = −جاθ ، جتا(π + θ) = −جتاθ ، ظا(π + θ) = ظاθ

حاول(٣) صـ ٩٨: إذا كان جا٥٦° ≈ ٠,٨٢٩ بدون استخدام الآلة الحاسبة جا٢٣٦°

النسب المثلثية للزاويتين θ ، $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

جا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جتاθ ، جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جاθ ، ظا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = ظتاθ

النسب المثلثية للزاويتين θ ، $\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$

جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = جتاθ ، جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ =−جاθ ، ظا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = −ظتاθ

إذا كان ك عدداً صحيحاً فإن :

جا(θ + ٢ك π) = جاθ ، جتا(θ + ٢ك π) = جتاθ ، ظا(θ + ك π) = ظاθ

حاول(٥) صـ ١٠٢: بسّط كلاً من التعبيرات التالية لأبسط صورة :

١) جتا $(\theta + ٩\pi)$

٢) جتا $\left(-\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

أ / محمد نوري الفلاح

مثال(٥) صـ ١٠٢: بسّط التعبير التالي لأبسط صورة :

جا س + جا (٩٠° + س) + جا (١٨٠° + س) + جا (٩٠° − س)

امتحان سابق: بسّط التعبير التالي لأبسط صورة :

جتا (− θ) + جتا (π − θ) − جا (π + θ)

كراسة التمارين صـ٦٣رقم (١١): أ) بسّط التعبير التالي لأبسط صورة :

جتا (π − θ) − جتا (− θ) + جا (π + θ) + جتا ($\frac{\pi}{٢}$ − θ)

كراسة التمارين صـ٦٣رقم (١١): ب) بسّط التعبير التالي لأبسط صورة :

جا (π + θ) − جتا (θ + $\frac{\pi}{٢}$) + جتا (θ − π) + جا (θ + $\frac{\pi}{٢}$)

أ / محمد نوري الفلاح

حل معادلات مثلثية

حل المعادلة : جتا س = جتا θ هو :

س = θ + ٢ ك π أو س =− θ + ٢ ك π (ك∈ ص)

جيب تمام الزاوية يكون موجباً عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع

مثال(٦) صـ ١٠٣: أ) حل المعادلة: جتا س = $\frac{١}{٢}$

ب) حل المعادلة: ٢ جتا س − $\sqrt{٣}$ =٠

حاول(٦) صـ ١٠٣: حل المعادلة: $\sqrt{٢}$ جتا س = ١

امتحان سابق: حل المعادلة: ٢ جتا س − ١ = ٠

حل المعادلة : جاس = جاθ هو :

س = θ + ٢ ك π أو س = $(\pi - \theta)$ + ٢ ك π (ك $\in$ ص)

جيب الزاوية يكون موجباً عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني

مثال(٧) صـ ١٠٤: أ) حل المعادلة: جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ب) حل المعادلة: ٢ جا س = $\sqrt{٢}$

حاول(٧) صـ ١٠٤: حل المعادلة: ٢ جا س − ١ = ٠

حل المعادلة : ظاس = ظا θ هو : س = θ + ك π (ك ∈ ص)

ظل الزاوية يكون موجباً عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث

حاول(٨) صـ ١٠٥: حل المعادلة: $\sqrt{٣}$ ظا س = ١

الوحدة الثامنة: حساب المثلثات بند (٨-٣) العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

المتطابقات المثلثية الأساسية

المتطابقات المثلثية الأساسية		متطابقات فيثاغورث
ظا θ = $\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$	ظتا θ = $\frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$	جا^2 θ + جتا^2 θ = ١
		١ + ظا^2 θ = قا^2 θ
قا θ = $\frac{1}{\text{جتا}\,\theta}$	قتا θ = $\frac{1}{\text{جا}\,\theta}$	١ + ظتا^2 θ = قتا^2 θ

مثال(١) صـ ١٠٨:

بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان جتا θ = ٠,٤ ، $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

فأوجد : جا θ ، ظا θ

امتحان سابق: بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان جتا θ = $\frac{٤}{٥}$ ، جا θ < ٠

فأوجد : جا θ ، ظا θ

كراسة صـ٦٥ رقم (٣):

إذا كانت جتا θ = $\frac{١}{٣}$ ، جا θ < ٠ فأوجد : جا θ ، ظتا θ

حاول (١) صـ ١٠٨:

بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان جا $\theta = \frac{3}{5}$ ، $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

فأوجد : جتا θ ، ظا θ ، قا θ

امتحان سابق: إذا كان جا $\theta = \frac{1}{2}$ ، $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

فأوجد : جتا θ ، ظتا θ ، قتا θ

امتحان سابق:

بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان جا θ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، جتا θ < ٠

فأوجد : جتا θ ، ظتا θ ، قا θ

معلومة رياضية:

إذا كان ظا θ > ٠

∴ جا θ، جتا θ لهما الإشارة نفسها.

مثال(٢) صـ ١٠٩:

بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان ظا θ = ٢ $\sqrt{٢}$ ، جتا θ < ٠

فأوجد : جا θ ، جتا θ

حاول (٢) صـ ١٠٩:

بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان ظا $\theta = \frac{٣}{٤}$ ، جا $\theta < ٠$

فأوجد : جا θ ، جتا θ

حاول (٣) صـ ١١٠:

بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان ظا $\theta = \frac{٢٤}{٧}$ ، جتا $\theta > ٠$

فأوجد : جا θ ، جتا θ

حاول (٤) صـ ١١١:

بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان ظتا θ = $\frac{٥}{٨}$ ، جتا θ > ٠ فأوجد جا θ

مثال (٥) صـ ١١٢: أثبت صحة المتطابقة التالية : جا^{٣}س + جا س × جتا^{٢} س = جا س

حاول (٥) صـ ١١٢: أثبت صحة المتطابقة التالية : جتا^{٣}س + جتا س × جا^{٢} س = جتا س

مثال (٦) صـ ١١٢:

أثبت صحة المتطابقة التالية : $\frac{(\text{قا}\,\theta + ١)(\text{قا}\,\theta - ١)}{\text{جا}^٢\,\theta} = \text{قا}^٢\,\theta$ حيث المقام $\neq$ صفر

حاول (٦) صـ ١١٢:

أثبت صحة المتطابقة التالية : $(\text{قا}^٢\,\theta + \text{قتا}^٢\,\theta) - (\text{ظا}^٢\,\theta + \text{ظتا}^٢\,\theta) = ٢$

البنود الموضوعية

في التمارين (١ - ١٨) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

(١) جتا(−٣٠٠°) = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(٢) جا(١٢٠°) = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(٣) ظا(− ١٥٠°) = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (أ) (ب)

(٤) قا(٣١٥°) = $\sqrt{٢}$ (أ) (ب)

(٥) إذا كانت جاθ = ٠,٢ فإن جا(π + θ) = ٠,٢ (أ) (ب)

(٦) إذا كانت جتاθ = $\frac{٢}{٣}$ فإن قاθ = $\frac{٣}{٢}$ (أ) (ب)

(٧) إذا كانت ظاθ = ٣ فإن ظتا(π + θ) = ٣ (أ) (ب)

(٨) إذا كانت جاθ = $\frac{١}{٥}$ فإن قتا(π + θ) = −٥ (أ) (ب)

(٩) إذا كان جاس = $\sqrt{٣}$ فإن مجموعة الحل = Ø (أ) (ب)

(١٠) إذا كان جتاس = $\frac{١}{٢}$ فإن س = $\frac{\pi}{٣}$ (أ) (ب)

(١١) إذا كانت س = $\frac{\pi}{٦}$ فإن جاس = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(١٢) مجموعة حل المعادلة قا س = ٠,٣ هي Ø (أ) (ب)

(١٣) ظا(١٥ π) = صفر (أ) (ب)

(١٤) قتا θ × جتا θ − ظتا θ = ٠

ⓐ ⓑ

(١٥) ظتا^2(− θ) − قتا^2 θ = −١

ⓐ ⓑ

(١٦) (قا θ + ظا θ) (قا θ − ظا θ) = ١

ⓐ ⓑ

(١٧) جا θ قتا θ − جتا^2 θ − جا^2 θ = ٠

ⓐ ⓑ

(١٨) ظا θ + ظتا θ − قا θ قتا θ = ٠

ⓐ ⓑ

في التمارين (١٩ - ٣١) ظلل الرمز الدال على الإجابة صحيحة .

(١٩) الزاوية التي في الوضع القياسي و قياس زاوية إسنادها يختلف عن الزوايا الأخرى هي :

أ) 190° ب) 170° ج) 350° د) 110°

(٢٠) الزاوية التي في الوضع القياسي و ضلعها النهائي يمر بالنقطة م $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} ، \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ التي تقع على دائرة الوحدة هي :

أ) 45° ب) 225° ج) 135° د) 330°

(٢١) الزاوية التي يقع ضلعها النهائي في الربع الرابع في ما يلي هي :

أ) -320° ب) -270° ج) $\frac{5\pi}{3}$ د) $\frac{13\pi}{9}$

(٢٢) الزاوية التي في الوضع القياسي و قياس زاوية إسنادها $\frac{\pi}{3}$ هي :

أ) $\frac{11\pi}{6}$ ب) 255° ج) $\frac{7\pi}{8}$ د) $\frac{5\pi}{3}$

(٢٣) زاوية في الوضع القياسي قياسها -255° فإن النقطة المثلثية التي يمكن أن تقع على الضلع النهائي لها هي :

أ) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ، \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ ب) $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} ، \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ج) $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} ، \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ د) $(-1 ، 1)$

(٢٤) $[\text{جا}(-١٣٥^\circ)]^٢ + [\text{جتا}(-١٣٥^\circ)]^٢ =$

ﭐ ١ ‏ ‏ ب $\frac{١}{٢}$ ‏ ‏ جـ $\frac{١}{٤}$ ‏ ‏ د صفر

---

(٢٥) جاس × قاس =

ﭐ ظتاس ‏ ‏ ب ظاس ‏ ‏ جـ قتاس ‏ ‏ د قاس

---

(٢٦) إن قيمة المقدار جا$(\pi +$ س$)$ − جتا$($س $+ \frac{\pi}{٢})$ هي :

ﭐ ١ ‏ ‏ ب صفر ‏ ‏ جـ $\frac{١}{٢}$ ‏ ‏ د −١

---

(٢٧) إن قيمة المقدار قا$(٢\pi - \theta)$ − قتا$(\frac{\pi}{٢} + \theta)$ + جتا$(\frac{\pi}{٢} + \theta)$ + جاθ هي :

ﭐ −١ ‏ ‏ ب $\frac{١}{٢}$ ‏ ‏ جـ صفر ‏ ‏ د ١

---

(٢٨) حل المعادلة ظا$\theta = \sqrt{٣}$ حيث $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$ هو:

ﭐ $\frac{\pi}{٣}$ ‏ ‏ ب $\frac{٢\pi}{٣}$ ‏ ‏ جـ $\frac{\pi}{٦}$ ‏ ‏ د $\frac{٤\pi}{٣}$

---

(٢٩) إذا كانت جتا$\theta = -\frac{٥}{٧}$ ، θ تقع في الربع الثالث فإن جاθ =

ﭐ $\frac{-٧}{٢\sqrt{٦}}$ ‏ ‏ ب $\frac{٢\sqrt{٦}}{٧}$ ‏ ‏ جـ $\frac{-٢\sqrt{٦}}{٧}$ ‏ ‏ د $\frac{٧}{٢\sqrt{٦}}$

---

(٣٠) إذا كانت قا$\theta = \frac{٣}{٢}$ ، θ تقع في الربع الرابع فإن ظاθ =

ﭐ $\frac{-٢}{\sqrt{٥}}$ ‏ ‏ ب $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ ‏ ‏ جـ $\frac{-\sqrt{٥}}{٢}$ ‏ ‏ د $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

---

(٣١) جا^{٣}س + جاس × جتا^{٢}س =

ﭐ جاس ‏ ‏ ب جتاس ‏ ‏ جـ ١ ‏ ‏ د −١

الوحدة التاسعة : الهندسة التحليلية **بند (٩-١)** **المستوي الإحداثي**

المسافة بين نقطتين :

المسافة بين أي نقطتين أ(س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) تساوي

$$\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

مثال (١) صـ ١٢١: أوجد المسافة بين ك (١ ، - ٥) ، ل (٣ ، - ٢)

حاول (١) صـ ١٢١:

أوجد المسافة بين م (- ٢ ، ١) ، ن (-٧ ، ٤). قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

كراسة (٩-أ) صـ ٧٤: أوجد المسافة بين نقطة الأصل والنقطة (٣ ، ٤)

نقطة المنتصف

إذا كانت ٲ(س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) فإن إحداثيات نقطة المنتصف هي م(س ، ص)

حيث $س = \frac{س_1 + س_2}{2}$ ، $ص = \frac{ص_1 + ص_2}{2}$

مثال (٢) صـ ١٢٢: أوجد نقطة منتصف $\overline{جـ د}$ حيث جـ (- ١ ، ٥) ، د (٣ ، ٠)

حاول (٢) صـ ١٢١: أوجد نقطة منتصف $\overline{ك ل}$ حيث ك (- ٣ ، - ١) ، ل (٥، ٢)

الوحدة التاسعة : الهندسة التحليلية بند (٩-٢) تقسيم قطعة مستقيمة

التقسيم من الداخل :

إذا كانت $\overline{أب}$ قطعة مستقيمة بحيث أ(س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) و يراد تقسيمها من جهة أ بنسبة م : ن من الداخل و كانت نقطة التقسيم جـ(س ، ص) فإن :

$$س = \frac{م\ س_٢ + ن\ س_١}{م + ن} \quad ، \quad ص = \frac{م\ ص_٢ + ن\ ص_١}{م + ن}$$

مثال (١) صـ ١٢٦: إذا كان أ (- ٥ ، ٣) ، ب (٧ ، -٤) . فأوجد نقطة تقسيم $\overline{أب}$ من جهة أ بنسبة ١ : ٣ من الداخل.

حاول (١) صـ ١٢٦: إذا كان أ (٣ ، - ٤) ، ب (- ٢ ، ٣). فأوجد جـ بحيث ٢ أ جـ = جـ ب ، جـ ∈ $\overline{أب}$

مثال (٢) صـ ١٢٦: إذا كان أ (٢ ، ٤) ، ب (٥ ، ٩) . ويراد تقسيم $\overline{\text{أ ب}}$ من الداخل من جهة ب في نقطة جـ بنسبة ٣ : ٥ أوجد إحداثيات النقطة جـ .

حاول (٢) صـ ١٢٦: لتكن أ (٢ ، - ٣) ، ب (- ٤ ، ٧) . أوجد إحداثيات النقطة جـ على $\overline{\text{أ ب}}$

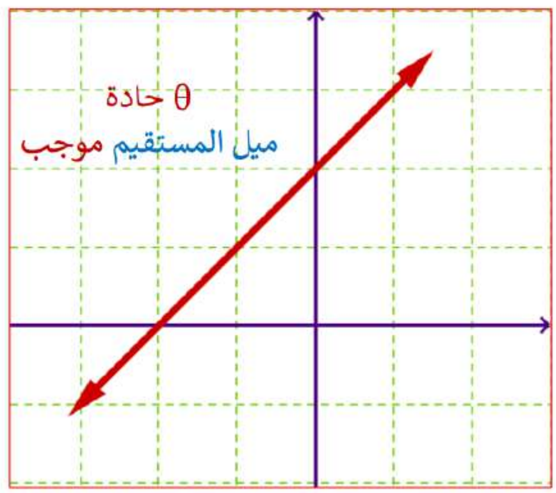
بحيث: ٧ جـ ب = ٢ جـ أ

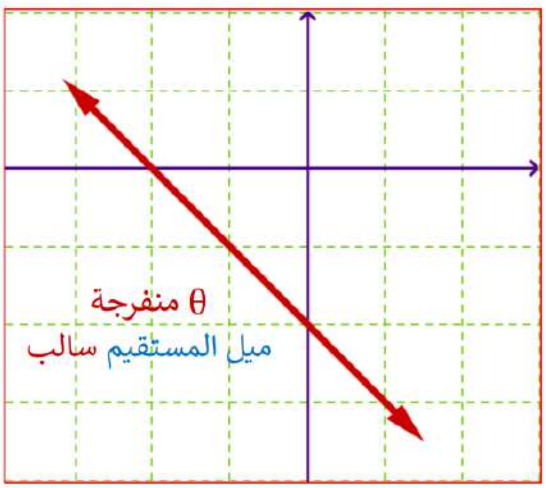
الوحدة التاسعة : الهندسة التحليلية **بند (٩-١٣أ)** **ميل الخط المستقيم**

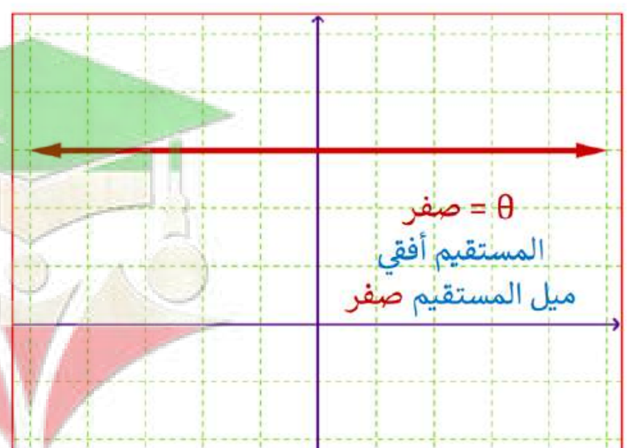
ميل المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ حيث أ(س$_1$ ، ص$_1$) ، ب (س$_2$ ، ص$_2$) هو :

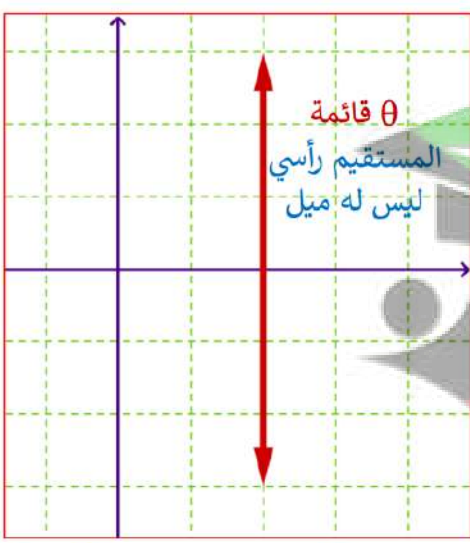
$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} \text{ ، } \text{س}_2 - \text{س}_1 \neq 0$$

<u>مثال (٢) صـ ١٣٣ :</u> أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين أ (- ٢ ، ١) ، ب (٥ ، ٧) .









ميل المستقيم م يساوي ظل الزاوية θ التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات م = ظا θ

مثال (٣) صـ ١٣٤: أثبت أن النقاط أ (١ ، -١) ، ب (٢، ٢) ، جـ (-١ ، -٧) تقع على استقامة واحدة.

حاول (٣) صـ ١٣٤: أثبت أن النقاط أ (٢ ، -١) ، ب (-١، ٥) ، جـ (٣، -٣) تقع على استقامة واحدة.

كراسة (١٠) صـ ٧٩:

أوجد ميل المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الوحدة التاسعة : الهندسة التحليلية **بند (٩-٣ب)** **معادلة الخط المستقيم**

معادلة الخط المستقيم

معادلة المستقيم الذي ميله (م) و النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) نقطة من نقاطه هي :

$$ص - ص_١ = م (س - س_١)$$

الصورة العامة لمعادلة مستقيم هي **أ س+ ب ص + جـ = ٠** حيث أ ، ب لا يساويان الصفر معاً

ملاحظات : لتكن (أ ، ب) نقطة من نقاط المستقيم:

١) معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠) هي **ص = م س**
٢) معادلة المستقيم الرأسي **س = أ** (و هذا المستقيم ليس له ميل)
٣) معادلة المستقيم الأفقي **ص = ب** (ميله صفر)

مثال (١) صـ ١٣٦:

اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{٣}{٢}$ ويمر بالنقطة (١ ، ٢).

حاول (١) صـ ١٣٦:

اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{-٢}{٣}$ ويمر بالنقطة (- ٦ ، ٥).

مثال (٢) صـ ١٣٧:

أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين أ (١ ، ٣) ، ب (- ٢ ، ٠) .

حاول (٢) صـ ١٣٧:

أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين جـ (٣ ، - ١) ، د (٢ ، - ٢) .

ملاحظات:

- لأي مستقيمين غير رأسيين ومتوازيين الميل نفسه
- أما إذا كان المستقيمان متعامدين وليس أحدهما رأسياً فناتج ضرب ميليهما يساوي – ١ .

مثال (٣) صـ ١٣٧ :

(أ) إذا كان المستقيم ل : ص = ٢س + ١ فأوجد معادلة المستقيم ل **الموازي** للمستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٢ ، - ٣) .

(ب) إذا كان المستقيم ل : ص = ٢س + ١ فأوجد معادلة المستقيم ف **العمودي** على المستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٤ ، - ٣) .

حاول (٣) صـ ١٣٧ :

(أ) إذا كان المستقيم ك : ٣ص + س + ٣ = ٠ فأوجد معادلة المستقيم ل **الموازي** للمستقيم ك والذي يمر بالنقطة (- ٣ ، ٢) .

(أ) إذا كان المستقيم ك : ٣ص + س + ٣ = ٠ فأوجد معادلة المستقيم ل **العمودي** للمستقيم ك والذي يمر بالنقطة (١ ، ٤) .

الوحدة التاسعة : الهندسة التحليلية بند (٩-٤) البعد بين نقطة ومستقيم

إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة ل : أس + ب ص + جـ = ٠ ،

فإن البعد ف بين النقطة د(س١،ص١) و المستقيم ل تعطى بالصيغة :

$$ف = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$$

ملاحظة: إذا كانت النقطة د تنتمي إلى المستقيم ل فالبعد بينهما يساوي صفراً

مثال (١) صـ ١٤١:

أثبت أن النقطة هـ (٢ ، ١) لا تنتمي الى المستقيم ل الذي معادلته : ص = ٣ س – ٤ ، ثم أوجد البعد بين المستقيم ل والنقطة هـ .

حاول أن تحل (١) صـ ١٤٢ :

أوجد البعد بين المستقيم ل : ص = – س + ٣ والنقطة د (٢ ، ٥) .

مثال (٢) صـ ١٤٢ :

أوجد البعد من النقطة د (– ٤ ، – ٣) إلى المستقيم ل : ٢ ص = ٣ س - ٧

حاول أن تحل (٢) صـ ١٤٢ :

أوجد البعد من النقطة ط (٣ ، – ٤) إلى المستقيم ل : ص = – $\frac{٤}{٣}$ + $\frac{س}{٦}$

الحل :

كراسة (٦) صـ ٨٧:

أوجد البعد بين نقطة الأصل والمستقيم ل : ٢ ص = ٣ س + ٤

كراسة (٦) صـ ٨٧:

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، ــ ٣) على المستقيم ل : - ٢ س + ص ــ ٤ = ٠

كراسة (٧) صـ ٨٧: أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و (٢ ، ــ ١) إذا كان المستقيم : ٣ س - ٤ ص + ٧ = ٠ مماساً لها.

الوحدة التاسعة : الهندسة التحليلية **بند (٩-٥)** **معادلة الدائرة**

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة			
المعادلة	(س – د)^٢ + (ص – هـ)^٢ = نق^٢		
المركز	(د ، هـ)	نصف القطر	نق

مثال (١) صـ ١٤٣ :

أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (٣ ، – ٢) وطول نصف قطرها ٧ وحدات .

حاول أن تحل (١) صـ ١٤٣ :

أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (٥ ، – ٣) وطول نصف قطرها ٥ وحدات .

مثال (٢) صـ ١٤٤ :

أوجد معادلة دائرة قطرها $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (٤ ، ــ ٢) ، ب (٢ ، ٤)

حاول أن تحل (٢) صـ ١٤٤ :

أوجد معادلة دائرة قطرها $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (ــ ٣ ، ٦) ، ب (١ ، ــ ٢)

ملاحظة : معادلة الدائرة التي **مركزها نقطة الأصل** وطول نصف قطرها **نق** هي : **س٢ + ص٢ = نق٢**

مثال (٣) صـ ١٤٤ :

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٤ وحدات.

حاول أن (٣) صـ ١٤٤ :

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول قطرها ٦سم .

مثال (٥) صـ ١٤٥ :

أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها: $(س + ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٩$

حاول (٥) صـ ١٤٥ :

١) أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها: $س^٢ + ص^٢ = ٤٩$

٢) أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها: $(س - ٤)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٣٦$

الصورة العامة لمعادلة الدائرة	
المعادلة	$س^2 + ص^2 + ل\ س + ك\ ص + ب = ٠$، حيث ل ، ك ، ب ثوابت
المركز	$\left(\frac{-ل}{٢} ، \frac{-ك}{٢}\right)$
نصف القطر	$نق = \frac{١}{٢}\sqrt{ل^2 + ك^2 - ٤ب}$ ، حيث $ل^2 + ك^2 - ٤ب > ٠$
ملاحظة	عندما يكون لدينا معادلة على الصورة العامة التالية : $س^2 + ص^2 + ل\ س + ك\ ص + ب = ٠$ يمكننا معرفة ما تمثله بيانياً هذه المعادلة بمجرد مقارنة $ل^2 + ك^2 - ٤ب$ مع الصفر ١ عندما $ل^2 + ك^2 - ٤ب < ٠$ فإن المعادلة لا تمثل معادلة دائرة ٢ عندما $ل^2 + ك^2 - ٤ب = ٠$ فإن المعادلة تمثل نقطة ٣ عندما $ل^2 + ك^2 - ٤ب > ٠$ فإن المعادلة تمثل دائرة

مثال (٦) صـ ١٤٦ :

عيّن مركز الدائرة وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة:

$$٣س^2 + ٣ص^2 - ٦س + ٩ص - ١٢ = ٠$$

حاول (٦) صـ ١٤٧ :

عيّن مركز الدائرة وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة:

٢س^{٢} + ٢ ص^{٢} – ١٢ س – ٤ ص – ٣٠ = ٠

حاول (٧) صـ ١٤٨ :

هل كل معادلة مما يلي تمثل معادلة دائرة ؟ فسر.

١) س^{٢} + ص^{٢} – ٤ س + ٧ ص + ١٧ = ٠

٢) س^{٢} + ص^{٢} + ٥ س – ٦ ص – ١٧ = ٠

٣) س^{٢} + ص^{٢} – ٢ س – ٢ ص + ٢ = ٠

معادلة مماس الدائرة

مثال (٨) صـ ١٤٨ :

أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها : (س - ١)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٥ عند النقطة أ (٣ ، ١)

حاول (٨) صـ ١٤٩ :

أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها : (س - ٢)^{٢} + (ص - ١)^{٢} = ٢٥ عند النقطة أ (٦ ، ٤)

البنود الموضوعية

في التمارين (١ - ٣٠) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

(١) المسافة بين النقطتين ك(٤ ، ٠) ، ل(٠ ، ٣) بوحدات الطول تساوي ٥	أ ب
(٢) نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث ب(٢ ، ٥) ، جـ(٠ ، ٧) هي (١ ، ١)	أ ب
(٣) إذا كان أ (٤ ، ٠) ، ب(−١ ، ٠) فإن إحداثيات النقطة التي تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ من الداخل من جهة أ بنسبة ٢ : ٣ هي (٢ ، ٠)	أ ب
(٤) من الممكن أن يكون لمستقيمين مختلفين الميل نفسه	أ ب
(٥) إذا كان أ (٤ ، ٠) ، ب(−١ ، ٠) فإن إحداثيات النقطة التي تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ من الداخل من جهة أ بنسبة ٢ : ٣ هي (٢ ، ٠)	أ ب
(٦) من الممكن أن يكون لمستقيمين مختلفين الميل نفسه	أ ب
(٧) إن ميل المستقيم الذي يمر بالربع الثالث و نقطة الأصل هو دائماً سالب	أ ب
(٨) لا يمر المستقيم الذي ميله يساوي صفراً بنقطة الأصل	أ ب
(٩) نقطتان لديهما الإحداثي السيني نفسه ، فإنهما تنتميان إلى المستقيم الرأسي نفسه	أ ب
(١٠) معدل التغير دائماً موجباً أو يساوي صفر	أ ب
(١١) كل المستقيمات الأفقية لها الميل نفسه	أ ب
(١٢) المستقيم الذي ميله يساوي ١ دائماً يمر بنقطة الأصل	أ ب
(١٣) ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٢) ، (٥ ، ٦) يساوي ٢	أ ب

(١٤) النقاط (–٢ ، ٣) ، (٠ ، –١) ، (٢ ، ١) تقع على استقامة واحدة — أ ب

---

(١٥) معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل و ميله ٣ هي ص + ٣س = ٠ — أ ب

---

(١٦) معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل و النقطة (٢ ، –٤) هي ص + ٢س = ٠ — أ ب

---

(١٧) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) و يوازي المستقيم س = ٠ هي س = ٢ — أ ب

---

(١٨) طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، ٤) على المستقيم ٤ص + ٣س + ٣ = ٠ يساوي ٧ — أ ب

---

(١٩) المعادلة س^{٢} + ص^{٢} + ٤س – ٧ص + ٢٠ = ٠ تمثل دائرة — أ ب

---

(٢٠) مركز الدائرة س^{٢} + (ص – ٣)^{٢} = ٥ هو (٠ ، ٣) — أ ب

في التمارين (٢١ - ٣٢) ظلل الرمز الدال على الإجابة صحيحة .

(٢١) المسافة بين النقطتين ب(–٢ ، ٠) ، ج(–٢ ، ٤) بوحدات الطول تساوي

أ ٤ ب ١٦ ج ٨ د $٤\sqrt{٢}$

---

(٢٢) إحداثي نقطة منتصف القطعة المستقيمة ب ج حيث ب(١٢ ، –٢) ، ج(–٢ ، ٦) هي

أ (٧ ، ٢) ب (–٢ ، ٥) ج (–٥ ، ٤) د (٥ ، ٢)

---

(٢٣) ميل المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٤٥ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يساوي

أ صفر ب –١ ج ١ د ليس له ميل

---

(٢٤) النقطة التي تنتمي للمستقيم ٣ص – س + ١ = ٠ هي

أ (٣ ، ٣) ب (٢ ، ٠) ج (٠ ، ٢) د (٤ ، ١)

---

(٢٥) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٤ ، ٥) و يوازي المستقيم ص = ٠ هي

أ) س = ٤ ب) ص = ٥ ج) ص = ٤ د) س = ٥

---

(٢٦) ميل المستقيم الموازي للمستقيم ٦س + ٣ص − ٧ = ٠ تساوي

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) ٢ د) −٢

---

(٢٧) ميل المستقيم المتعامد مع المستقيم ٢س + ص − ١ = ٠ تساوي

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) ٢ د) −٢

---

(٢٨) بعد نقطة الأصل عن المستقيم : ٣س + ٤ص − ١٥ = ٠ بوحدات الطول هي

أ) ١٥ ب) $\frac{٣}{٥}$ ج) ٣ د) ٥

---

(٢٩) بعد نقطة الأصل عن المستقيم : ص = ٤ بوحدات الطول هي

أ) ٥ ب) ٣ ج) ٤ د) ١٠

---

(٣٠) طول قطر الدائرة التي معادلتها : (س − ١)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٤ هو :

أ) ١٦ ب) ١ ج) ٤ د) ٢

---

(٣١) معادلة الدائرة التي مركزها (٠ ، ٣) و نصف قطرها ٥ هي :

أ) (س − ٥)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٥ ب) س^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٢٥

ج) س^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٢٥ د) س^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٥

---

(٣٢) مركز الدائرة : س^{٢} + ص^{٢} − ٤س + ٦ص + ١ = ٠ هو

أ) (٣ ، ٢) ب) (٢ ، ٣) ج) (−٢ ، ٣) د) (٢ ، −٣)

الوحدة العاشرة: الإحصاء والاحتمال **بند (١٠ – ٣)** **الانحراف المعياري**

التباين و الانحراف المعياري

إذا كانت س١ ، س٢ ، س٣ ، .... ، سن مجموعة من القيم متوسطها الحسابي $\overline{س}$ فإن :

التباين = $ع^2 = \dfrac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \overline{س})^2}{ن}$ ، الانحراف المعياري = ع = $\sqrt{ع^2}$

مثال(١) صـ ١٧٨ : أوجد التباين والانحراف المعياري للقيم : ٤ ، ٦ ، ٨ ، ٥ ، ٣ ، ٧ ، ٢

حاول(١) صـ ١٧٧ : أوجد التباين والانحراف المعياري للقيم : ٩ ، ٧ ، ٨ ، ٦ ، ٤ ، ٢

مثال(٤) صـ ١٨٢ :

إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم من بيانات هو ع = ٦ وأن مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو ٥٤٠ ، فما عدد قيم هذه البيانات ؟

حاول (٤) صـ ١٨٢ :

إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم من بيانات هو ع = ٤ وأن مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو ٤٨٠ ، فما عدد قيم هذه البيانات ؟

الوحدة العاشرة: الإحصاء والاحتمال بند (١٠ – ٤) طرق العد

حاول (٢) صـ ١٨٤: يقدم أحد المطاعم وجبة غداء مؤلفة من: سلطة أو حساء ، دجاج أو سمك أو لحمة ، حلويات أو فاكهة . استخدم الشجرة البيانية لإعطاء عدد الوجبات الممكنة.

حاول (٤) صـ ١٨٦: اشترك ٢٠ جملاً في سباق للهجن ووصلت جميعها إلى خط النهاية في أوقات مختلفة (أي لا يوجد أي تعادل) ما هو عدد النتائج الممكنة لهذا السباق؟

تذكر:

مضروب ن أو

ن! هو: ن × (ن − ١) × ... × ٣ × ٢ × ١

فمثلًا: ٥! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

٠! = ١ تُقرأ مضروب صفر = ١

التباديل : قانون التباديل

عدد تباديل ن من العناصر المختلفة مأخوذة منها ر في كل مرة هو :

$$^{ن}ل_{ر} = ن \times (ن - ١) \times (ن - ٢) \times ...... \times (ن - ر + ١) = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$

حيث ر ، ن $\in$ $ص_{+}$ ، ر $\leq$ ن ، $^{ن}ل_{٠} = ١$

مثال (٦) صـ ١٨٧: أوجد قيمة ما يلي بدون استخدام الآلة الحاسبة:

١) $^{١٠}ل_{٣}$ **٢)** $^{١١}ل_{٣}$ **٣)** $^{ن}ل_{٣}$

حاول (٦) صـ ١٨٨: أوجد قيمة ما يلي بدون استخدام الآلة الحاسبة:

١) $^{٥}ل_{٣}$ **٢)** $^{١٠}ل_{٤}$ **٣)** $^{ن}ل_{٤}$

مثال (٧) صـ ١٨٨: ما عدد الكلمات التي يمكن أن تتشكل من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية العربية وذلك في حال عدم تكرار أي منها؟

حاول (٧) صـ ١٨٨: ما عدد الأعداد التي يمكن أن تتشكل من ٤ أرقام من أرقام النظام العشري بدون الصفر وذلك في حال عدم تكرار أي رقم؟

التوافيق - قانون التوافيق

إذا كان ن ، ر عددان صحيحان موجبان ن ≥ ر فإن :

عدد التوافيق المكونة كل منها ر من الأشياء و المختارة من بين ن من الأشياء هو :

$$^{ن}ق_{ر} = \binom{ن}{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{ر!} = \frac{ن!}{(ن - ر)! \times ر!}$$

ملاحظات:

(١) عندما ر = ٠ يُعرَّف $\binom{ن}{٠} = ١$

(٢) $\binom{ن}{ن} = ١$

أوجد قيمة ما يلي بدون استخدام الآلة الحاسبة:

١) $^{١٠}ق_{٣}$ **٢)** $\binom{٧}{٢}$

حاول (٨) صـ ١٨٩:

ما عدد اللجان المكونة من شخصين والتي يمكن تكوينها من مجموعة من أربعة أشخاص

حاول (٩) صـ ١٩٠:

إذا كان فريق كرة قدم يتكون من ٢٠ لاعباً . فما عدد الفرق المختلفة التي يمكن تكوينها من ١١ لاعباً من بين لاعبي هذا الفريق ؟ (يمكن لأي لاعب اللعب في أي مركز)

أ / محمد نوري الفلاح

مثال (١٠) صـ ١٩٠: من أجل اختيار لوائح المرشحين للانتخابات النيابية ، يجب اختيار ١٠ مرشحين من بين ٥١ مرشحاً. ما عدد اللوائح المختلفة التي يمكن تكوينها؟

مثال (١١) صـ ١٩١: في كل مما يلي حدد ما إذا كان المثال تبديلاً أو توفيقاً واحسب عدد الطرق في كل حالة

١) اختيار رئيس ، نائب رئيس ، أمين سر من بين ٢٥ عضواً في نادي القراءة.

٢) اختيار ٥ حبات بطاطا من كيس يحتوي على ١٢ حبة لإعداد وجبة غذائية.

٣) وضع معلم مخططاً يبين مقاعد ٢٢ طالباً في غرفة بها ٢٥ مقعداً.

٤) اختيار ٤ أبيات من قصيدة شعرية مكونة من ١١ بيتاً لكتابتها وتعليقها في غرفة الفصل.

الوحدة العاشرة: الإحصاء والاحتمال **بند (١٠ – ٥)** **الاحتمال المشروط**

إن نواتج كل تجربة عشوائية تسمى فضاء العينة(ف) . و كل حدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ، إذا كانت جميع نواتج التجربة لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث م هو :

$$ل(\text{الحدث م}) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث م}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}} \quad \text{أي أن} \quad ل(م) = \frac{ن(م)}{ن(ف)}$$

مثال (١) صـ ١٩٢:

في لعبة رمي حجري نرد منتظمين ومتمايزين والتجربة هي ملاحظة الوجه العلوي لكل من الحجرين

١) مما يتألفكل ناتج ؟ اكتب فضاء العينة . وما عدد النواتج الممكنة ؟
٢) مثل فضاء العينة بيانياً.
٣) ما احتمال الحدث أ : ظهور عددين مجموعهما يساوي ٤ ؟
٤) ما احتمال الحدث ب : ظهور عددين مجموعهما يساوي ٧ ؟
٥) ما احتمال الحدث جـ : ظهور عددين مجموعهما يساوي ١٣ ؟
٦) ما احتمال الحدث د : ظهور عددين أحدهما مربعاً للآخر ؟

خواص الاحتمال لحدث ما

ليكن أ حدث في فضاء عينة ف منته و غير خال فإن :

١) ٠ ≤ ل(أ) ≤ ١

٢) إذا كان أ = {} إذاً ل(أ) = ٠ و يسمى أ حدثاً مستحيلاً

٣) إذا كان أ = ف إذاً ل(أ) = ١ و يسمى أ حدثاً مؤكداً

٤) مجموع احتمالات جميع النواتج في فضاء العينة يساوي ١

مثال (٢) صـ ١٩٤:

في تجربة رمي حجري نرمتمايزين معاً وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما ، الحدث أ هو مجموع العددين الظاهرين هو ١٣ . فما احتمال وقوع الحدث أ ؟

حاول (٢) صـ ١٩٤:

في تجربة رمي حجري نرمتمايزين معاً وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما ، الحدث ب الحصول على مجموع أصغر من ١٣ ، فما احتمال وقوع الحدث ب؟

العمليات على الأحداث و احتمالاتها

قاعدة الاحتمال لاتحاد حدثين :

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب) و منها ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)

قاعدة الاحتمال لمتمم الحدث أ : ل($\overline{\text{أ}}$) = ١ − ل(أ)

قاعدة الاحتمال لحدثين متنافيين : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف فإن :

ل(أ ∩ ب) = ٠ و منها ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب)

مثال (٥) صـ ١٩٦:

إذا كان أ ، ب حدثان في فضاء العينة ف وكان

ل(أ) =٠٫٧ ، ل (ب) = ٠,٤ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٤

أوجد : (١) ل (أ ∪ ب) (٢) ل ($\overline{\text{أ}}$)

حاول (٥) صـ ١٩٦:

إذا كان أ ، ب حدثان في فضاء العينة ف وكان

ل(أ) =٠٫٣ ، ل (ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٦

أوجد : (١) ل (أ ∩ ب) (٢) ل ($\overline{\text{ب}}$)

مثال (٦) صـ ١٩٧:

إذا كان أ ، ب حدثان في فضاء العينة ف وكان

ل($\overline{\text{أ}}$) = ٠,٢ ، ل (ب) = ٠,٩ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٤

أوجد : (١) ل ($\overline{\text{ب}}$) (٢) ل ($\overline{\text{أ} \cap \text{ب}}$)

حاول (٦) صـ ١٩٧:

إذا كان أ ، ب حدثان في فضاء العينة ف وكان

ل(أ) = ٠,٥ ، ل (ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٢

أوجد : ل ($\overline{\text{أ} \cup \text{ب}}$)

حاول (٧) صـ ١٩٨:

في فضاء العينة ف لدينا حدثان أ ، ب متنافيان حيث ل(أ) = ٠,٤ ، ل (ب) = ٠,٥

١) احسب ل (أ ∪ ب) ٢) احسب ل ($\overline{\text{أ} \cup \text{ب}}$)

الأحداث المستقلة - قاعدة الضرب للأحداث المستقلة

أ ، ب حدثان مستقلان من فضاء العينة ف فإن احتمال وقوعهما معاً هو :

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب)

حاول (٨) صـ ١٩٩: في تجربة عشوائية عند رمي قطعة نقود ثلاث مرات وملاحظة الوجه العلوي.

ما احتمال أن يكون الناتج (ص ، ك ، ص)

كراسة (١٦) صـ ١١٥: إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٤ أوجد:

(١) ل (أ ∩ ب) (٢) ل (أ ∪ ب) (٣) ل($\bar{أ}$)

الاحتمال المشروط - قاعدة الاحتمال المشروط

إذا كان وقوع الحدث ب مشروطاً بوقوع الحدث أ فإن :

ل(ب/أ) = $\frac{\text{ل(أ} \cap \text{ب)}}{\text{ل(أ)}}$ حيث ل(أ) $\neq$ ٠ و منه ل(أ $\cap$ ب) = ل(أ) $\times$ ل(ب/أ)

مثال (١٠) صـ ٢٠٢:

في تجربة عشوائية أ ، ب حدثان حيث ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل (أ $\cap$ ب) = ٠,٢

أوجد : (١) ل(ب | أ) (٢) ل(أ | ب)

حاول (١٠) صـ ٢٠٢:

في تجربة عشوائية إذا كان ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب | أ)= ٠,٢ . أوجد ل (أ $\cap$ ب)

حاول (١١) صـ ٢٠٢: في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم ، إذا كان الحدث ب الحصول على عدد زوجي والحدث أ الحصول على عدد أولي . فاحسب ل(ب | أ)

<u>امتحان سابق:</u> في تجربة عشوائية أ ، ب حدثان في فضاء العينة ف وكان

ل ($\overline{\text{أ}}$) = ٠,٧ ، ل (ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٢

أوجد : (١) ل(أ) (٢) ل (أ ∪ ب) (٣) ل(أ | ب)

<u>امتحان سابق:</u> إذا كان أ ، ب حدثان في فضاء العينة ف وكان

ل(أ) =٠,٥ ، ل ($\overline{\text{ب}}$) = ٠,٢ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٤

أوجد : (١) ل(ب) (٢) ل ($\overline{\text{أ} \cup \text{ب}}$) (٣) ل(أ | ب)

البنود الموضوعية

في التمارين (١ - ٦) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

(١) مجموع انحرافات مجموعة من القيم عن متوسطها الحسابي يساوي صفراً	أ ب
(٢) الانحراف المعياري للبيانات : ٥ ، ٧ ، ٦ ، ٤ ، ٨ ، ٩ ، ٣ هو ٤	أ ب
(٣) إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم يساوي ٣ وكان مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي يساوي ١٨٠ فإن عدد القيم هو ٦	أ ب
(٤) $^{٥}ل_{٣}$ = ٦٠	أ ب
(٥) $^{٥}ق_{٣}$ = ٦٠	أ ب
(٦) إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين وكان: ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٧ فإن: ل(أ ∪ ب) = ٠,٩	أ ب

في التمارين (٧ - ١٥) ظلل الرمز الدال على الإجابة صحيحة .

(٧) إذا كان التباين لمجموعة قيم يساوي ٣٦ وكان مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي يساوي ٥٤٠ فإن عدد القيم يساوي

(أ) ١٥ (ب) ٩٠ (ج) ٥٠٤ (د) ٥٧٦

(٨) إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم بيانات يساوي ٤ وكان مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي يساوي ١٩٢ فإن عدد القيم يساوي

(أ) ١٦ (ب) ٤٨ (ج) ١٢ (د) ليس أياً مما سبق

(٩) في البيانات : ١٠ ، ١٣ ، ٩ ، ٧ ، ١٢ ، ١٥ الانحراف المعياري هو :

(أ) ٧ (ب) ٦ (ج) $\sqrt{٧}$ (د) ليس أياً مما سبق

(١٠) $^{٥}ل_{٢}$ =

(أ) ٥ (ب) ٢ (ج) ١٠ (د) ٢٠

(١١) $^{٤٨}ق_{٤٦}$ =

Ⓐ ٢٢٥٦ ب ١١٢٨ ج ١٠٣٥ د ٢٠٧٠

---

(١٢) إذا كان Ⓐ ، ب حدثين مستقلين وكان:ل(Ⓐ) = ٠,٢ ، ل(Ⓐ ∩ب)= ٠,١٤ فإن ل(ب) =

Ⓐ ٠,٧ ب ٠,٢٨ ج ٠,٤ د ليس أياً مما سبق

---

(١٣) إذا كان Ⓐ ، ب حدثين مستقلين وكان : ل(Ⓐ) = ٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٤ فإن ل(Ⓐ / ب)=

Ⓐ ٠,٢ ب ٠,٤ ج ٠,٦ د ١

---

(١٤) إذا كان Ⓐ ، ب حدثين وكان : ل(Ⓐ) = ٠,٢ ، ل(Ⓐ / ب)= ٠,٥ فإن ل(Ⓐ ∩ب)=

Ⓐ ٠,٥ ب ٠,١ ج ٠,٢ د ٠,٢٥

---

(١٥) إذا كان Ⓐ ، ب حدثين وكان : ل(Ⓐ) = ٠,٧ ، ل(ب)= ٠,٥ ، ل(Ⓐ ∪ب)= ٠,٨ فإن ل(Ⓐ ∩ب)=

Ⓐ ٠,٢ ب ٠,٤ ج ٠,٦ د ١,٢
