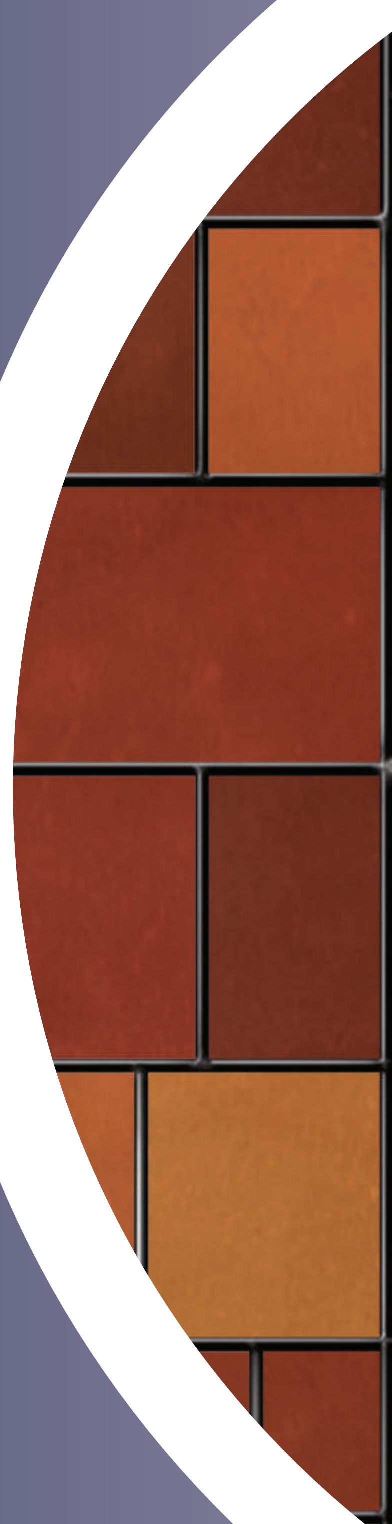
الوحدة التعليمية
الخامسة

الأشكال الرباعية



«من الهندسة إلى الجمال : الأشكال الرباعية في الفسيفساء »

تُستخدم الأشكال الرباعية في الهندسة والفنّ لتصميم الفسيفساء والزخارف الهندسية التي نراها في المساجد والقصور القديمة . يعتمد الفنّانون والمهندسون على خصائص الأشكال الرباعية مثل المربّعات والمستطيلات والمعيَّنات ، لتكوين أنماط متناسقة ومتكرّرة تُضفي جمالًا ودقّة على التصاميم المعمارية .

المجال	معايير المنهج	مؤشّر الأداء
الهندسة والقياس	- تحليل صفات وخصائص الأشكال الهندسية ذات البعدَين والثلاثة الأبعاد ، وتنمية التفكير الرياضي حول العلاقات الهندسية والمقارنة بين الأشكال ووصفها .	الفهم - التذكّر - الاستكشاف والتقصّي - العمل الجَماعي - العلاقات - الربط - التعرّف - الاستنتاج - التمييز - التصنيف - الاستدلال - التحليل والتركيب - التعاون - الوسائط - التقويم - التعليل - حلّ المشكلات
	- إِستخدام التصوّر البصري والتعليل المكاني والنمذجة الهندسية لتمثيل عالمه المادّي ووصفه وحلّ مشكلاته .	
	- تطبيق الأساليب والأدوات والصيغ الملائِمة لتحديد قياسات .	
	- فهم خواصّ القياس للأشياء والوحدات والأنظمة وعمليات القياس .	

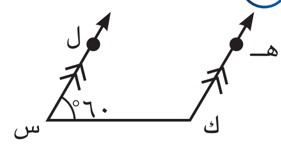
مخطّط تنظيمي للوحدة التعليمية الخامسة

- الأشكال الرباعية
  - الكشف عن توازي مستقيمَين
  - متوازي الأضلاع
    - رسم متوازي الأضلاع
    - الكشف عن متوازي الأضلاع
    - الكشف عن متوازي الأضلاع في حالاته الخاصّة
      - الكشف عن المستطيل
      - الكشف عن المعيَّن
      - الكشف عن المربّع

هل أنت مستعدّ؟

١ في كلّ من الأشكال التالية $\overleftarrow{\text{ك هـ}} \parallel \overleftarrow{\text{س ل}}$. أوجِد ق (س ك̂ هـ) مع ذكر السبب .

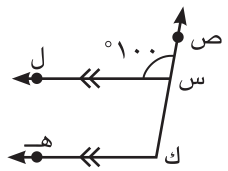
أ



....

....

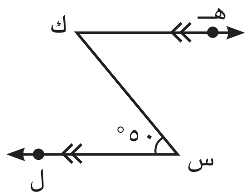
ب



....

....

ج

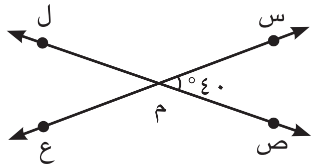


....

....

٢ في الشكل المقابِل ، $\overleftrightarrow{\text{س ع}} \cap \overleftrightarrow{\text{ص ل}}$ = { م } ،

ق (س م̂ ص) = ٤٠° . أكمِل :



ق (ل م̂ ع) = ...

السبب : ....

ق (س م̂ ل) = ...

السبب : ....

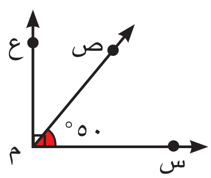
٣ إذا كانت س̂ ، ص̂ زاويتَين متكاملتَين ، ق (س̂) = ٥٥° ، فأوجِد مع ذكر السبب .

ق (ص̂) = ...

السبب : ....

٤ في الشكل المقابِل ، بحسب البيانات على الرسم ،

أكمِل :

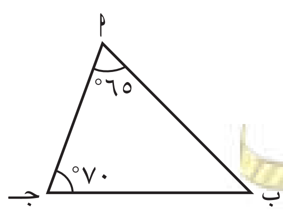


ق (ص م̂ ع) = ...

السبب : ....

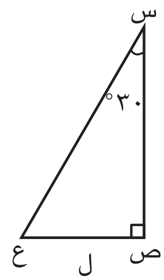
٥ في الشكل المقابِل ، بحسب البيانات على الرسم ،

أكمِل :



ق (ب̂) = ...

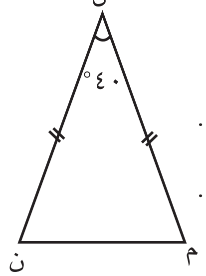
السبب : ....



٦ في الشكل المقابِل ، أكمِل :

ق ($\widehat{ع}$) = ...

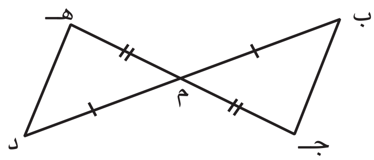
السبب : ....



٧ في الشكل المقابِل ، أكمِل :

ق (ل $\widehat{م}$ ن) = ...

السبب : ....



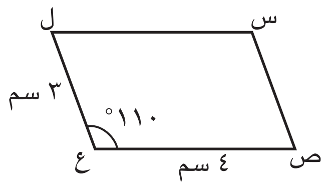
٨ في الشكل المقابِل ، أكمِل :

$\overline{\text{م ب}}$ ≅ ....

$\overline{\text{م جـ}}$ ≅ ....

ب $\widehat{م}$ جـ ≅ .... السبب : ....

∴ Δ م ب جـ ≅ .... الحالة : ....



٩ س ص ع ل متوازي أضلاع فيه :

ع ل = ٣ سم ، ع ص = ٤ سم ، ق ($\widehat{ع}$) = ١١٠°

أوجِد ما يلي مع ذكر السبب .

ق ($\widehat{س}$) = ... السبب : ....

ق ($\widehat{ص}$) = ... السبب : ....

س ص = ... السبب : ....

س ل = ... السبب : ....

١٠ في الشكل المقابِل ، بحسب البيانات المدوَّنة على الرسم ، أكمِل :

ق ($\widehat{س}$) = ...

السبب : ....

١١ حُلّ كلًّا من المعادلات التالية حيث س ∈ ص :

أ ٢ س − ٤ = ٦

....

....

ب ٥ س + ٩ = ١٤

....

....

٥ - ١ الكشف عن توازي مستقيمَين
Detecting the Parallelism of Two lines

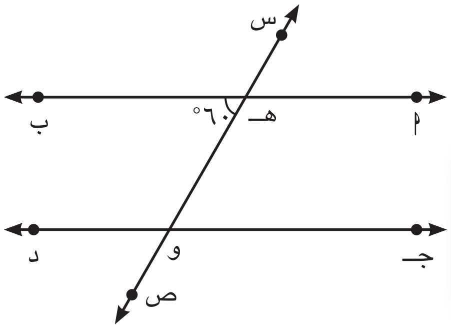
سوف تتعلّم : الكشف عن توازي مستقيمَين .

العبارات والمفردات :

يوازي	Parallel	زوايا متبادلة	Alternate Angles
زوايا متناظرة	Corresponding Angles	زوايا متحالفة	Allied Angles

إستكشِف

في الشكل المقابِل :



أوّلًا : باستخدام المنقلة ، أوجِد ق (هـ وَ^ جـ) :

ق (هـ وَ^ جـ) = ...

اللوازم :
أدوات هندسية

ثانيًا : أكمِل :

١ ق (هـ وَ^ جـ) = ق (..........^)

وهما في وضع تبادل

٢ ق (د وَ^ ص) = ق (..........^)

بالتقابل بالرأس

∴ ق (د وَ^ ص) = ق (..........^)

وهما في وضع تناظر

٣ ق (هـ وَ^ د)

= ١٨٠° - .... = ...

بالتجاور على خطّ مستقيم واحد

مع (جـ وَ^ هـ)

∴ ق (هـ وَ^ د) + ق (ب هَـ^ و)

= .... + ... = ١٨٠°

وهما زاويتان متحالفتان

ثالثًا : باستخدام المسطرة والمثلّث القائم ، تحقّق من صحّة توازي المستقيمَين : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$.

ماذا تلاحظ ؟ ....

....

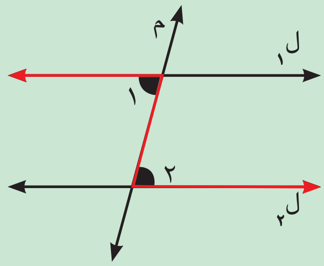
تذكّر

- الزاويتان المتكاملتان مجموع قياسهما ١٨٠°
- الزاويتان المتجاورتان على خطّ مستقيم واحد متكاملتان .
- الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان .

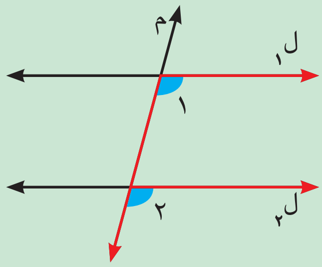
نستنتج أنّ :

إذا قطع مستقيم مستقيمَين في المستوى ، فإنّ المستقيمَين يكونان متوازيَين ، **إذا وفقط إذا** توفّر أحد الشروط التالية :

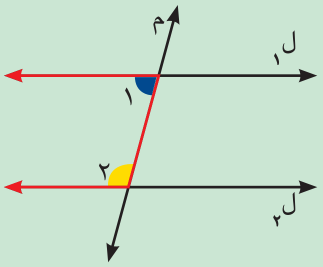
١ زاويتان متبادلتان متطابقتان



٢ زاويتان متناظرتان متطابقتان



٣ زاويتان متحالفتان متكاملتان



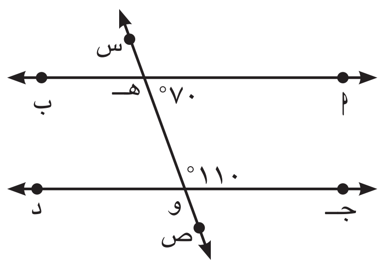
دورك الآن (١)

أيّ من الأشكال التالية يكون $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـد}$ ؟ وضِّح ذلك .

لاحِظ أنّ :

«لا يوازي» يُرمز إليه بالرمز ∦

١

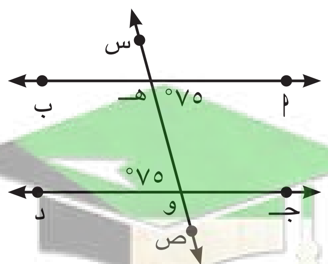


∵ ق (أ هـ و) + ق (جـ و هـ) = ٧٠° + ١١٠° = ١٨٠°

وهما زاويتان متحالفتان

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـد}$

٢

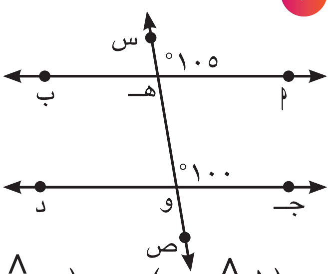


∵ ق (أ هـ و) = ق (هـ و د) = ٧٥°

وهما في وضع تبادل

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـد}$

٣



ق (أ هـ س) ≠ ق (جـ و هـ)

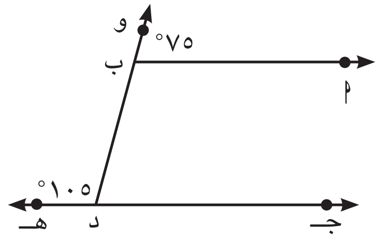
وهما في وضع تناظر

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{جـد}$

مثال (١):

في الشكل أدناه: ق (أ ب̂ و) = ٧٥° ، ق (ب د̂ هـ) = ١٠٥°

أثبِت أنّ ب أ ← // هـ جـ ↔ .



الحلّ :

المعطَيات :

ق (ب د̂ هـ) = ١٠٥°

ق (أ ب̂ و) = ٧٥°

المطلوب : إثبات أنّ ب أ ← // هـ جـ ↔

البرهان : ∵ ق (ب د̂ هـ) = ١٠٥° (معطى)

∴ ق (جـ د̂ ب) = ١٨٠° - ١٠٥° = ٧٥° (بالتجاور على خطّ مستقيم واحد)

∵ ق (أ ب̂ و) = ق (جـ د̂ ب) = ٧٥° (وهما في وضع تناظر)

∴ ب أ ← // هـ جـ ↔

لاحِظ أنّ :

لحلّ تمارين هندسية ، اِتّبِع الخطوات التالية :

١ أُكتب المعطَيات

٢ أُكتب المطلوب

٣ أُكتب البرهان (خطوات الوصول إلى المطلوب)

عبِّر عن فهمك (١)

هل يمكنك حلّ مثال (١) بطرق أخرى ؟ فسِّر إجابتك .

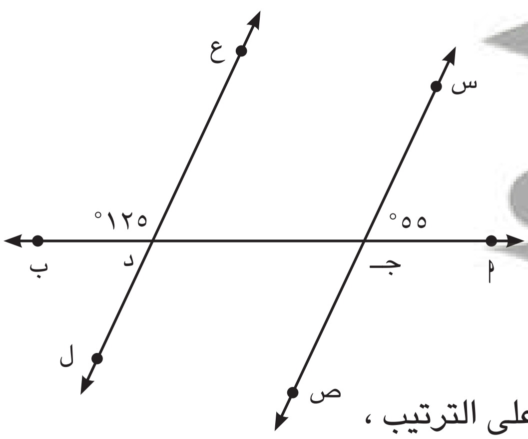
دورك الآن (٢)

في الشكل المقابِل ، أ ب ↔ قاطع للمستقيمَين

س ص ↔ ، ع ل ↔ ، في جـ ، د على الترتيب ،

ق (أ جـ̂ س) = ٥٥° ، ق (ع د̂ ب) = ١٢٥° ،

برهِن أنّ س ص ↔ // ع ل ↔



الحلّ :

المعطَيات : أ ب ↔ قاطع للمستقيمَين س ص ↔ ، ع ل ↔ في جـ ، د على الترتيب ،

ق (جـ س) = ٥٥° ، ق (ع د̂ ب) = ١٢٥°

المطلوب : إثبات أنّ س ص ↔ // ع ل ↔

البرهان : ∵ ق (أ جـ̂ س) = ٥٥° (معطى)

∴ ق (س جـ^ د) = ١٨٠° - ٥٥° = ١٢٥° (بالتجاور على خطّ مستقيم واحد)

∵ ق (ع د^ ب) = ١٢٥° (معطى)

∴ ق (س جـ^ د) = ق (ع د^ ب) = ١٢٥ (وهما في وضع تناظر)

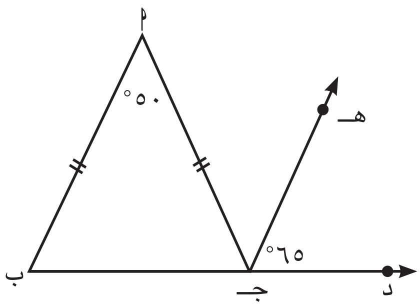
∴ س ص ↔ // ع ل ↔

تذكّر

في المثلّث المتطابق الضلعَين زاويتا القاعدة متطابقتان .

مثال (٢) :

في الشكل المقابِل وحسب البيانات المحدَّدة عليه ، أثبِت أنّ جـ هـ ← // ب أ



الحلّ :

المعطَيات : أ ب = أ جـ ، ق (أ^) = ٥٠° ، ق (د جـ^ هـ) = ٦٥°

المطلوب : إثبات أنّ جـ هـ ← // ب أ

البرهان : ∵ أ ب = أ جـ (معطى)

∴ Δ أ ب جـ متطابق الضلعَين

∴ ق (أ ب^ جـ) = ق (أ جـ^ ب) = $\frac{١٨٠° - ٥٠°}{٢}$ = $\frac{١٣٠°}{٢}$ = ٦٥° (مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة = ١٨٠°)

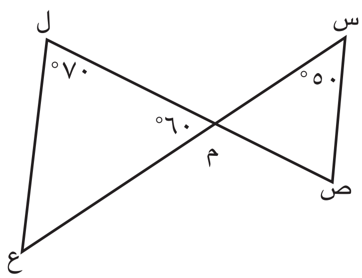
∵ ق (د جـ^ هـ) = ٦٥° (معطى)

∴ ق (أ ب^ جـ) = ق (د جـ^ هـ) = ٦٥° (وهما في وضع تناظر)

∴ جـ هـ ← // ب أ

دورك الآن (٣)

في الشكل المقابِل ، إذا كان س ع ∩ ص ل = { م } وحسب البيانات المحدَّدة عليه ، أثبِت أنّ س ص // ع ل



الحلّ :

المعطَيات : س ع ∩ ص ل = { م }

ق (س^) = ٥٠° ، ق (ل^) = ٧٠° ،

ق (ع م^ ل) = ٦٠°

المطلوب : إثبات أنّ س ص // ع ل

تذكّر

مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة يساوي ١٨٠° .

البرهان : Δ ع م ل فيه

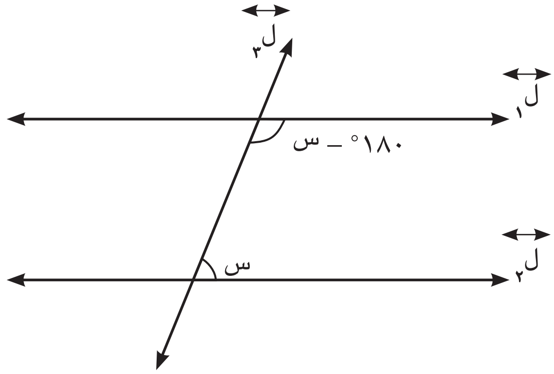
ق (ع^) = ١٨٠° - (٦٠° + ٧٠°) = ٥٠° (مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة ١٨٠°)

∴ ق (س^) = ق (ع^) = ٥٠° (وهما في وضع تبادل)

∴ س ص // ع ل

عبِّر عن فهمك (٢)

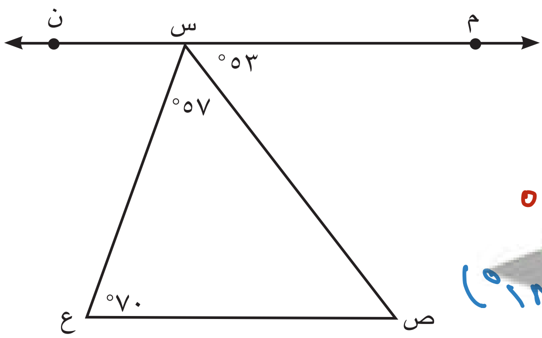
يقول يوسف : إنّ $\overleftrightarrow{ل_1}$ // $\overleftrightarrow{ل_2}$ ، فهل توافقه الرأي ؟ وضِّح ذلك .



تمارين ذاتية :

١ في الشكل المقابِل وحسب البيانات المحدَّدة عليه ،

أثبِت أنّ $\overleftrightarrow{م ن}$ // $\overline{ص ع}$.



البرهان Δ س ص ع فيه

ق(ص^) = ١٨٠° − (٥٧° + ٧٠°) = ٥٣°

(مجموع قياسات زوايا Δ = ١٨٠°)

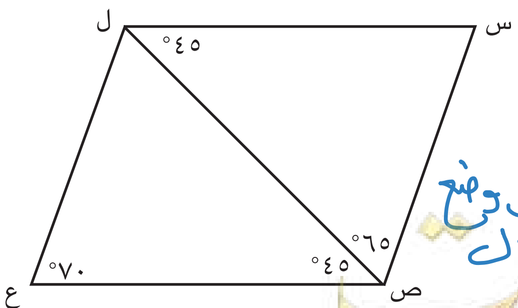
∴ ق(ص^) = ق(م س ص) = ٥٣° (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overleftrightarrow{م ن}$ // $\overline{ص ع}$

٢ في الشكل المقابِل وحسب البيانات المدوَّنة عليه ،

برهِن أنّ :

(أ) $\overline{س ل}$ // $\overline{ص ع}$



∵ ق(س ل ص) = ق(ل ص ع) = ٤٥° وهما في وضع تبادل

∴ $\overline{س ل}$ // $\overline{ص ع}$

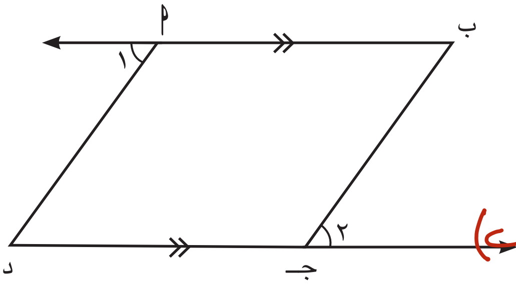
(ب) $\overline{س ص}$ // $\overline{ل ع}$

ق(س ص ع) + ق(ع^) = (٦٥° + ٤٥°) + ٧٠° = ١٨٠°

(وهما زاويتان متحالفتان)

∴ $\overline{س ص}$ // $\overline{ل ع}$

الدرس الأوّل



٣ في الشكل المقابِل : $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ // $\overleftarrow{\text{د جـ}}$ ،

ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٢}$) برهِن أنّ $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{أ د}}$

البرهان ∵ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ // $\overleftarrow{\text{د جـ}}$

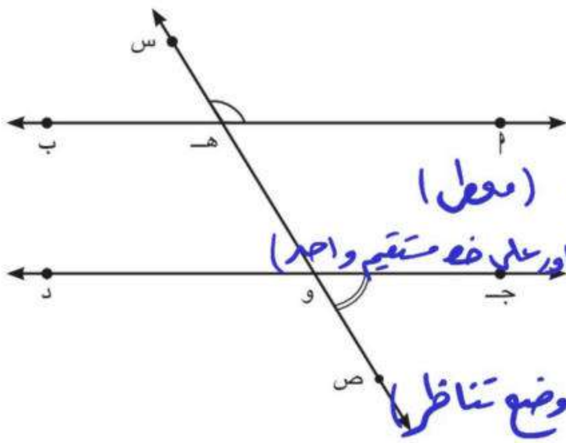
∴ ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٣}$) (بالتبادل والتوازي)

∵ ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٢}$) (معطى)

∴ ق ($\hat{٢}$) = ق ($\hat{٣}$) (وهما في وضع تناظر)

∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{أ د}}$

مهارات تفكير عليا :



٤ في الشكل المقابِل :

ق (أ $\hat{\text{هـ}}$ س) + ق (جـ $\hat{\text{و}}$ ص) = ١٨٠°

أثبِت أنّ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

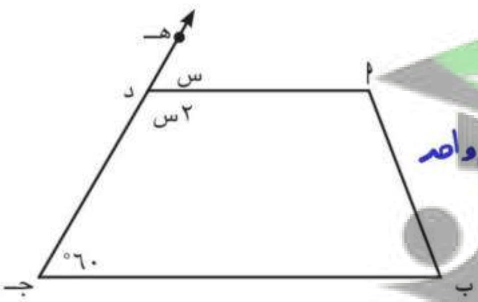
∵ ق (أ $\hat{\text{هـ}}$ س) + ق (جـ $\hat{\text{و}}$ ص) = ١٨٠° ← (١) (معطى)

∵ ق (أ $\hat{\text{و}}$ هـ) + ق (جـ $\hat{\text{و}}$ ص) = ١٨٠ ← (٢) (بالتجاور على خط مستقيم واحد)

من (١) ، (٢) ينتج أن

ق (أ $\hat{\text{هـ}}$ س) = ق (جـ $\hat{\text{و}}$ هـ) (وهما في وضع تناظر)

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$



٥ في الشكل المقابِل وحسب البيانات المدوَّنة عليه ،

أثبِت أنّ أ ب جـ د شبه منحرِف .

∵ (أ $\hat{\text{د}}$ هـ) و (أ $\hat{\text{د}}$ جـ) زاويتان متجاورتان على خط مستقيم واحد

∴ ق (أ $\hat{\text{د}}$ هـ) + ق (أ $\hat{\text{د}}$ جـ) = ١٨٠°

س + ٢ س = ١٨٠° ، ٣ س = ١٨٠° ، س = ٦٠°

∴ ق (أ $\hat{\text{د}}$ هـ) = ق ($\hat{\text{ق}}$) = ٦٠° (وهما في وضع تناظر)

∴ أ د // ب جـ

∴ الشكل أ ب جـ د شبه منحرف

تذكَّر

شبه المنحرِف هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متقابلان متوازيان .

٥ - ٢ متوازي الأضلاع – رسم متوازي الأضلاع
Parallelogram - Drawing a Parallelogram

سوف تتعلّم : متوازي الأضلاع وخواصّه – رسم متوازي الأضلاع .

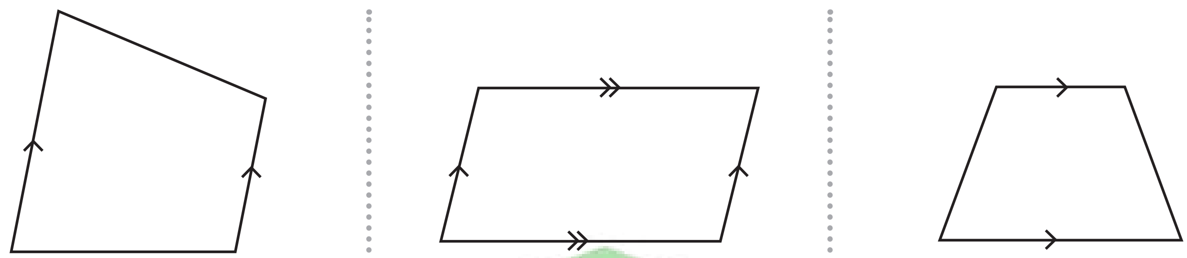
العبارات والمفردات :

متوازي الأضلاع	Parallelogram	زاويتان متتاليتان	Consecutive Angles
زاويتان متقابلتان	Opposite Angles		

يُستخدم متوازي الأضلاع في العديد من التطبيقات الحياتية والعملية وخاصّة في الهندسة ، البناء ، التصميم ، الميكانيكا وحتّى الفنّ .

حُلّ وناقِش

من الأشكال الرباعية التالية (لاحِظ علامات التوازي) ، أيّها يمثّل متوازي أضلاع ؟ ولماذا ؟



(١) (٢) (٣)

....

....

ماذا تلاحظ ؟

....

....

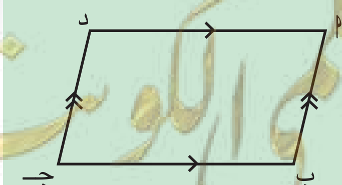
اِنتبِه

- رمز التوازي على الرسم > أو »
- رمز التوازي في التعبير الرياضي //

تعلّمت ممّا سبق أنّ :

متوازي الأضلاع هو شكل رباعي فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متوازيان .

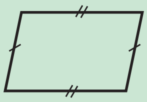
أ ب جـ د متوازي أضلاع وعلى ذلك فإنّ :



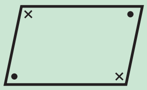
- $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{د جـ}}$
- $\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

كما تعلّمت خواصّ متوازي الأضلاع :

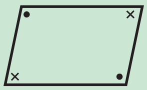
١ في متوازي الأضلاع كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان .



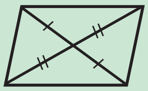
٢ في متوازي الأضلاع كلّ زاويتَين متقابلتَين متطابقتان .



٣ في متوازي الأضلاع مجموع قياس كلّ زاويتَين متتاليتَين يساوي ١٨٠° (متكاملتَين) .



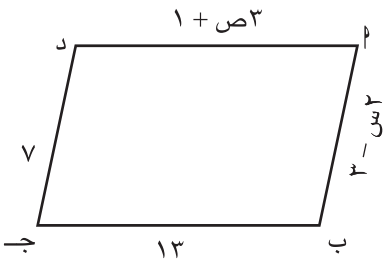
٤ في متوازي الأضلاع القطران ينصّف كلّ منهما الآخر .



عبِّر عن فهمك

كيف يمكن استخدام مفهوم تطابق مثلّثَين في إثبات خاصّية (القطران ينصّف كلّ منهما الآخر) في متوازي الأضلاع ؟ وضِّح إجابتك .

مثال (٢) :



في الشكل المقابِل أ ب جـ د متوازي أضلاع ، وبحسب البيانات المدوَّنة على الرسم ، أوجِد بالبرهان قيمة كلّ من س ، ص .

الحلّ :

المعطَيات : أ ب جـ د متوازي أضلاع

أ ب = (٢ س − ٣) وحدة طول ، ب جـ = ١٣ وحدة طول

د جـ = ٧ وحدات طول ، أ د = (٣ ص + ١) وحدة طول

المطلوب : إيجاد قيمة كلّ من س ، ص

البرهان : ∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع (معطى)

∴ كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان (من خواصّ متوازي الأضلاع)

∴ أ ب = د جـ ، ∴ أ د = ب جـ

٢ س − ٣ = ٧ | ٣ ص + ١ = ١٣

٢ س − ٣ + ٣ = ٧ + ٣ | ٣ ص + ١ − ١ = ١٣ − ١

$\frac{\cancel{٢}^{١}}{\cancel{٢}_{١}}$ س = $\frac{\cancel{١٠}^{٥}}{\cancel{٢}_{١}}$ | $\frac{\cancel{٣}}{\cancel{٣}_{١}}$ ص = $\frac{\cancel{١٢}^{٤}}{\cancel{٣}_{١}}$

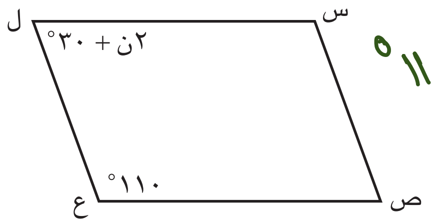
س = ٥ | ص = ٤ (تحقّق من صحّة الحلّ)

اِنتبِه

لإيجاد قيمة س أو ص ، يُفضَّل حلّ المعادلة باستخدام المعكوس الجمعي ثمّ المعكوس الضربي .

دورك الآن (١)

في الشكل المقابِل ، س ص ع ل متوازي أضلاع ، وبحسب البيانات المدوَّنة على الرسم ، أكمِل ما يلي لإيجاد قيمة ن .



المعطَيات : س ص ع ل متوازي أضلاع ، ق(عَ) = ١١٠°
ق(لَ) = ٢ن + ٣٠°

المطلوب : إيجاد قيمة ن

البرهان : ∵ س ص ع ل متوازي أضلاع

∴ ق (لَ) + ق (عَ) = ١٨٠° (من خواصّ متوازي الأضلاع كلّ زاويتَين متتاليتَين متكاملتان)

٢ ن + ٣٠° + ١١٠° = ١٨٠°

٢ ن + ١٤٠° = ١٨٠°

٢ ن = ١٨٠° − ١٤٠°

ن = $\frac{٤٠°}{٢}$

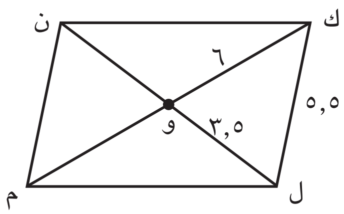
∴ ن = ٢٠°

اِنتبِه

الزاويتان المتكاملتان مجموع قياسهما ١٨٠°

مثال (٢) :

ك ل م ن متوازي أضلاع تقاطع قطرَيه في و ، ك ل = ٥,٥ وحدة طول ، ك و = ٦ وحدات طول ، ل و = ٣,٥ وحدة طول ، أوجِد محيط Δ م و ن .



الحلّ :

المعطَيات : ك ل م ن متوازي أضلاع

ك ل = ٥,٥ وحدة طول ، ك و = ٦ وحدات طول ، ل و = ٣,٥ وحدة طول

المطلوب : إيجاد محيط Δ م و ن

البرهان : ∵ ك ل م ن متوازي أضلاع (معطى)

∴ و م = و ك = ٦ وحدات طول (من خواصّ متوازي الأضلاع القطران ينصّف كلّ منهما الآخر)

، ∴ و ن = و ل = ٣,٥ وحدة طول

، ∴ م ن = ك ل = ٥,٥ وحدة طول (من خواصّ متوازي الأضلاع كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان)

∴ محيط Δ م و ن = و م + و ن + م ن

= ٦ + ٣,٥ + ٥,٥

= ١٥ وحدة طول

تذكَّر

محيط المثلّث يساوي مجموع أطوال أضلاعه .

رسم متوازي الأضلاع

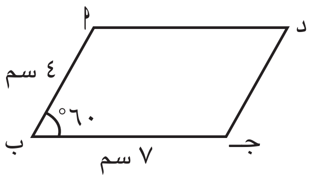
إحدى طرق رسم متوازي الأضلاع إذا عُلم فيه طولا ضلعَين متجاورَين وقياس إحدى زواياه .

اللوازم :
أدوات هندسية

مثال توضيحي :

أُرسم متوازي الأضلاع ٫ ب جـ د الذي فيه ٫ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٧ سم ، ق (٫ $\hat{ب}$ جـ) = ٦٠°

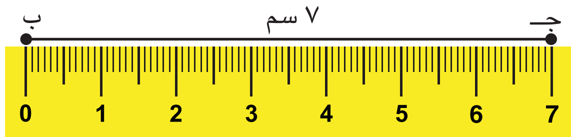
أوّلًا : أُرسم رسمًا تخطيطيًّا لوضع تصوّر لشكل متوازي الأضلاع موضِّحًا عليه المعطَيات .



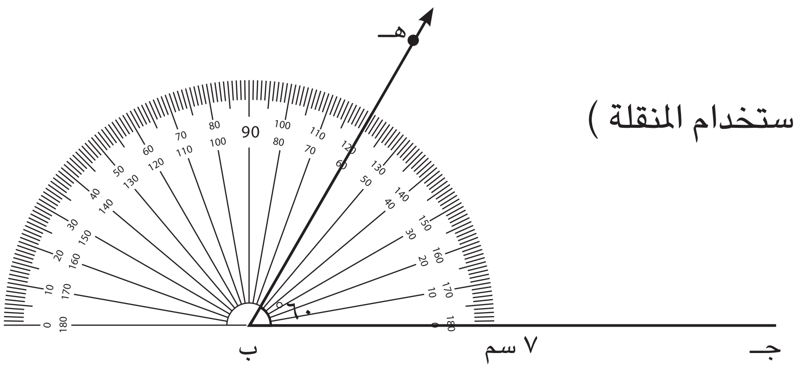
الحلّ :

ثانيًا : اِستخدِم الأدوات الهندسية ، واتّبِع خطوات العمل :

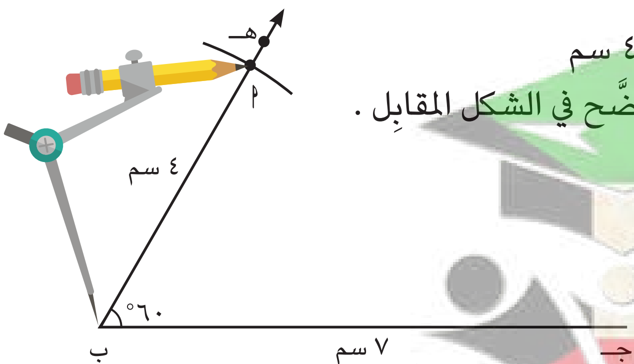
١ أُرسم $\overline{\text{ب جـ}}$ طولها ٧ سم (باستخدام المسطرة) .



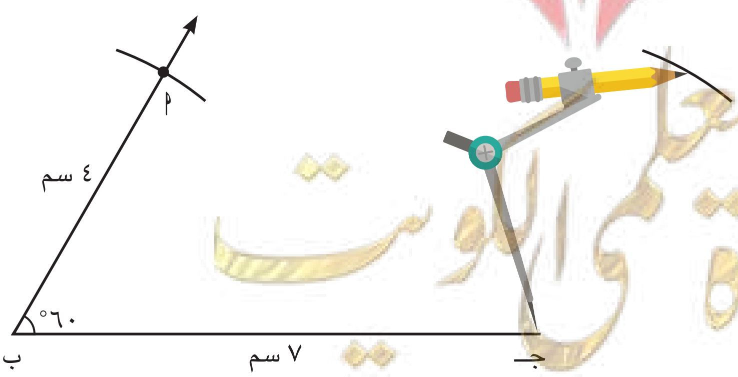
٢ أُرسم (جـ $\hat{ب}$ هـ) قياسها ٦٠° (باستخدام المنقلة) كما في الشكل المقابِل .



٣ ركِّز سنّ الفرجار عند النقطة ب ، وبفتحة طولها ٤ سم أُرسم قوسًا يقطع $\overrightarrow{\text{ب هـ}}$ في النقطة ٫ ، كما هو موضَّح في الشكل المقابِل .

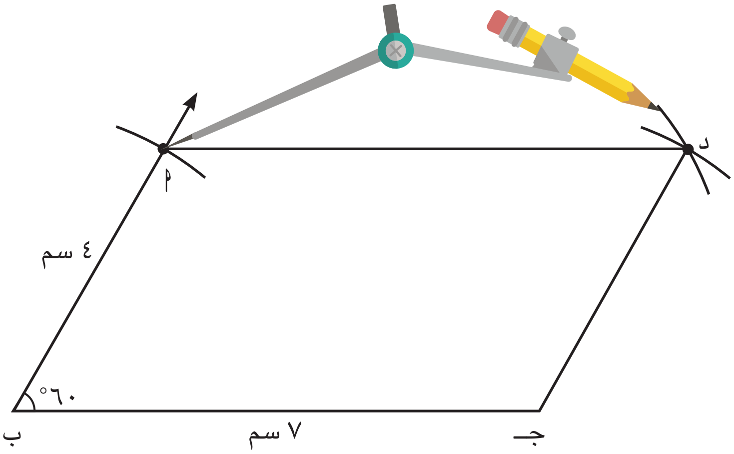


٤ ركِّز سنّ الفرجار في النقطة جـ ، وبفتحة طولها ٤ سم (لماذا ؟) ، أُرسم قوسًا .



اِنتبِه

- عند استخدام المسطرة ، اِبدأ من العدد صفر .
- عند استخدام المنقلة ، اِنتبِه إلى جهة التدريج .



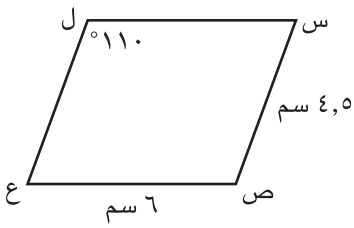
٥ ركِّز سنّ الفرجار في النقطة أ وبفتحة طولها ٧ سم (لماذا ؟) ، أُرسم قوسًا ليتقاطع مع القوس المرسوم من النقطة جـ في النقطة د .

٦ صِل بالمسطرة $\overline{\text{د جـ}}$ ، $\overline{\text{أ د}}$ لتحصل على متوازي أضلاع أ ب جـ د .

معلومة مفيدة :

يُستخدم رسم متوازي الأضلاع في تصميم الجدران والأعمدة بزاوية معيَّنة للحفاظ على التوازن والاستقرار ، كما يُستخدم في تصميم الأثاث مثل الطاولات والمكاتب بزوايا مائلة .

مثال (٣) :



أُرسم متوازي الأضلاع س ص ع ل الذي فيه

س ص = ٤,٥ سم ، ص ع = ٦ سم ، ق (س $\hat{\text{ل}}$ ع) = ١١٠° .

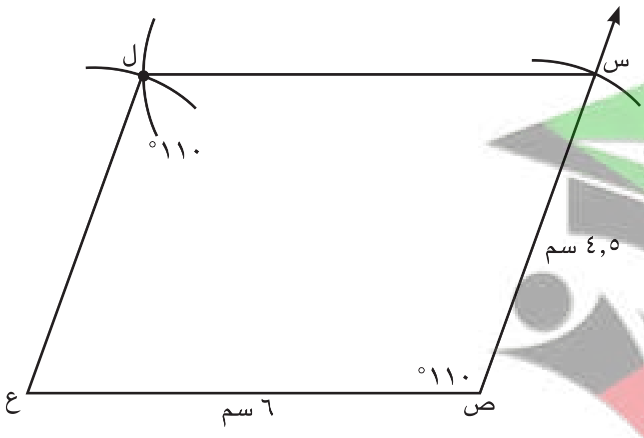
الحلّ :

أُرسم رسمًا تخطيطيًّا للشكل موضِّحًا المعطَيات عليه .

∵ س ص ع ل متوازي أضلاع

∴ ق (س $\hat{\text{ص}}$ ع) = ق (س $\hat{\text{ل}}$ ع) = ١١٠°

كلّ زاويتَين متقابلتَين في متوازي الأضلاع متطابقتان



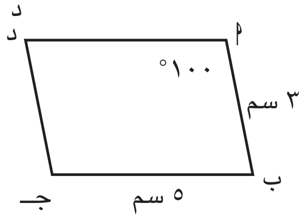
باستخدام الأدوات الهندسية واتّباع الخطوات السابقة ، أُرسم متوازي الأضلاع س ص ع ل .

عند رسم متوازي الأضلاع بمعلومية طولَي ضلعَين متجاورَين فيه وقياس إحدى زواياه ، نوظّف خواصّ متوازي الأضلاع لإيجاد قياس الزاوية بين الضلعَين المتجاورَين .

دورك الآن (٢)

أُرسم متوازي الأضلاع أ ب جـ د الذي فيه أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٥ سم ، ق ($\hat{أ}$) = ١٠٠°

الحلّ :



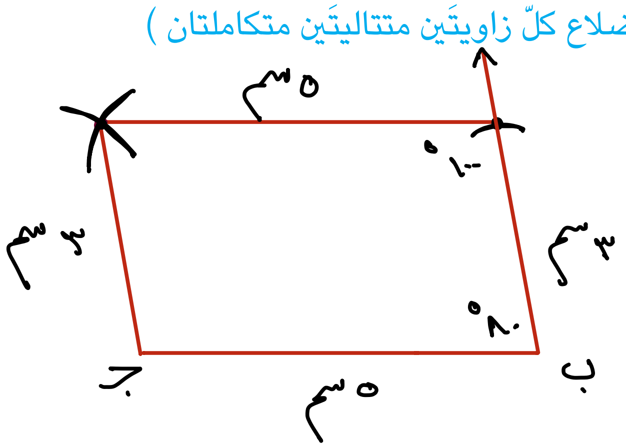
أُرسم رسمًا تخطيطيًّا للشكل موضِّحًا عليه المعطَيات

∵ أ ب جـ د .... متوازي أضلاع ....

∴ ق ($\hat{أ}$) + ق(ب) = ١٨٠° (من خواصّ متوازي الأضلاع كلّ زاويتَين متتاليتَين متكاملتان)

ق ($\hat{ب}$) = ١٨٠° - ١٠٠°

∴ ق ($\hat{ب}$) = ٨٠°

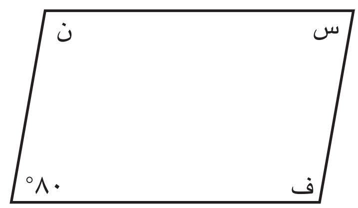


إِستخدِم الأدوات الهندسية

لرسم متوازي الأضلاع أ ب جـ د

تمارين ذاتية :

١ أوجِد قيمة كلّ من س ، ف ، ن في متوازيات الأضلاع التالية مع ذكر السبب :



س = ... ٨٠° ....

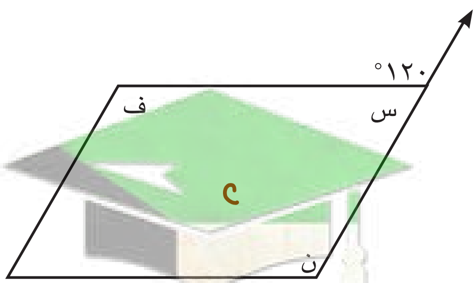
في متوازي الأضلاع كل زاويتين متقابلتين متطابقتان

ن = ١٨٠° - ٨٠° = ١٠٠°

في متوازي الأضلاع كل زاويتين متتاليتين متكاملتان

ف = ١٨٠° - ٨٠° = ١٠٠°

في متوازي الأضلاع كل زاويتين متتاليتين متكاملتان



س = ١٨٠° - ١٢٠° = ٦٠°

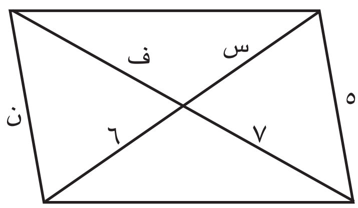
بالتجاور على خط مستقيم

ف = ... ١٢٠° ....

بالتبادل والتوازي

ن = ... ١٢٠° ....

بالتناظر والتوازي



س = ... ٦ ....

في متوازي الاضلاع القطران ينصف كل منهما الآخر

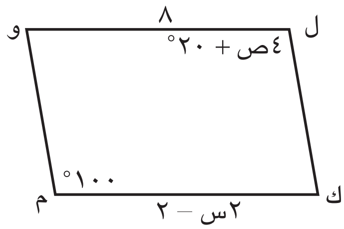
ف = ... ٧ ....

في متوازي الاضلاع القطران ينصف كل منهما الآخر

ن = ... ٥ ....

في متوازي الاضلاع كل ضلعين متقابلين متطابقان

٢ في الشكل المقابِل ل ك م و متوازي أضلاع ، وبحسب البيانات المدوَّنة على الرسم ، أوجِد بالبرهان قيمة كلّ من س ، ص .



البرهان

∵ ل ك م و متوازي أضلاع

∴ ك م = ل و

٢س − ٢ = ٨

$\frac{٢س}{٢} = \frac{٨ + ٢}{٢}$

س = ٥

∴ ق (لَ) = ق (مَ)

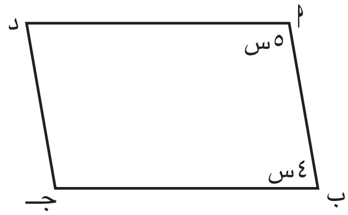
٤ص + ٢٠ = ١٠٠°

$\frac{٤ص}{٤} = \frac{١٠٠ - ٢٠}{٤}$

ص = ٢٠

٣ في الشكل المقابِل ، أ ب جـ د متوازي أضلاع ق ($\hat{أ}$) = ٥ س ، ق ($\hat{ب}$) = ٤ س

أوجِد بالبرهان ق ($\hat{أ}$) ، ق ($\hat{ب}$) بالدرجات .



∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع

∴ ق ($\hat{أ}$) + ق ($\hat{ب}$) = ١٨٠°

٥س + ٤س = ١٨٠°

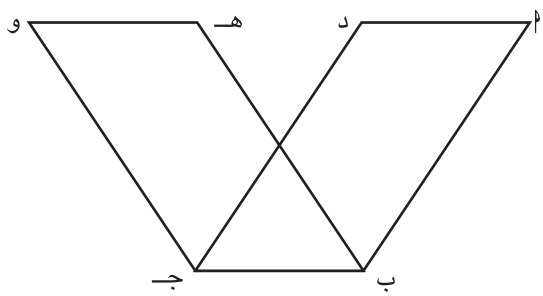
$\frac{٩س}{٩} = \frac{١٨٠}{٩}$°

س = ٢٠°

∴ ق ($\hat{أ}$) = ٥ × ٢٠ = ١٠٠° ، ق ($\hat{ب}$) = ٤ × ٢٠ = ٨٠°

٤ أ ب جـ د ، هـ ب جـ و متوازيا أضلاع ،

أثبِت أنّ : أ د = هـ و .



∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع

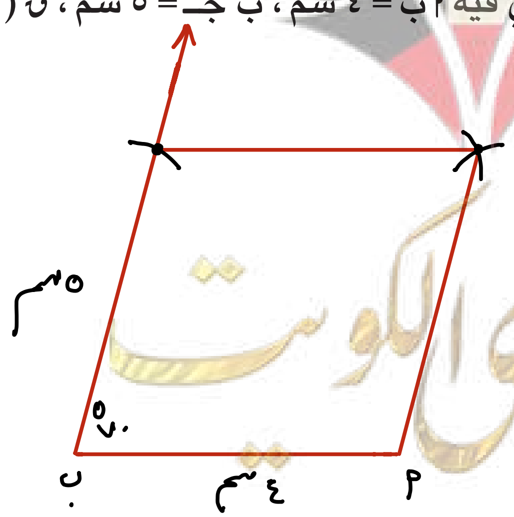
∴ أ د = ب جـ ← ①

∵ هـ ب جـ و متوازي أضلاع

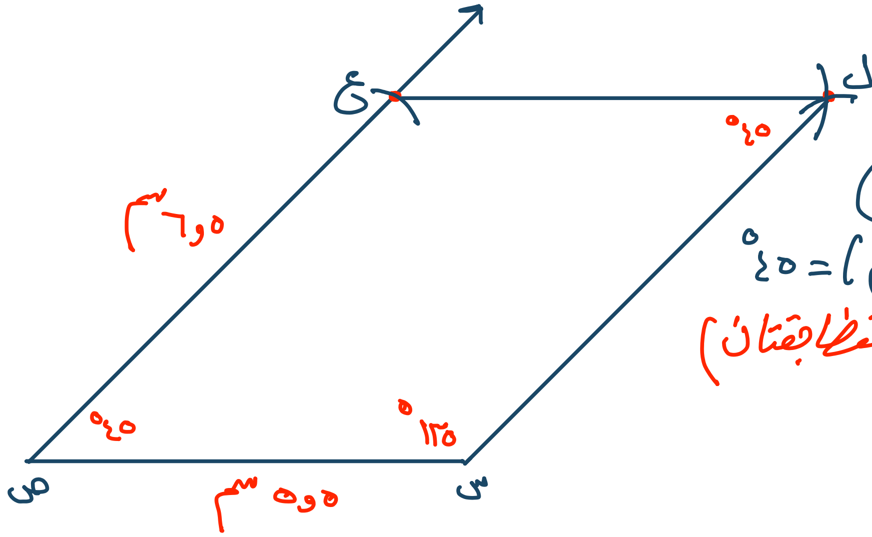
∴ هـ و = ب جـ ← ②

من ① ، ② نستنتج أنّ أ د = هـ و

٥ أُرسم متوازي الأضلاع أ ب جـ د الذي فيه أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٥ سم ، ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ٧٠° .

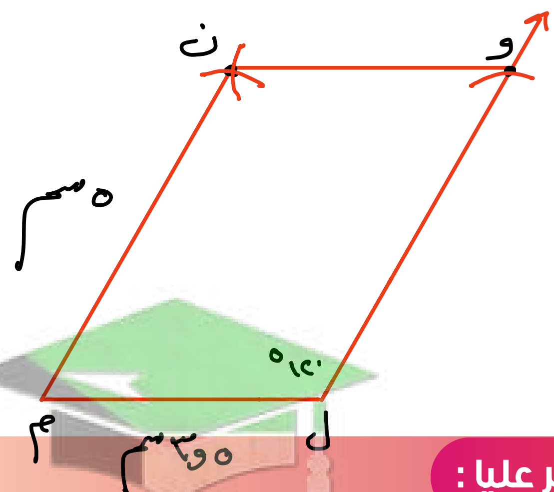


٦ أُرسم متوازي الأضلاع س ص ع ل الذي فيه س ص = ٥,٥ سم ، ص ع = ٦,٥ سم ، ق (س $\hat{ل}$ ع) = ٤٥° .



∵ س ص ع ل متوازي أضلاع
∴ ق(س $\hat{ص}$ ع) = ق(س $\hat{ل}$ ع) = ٤٥°
(كل زاويتين متقابلتين متطابقتان)

٧ أُرسم متوازي الأضلاع ل م ن و الذي فيه ل م = ٣,٥ سم ، م ن = ٥ سم ، ق (م $\hat{ل}$ و) = ١٢٠° .



مهارات تفكير عليا :

٨ يُحيط بحديقة سور طوله ٦٠٠ م على شكل متوازي أضلاع ، إذا كان طول السور المقابِل للشارع (أ) ضعف طول السور المقابل للشارع (ب) ، فأوجِد طول السور المقابِل للشارع (د) .

∵ محيط متوازي الأضلاع = مجموع أطوال أضلاعه = ٦٠٠
∴ شارع (أ) + شارع (ب) + شارع (جـ) + شارع (د) = ٦٠٠
∵ كل ضلعين متقابلين متساويان
∴ ٢ × شارع (أ) + ٢ × شارع (ب) = ٦٠٠
لكن شارع (أ) = ٢ شارع (ب) (معطى)
∴ ٢ × ٢ شارع (ب) + ٢ شارع (ب) = ٦٠٠
∴ ٦ شارع (ب) = ٦٠٠ ∴ شارع (ب) = ١٠٠ م
∴ شارع (د) = شارع (ب) = ١٠٠ م

٥ - ٣ الكشف عن متوازي الأضلاع
Detecting a Parallelogram

سوف تتعلّم : الكشف عن متوازي الأضلاع .

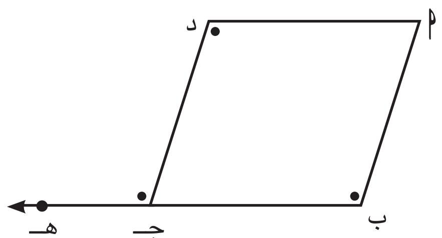
تعلّمت ممّا سبق أنّ : الشكل الرباعي الذي فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متوازيان يُسمّى متوازي أضلاع .

ومن هذا التعريف تكون هذه هي الحالة الأولى من حالات الكشف عن متوازي الأضلاع .

الحالة الأولى (من التعريف)

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متوازيان .

دورك الآن (١)



في الشكل المقابِل أ ب جـ د شكل رباعي فيه

ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{د}$) = ق (د $\hat{جـ}$ هـ)

أكمِل ما يلي :

∵ ق ($\hat{ب}$) = ...ق (د جـ هـ)... (وهما في وضع تناظر)

∴ ...أ ب... // $\overline{د جـ}$ (١)

∵ ق ($\hat{د}$) = ...ق (د جـ هـ)... (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{أ د}$ // ...$\overleftarrow{ب جـ}$... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د هو ...متوازي أضلاع...

لأنّ فيه ...كل ضلعين متقابلين متوازيان...

تذكّر

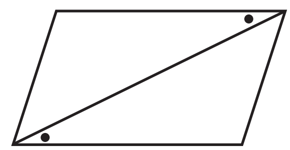
إذا قطع مستقيم مستقيمَين فإنّه : يتوازى المستقيمان إذا وفقط إذا توافر أحد الشروط التالية :

١ زاويتان متبادلتان متطابقتان
٢ زاويتان متناظرتان متطابقتان
٣ زاويتان متحالفتان متكاملتان

دورك الآن (٢)

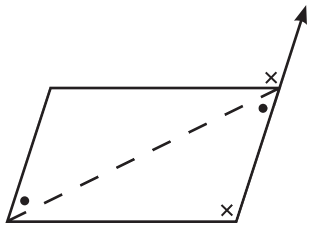
حدّد ما إذا كان الشكل الرباعي بحسب البيانات المدوّنة عليه متوازي أضلاع أم لا .

أ



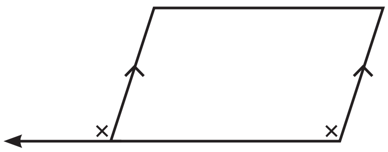
لا

ب



نعم متوازي أضلاع

ج



لا

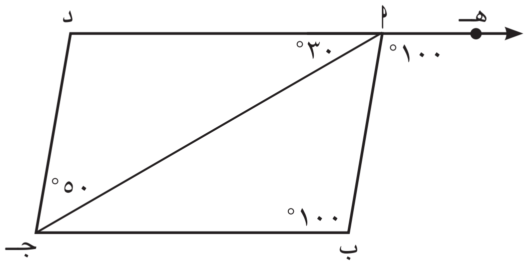
مثال (١) :

أ ب جـ د شكل رباعي فيه ،

ق (هـ أ̂ ب) = ق (ب̂) = ١٠٠°

ق (د أ̂ جـ) = ٣٠° ، ق (أ جـ̂ د) = ٥٠°

برهِن أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع



الحلّ :

المعطَيات : ق (هـ أ̂ ب) = ق (ب̂) = ١٠٠°

ق (د أ̂ جـ) = ٣٠° ، ق (أ جـ̂ د) = ٥٠°

المطلوب : إثبات أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع

البرهان :

∵ ق (هـ أ̂ ب) = ق (ب̂) = ١٠٠° وهما في وضع تبادل (معطى)

∴ $\overline{أد}$ // $\overline{ب جـ}$ (١)

في △ أ جـ د ، ق (د̂) = ١٨٠° - (٣٠° + ٥٠°) (مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة = ١٨٠°)

= ١٨٠° - ٨٠° = ١٠٠°

∵ ق (هـ أ̂ ب) = ق (د̂) = ١٠٠° وهما في وضع تناظر

∴ $\overline{أب}$ // $\overline{د جـ}$ (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ :

الشكل الرباعي أ ب جـ د هو متوازي أضلاع لأنّ فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متوازيان .

اِنتبِه

لإثبات أنّ الشكل متوازي أضلاع ، تحقّق من إثبات ما يلي :

(١) $\overline{أد}$ // $\overline{ب جـ}$

(٢) $\overline{أب}$ // $\overline{د جـ}$

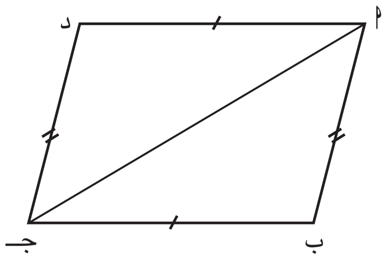
الحالة الأولى (التعريف)

عبِّر عن فهمك (١)

هل يمكن حلّ مثال (١) بطريقة أخرى لإثبات أنّ الشكل الرباعي ٫ب جـ د هو متوازي أضلاع ؟
وضِّح إجابتك .

سنتحقّق معًا بأنّ الشكل الرباعي الذي فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان كحدّ أدنى من المعطَيات تكفي لنقول إنّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع .

اِستكشِف (١)



في الشكل المقابِل ٫ب جـ د شكل رباعي فيه

٫ب = د جـ ، ب جـ = ٫د

أكمِل ما يلي لتبرهن أنّ الشكل ٫ب جـ د متوازي أضلاع :

Δ ٫ب جـ ، Δ ٫د جـ فيهما :

١ $\overline{\text{٫ب}}$ $\cong$ .... (معطى)

٢ $\overline{\text{ب جـ}}$ $\cong$ .... (معطى)

٣ .... (ضلع مشترَك)

$\therefore$ Δ ٫ب جـ $\cong$ Δ .... وحالة التطابق ....

وينتج من التطابق :

(ب $\hat{\text{٫}}$ جـ) $\cong$ .... وهما في وضع تبادل

$\therefore$ $\overline{\text{٫ب}}$ // $\overline{\text{د جـ}}$ (١)

(ب $\hat{\text{جـ}}$ ٫) $\cong$ .... وهما في وضع تبادل

$\therefore$ $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{٫د}}$ (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ الشكل الرباعي ٫ب جـ د هو ....

....

تذكَّر

حالات تطابق مثلّثَين

١ (ض . ض . ض)

٢ (ز . ض . ز)

٣ (ض . ز . ض)

٤ (⊿ . و . ض)

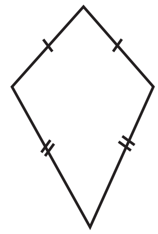
الحالة الثانية

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان .

دورك الآن (٣)

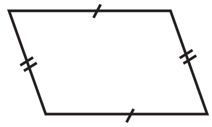
حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي بحسب البيانات المدوَّنة عليه متوازي أضلاع أم لا .

(أ)



لا

(ب)

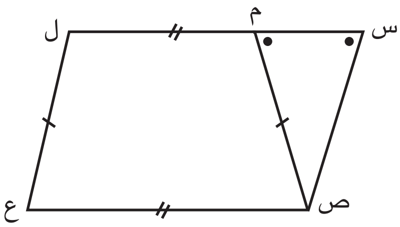


نعم متوازي أضلاع

(ج)

لا

مثال (٢) :



إذا كان س ل = ص ع ، م ص = ل ع ، ق ($\hat{\text{س}}$) = ق (س $\hat{\text{م}}$ ص)

برهِن أنّ الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع

الحلّ :

المعطَيات : س ل = ص ع ، م ص = ل ع ، ق ($\hat{\text{س}}$) = ق (س $\hat{\text{م}}$ ص)

المطلوب : إثبات أنّ الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع

البرهان :

س ل = ص ع — معطى — (١)

في Δ س م ص :

∵ ق ($\hat{\text{س}}$) = ق (س $\hat{\text{م}}$ ص) — معطى

∴ س ص = م ص — من خواصّ المثلّث المتطابق الضلعَين

∵ م ص = ل ع — معطى

∴ س ص = ل ع — من خواصّ المساواة — (٢)

∴ من (١) ، (٢) نستنتج أنّ :

الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع

لأنّ فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان .

اِنتبِه

تحقَّق من إثبات ما يلي :

(١) س ل = ص ع

(٢) س ص = ل ع

الحالة الثانية (خاصّية)

تذكَّر

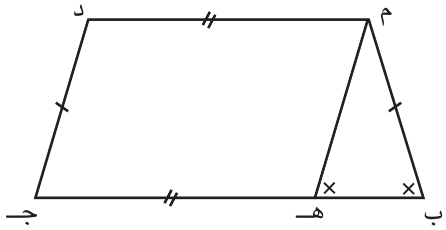
لأيّ مثلّث إذا كان فيه زاويتان متطابقتَين ، فإنّ المثلّث متطابق الضلعَين .

لاحِظ أنّ :

من خواصّ المساواة إذا كان ﺃ = ب ، ب = جـ ، فإنّ ﺃ = جـ

دورك الآن (٤)

حسب البيانات المدوَّنة ، برهِن أنّ الشكل الرباعي م هـ جـ د متوازي أضلاع .



البرهان :

∵ م د = هـ جـ (١) معطى

في Δ م ب هـ : ق (م $\hat{ب}$ هـ) = ق (م $\hat{هـ}$ ب) معطى

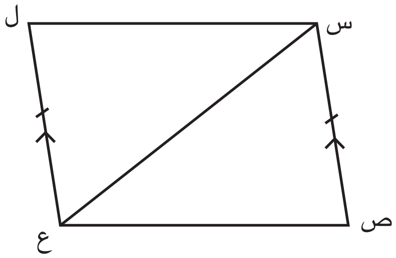
∴ م ب = ...م هـ.... السبب : مثلث متطابق الضلعين

∵ م ب = ...د جـ.... معطى

∴ م هـ = ...د جـ.... (٢) من خواصّ المساواة

من (١) ، (٢) م هـ جـ د هو متوازي أضلاع لأنّ كل ضلعين متقابلين متطابقان

اِستكشِف (٢)



في الشكل المقابِل س ص ع ل شكل رباعي فيه :

$\overline{س ص} \cong \overline{ل ع}$ ، $\overline{س ص} \parallel \overline{ل ع}$

هل المعطَيات السابقة تكفي لأن يكون الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع ؟ (نبحث في تطابق المثلّثين س ص ع ، ع ل س)

في Δ س ص ع ، Δ ع ل س فيهما :

$\overline{س ص} \cong$ .... معطى

(ص $\hat{س}$ ع) $\cong$ .... (بالتبادل والتوازي) حيث $\overline{س ص} \parallel \overline{ل ع}$

.... ضلع مشترَك

∴ Δ س ص ع $\cong$ Δ .... وحالة التطابق ....

وينتج من التطابق أنّ: (ص $\hat{ع}$ س) $\cong$ .... (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{س ل} \parallel \overline{ص ع}$ (١)

$\overline{س ص} \parallel \overline{ل ع}$ (٢) معطى

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ الشكل الرباعي س ص ع ل هو ....

وعلى ذلك نقول : نعم ، المعطَيات في الشكل تكفي لأنّ يكون الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع .

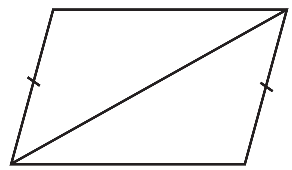
الحالة الثالثة

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه **ضلعان متقابلان متطابقين ومتوازيَين** .

دورك الآن (٥)

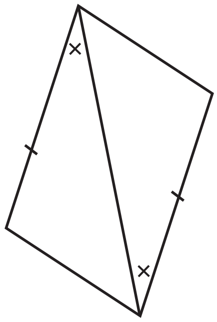
حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي بحسب البيانات المدوَّنة عليه متوازي أضلاع أم لا .

(أ)



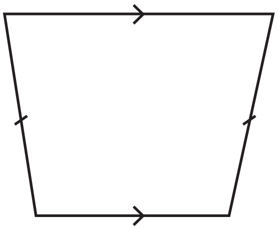
لا

(ب)



نعم متوازي أضلاع

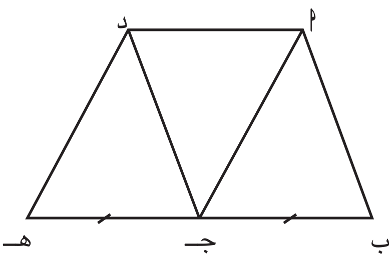
(ج)



لا

مثال (٣) :

إذا كان ﺍ ب جـ د متوازي أضلاع ،
ب جـ = جـ هـ ، ب ، جـ ، هـ على استقامة واحدة ، فبرهِن
أنّ الشكل الرباعي ﺍ جـ هـ د متوازي أضلاع .



الحلّ :

المعطَيات : ﺍ ب جـ د متوازي أضلاع

ب جـ = جـ هـ

ب ، جـ ، هـ على استقامة واحدة .

المطلوب : إثبات أنّ ﺍ جـ هـ د متوازي أضلاع .

البرهان :

∵ ﺍ ب جـ د متوازي أضلاع — معطى

∴ $\overline{\text{ﺍ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ — (من تعريف متوازي الأضلاع)

∵ ب ، جـ ، هـ على استقامة واحدة — معطى

∴ $\overline{\text{ﺍ د}}$ // $\overline{\text{جـ هـ}}$ — (١)

∵ ﺍ د = ب جـ — (من خواصّ متوازي الأضلاع)

∵ ب جـ = جـ هـ — معطى

∴ ﺍ د = جـ هـ — من خواصّ المساواة (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ :

الشكل الرباعي ﺍ جـ هـ د متوازي أضلاع لأنّ فيه ضلعَين متقابلَين متطابقان ومتوازيان .

اِنتبِه

تحقَّق من إثبات ما يلي :

(١) $\overline{\text{ﺍ د}}$ // $\overline{\text{جـ هـ}}$

(٢) ﺍ د = جـ هـ

الحالة الثالثة (خاصّية)

الدرس الثالث

عبِّر عن فهمك (٢)

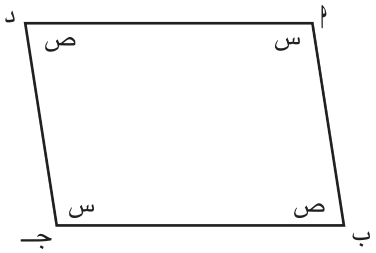
إذا كان في الشكل الرباعي ضلعان متوازيان وضلعان آخران متطابقان ، فهل يمكننا الجزم أنّ هذا الشكل يمثّل متوازي أضلاع ؟ فسِّر إجابتك .

اِستكشِف (٣)

في الشكل المقابِل ﺃ ب جـ د شكل رباعي فيه :

$ق(\hat{ﺃ}) = ق(\hat{جـ}) = س$

$ق(\hat{ب}) = ق(\hat{د}) = ص$



هل المعطَيات كافية لأن يكون الشكل الرباعي ﺃ ب جـ د متوازي أضلاع ؟

سوف نبحث في ذلك .

تعلم أنّ :

$س + ص + س + ص = ٣٦٠°$

$\therefore ٢ س + ٢ ص = ٣٦٠°$ بالقسمة على العدد ٢

$\therefore س + ص = ١٨٠°$

$ق(\hat{ﺃ}) + ق(\text{.........}) = ١٨٠°$ وهما زاويتان متحالفتان

$\therefore$ .... // .... (١)

وكذلك $ق(\hat{ﺃ}) + ق(\text{.........}) = ١٨٠°$ وهما زاويتان متحالفتان

$\therefore$ .... // .... (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ الشكل الرباعي ﺃ ب جـ د هو ....

وعلى ذلك نقول : نعم ، المعطَيات كافية لإثبات أنّ الشكل الرباعي ﺃ ب جـ د متوازي أضلاع .

تذكَّر

مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

الحالة الرابعة

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه كلّ زاويتَين متقابلتَين متطابقتان .

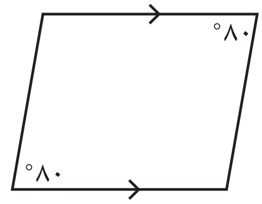
ملاحظة :

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه كلّ زاويتَين متتاليتَين متكاملتان .

دورك الآن (٦)

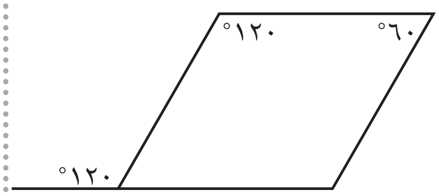
حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي بحسب البيانات المدوَّنة عليه متوازي أضلاع أم لا .

أ



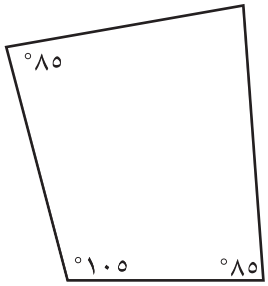
نعم متوازى أضلاع

ب



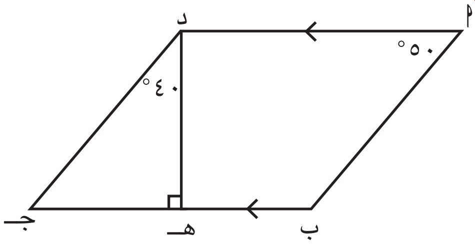
نعم متوازى أضلاع

ج



لا

مثال (٤) :



أ ب جـ د شكل رباعي فيه : أد // ب جـ

ق (أ̂) = ٥٠° ، د هـ ⊥ ب جـ ، ق (جـ د̂ هـ) = ٤٠°

أثبِت أنّ أ ب جـ د متوازي أضلاع .

المعطَيات : أ د // ب جـ

ق (أ̂) = ٥٠° ، ق (جـ د̂ هـ) = ٤٠°

د هـ ⊥ ب جـ

المطلوب : إثبات أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع .

البرهان :

في Δ د جـ هـ :

ق (جـ̂) = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٠°)

= ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠° (مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلّث = ١٨٠°)

∴ ق (أ̂) = ق (جـ̂) = ٥٠° (١)

∵ أ د // ب جـ معطى

ق (ب̂) = ١٨٠° − ٥٠° = ١٣٠° (أ̂ و ب̂ زاويتان متحالفتان متكاملتان)

∴ ق (أ د̂ جـ) = ٣٦٠° − (٥٠° + ١٣٠° + ٥٠°) (مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°)

= ٣٦٠° − ٢٣٠° = ١٣٠°

ق (ب̂) = ق (أ د̂ جـ) = ١٣٠° (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د هو متوازي أضلاع لأنّ فيه كلّ زاويتَين متقابلتَين متطابقتان .

اِنتبِه

تحقَّق من إثبات ما يلي :

(١) (أ̂) ≅ (جـ̂)

(٢) (ب̂) ≅ (أ د̂ جـ)

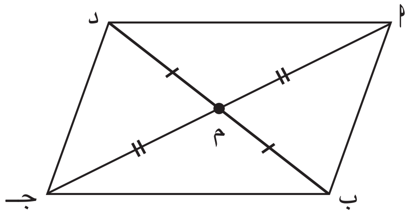
الحالة الرابعة (خاصّية)

عبِّر عن فهمك (٣)

بالرجوع إلى مثال (٤) ، هل يمكنك إيجاد قياس ($\hat{\text{أ د جـ}}$) بطريقة أخرى ؟ وضِّح إجابتك .

سنتحقّق معًا بأنّ الشكل الرباعي الذي فيه القطران ينصّف كلّ منهما الآخر كحدّ أدنى من المعطَيات تكفي لنقول إنّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع .

اِستكشِف (٤)



الشكل المقابِل أ ب جـ د شكل رباعي فيه :

$\overline{\text{أ جـ}} \cap \overline{\text{ب د}} = \{\text{م}\}$ ، أ م = م جـ

د م = م ب

من خلال معلوماتك عن مفهوم الانعكاس في نقطة

إذا كانت م مركز الانعكاس ، أكمِل ما يلي :

صورة أ بالانعكاس في م هي ....

صورة ب بالانعكاس في م هي ....

صورة $\overline{\text{أ ب}}$ بالانعكاس في م هي ....

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ // .... (١) (من خواصّ الانعكاس في نقطة)

وبالمثل صورة $\overline{\text{ب جـ}}$ بالانعكاس في م هي ....

∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ // .... (٢) (من خواصّ الانعكاس في نقطة)

من (١) ، (٢) ∴ نستنتج أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د هو ....

تذكَّر

إذا كانت $\overline{\text{أَ بَ}}$ صورة $\overline{\text{أ ب}}$ بالانعكاس في نقطة فإنّ :

١ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{أَ بَ}}$

٢ أ ب = أَ بَ

الحالة الخامسة

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه القطران ينصّف كلّ منهما الآخر .

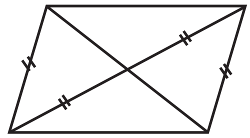
عبِّر عن فهمك (٤)

هل يمكنك إثبات الحالة الخامسة بطريقة أخرى . اِشرح طريقتك .

دورك الآن (٧)

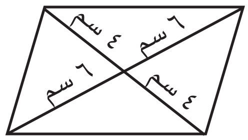
حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي بحسب البيانات المدوّنة عليه متوازي أضلاع أم لا .

أ



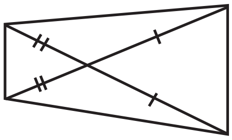
لا

ب



نعم متوازي أضلاع

ج



لا

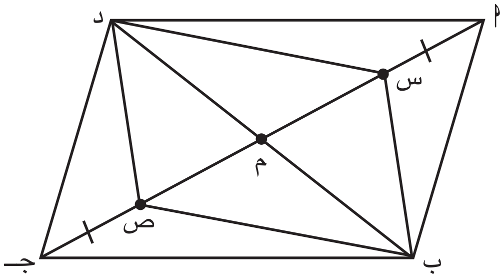
مثال (٥):

أ ب جـ د متوازي أضلاع

تقاطع قطرَيه في م ، أخذت النقطتان

س ، ص ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$ بحيث أ س = جـ ص

برهِن أنّ س ب ص د متوازي أضلاع .



الحلّ :

المعطَيات : أ ب جـ د متوازي أضلاع

أ س = جـ ص

المطلوب : إثبات أنّ س ب ص د متوازي أضلاع .

البرهان :

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع (معطى)

∴ ب م = م د (١) (قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كلّ منهما الآخر)

أ م = م جـ

∵ أ س = جـ ص (معطى)

∴ أ م − أ س = م جـ − جـ ص (من خواصّ المساواة)

∴ م س = م ص (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ س ب ص د متوازي أضلاع لأنّ القطرَين ينصّف كلّ منهما الآخر .

اِنتبِه

تحقَّق من إثبات ما يلي :

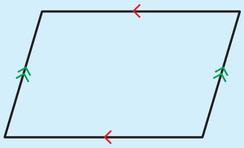
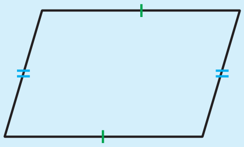
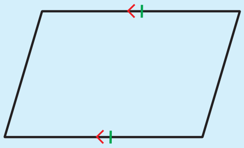
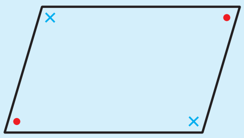
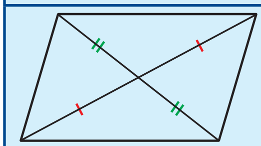
(١) ب م = م د

(٢) م س = م ص

الحالة الخامسة (خاصّية)

الدرس الثالث

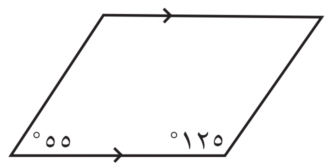
ممّا سبق نجد أنّه : يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا توفّر أحد الشروط التالية :

١ كلّ ضلعَين متقابلَين متوازيان (من التعريف) .	
٢ كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان .	
٣ فيه ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان .	
٤ كلّ زاويتَين متقابلتَين متطابقتان .	
٥ القطران ينصّف كلّ منهما الآخر .	

دورك الآن (٨)

ضَع علامة (✓) أسفل الشكل الذي يمثّل متوازي أضلاع مع ذكر السبب لكلّ ممّا يلي :

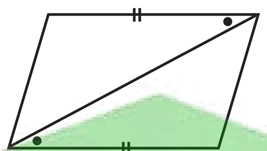
أ



✓

كل ضلعين متقابلين متوازيان

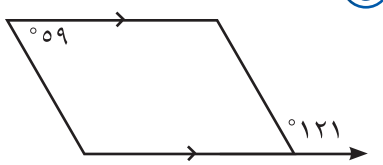
ب



✓

فيه ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان

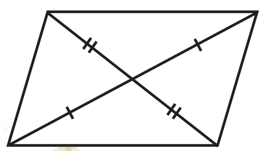
ج



✓

كل زاويتين متقابلتين متطابقتان

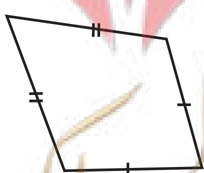
د



✓

القطران ينصف كل منهما الآخر

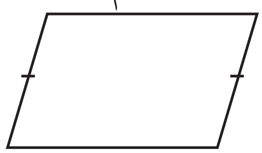
هـ



✗

و

٨ سم



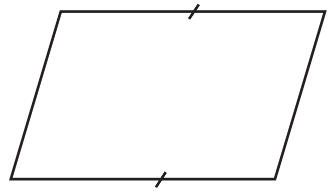
٨ سم

✓

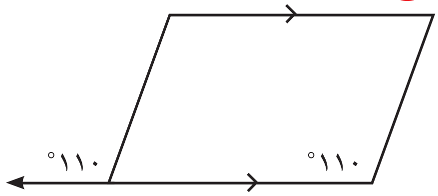
كل ضلعين متقابلين متطابقان

تمارين ذاتية :

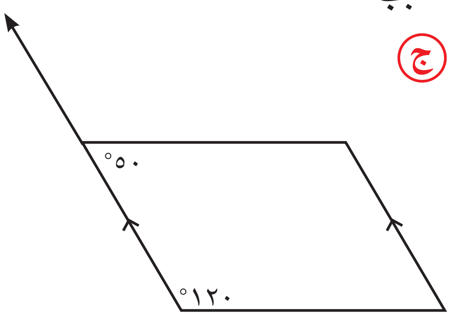
١ أمامك أشكال رباعية ، حدِّد أيًّا منها يمثِّل متوازي أضلاع مع ذكر السبب :

أ


لا

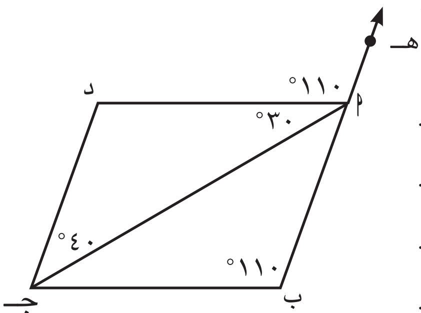
ب


نعم متوازي أضلاع
كل ضلعين متقابلين متوازيان

جـ


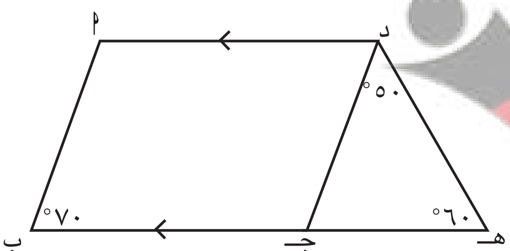
لا

٢ من البيانات على الشكل المقابِل ، أثبِت أنّ أ ب جـ د متوازي أضلاع .

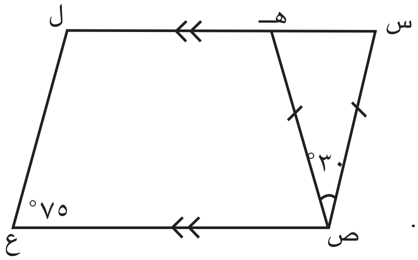


البرهان
ق(∠ب أ جـ) = ١٨٠ − (٣٠ + ١١٠) = ٤٠°
(المتجاور على خط مستقيم)
ق(∠ب أ جـ) = ق(∠أ جـ د) = ٤٠°
وهما في وضع تبادل
∴ أب // د جـ ← ①
ق(∠هـ أ د) = ق(∠أ ب جـ) = ١١٠° (وهما في وضع تناظر)
∴ أد // ب جـ ← ②
من ① ، ② نستنتج أن أ ب جـ د متوازي أضلاع
لأن كل ضلعين متقابلين متوازيان

٣ من البيانات على الشكل المقابِل ،
أثبِت أنّ أ ب جـ د متوازي أضلاع .

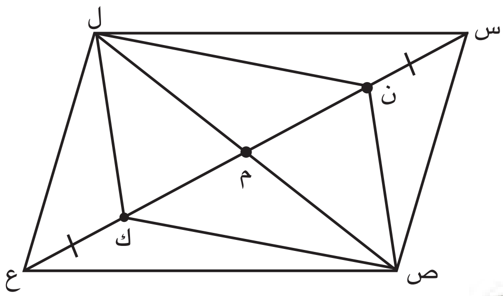


البرهان ∆ د هـ جـ فيه
ق(∠د جـ هـ) = ١٨٠ − (٦٠ + ٥٠) = ٧٠°
(مجموع قياسات زوايا ∆ = ١٨٠°)
ق(∠د جـ هـ) = ق(∠ب) = ٧٠ (وهما في وضع تناظر)
∴ د جـ // أ ب ← ①
د أ // جـ ب معطى ← ②
من ① ، ② نستنتج أن أ ب جـ د متوازي أضلاع
لأن كل ضلعين متقابلين متوازيان .



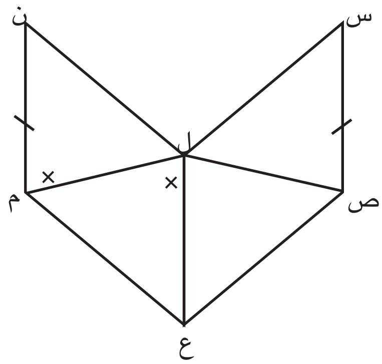
٤ في الشكل المقابِل $\overline{س ل} \parallel \overline{ص ع}$ ، ص س = ص هـ ،
ق (ع^) = ٧٥° ، ق (س ص^ هـ) = ٣٠° ،
برهِن أنّ الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع .

البرهان ∵ ص س = ص هـ ∴ △ ص س هـ متطابق الضلعين
∴ ق(س^) = ق(س هـ^ ص) = $\frac{١٨٠ - ٣٠}{٢}$ = ٧٥°
∵ $\overline{س ل} \parallel \overline{ص ع}$ ← ①
∴ ق(ل^) = ١٨٠ − ٧٥ = ١٠٥° (بالتحالف والتوازي)
ق(س^) + ق(ل^) = ٧٥ + ١٠٥ = ١٨٠°
(زاويتان متحالفتان)
∴ $\overline{س ص} \parallel \overline{ل ع}$ ← ②
من ① ، ② نستنتج أن س ص ع ل متوازي أضلاع
لأن كل ضلعين متقابلين متوازيان



٥ إذا كان ن ص ك ل متوازي أضلاع تقاطع قطرَيه في م ،
س ن = ع ك ،
فأثبِت أنّ الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع .

البرهان
∵ ن ص ك ل متوازي أضلاع
∴ س م = ع م (القطران ينصف كل منهما الآخر)
∵ س ن = ع ك (معطى)
∴ س م − س ن = ع م − ع ك
ن م = ك م ← ①
ص م = ل م (القطران ينصف كل منهما الآخر) ← ②
من ① ، ② نستنتج أن الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع
لأن القطران ينصف كل منهما الآخر



٦ في الشكل المقابِل س ص ع ل متوازي أضلاع ،

س ص = ن م ، ق (ن م̂ ل) = ق (م ل̂ ع)

أثبِت أنّ ل ع م ن متوازي أضلاع .

البرهان

∵ س ص ع ل متوازي أضلاع

∴ س ص = ل ع (كل ضلعين متقابلين متطابقان)

س ص = ن م (معطى)

∴ ل ع = ن م ← ①

∵ ق(ن م̂ ل) = ق(م ل̂ ع) (وهما في وضع تبادل)

∴ ل ع // ن م ← ②

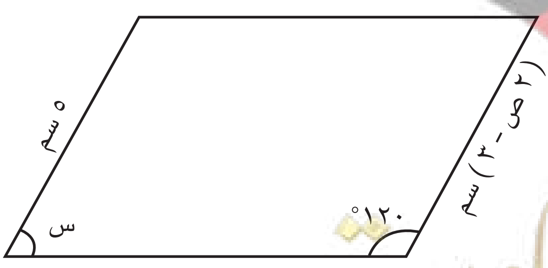
من ① ، ② نستنتج أن ل ع م ن متوازي أضلاع

لأن فيه ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان

مهارات تفكير عليا :

اِختر الإجابة الصحيحة .

٧ في الشكل المقابِل ، قيمة س ، ص على الترتيب التي تجعل الشكل الرباعي متوازي أضلاع هي :



أ ٦٠° ، ٨

ب ٦٠° ، ٤

ج ١٢٠° ، ٤

د ١٢٠° ، ٨

٥ - ٤ الكشف عن المستطيل
Detecting a Rectangle

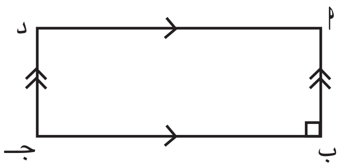
سوف تتعلّم : الكشف عن المستطيل .

العبارات والمفردات :

المستطيل	Rectangle

إستكشِف

أوّلًا : في الشكل المرسوم :



أ ب جـ د متوازي أضلاع ، ق ($\hat{ب}$) = ٩٠°

أكمِل ما يلي :

ق ($\hat{د}$) = ٩٠° (كلّ زاويتَين متقابلتَين متطابقتان)

ق ($\hat{أ}$) = ... (....)

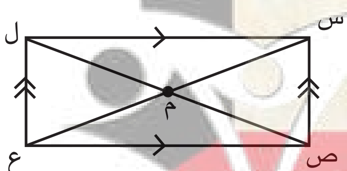
ق ($\hat{جـ}$) = ... (....)

ماذا تلاحظ ؟

الشكل أ ب جـ د هو ....

∴ المستطيل هو متوازي أضلاع إحدى زواياه ....

ثانيًا : في الشكل المرسوم :



س ص ع ل متوازي أضلاع ، س ع = ص ل ،

أكمِل ما يلي :

Δ س ص ع ، Δ ل ع ص فيهما :

(١) س ص = ... (كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان)

(٢) س ع = ... (معطى)

(٣) .... (ضلع مشترَك)

∴ Δ س ص ع ≅ Δ ل ع ص بحالة .... وينتج من التطابق أنّ : ق ($\hat{ص}$) = ق ($\hat{ع}$)

تذكَّر

المستطيل هو شكل رباعي زواياه الأربع قوائم .

تذكَّر

خواصّ متوازي الأضلاع :

١ كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان .

٢ كلّ زاويتَين متقابلتَين متطابقتان .

٣ كلّ زاويتَين متتاليتَين متكاملتان .

٤ القطران ينصّف كلّ منهما الآخر .

∵ ق (ص^) + ق (ع^) = ١٨٠° (كلّ زاويتَين متتاليتَين متكاملتان)

∴ ٢ ق (ص^) = ١٨٠° ⇐ ق (ص^) = ...

∴ الشكل س ص ع ل هو ....

إذًا المستطيل هو متوازي أضلاع قطراه ....

يكون متوازي الأضلاع مستطيلًا إذا توفّر فيه أحد الشروط التالية :

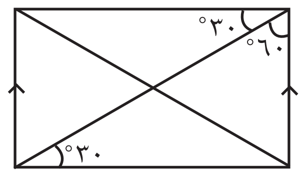
١ إحدى زواياه قائمة

٢ قطراه متطابقان

دورك الآن (٢)

إستخدِم المعطيات التي على الأشكال التالية لتبيّن أيًّا منها تمثّل مستطيلًا مع ذكر السبب .

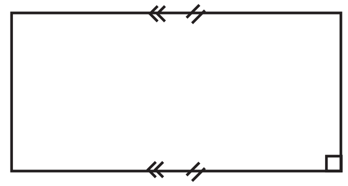
أ



نعم مستطيل

لانه متوازي أضلاع احدى زواياه قائمة

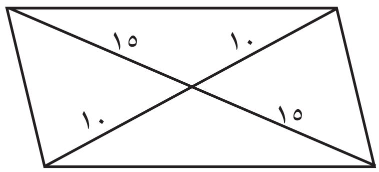
ب



نعم مستطيل

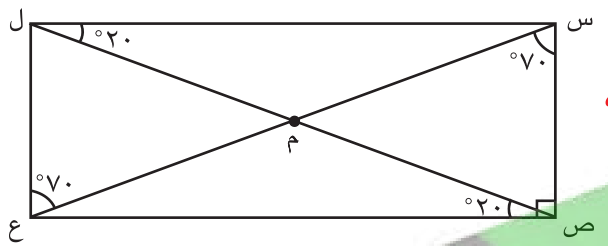
لانه متوازي أضلاع احدى زواياه قائمة

ج



لا

مثال (٢) :



في الشكل المقابِل ، ومن البيانات الموضَّحة على الرسم ،

أثبِت أنّ س ص ع ل مستطيل .

الحلّ :

المعطَيات :

ق (ص س^ ع) = ق (ل ع^ س) = ٧٠° ، ق (س ل^ ص) = ق (ع ص^ ل) = ٢٠° ، ق (س ص^ ع) = ٩٠°

المطلوب : إثبات أنّ س ص ع ل مستطيل

البرهان :

∵ ق (س ل^ ص) = ق (ع ص^ ل) = ٢٠° معطى (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{\text{س ل}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ (١)

∵ ق (ص س^ ع) = ق (ل ع^ س) = ٧٠° معطى (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ع ل}}$ (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ س ص ع ل متوازي أضلاع لأنّ فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متوازيان

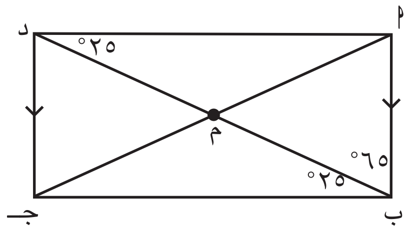
∵ ق (س ص^ ع) = ٩٠° معطى

∴ الشكل س ص ع ل مستطيل لأنّه متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة .

عبِّر عن فهمك

في مثال (١) السابق ، هل يمكن إثبات أنّ الشكل س ص ع ل مستطيل من خلال إثبات تطابق القطرَين ؟ وضِّح ذلك .

دورك الآن (٢)



ا ب جـ د شكل رباعي فيه $\overline{اب}$ // $\overline{دجـ}$

ق (ا $\hat{د}$ ب) = ق (د $\hat{ب}$ جـ) = ٢٥°

ق (ا $\hat{ب}$ د) = ٦٥°

أثبِت أنّ الشكل الرباعي ا ب جـ د مستطيل .

البرهان :

في الشكل الرباعي ا ب جـ د

∵ $\overline{اب}$ // ......دجـ...... (معطى) (١)

ق (ا $\hat{د}$ ب) = ق (دبجـ) = ...٢٥°...... وهما في وضع ......تبادل......

∴ $\overline{اد}$ // ......بجـ...... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أنّ الشكل ا ب جـ د ......متوازى أضلاع...... (٣)

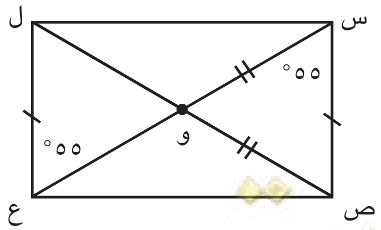
لأنّ فيه كلّ ......ضلعين متقابلين متوازيان......

∵ ق (ا $\hat{ب}$ د) + ق (دبجـ) = ٦٥° + ...٢٥°...... = ...٩٠°...... (٤)

من (٣) ، (٤) نستنتج أنّ الشكل ا ب جـ د

مستطيل لأنّه ......متوازى أضلاع...... إحدى زواياه ......قائمة......

مثال (٢) :



س ص ع ل شكل رباعي تقاطع قطرَيه في النقطة و

س ص = ل ع

س و = ص و

ق (ص $\hat{س}$ و) = ق (ل $\hat{ع}$ و) = ٥٥°

أثبِت أنّ س ص ع ل مستطيل .

الحلّ :

المعطَيات : س ص ع ل شكل رباعي حيث و نقطة تقاطع قطرَيه

س ص = ل ع ، س و = ص و

ق (ص $\hat{س}$ و) = ق (ل $\hat{ع}$ و) = ٥٥°

المطلوب : إثبات أنّ الشكل الرباعي س ص ع ل مستطيل

البرهان : ∵ $\overline{س ص}$ ≅ $\overline{ل ع}$ (معطى) (١)

ق (ص $\hat{س}$ و) = ق (ل $\hat{ع}$ و) = ٥٥° (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{س ص}$ // $\overline{ل ع}$ (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ :

الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع لأنّ فيه ضلعَين متقابلَين متطابقان ومتوازيان (٣)

∵ ص و = و ل ، س و = و ع (قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كلّ منهما الآخر)

∵ س و = ص و

∴ س ع = ص ل (٤) (من خواصّ المساواة)

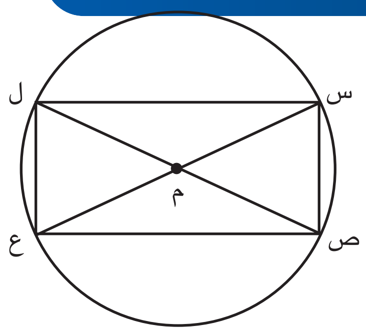
من (٣) ، (٤) نستنتج أنّ :

س ص ع ل مستطيل لأنّه متوازي أضلاع قطراه متطابقان

دورك الآن (٣)

في الشكل المقابِل ، دائرة مركزها م

أثبِت أنّ الشكل س ص ع ل مستطيل .



المعطَيات : دائرة مركزها م

المطلوب : إثبات أنّ س ص ع ل مستطيل

البرهان : ∵ م ...مركز الدائرة...

∵ س م = ...ع م... (...انصاف أقطار في الدائرة...)

ص م = ...ل م... (...انصاف أقطار في الدائرة...)

∴ القطران ينصّف كلّ منهما الآخر

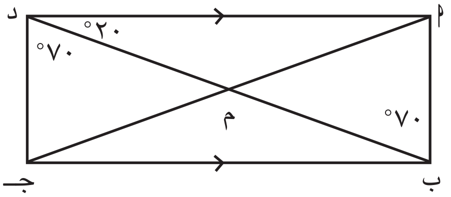
∴ الشكل س ص ع ل ...متوازي أضلاع... لأنّ فيه ...القطران ينصف كل منهما الآخر...

∵ س ع = ...ص ل... (أقطار الدائرة متطابقة)

∴ س ص ع ل ...مستطيل... لأنّه متوازي أضلاع فيه ...قطراه... متطابقان

تمارين ذاتية :

١ أ ب جـ د شكل رباعي فيه $\overline{\text{أ د}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ ، ق (أ $\hat{\text{ب}}$ د) = ق (ب $\hat{\text{د}}$ جـ) = ٧٠° ، ق (أ $\hat{\text{د}}$ ب) = ٢٠°



أثبِت أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د مستطيل .

البرهان ق(أ $\hat{\text{ب}}$ د) = ق(ب $\hat{\text{د}}$ جـ) = ٧٠°

(وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{دجـ}}$ ← ①

$\overline{\text{أد}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ معطى ← ②

من ① ، ② نستنتج أن أ ب جـ د متوازي أضلاع ← ③

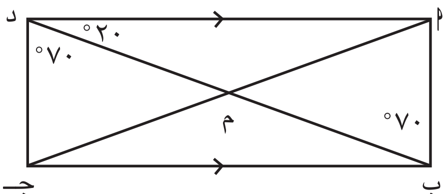
لأن فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان

∵ ق(أ $\hat{\text{د}}$ ب) + ق(ب $\hat{\text{د}}$ جـ) = ٢٠° + ٧٠° = ٩٠° ← ④

من ③ ، ④ نستنتج أن أ ب جـ د مستطيل

لأنه متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة

١ أ ب جـ د شكل رباعي فيه $\overline{\text{أ د}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ ، ق (أ $\hat{\text{ب}}$ د) = ق (ب $\hat{\text{د}}$ جـ) = ٧٠° ، ق (أ $\hat{\text{د}}$ ب) = ٢٠°



أثبِت أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د مستطيل .

البرهان ق(أ $\hat{\text{ب}}$ د) = ق(ب $\hat{\text{د}}$ جـ) = ٧٠°

(وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{دجـ}}$ ← ①

$\overline{\text{أد}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ معطى ← ②

من ① ، ② نستنتج أن أ ب جـ د متوازي أضلاع ← ③

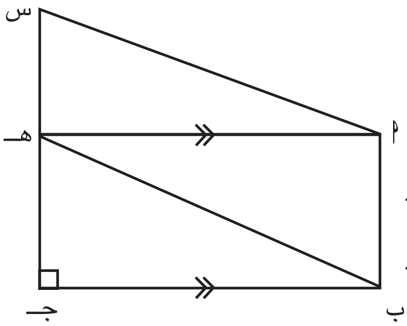
لأن فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان

∵ ق(أ $\hat{\text{د}}$ ب) + ق(ب $\hat{\text{د}}$ جـ) = ٢٠° + ٧٠° = ٩٠° ← ④

من ③ ، ④ نستنتج أن أ ب جـ د مستطيل

لأنه متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة

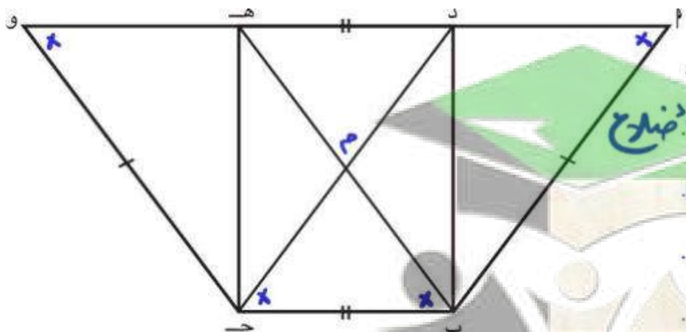
٣ أ ب هـ س متوازي أضلاع ، ق ($\hat{ج}$) = ٩٠° ،
أ هـ // ب جـ ، س ، هـ ، جـ على استقامة واحدة
أثبِت أنّ أ ب جـ هـ مستطيل .



البرهان: ∵ أ ب هـ س متوازي أضلاع
∴ $\overline{أب}$ // $\overline{س هـ}$
∵ س ، هـ ، جـ على استقامة واحدة
∴ $\overline{أب}$ // $\overline{هـ جـ}$ ← (١)
$\overline{أ هـ}$ // $\overline{ب جـ}$ ← (٢)
من (١) ، (٢) نستنتج أن أ ب جـ هـ متوازي أضلاع ← (٣)
لأن فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان
∵ ق ($\hat{جـ}$) = ٩٠° ← (٤)
من (٣) ، (٤) نستنتج أن أ ب جـ هـ مستطيل
لأنه متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة

مهارات تفكير عليا :

٤ في الشكل المقابِل ، أ ب جـ د ، هـ ب جـ و متوازيا أضلاع . د ، هـ ينتميان إلى $\overline{أو}$ ، أ ب = و جـ ،
ب جـ = د هـ
أثبِت أنّ الشكل د ب جـ هـ مستطيل .



∵ أ ب جـ د ، هـ ب جـ و متوازيا أضلاع
∴ ق(د جـ ب) = ق(جـ ب هـ)
∴ أ د // ب جـ ، هـ و // ب جـ
د ، هـ ينتميان إلى أ و
∴ د هـ // ب جـ ← (١)
∵ د هـ = ب جـ ← (٢) (معطى)
∴ من (١) ، (٢) ينتج أن الشكل د ب جـ هـ متوازي أضلاع ← (٣)
∵ أ ب = د جـ ، هـ ب = و جـ (كل ضلعين متقابلين متطابقان)
أ ب = و جـ (معطى)
∴ د جـ = ب هـ (القطران متطابقان) ← (٤)
∴ من (٣) ، (٤) ينتج أن الشكل د ب جـ هـ مستطيل

٥ - ٥ الكشف عن المعيَّن
Detecting a Rhombus

سوف تتعلّم : الكشف عن المعيَّن .

العبارات والمفردات :

المعيَّن Rhombus

إستكشِف

تذكَّر

- **المعيَّن** هو شكل رباعي أضلاعه الأربعة متطابقة .

أوّلًا : الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع فيه : $\overline{\text{س ص}} \cong \overline{\text{س ل}}$

أكمِل ما يلي :

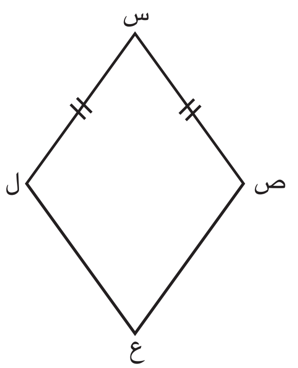
$\overline{\text{س ص}} \cong$ ...ع ل... (كلّ ضلعَين متقابلَين في متوازي الأضلاع متطابقان)

$\overline{\text{س ل}} \cong$ ...ص ع... (كلّ ضلعَين متقابلَين في متوازي الأضلاع متطابقان)

$\because \overline{\text{س ص}} \cong \overline{\text{س ل}}$ (معطى)

$\therefore$ ...س ص... = ...ص ع... = ...ع ل... = ...س ل... (من خواصّ المساواة)

$\therefore$ الشكل س ص ع ل هو ...معين...



إذًا المعيَّن هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان

ثانيًا : الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع فيه : $\overline{\text{س ع}} \perp \overline{\text{ص ل}}$

أكمِل ما يلي :

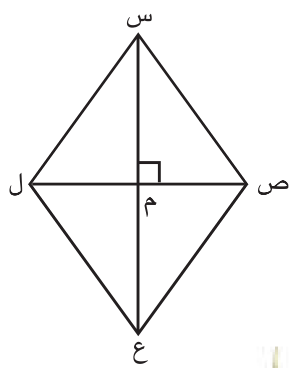
Δ س م ص ، Δ س م ل فيهما :

ق (س $\hat{\text{م}}$ ص) = ق (س $\hat{\text{م}}$ ل) = ٩٠° (بالتجاور على خطّ مستقيم)

ص م = ...ل م... (قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كلًّا منهما الآخر)

...س م... (ضلع مشترَك)

$\therefore \Delta$ س م ص $\cong \Delta$ س م ل (ض . ز . ض)



وينتج من التطابق أنّ :

$\overline{\text{س ص}} \cong$ ...س ل...

∵ س ص ع ل متوازي أضلاع

∴ س ص = ص ع = ع ل = س ل (من خواصّ المساواة)

∴ س ص ع ل هو ......معين......

إذًا المعيَّن هو متوازي أضلاع قطراه متعامدان

ممّا سبق نلاحظ أنّ :

يكون متوازي الأضلاع معيَّنًا إذا توفّر فيه أحد الشرطَين التاليَين :

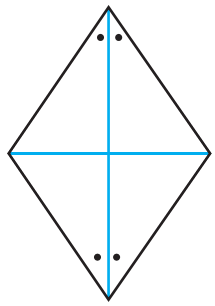
١ إذا تطابق ضلعان متجاوران فيه .

٢ إذا تعامد قطراه .

دورك الآن (٢)

أيّ الأشكال التالية يمثّل معيَّنًا مع ذكر السبب ؟

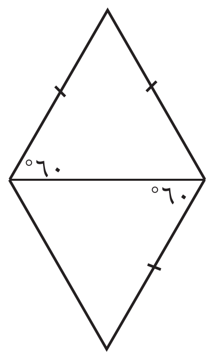
أ



لا ليس معين

لا تنطبق عليه شروط المعين

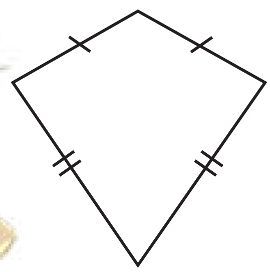
ب



نعم معين

لأنه متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان

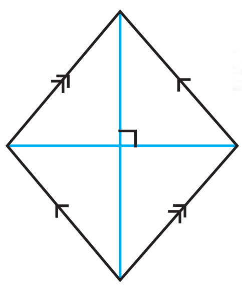
ج



لا ليس معين

لا تنطبق عليه شروط المعين

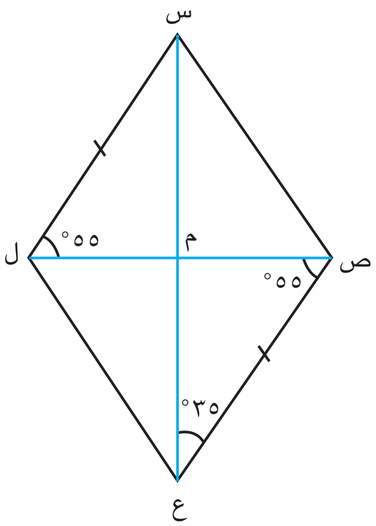
د



نعم معين

لأنه متوازي أضلاع قطراه متعامدات

مثال (٢) :



في الشكل المقابِل :

ق (س $\hat{ل}$ ص) = ق (ع $\hat{ص}$ ل) = ٥٥° ،

ق (ص $\hat{ع}$ س) = ٣٥° ، س ل = ص ع .

أثبِت أنّ الشكل الرباعي س ص ع ل معيَّن .

الحلّ :

المعطَيات :

س ل = ص ع

ق (س $\hat{ل}$ ص) = ق (ع $\hat{ص}$ ل) = ٥٥°

ق (ص $\hat{ع}$ س) = ٣٥°

المطلوب : إثبات أنّ الشكل س ص ع ل معيَّن .

البرهان :

∵ س ل = ص ع   (١) (معطى)

∵ ق (س $\hat{ل}$ ص) = ق (ع $\hat{ص}$ ل) = ٥٥°   (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{\text{س ل}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ (٢)

∴ من (١) ، (٢) الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع لأنّ فيه ضلعَين متقابلَين متوازيان ومتطابقان .   (٣)

في Δ ص م ع فيه :

∵ ق (ع $\hat{ص}$ م) = ٥٥° (معطى) ، ∵ ق (ص $\hat{ع}$ م) = ٣٥° (معطى)

∴ ق (ص $\hat{م}$ ع) = ١٨٠° - (٣٥° + ٥٥°) = ٩٠°   (مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة يساوي ١٨٠°)

∴ $\overline{\text{س ع}}$ ⊥ $\overline{\text{ص ل}}$ (٤)

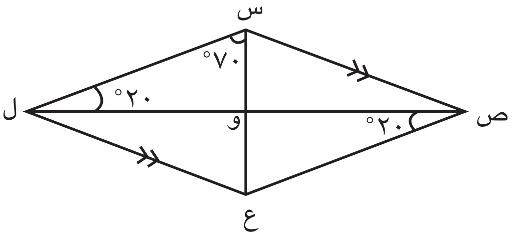
∴ من (٣) ، (٤) ∴ الشكل س ص ع ل معيَّن لأنّه متوازي أضلاع قطراه متعامدان .

تذكَّر

- الرمز ⊥ هو رمز عمودي على .
- الرمز // هو رمز موازٍ لـ .
- مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة يساوي ١٨٠°

دورك الآن (٢)

في الشكل المقابِل ، ومن البيانات الموضَّحة على الرسم ، أثبِت أنّ س ص ع ل معيَّن .



المعطيات : س ص // ل ع ، ق(ل س ع) = ٧٠°
ق(ع ص ل) = ق(س ل ص) = ٢٠°

المطلوب : اثبات أن س ص ع ل معين

البرهان :

$\overline{\text{س ص}}$ // ل ع (معطى) (١)

∵ ق (س $\hat{\text{ل}}$ ص) = ق (ع $\hat{\text{ص}}$ ل) (معطى)

وهما في وضع تبادل

∴ $\overline{\text{س ل}}$ // ص ع (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ :

س ص ع ل متوازي أضلاع لأنّ كل ضلعين متقابلين متوازيان (٣)

في Δ س و ل :

ق (س $\hat{\text{و}}$ ل) = ١٨٠° - (٧٠° + ٢٠°) = ٩٠° (مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة يساوي ١٨٠°)

∴ $\overline{\text{س ع}}$ ⊥ ص ل (القطران متعامدان) (٤)

من (٣) ، (٤) ∴ الشكل س ص ع ل معين لأنّه متوازي أضلاع قطراه متعامدان

عبِّر عن فهمك

يقول شملان إنّ كلّ متوازي أضلاع هو معيَّن . هل تتّفق معه ؟ فسِّر إجابتك .

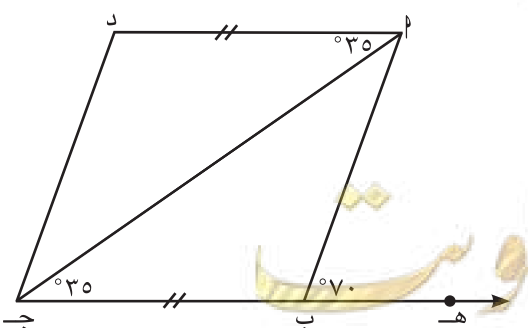
مثال (٢) :

في الشكل المقابِل ﺃ ب جـ د شكل رباعي فيه :

ﺃ د = ب جـ ، ق (جـ $\hat{\text{ﺃ}}$ د) = ق (ب $\hat{\text{جـ}}$ ﺃ) = ٣٥° ،

ق (ﺃ $\hat{\text{ب}}$ هـ) = ٧٠°

أثبِت أنّ الشكل الرباعي ﺃ ب جـ د معيَّن .



الحلّ :

المعطَيات : ؁ ب جـ د شكل رباعي ، ؁ د = ب جـ ، ن (جـ ؁̂ د) = ن (ب جـ̂ ؁) = ٣٥° ،

ن (؁ ب̂ هـ) = ٧٠°

المطلوب : إثبات أنّ الشكل ؁ ب جـ د معيَّن .

البرهان :

∵ ن (جـ ؁̂ د) = ن (ب جـ̂ ؁) = ٣٥° (معطى)(وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{؁ د}$ // $\overline{ب جـ}$ (١)

∵ ؁ د = ب جـ (٢) (معطى)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ :

الشكل ؁ ب جـ د متوازي أضلاع لأنّ فيه ضلعَين متقابلَين متطابقان ومتوازيان . (٣)

∵ (هـ ب̂ ؁) زاوية خارجة عن المثلّث ؁ ب جـ

∴ ن (هـ ب̂ ؁) = ن (ب ؁̂ جـ) + ن (ب جـ̂ ؁)

∴ ن (ب ؁̂ جـ) = ٧٠° - ٣٥° = ٣٥°

∴ ن (ب ؁̂ جـ) = ن (ب جـ̂ ؁) = ٣٥°

∴ ب ؁ = ب جـ (من خواصّ المثلّث المتطابق الضلعَين) (٤)

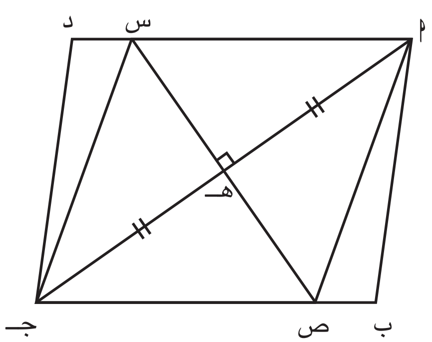
من (٣) ، (٤)

∴ الشكل ؁ ب جـ د معيَّن لأنّه متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان .

تذكَّر

قياس الزاوية الخارجة للمثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتَين الداخلتَين ما عدا المجاورة لها .

مثال (٣) :



؁ ب جـ د متوازي أضلاع ، $\overline{س ص}$ ⊥ $\overline{؁ جـ}$ ،

هـ منتصف $\overline{؁ جـ}$ ، س ∈ $\overline{؁ د}$ ، ص ∈ $\overline{ب جـ}$.

أثبِت أنّ : الشكل ؁ ص جـ س معيَّن .

الحلّ :

المعطَيات :

؁ ب جـ د متوازي أضلاع ، $\overline{س ص}$ ⊥ $\overline{؁ جـ}$

هـ منتصف $\overline{؁ جـ}$ ، س ∈ $\overline{؁ د}$ ، ص ∈ $\overline{ب جـ}$

المطلوب : إثبات أنّ الشكل ؁ ص جـ س معيَّن .

البرهان :

Δ أ هـ س ، Δ جـ هـ ص فيهما :

أ هـ = جـ هـ (معطى)

ق (∠ أ هـ س) = ق (∠ جـ هـ ص) (بالتقابل بالرأس)

ق (∠ س أ هـ) = ق (∠ ص جـ هـ) (بالتبادل والتوازي)

∴ Δ أ هـ س ≅ Δ جـ هـ ص بحالة (ز . ض . ز)

وينتج من التطابق أنّ أ س = ص جـ (١)

∵ أ د // ب جـ (من تعريف متوازي الأضلاع)

∵ س ∈ أ د ، ص ∈ ب جـ (معطى)

∴ أ س // ص جـ (٢)

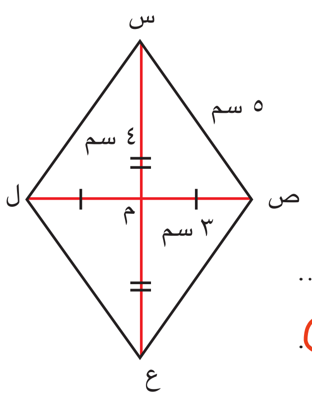
من (١) ، (٢) ∴ أ ص جـ س متوازي أضلاع لأنّ فيه ضلعَين متقابلَين متوازيان ومتطابقان . (٣)

∵ س ص ⊥ أ جـ (٤) معطى

من (٣) ، (٤) ∴ أ ص جـ س معيَّن لأنّه متوازي أضلاع قطراه متعامدان .

تمارين ذاتية :

١ س ص ع ل شكل رباعي فيه م نقطة تقاطع القطرَين ،
م ص = م ل ، م س = م ع ،
س ص = ٥ سم ، ص م = ٣ سم ، س م = ٤ سم
أثبِت أنّ الشكل س ص ع ل معيَّن



البرهان

∵ م ص = م ل ، م س = م ع

∴ الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع ← ١

(لأن القطران ينصف كل منهما الآخر)

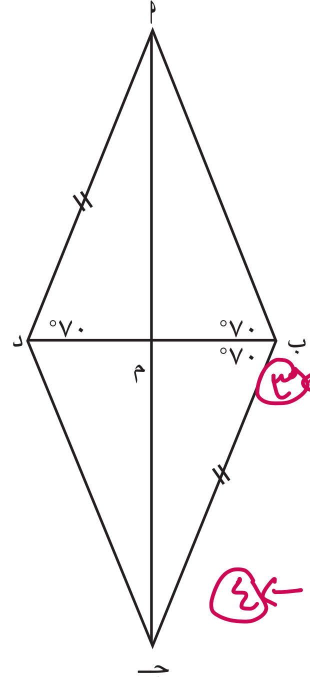
(س ص)² = ٥² = ٢٥

(س م)² + (م ص)² = ٤² + ٣² = ١٦ + ٩ = ٢٥

∴ Δ س م ص قائم الزاويـة في م

∴ س ع ⊥ ص ل ← ٢

من ١ و ٢ نستنتج أن س ص ع ل معين لأنه متوازي أضلاع قطراه متعامدان



٢ في الشكل أمامك ، أثبِت أنّ ٱ ب جـ د معيَّن .

البرهان: ق(∠جـ ب د) = ق(∠ٱ د ب) = ٧٠°

وهما في وضع تبادل

∴ ٱد // ب جـ ← (١)

ٱد = ب جـ ← (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن ٱ ب جـ د متوازي أضلاع ← (٣)

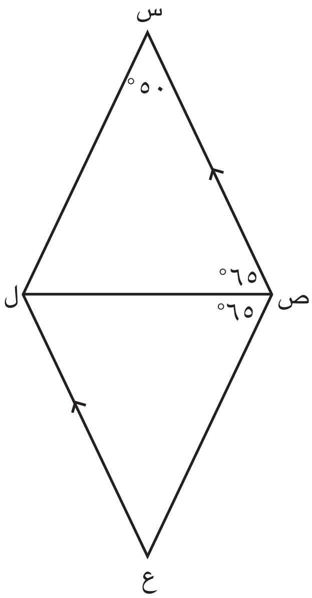
المثلث ٱ ب د فيه

ق(∠ٱ ب د) = ق(∠ٱ د ب) = ٧٠°

∴ المثلث ٱ ب د متطابق الضلعين ← ٱب = ٱد ← (٤)

من (٣) ، (٤) فنستنتج أن ٱ ب جـ د معين

لأنه متوازي أضلاع فيه ضلعين متجاورين متطابقان



٣ س ص ع ل شكل رباعي فيه $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ع ل}}$ ، ق(∠س) = ٥٠°

ق(∠س ص ل) = ق(∠ع ص ل) = ٦٥°

أثبِت أنّ الشكل س ص ع ل معيَّن .

البرهان: △ س ص ل فيه

ق(∠س ل ص) = ١٨٠ − (٦٥ + ٥٠) = ٦٥°

لأن مجموع قياسات زوايا △ = ١٨٠°

ق(∠س ل ص) = ق(∠ع ص ل) = ٦٥°

وهما في وضع تبادل

∴ س ل // ص ع ← (١)

∵ س ص // ع ل ← (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن س ص ع ل متوازي أضلاع ← (٣)

∵ ق(∠س ل ص) = ق(∠س ص ل)

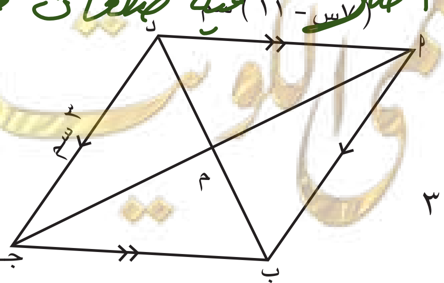
∴ س ص = س ل (مثلث متطابق الضلعين) ← (٤)

من (٣) ، (٤) نستنتج أن س ص ع ل معين

لأنه متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان

مهارات تفكير عليا :

اِختر الإجابة الصحيحة .



٤ في الشكل المقابِل . قيمة س التي تجعل متوازي الأضلاع ٱ ب جـ د ، معيَّنًا هي :

٦٠ (أ) ١٤ (ب) ٢ (ج) ١١ (د) ٣

٥ - ٦ الكشف عن المربّع
Detecting a Square

سوف تتعلّم : الكشف عن المربّع .

العبارات والمفردات :

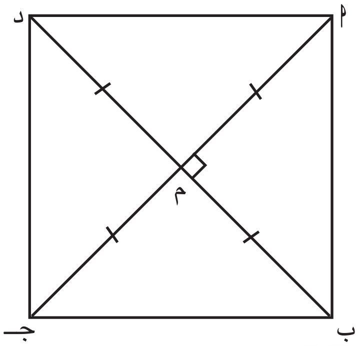
المربّع Square

اِستكشِف

في الشكل المقابِل ﺃ ب جـ د متوازي أضلاع ،

$\overline{ﺃجـ} \perp \overline{ب د}$ ، ﺃ جـ = ب د

أثبِت أنّ ﺃ ب جـ د مربّع .



أوّلًا :

$\because$ ﺃ ب جـ د متوازي أضلاع ، ﺃ جـ = ب د

أكمِل ما يلي :

ﺃ جـ = ...ب د........... معطى (قطراه متطابقان)

$\therefore$ الشكل ﺃ ب جـ د هو ......مستطيل...... (١)

لأنّه متوازي أضلاع قطراه ..متطابقان..

من تطابق Δ ﺃ م ب ، Δ ﺃ م د (ض . ز . ض)

ينتج أنّ :

ﺃ ب = ...ﺃ د............. (ضلعان متجاوران متطابقان) (٢)

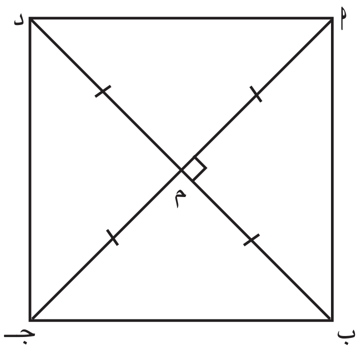
من (١) ، (٢) ﺃ ب جـ د هو مربّع

لأنّه مستطيل فيه ضلعان متجاوران متطابقان .

تذكَّر

- يكون متوازي الأضلاع مستطيلًا إذا توفّر أحد الشرطَين .
  1. تطابق قطراه .
  2. قياس إحدى زواياه يساوي ٩٠° .
- يكون متوازي الأضلاع معيَّنًا إذا توفّر أحد الشرطَين :
  1. قطراه متعامدان .
  2. فيه ضلعان متجاوران متطابقان .

ثانيًا :



$\because$ أ ب جـ د متوازي أضلاع ، $\overline{\text{أ جـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$ ،

أكمِل ما يلي :

$\overline{\text{أ جـ}} \perp$ ......ب د...... معطى (قطراه متعامدان)

$\therefore$ الشكل أ ب جـ د هو ......معين...... (١)

لأنه متوازي أضلاع قطراه ......متعامدان......

$\because \Delta$ أ م ب مثلّث قائم الزاوية ومتطابق الضلعَين معطى

ق (م $\hat{\text{أ}}$ ب) = $\frac{{}^\circ ١٨٠ - {}^\circ ٩٠}{٢}$ = $\frac{......٩٠......}{......٢......}$ = ...٤٥...... من خواصّ المثلّث المتطابق الضلعَين

$\therefore$ ق (م $\hat{\text{أ}}$ د) = ...٤٥...... (قطر المعيَّن ينصّف زاويتَي الرأس الواصل بينهما)

$\therefore$ ق (ب $\hat{\text{أ}}$ د) = ...٩٠...... (قياس إحدى زواياه قائمة) (٢)

من (١) ، (٢) أ ب جـ د هو مربّع .

لأنّه معيَّن قياس إحدى زواياه ٩٠°

تذكّر

للمربّع كلّ خواصّ المستطيل وكلّ خواصّ المعيَّن .

ممّا سبق نلاحظ أنّ :

يكون متوازي الأضلاع مربّعًا إذا توفّر فيه أحد الشروط التالية :

- **القطران متطابقان ومتعامدان .**
- **القطران متطابقان وضلعان متجاوران متطابقان .**
- **إحدى زواياه قائمة وضلعان متجاوران متطابقان .**
- **إحدى زواياه قائمة والقطران متعامدان .**

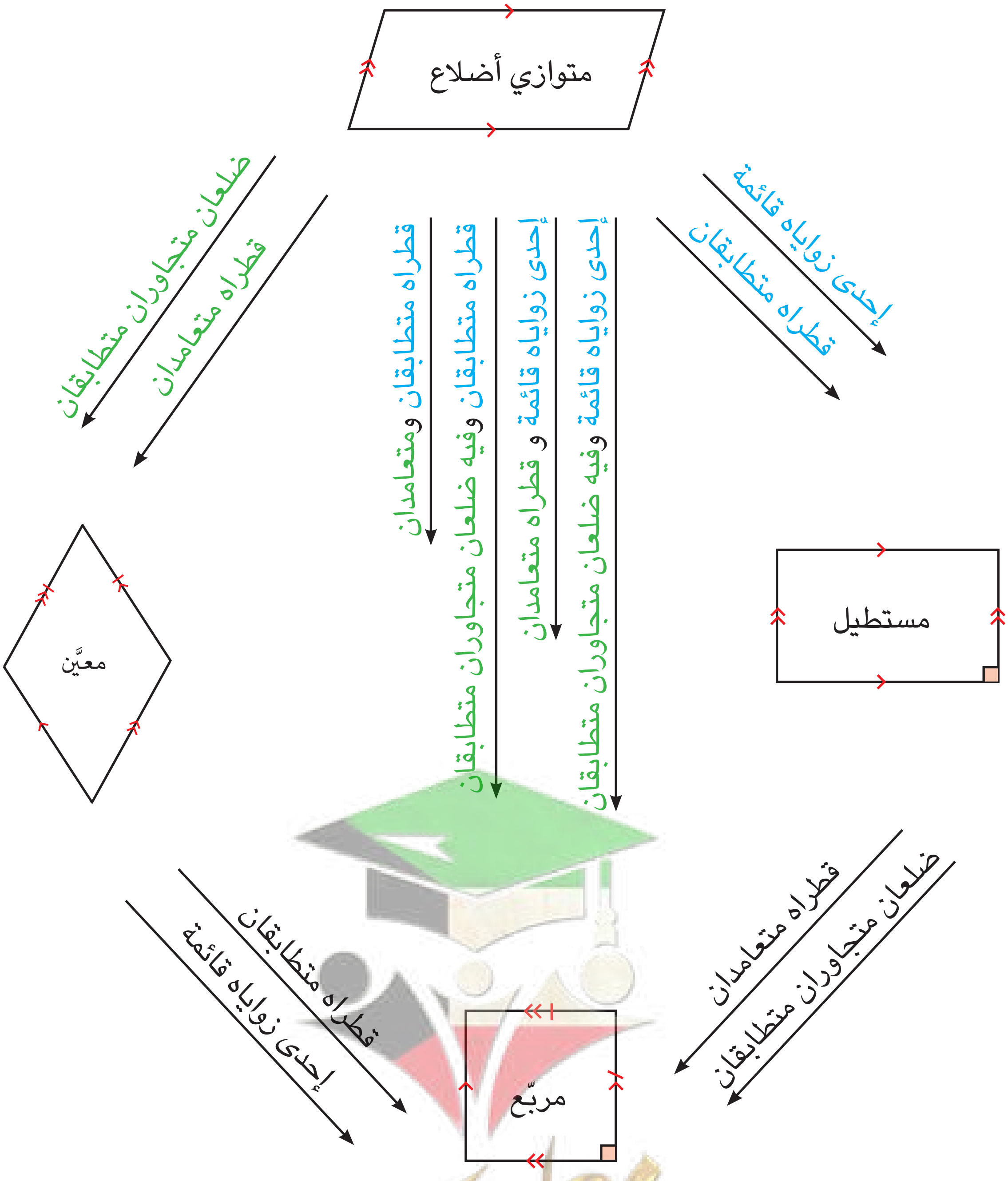
ملاحظة :

لإثبات أنّ الشكل الرباعي مربّع ، يجب أن يكون :

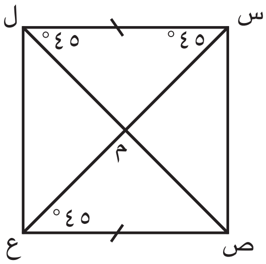
متوازي أضلاع ويحقّق أحد شرطَي المستطيل وأحد شرطَي المعيَّن .

ربط الأفكار

(اِتَّبِع أحد الأسهم لتصل إلى المطلوب)



مثال (١) :



س ص ع ل شكل رباعي فيه :

س ل = ص ع ، ق (ل س^ ع) = ق (س ل^ ص) = ق (س ع^ ص) = ٤٥°

أثبِت أنّ س ص ع ل مربّع .

الحلّ :

المعطَيات : س ص ع ل شكل رباعي ، س ل = ص ع

ق (ل س^ ع) = ق (س ل^ ص) = ق (س ع^ ص) = ٤٥°

المطلوب : إثبات أنّ الشكل الرباعي س ص ع ل مربّع .

البرهان :

س ل = ص ع — معطى (١)

∵ ق (ل س^ ع) = ق (س ع^ ص) — وهما في وضع تبادل

∴ $\overline{\text{س ل}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ — (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ :

الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع لأنّ فيه ضلعَين متقابلَين متطابقان ومتوازيان (٣)

في Δ س م ل :

ق (س م^ ل) = ١٨٠° - (٤٥° + ٤٥°)

= ١٨٠° - ٩٠° = ٩٠° — مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة = ١٨٠°

∴ $\overline{\text{س ع}}$ ⊥ $\overline{\text{ص ل}}$

∴ القطران متعامدان — (٤)

∵ ق (ل س^ م) = ق (س ل^ م) — معطى

∴ س م = ل م — من خواصّ المثلّث المتطابق الضلعَين

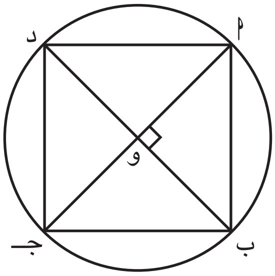
∴ { س م = م ع ، ل م = م ص } — من خواصّ متوازي الأضلاع

∴ س ع = ص ل — من خواصّ المساواة

∴ القطران متطابقان — (٥)

من (٣) ، (٤) ، (٥) س ص ع ل مربّع لأنّه متوازي أضلاع تعامد وتطابق قطراه .

دورك الآن (١)



في الشكل المقابِل أ جـ ، ب د ، قطران في دائرة مركزها و ،
أ جـ ⊥ ب د .

أثبِت أنّ أ ب جـ د مربّع .

المعطَيات : و مركز الدائرة ، أ جـ ⊥ ب د

المطلوب : إثبات أنّ أ ب جـ د مربّع .

البرهان :

∵ و مركز الدائرة

∴ أ و = ..وجـ....... ، ب و = ..ود......... أنصاف أقطار الدائرة الواحدة متطابقة

∴ أ ب جـ د متوازي أضلاع لأنّه شكل رباعي فيه القطران ينصّف كلّ منهما الآخر (١)

∵ أ جـ ≅ ..ب د................ أقطار الدائرة الواحدة متطابقة (٢)

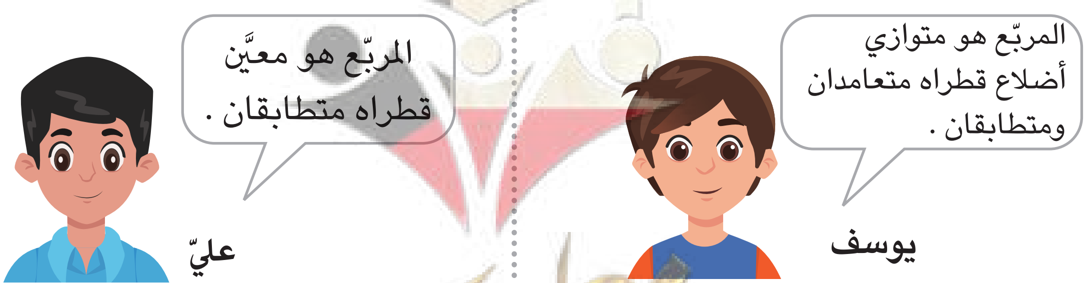
∵ أ جـ ⊥ ..ب د................ (معطى)

∴ القطران متعامدان (٣)

∴ من (١) ، (٢) ، (٣) ∴ أ ب جـ د ......مربع...... لأنّه متوازي أضلاع تطابق وتعامد قطراه .

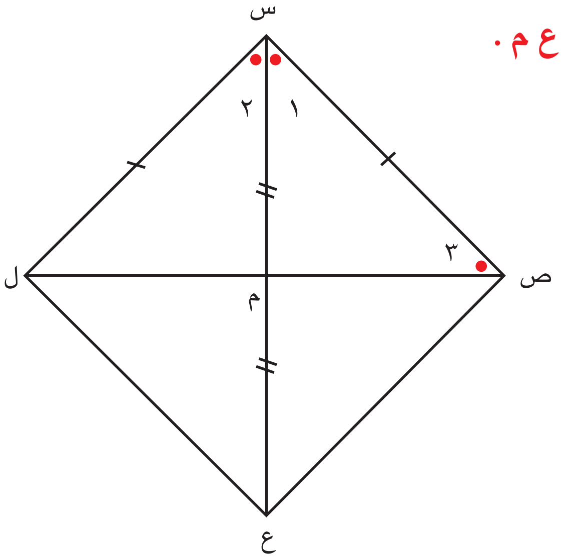
عبِّر عن فهمك

سأل معلّم الرياضيات المتعلّمين في الفصل عن تعريف المربّع ، وكانت إجابة كلّ من يوسف وعلي كالآتي :



في رأيك ، هل إجابة كلّ منهما صحيحة ؟ فسِّر ذلك .

مثال (٢) :



س ص ع ل شكل رباعي فيه : س ص = س ل ، س م = ع م .

ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٢}$) = ق ($\hat{٣}$)

أثبِت أنّ س ص ع ل مربّع .

الحلّ :

المعطَيات : س ص ع ل شكل رباعي

س ص = س ل ، س م = ع م

ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٢}$) = ق ($\hat{٣}$) .

المطلوب : إثبات أنّ س ص ع ل مربّع .

البرهان : المثلّثان س م ص ، س م ل فيهما :

$\overline{\text{س م}}$ (ضلع مشترَك)

$\overline{\text{س ص}} \cong \overline{\text{س ل}}$ (معطى)

ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٢}$) (معطى)

∴ Δ س م ص ، Δ س م ل متطابقان (ض . ز . ض) ومن التطابق ينتج أنّ :

م ص = م ل (١)

∵ م س = م ع (٢) (معطى)

من (١) ، (٢) ∴ الشكل س ص ع ل متوازي الأضلاع لأنّ القطرَين ينصّف كلّ منهما الآخر (٣)

∵ ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٣}$) (معطى)

∴ ص م = س م (من خواصّ المثلّث المتطابق الضلعَين)

∴ ص ل = س ع (من خواصّ المساواة)

∴ القطران متطابقان (٤)

∵ س ص = س ل (٥) (معطى)

∴ فيه ضلعان متجاوران متطابقان .

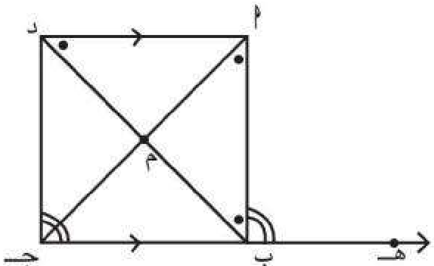
من (٣) ، (٤) ، (٥) ∴ الشكل س ص ع ل مربّع لأنّه متوازي أضلاع قطراه متطابقان وفيه ضلعان متجاوران متطابقان .

دورك الآن (٢)

ا ب جـ د شكل رباعي فيه :

$\overline{اد} \parallel \overline{ب جـ}$ ، ق (ب $\hat{ا}$ جـ) = ق (ا $\hat{ب}$ د) = ق (ا $\hat{د}$ ب)

ق (ا $\hat{ب}$ هـ) = ق (د $\hat{جـ}$ ب)



أثبِت أنّ ا ب جـ د مربّع

المعطَيات : ا د // ب جـ ، ق(ب ا جـ) = ق(ا ب د) = ق(ا د ب) ، ق(ا ب هـ) = ق(د جـ ب)

المطلوب : إثبات أن ا ب جـ د مربع

البرهان :

∵ $\overline{اد} \parallel \overline{ب جـ}$ (معطى) (١)

∵ ق (ا $\hat{ب}$ هـ) = ق(د جـ ب) (معطى) وهما في وضع تناظر

∴ $\overline{اب}$ // د جـ (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ ا ب جـ د متوازي أضلاع لأنّ فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متوازيان (٣)

في Δ ا م ب :

∵ ق (ب $\hat{ا}$ م) = ق(ا ب م) (معطى)

∴ ا م = م ب (من خواصّ المثلّث المتطابق الضلعَين)

∵ ا م = م جـ
ب م = م د
(من خواصّ متوازي الأضلاع القطران ينصّف كلّ منهما الآخر)

∴ ا جـ = ب د (من خواصّ المساواة)

∴ القطران متطابقان (٤)

في Δ ا ب د :

∵ ق (ا $\hat{ب}$ د) = ق (ا $\hat{د}$ ب) (معطى)

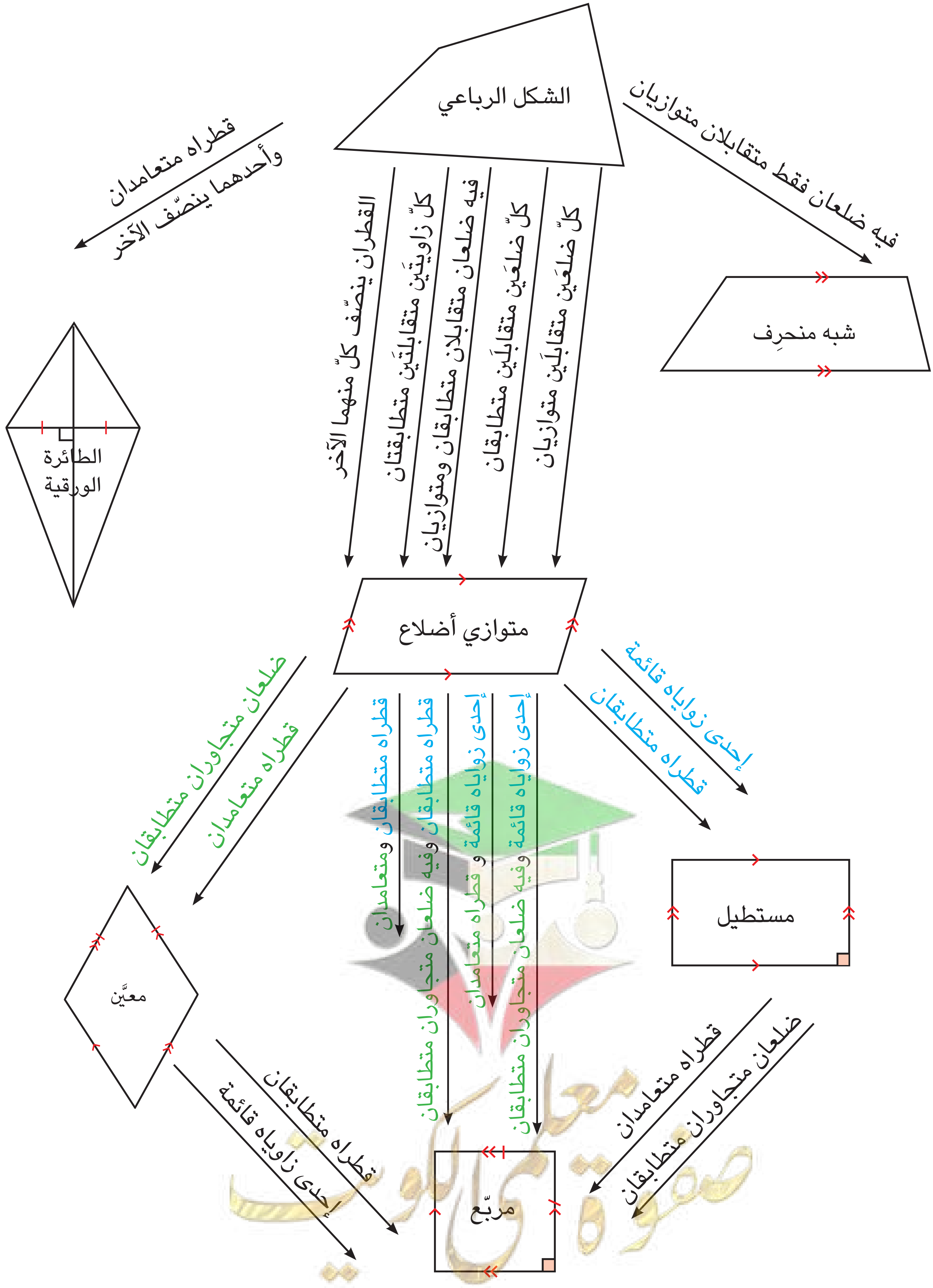
∴ ا ب = ا د (من خواصّ المثلّث المتطابق الضلعَين)

∴ فيه ضلعان متجاوران متطابقان (٥)

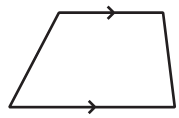
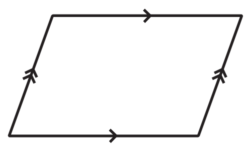
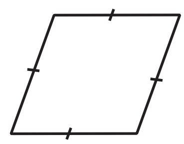
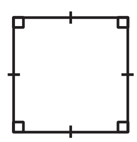
∴ من (٣) ، (٤) ، (٥) نستنتج أنّ : ا ب جـ د مربع لأنّ قطرَيه متطابقان

وفيه ضلعان متجاوران متطابقان

ربط الأفكار (اِتَّبِع أحد الأسهم للوصول إلى المطلوب)

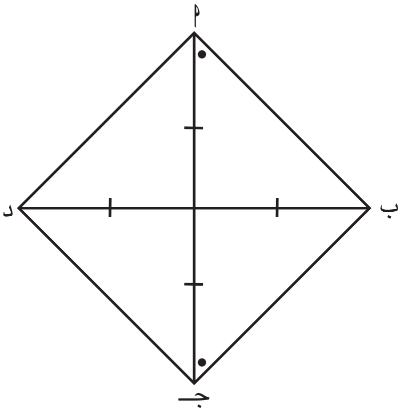


الأشكال الرباعية

إسم الشكل	رسم الشكل	تعريف الشكل	خواصّ الشكل
شبه المنحرِف		هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متقابلان متوازيان .	- زوج واحد فقط من الأضلاع المتقابلة متوازٍ .
متوازي الأضلاع		هو شكل رباعي فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متوازيان .	- الأضلاع المتقابلة متطابقة . - يتقاطع القطران في منتصفهما . - نقطة تقاطع قطرَيه هي مركز تناظر له . - كلّ زاويتَين متقابلتَين متطابقتان . - كلّ زاويتَين متتاليتَين متكاملتان .
المعيَّن		هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان .	- أضلاعه الأربعة متطابقة . - القطران متعامدان وينصّف كلّ منهما الآخر . - كلّ قطر ينصّف زاويتَي الرأس الواصل بينهما .
المستطيل		هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة .	- زواياه الأربع قائمة . - قطراه متطابقان .
المربّع		- هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان وإحدى زواياه قائمة . - هو معيَّن إحدى زواياه قائمة . - هو مستطيل فيه ضلعان متجاوران متطابقان .	- قطراه متطابقان ومتعامدان ويتقاطعان في منتصفهما . - زواياه الأربع قائمة وأضلاعه متطابقة . - قطر المربّع يصنع مع كلّ ضلع من أضلاعه زاوية قياسها ٤٥° .

تمارين ذاتية :

١ أ ب جـ د مستطيل فيه ق (ب $\hat{أ}$ جـ) = ق (ب $\hat{جـ}$ أ) ،
أثبِت أنّ الشكل أ ب جـ د مربّع .



البرهان

Δ أ ب جـ فيه

ق (ب $\hat{أ}$ جـ) = ق (ب $\hat{جـ}$ أ)

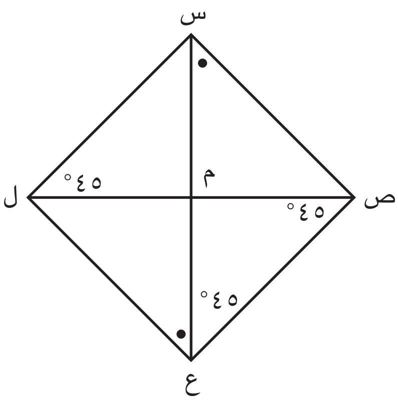
∴ Δ أ ب جـ متطابق الضلعين

∴ ب أ = ب جـ ← ①

∵ أ ب جـ د مستطيل ← ②

من ① ، ② نستنتج أن الشكل أ ب جـ د مربع لأنه مستطيل فيه ضلعان متجاوران متطابقان

٢ باستخدام المعطيات في الرسم ، أثبِت أنّ الشكل س ص ع ل مربّع .



البرهان

ق (س $\hat{ل}$ ص) = ق (ع $\hat{ص}$ ل) = 45°

وهما في وضع تبادل

∴ $\overline{س ل}$ // $\overline{ص ع}$ ← ①

ق (ص $\hat{س}$ ع) = ق (ل $\hat{ع}$ س) معطى

وهما في وضع تبادل

∴ $\overline{س ص}$ // $\overline{ل ع}$ ← ②

من ① ، ② نستنتج أن الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع لأن فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان

Δ ص م ع فيه ق (ص $\hat{م}$ ع) = $180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ$

∴ $\overline{ص م}$ ⊥ $\overline{م ع}$ ⟸ $\overline{ص ل}$ ⊥ $\overline{س ع}$ ← ③

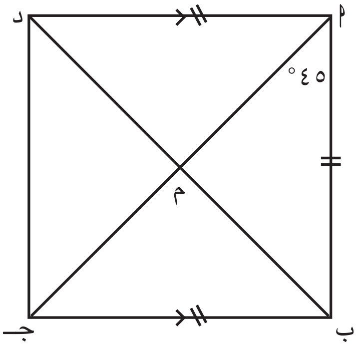
كذلك ص م = م ع من خواص Δ متطابق الضلعين

ص م = م ل ، س م = م ع

∴ ص ل = س ع ← ④

من ③ ، ④ نستنتج أن الشكل س ص ع ل مربع

٣ مستعينًا بالمعطَيات على الرسم ، أثبِت أنّ الشكل أ ب جـ د مربّع .



البرهان

∵ أد = ب جـ ، $\overline{\text{أد}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع ← (١)

△ ب أ د فيه

أب = أد ← (٢)

∴ △ ب أ د متطابق الضلعين

∵ م منتصف $\overline{\text{ب د}}$

∴ $\overline{\text{أم}}$ ⊥ $\overline{\text{ب د}}$ ← $\overline{\text{أ جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب د}}$ ← (٣)

$\overline{\text{أم}}$ ينصف (ب أ̂ د)

∴ ق (ب أ̂ د) = ٤٥ + ٤٥ = ٩٠° ← (٤)

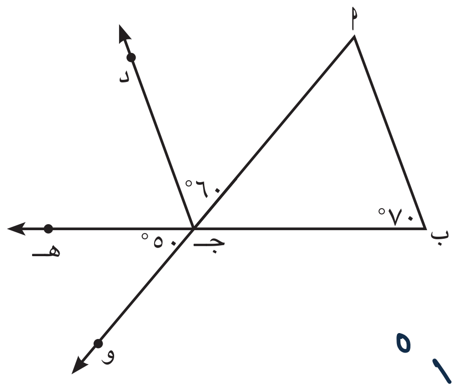
من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) نستنتج أن أ ب جـ د مربع

لأنه متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة وقطراه متعامدان

احدى زواياه قائمة وضلعان متجاوران متطابقان

أوّلًا : البنود المقالية

١ في الشكل المقابِل ، أثبِت أنّ $\overline{ا ب}$ // $\overleftarrow{جـ د}$.



البرهان

ق(ا جـ ب) = ق(و جـ هـ) = ٥٠°

(بالتقابل بالرأس)

ق(ب جـ د) = ٦٠ + ٥٠ = ١١٠°

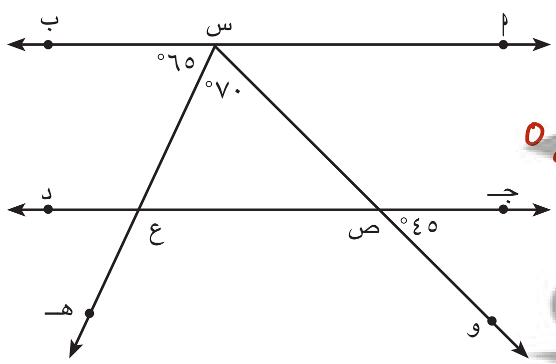
ق(ب جـ د) + ق(ب) = ١١٠° + ٧٠° = ١٨٠°

(وهما زاويتان صحى لفتان)

∴ $\overline{ا ب}$ // $\overline{جـ د}$

٢ في الشكل المقابِل وحسب البيانات المدوَّنة ،

أثبِت أنّ $\overleftrightarrow{ا ب}$ // $\overleftarrow{جـ د}$



البرهان

ق(ا س ص) = ١٨٠° − (٧٠° + ٦٥°) = ٤٥°

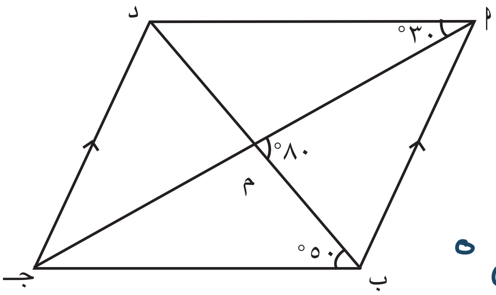
(المتجاورة على خط مستقيم)

ق(ا س ص) = ق(جـ ص و) = ٤٥°

(وهما في وضع تناظر)

∴ $\overleftrightarrow{ا ب}$ // $\overleftrightarrow{جـ د}$

٣ في الشكل المقابِل : $\overline{أجـ} \cap \overline{ب د}$ = { م }،
أثبِت أنّ أ ب جـ د متوازي أضلاع .



البرهان ق(∠أ م د) = ١٨٠° − ٨٠° = ١٠٠°

(التجاور على خط مستقيم)

△ أ م د فيه

ق(∠أ د م) = ١٨٠° − (٣٠° + ١٠٠°) = ٥٠°

(مجموع قياسات زوايا △ = ١٨٠°)

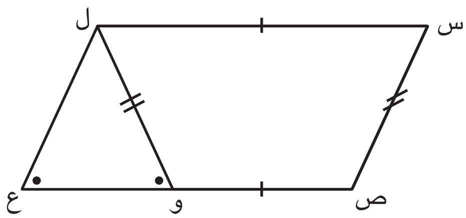
ق(∠أ د م) = ق(∠جـ ب د) = ٥٠° (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{أ د}$ // $\overline{ب جـ}$ ← ①

$\overline{أ ب}$ // $\overline{د جـ}$ معطى ← ②

من ① ، ② نستنتج أن أ ب جـ د متوازي أضلاع (لأن فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان)

٤ أثبِت أنّ الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع .



البرهان △ ل و ع فيه

ق(∠ل و ع) = ق(∠ع)

∴ △ ل و ع متطابق الضلعين

ل و = ل ع

∵ ل و = س ص معطى

∴ ل ع = س ص ← ①

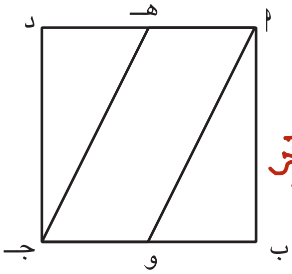
س ل = ص ع معطى ← ②

من ① ، ② نستنتج أن الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع

لأن فيه كل ضلعين متقابلين متطابقان

٥ $أ ب جـ د$ مربع ، $هـ$ منتصف $\overline{أد}$ ، $و$ منتصف $\overline{ب جـ}$

أثبِت أنّ $أ و جـ هـ$ متوازي أضلاع .



البرهان: ∵ $أ ب جـ د$ مربع ∴ $أد = ب جـ$ ، $\overline{أد} // \overline{ب جـ}$

∵ $هـ$ منتصف $\overline{أد}$ ، $و$ منتصف $\overline{ب جـ}$

∴ $أ هـ = و جـ$ ← ①

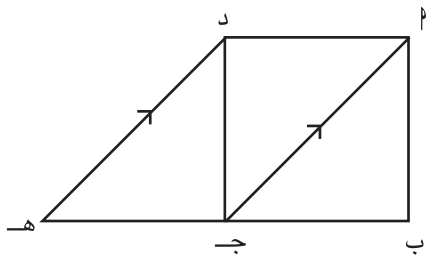
وكذلك $\overline{أ هـ} // \overline{و جـ}$ ← ②

من ① ، ② نستنتج أن $أ و جـ هـ$ متوازي أضلاع

لأن فيه ضلعين متقابلين متوازيان ومتطابقان

٦ في الشكل المقابِل : $أ ب جـ د$ مربّع ،

$هـ \in \overleftarrow{ب جـ}$ ، $\overline{أ جـ} // \overline{د هـ}$



أ) أثبِت أنّ $أ جـ هـ د$ متوازي أضلاع

البرهان: ∵ $أ ب جـ د$ مربع

∴ $\overline{أد} // \overline{ب جـ}$ ، $هـ \in \overleftarrow{ب جـ}$

∴ $\overline{أد} // \overline{جـ هـ}$ ← ①

∵ $\overline{أ جـ} // \overline{د هـ}$ معطى ← ②

من ① ، ② نستنتج أن $أ جـ هـ د$ متوازي أضلاع

لأن فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان

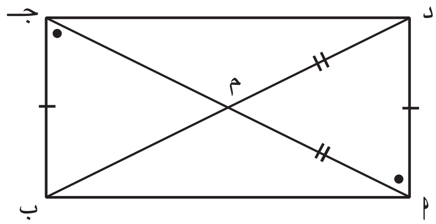
ب) أوجِد $ق(\hat{هـ})$

$ق(\angle ب جـ د) = ٩٠^\circ$ (كل زوايا المربع قائمة)

$ق(\angle أ جـ ب) = \frac{١}{٢} ق(\angle ب جـ د)$ (قطرا المربع ينصفان الزاويتين الواقعتان بينهما)

$= \frac{١}{٢} \times ٩٠^\circ = ٤٥^\circ$

$ق(\hat{هـ}) = ق(\angle أ جـ ب) = ٤٥^\circ$ (بالتناظر والتوازي)



٧ في الشكل المقابِل ، أثبِت أنّ الشكل أ ب جـ د مستطيل .

البرهان ق(د أ جـ) = ق (ب جـ أ)

(وهما وضع تبادل)

∵ أد // ب جـ ← ①

أد = ب جـ معطى ← ②

من ① ، ② نستنتج أن الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع ← ③

لأن فيه ضلعين متقابلين متطابقان ومتوازيان

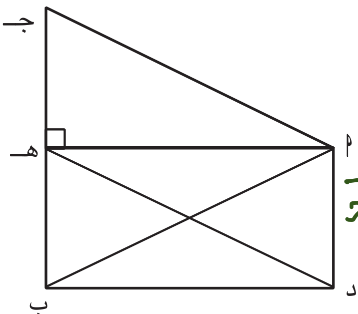
∵ د م = م أ معطى

د م = م ب ، جـ م = م أ القطران ينصف كل منهما الآخر

∴ د ب = أ جـ ← ④

من ③ ، ④ نستنتج أن الشكل أ ب جـ د مستطيل

لأنه متوازي أضلاع قطراه متطابقان



٨ في الشكل أ ب جـ مثلّث متطابق الضلعَين ، فيه أ ب = أ جـ ،
أ د هـ جـ متوازي أضلاع ، أ هـ ⊥ ب جـ .
أثبِت أنّ الشكل أ د ب هـ مستطيل .

البرهان ∵ أ ب جـ △ متطابق الضلعين ، أ هـ ⊥ ب جـ

∴ ب هـ = جـ هـ ← ① (من خواص المثلث متطابق الضلعين)

∵ أ د هـ جـ متوازي أضلاع

∴ أ د = ب هـ ← ②

من ① ، ② نستنتج أن أ د = ب هـ

أ د // جـ هـ ، ∵ جـ ، هـ ، ب على استقامة واحدة

∴ أ د // ب هـ ← ③

من ② ، ③ نستنتج أن الشكل أ د ب هـ متوازي أضلاع ← ④

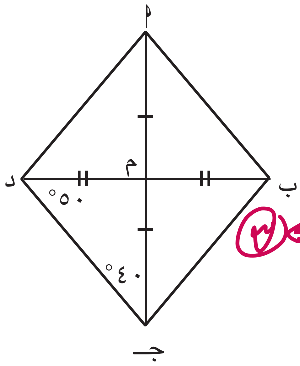
لأن فيه ضلعين متقابلين متوازيان ومتطابقان

∵ أ هـ ⊥ ب هـ ∴ ق(أ هـ ب) = ٩٠° ← ⑤

من ④ ، ⑤ نستنتج أن الشكل أ د ب هـ مستطيل

لأنه متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة

٩ في الشكل المقابِل ، أثبِت أنّ الشكل ٩ ب جـ د معيَّن .



البرهان

∵ ٩م = م جـ ← ①

ب م = م د ← ②

من ① ، ② نستنتج أن الشكل ٩ ب جـ د متوازي أضلاع ← ③

لأن قطراه ينصف كل منهما الآخر

Δ جـ م د فيه

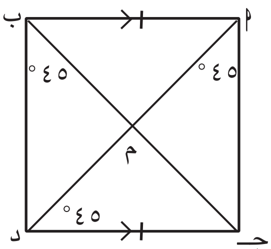
ق(∠جـ م د) = ١٨٠° − (٤٠° + ٥٠°) = ٩٠°

∴ ٩جـ ⊥ ب د ← ④

من ③ ، ④ نستنتج أن الشكل ٩ ب جـ د معين

لأنه متوازي أضلاع قطراه متعامدان

١٠ في الشكل المقابِل ، أثبِت أنّ الشكل ٩ ب د جـ مربّع .



البرهان

∵ ٩ب = جـ د ← ①

٩ب // جـ د ← ②

من ① ، ② نستنتج أن ٩ ب د جـ متوازي أضلاع

فيه ضلعين متقابلين متطابقان ومتوازيان

∴ ٩جـ // ب د

∴ ق(∠جـ ٩ م) = ق(∠ب د م) = ٤٥° (بالتبادل والتوازي)

∴ Δ م ب د متطابق الضلعين

∴ ق(∠ب م د) = ١٨٠° − (٤٥° + ٤٥°) = ٩٠°

∴ ٩د ⊥ ب جـ ← ③

٩م = م د ، جـ م = م ب ، م ب = م د

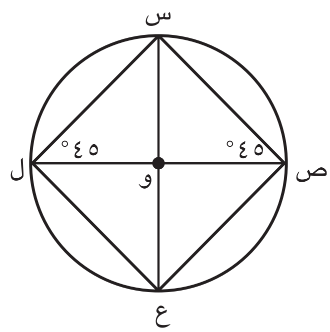
٩د = ب جـ ← ④

من ③ ، ④ نستنتج أن ٩ ب د جـ مربع

لأنه متوازي أضلاع قطراه متعامدان ومتطابقان

١١ في الشكل المقابِل : و مركز الدائرة ،

أثبِت أنّ الشكل س ص ع ل مربّع .



البرهان

صو = ول ، سو = وع

(أنصاف أقطار في الدائرة)

∴ الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع

لأن فيه القطران ينصف كل منهما الآخر

△ س ص ل فيه

ق(س ص ل) = ق(س ل ص) = ٤٥°

∴ △ س ص ل متطابق الضلعين

∴ س ص = س ل ← (١)

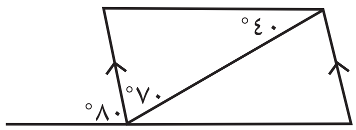
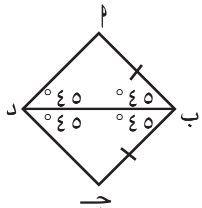
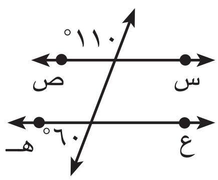
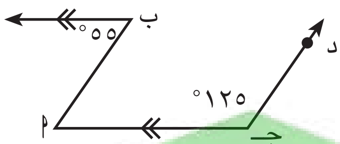
∵ س ع = ص ل ← (٢) (أقطار في الدائرة)

من (١) ، (٢) نستنتج أن الشكل س ص ع ل مربع

لأنه متوازي أضلاع قطراه متطابقان وفيه ضلعان متجاوران متطابقان

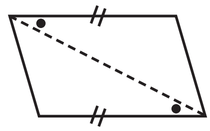
ثانيًا : البنود الموضوعية

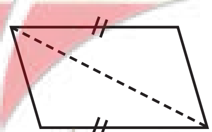
في البنود (١ - ٥) ظلِّل أ إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل ب إذا كانت العبارة غير صحيحة .

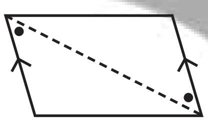
١ الشكل الرباعي المرسوم يمثّل متوازي أضلاع . 	أ	ب
٢ المستطيل هو متوازي أضلاع قطراه متطابقان .	أ	ب
٣ الشكل المقابِل يمثّل مربّعًا . 	أ	ب
٤ من الشكل المرسوم $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ع هـ}}$ 	أ	ب
٥ من الشكل المقابِل وحسب البيانات المدوَّنة . فإنّ $\overline{\text{ا ب}}$ // $\overleftarrow{\text{جـ د}}$ 	أ	ب

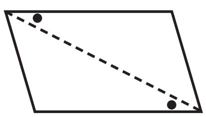
في البنود (٦ - ١٤) لكلّ بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الإجابة الصحيحة .

٦ الشكل الذي يمثّل متوازي أضلاع فيما يلي هو :

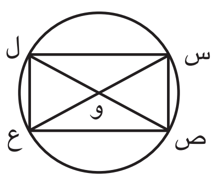
أ 

ب 

ج 

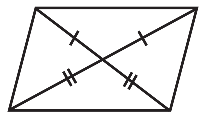
د 

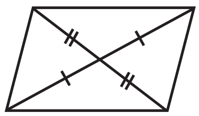
٧ الشكل المقابِل يمثّل دائرة مركزها و ، فإنّ الشكل س ص ع ل هو :

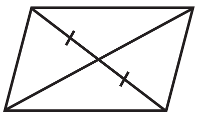


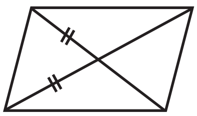
أ مربّع   ب مستطيل   ج معيَّن   د شبه منحرف

٨ الشكل الذي يمثّل متوازي أضلاع فيما يلي هو :

أ


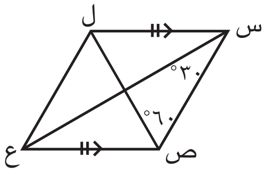
ب


ج


د


---

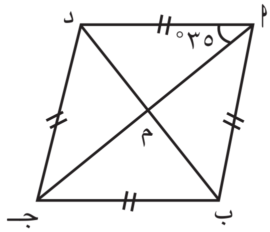
٩ في الشكل المقابِل س ص ع ل يمثّل



أ شبه منحرِف　ب مربّعًا　ج مستطيلًا　د معيَّنًا

---

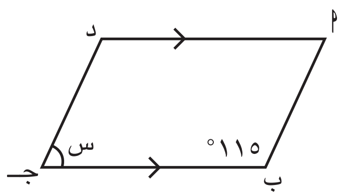
١٠ في الشكل المقابِل ق (جـ بٓ د) =



أ ٣٥°　ب ٥٥°　ج ٤٥°　د ٦٥°

---

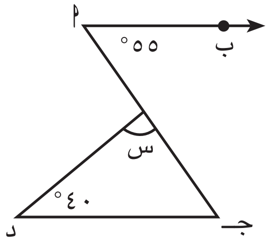
١١ في الشكل المقابِل قيمة س التي تجعل الشكل ا ب جـ د متوازي أضلاع هي :



أ ١١٥°　ب ٥٥°　ج ٧٥°　د ٦٥°

---

١٢ في الشكل المقابِل قيمة س التي تجعل ا ب // د جـ تساوي :



أ ٥٥°　ب ٤٠°　ج ٨٥°　د ٩٥°

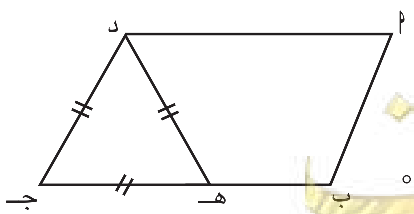
---

١٣ ا ب جـ د متوازي أضلاع فيه ق (آ) = ق (بٓ) فإنّ الشكل ا ب جـ د يكون :

أ مستطيلًا　ب مربّعًا　ج معيَّنًا　د شبه منحرِف

---

١٤ في الشكل المقابِل ا ب جـ د متوازي أضلاع حيث
د جـ = جـ هـ = د هـ ، فإنّ ق (بٓ) يساوي :



أ ١٠٠°　ب ٦٠°　ج ١٢٠°　د ١٣٠°