2025/2026

الرياضيات

الفصل الدراسي الثاني

الصف العاشر

اعداد:

أ/ حسام بيومي

الوحدة السادسة

هندسة الدائرة

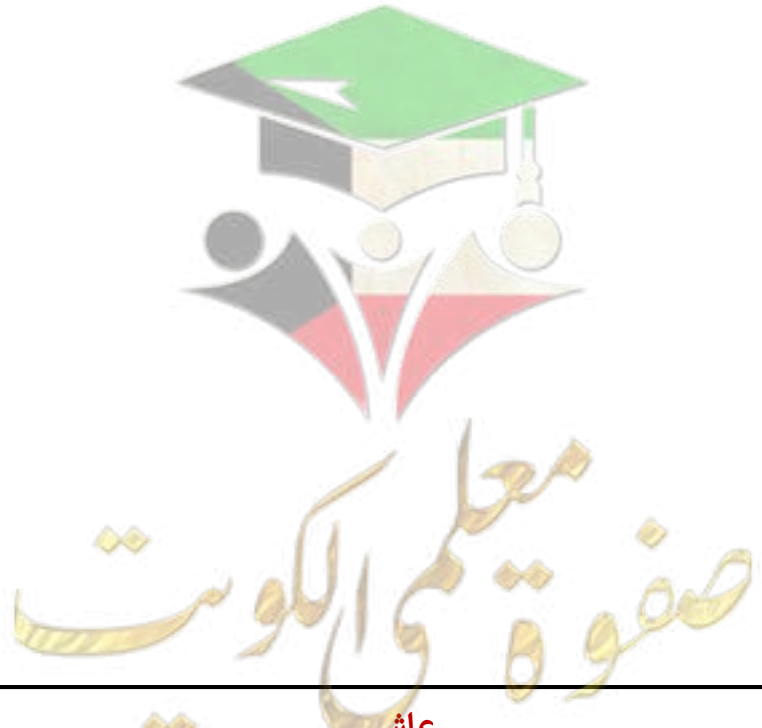
٦-١ (أ) الدائرة

٦-١ (ب) مماس الدائرة

٦-٢ الأوتار والأقواس

٦-٣ الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

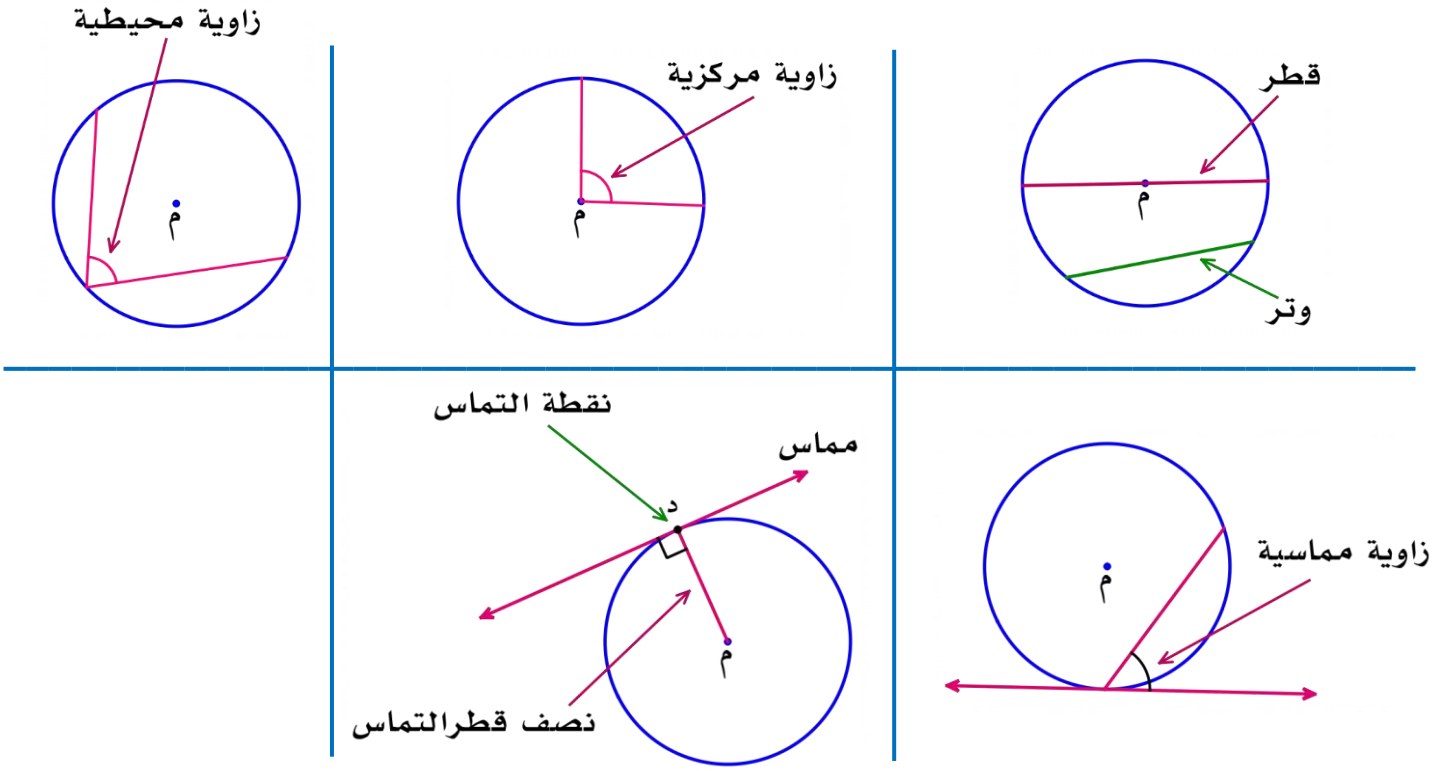
٦-٤ الأوتار المتقاطعة - المماس



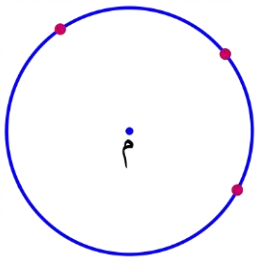
بند ٦-١ (م)

الدائرة

الدائرة هي مجموعة نقاط المستوي التي تبعد كل منها عن نقطة ثابتة م في المستوي بعدًا ثابتًا تسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة ويسمى البعد الثابت طول نصف قطر الدائرة ويرمز إليه عادة بالرمز نق

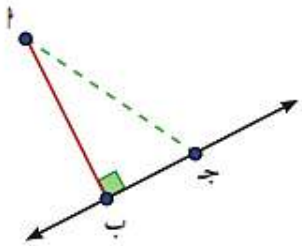


نظرية (1)



كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.

استنتاج



في الشكل المقابل، $\overline{أب} \perp \overline{ب جـ}$

بفرض أن المستقيم $\overleftrightarrow{أجـ}$ يمر بالنقطة أ عموديًا على $\overleftrightarrow{ب جـ}$.

يصبح مجموع قياسات زوايا Δأب جـ أكبر من ١٨٠° $(ق(\hat{ب}) + ق(\hat{جـ}) = ١٨٠°)$

وهذا يتناقض مع النظرية: مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ $\overleftrightarrow{أجـ}$ ليس عموديًا على $\overleftrightarrow{ب جـ}$.

استنتاج ١: من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بهذه النقطة وعمودي على المستقيم المعلوم.

لاحظ أنه في Δأب جـ، أب < أجـ مهما كان موضع النقطة جـ على المستقيم (جـ لا تنطبق على ب).

استنتاج ٢: أقصر بعد بين نقطة ومستقيم هو البعد العمودي.

كلما ابتعدت جـ عن ب على المستقيم أصبح طول $\overline{أجـ}$ أكبر.

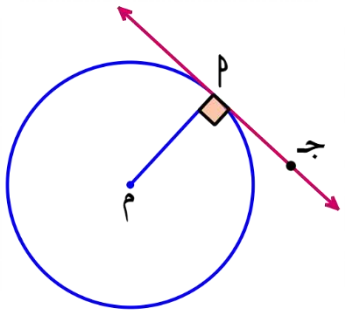
بند ٦-١ (ب)

مماس الدائرة

مماس الدائرة

المماس للدائرة هو مستقيم في المستوي يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة.

نقطة التقاطع تسمى نقطة التماس.



$\overleftrightarrow{أجـ}$ مماس

$\overleftarrow{أجـ}$ شعاع مماس

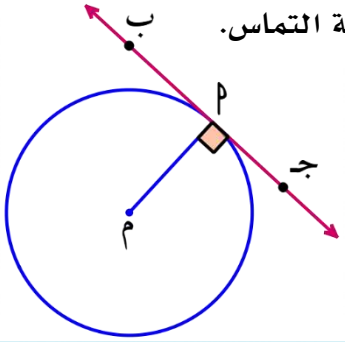
$\overline{أجـ}$ قطعة مماسية

$\overline{أم}$ نصف قطر التماس

نظرية (2)

المماس عمودي على نصف قطر التماس.

إذا كان مستقيم مماسًا لدائرة فإنه يكون متعامدًا مع نصف القطر المار بنقطة التماس.



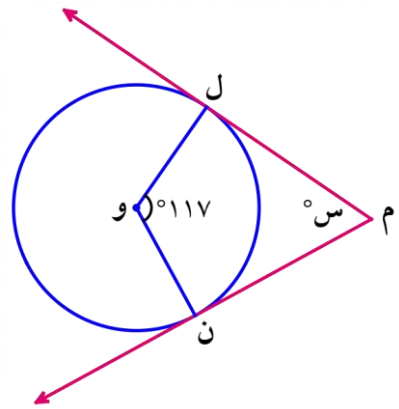
أي أن: $\overleftrightarrow{ب جـ} \perp \overline{أم}$

أي أن: إذا كان $\overleftrightarrow{ب جـ}$ مماس للدائرة $\Leftarrow \overline{أم} \perp \overleftrightarrow{ب جـ}$

مثال (2) صفحة 15

في الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{م ل}$ ، $\overleftrightarrow{م ن}$ مماسان للدائرة التي مركزها و .

أوجد قياس الزاوية $\angle ل م ن$



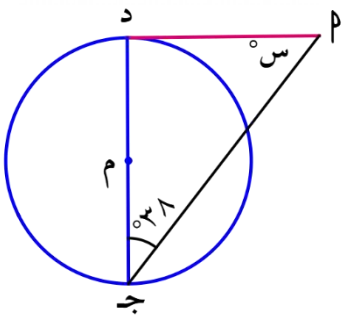
صفوة معلمي الكويت

مماس الدائرة

حاول أن تحل (2) صفحة 15

في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{أد}$ مماس للدائرة التي مركزها م.

أوجد قيمة س°.



.....

.....

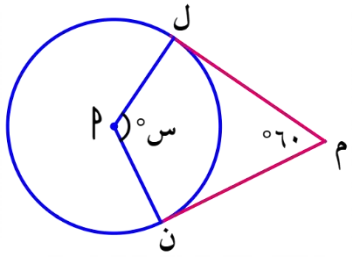
.....

.....

تمارين (2 – 1) صفحة 9

في التمرينين (١ – ٢) القطع المستقيمة تمس الدوائر ، أ مركز كل دائرة. أوجد قيمة س.

١



.....

.....

.....

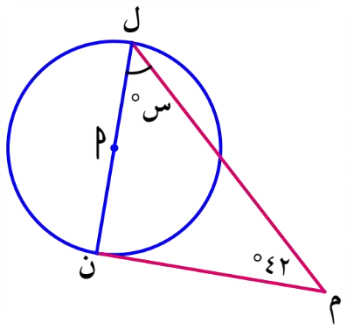
.....

.....

.....

.....

٢



.....

.....

.....

.....

.....

.....

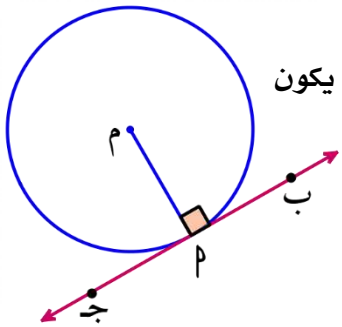
.....

صفوة معلمي الكويت

مماس الدائرة

نظرية (3)

المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماسًا لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

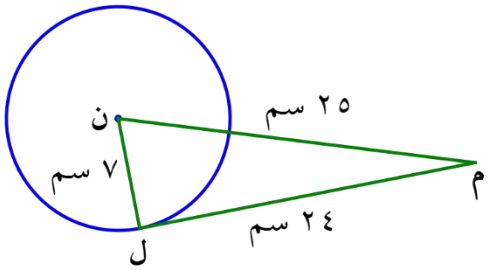


أي أن: إذا كان $\overleftrightarrow{ب جـ} \perp \overline{أم}$ $\Leftarrow$ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ مماس للدائرة

مثال (4) صفحة 18

في الشكل المقابل ، ن ل = ٧سم ، ل م= ٢٤ سم ، ن م = ٢٥ سم

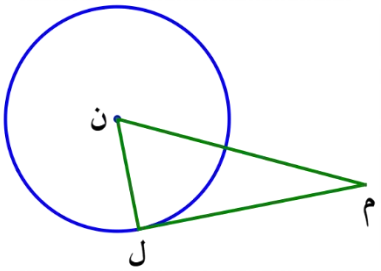
أثبت أن $\overleftrightarrow{م ل}$ مماس للدائرة التي مركزها ن .



حاول أن تحل (4) صفحة 18

في الشكل المقابل، إذا كان ن ل = ٤ ، ل م = ٧ ، ن م = ٨

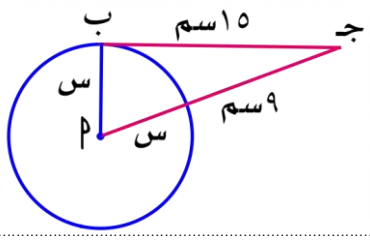
فهل $\overleftrightarrow{م ل}$ مماس للدائرة ؟ فسر إجابتك.



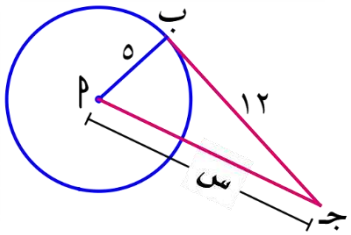
تمارين (9 – 8) صفحة 10

في التمرينين (٨ – ٩) $\overleftrightarrow{ب جـ}$ مماس للدائرة. أوجـد قيمة س.

٨

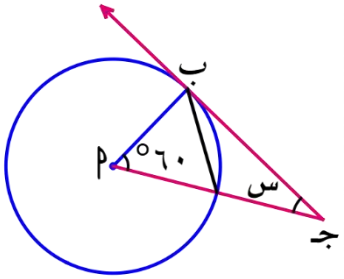


٩



تمرين (1) صفحة 11

المستقيم $\overleftrightarrow{ب جـ}$ في الشـكل المقابل مماس للدائرة، أوجـد قيمة س.

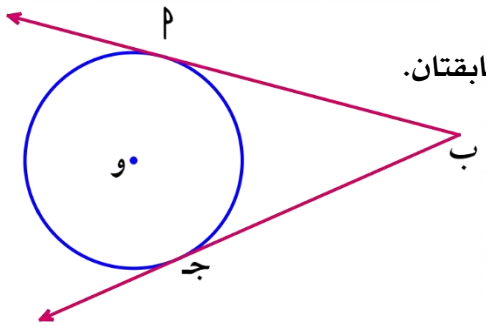


صفوة معلمي الكويت

مماس الدائرة

نظرية (4)

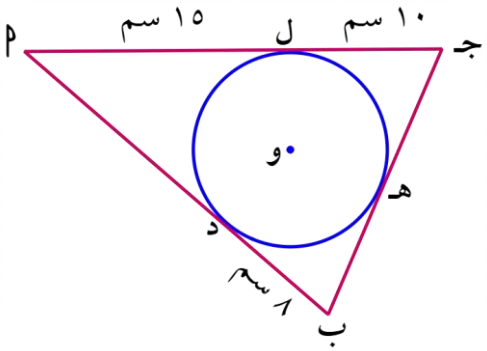
القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.



أي أن: $\overline{أب} \cong \overline{جـب}$

مثال(6)صفحة 20

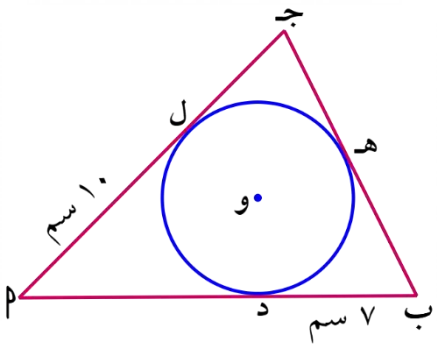
في الشكل المقابل: أوجد محيط المثلث أ ب جـ



حاول أن تحل(6)صفحة 21

في الشكل المقابل: إذا كان محيط المثلث أ ب جـ = ٥٠ سم،

فأوجد طول $\overline{ب جـ}$



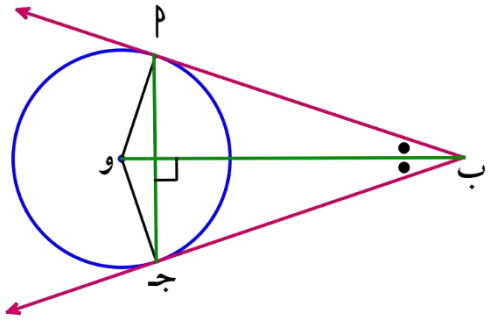
نتائج النظرية (4)

المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين

$\overleftarrow{ب و}$ منصف الزاوية $\hat{أ ب جـ}$

$\overleftarrow{وب}$ منصف الزاوية $\hat{أ وجـ}$

$\overline{وب} \perp \overline{أ جـ}$



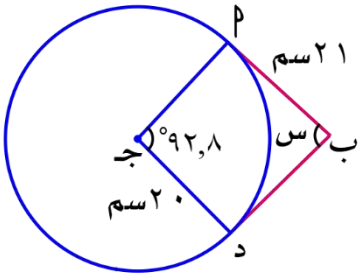
تمرين(5)صفحة11

$\overleftrightarrow{ب أ}$ ، $\overleftrightarrow{ب د}$ مماسان للدائرة.

١ أوجد قيمة س.

٢ أوجد محيط الشكل الرباعي ب أ جـ د

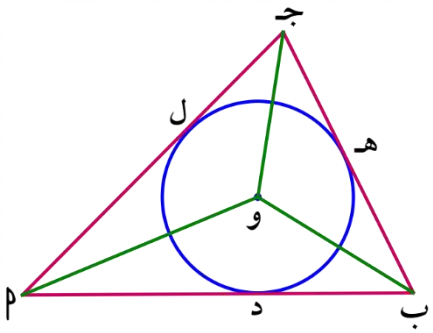
٣ أوجد ب جـ



الدائرة المحاطة بمثلث(الداخلة)

هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل.

مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث

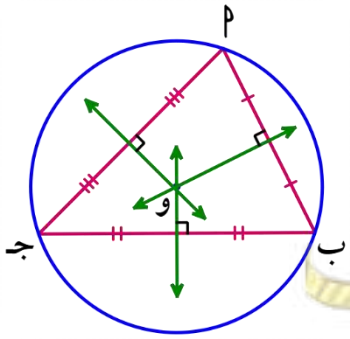


الدائرة المحيطة لمثلث(الخارجة)

هي دائرة تمر برؤوس المثلث الثلاثة.

مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث

(نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع المثلث).

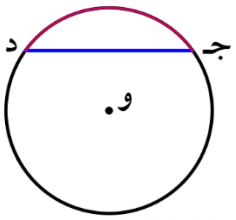


بند ٦ – ٢

الأوتار والأقواس

الوتر هو قطعة مستقيمة ينتمي طرفاها إلى دائرة

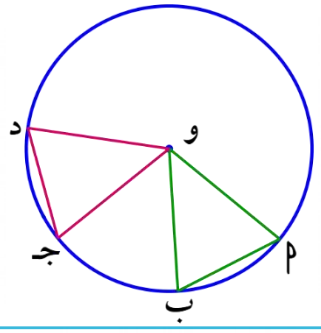
يبين الشكل المقابل الوتر $\overline{جـ د}$ والقوس $\overset{\frown}{جـ د}$ المناظر لهذا الوتر.



نظرية (1)

في دائرة أو في دوائر متطابقة:

- للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة.
- الأوتار المتطابقة تقابل أقواسًا متطابقة.
- للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة.

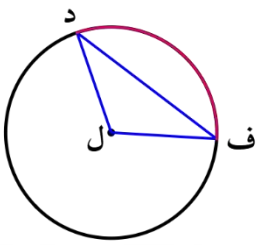


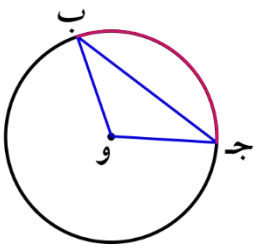
مثال (1) صفحة 26

في الشكل المقابل الدائرتان متطابقتان،

إذا كان $\overset{\frown}{ب جـ} \cong \overset{\frown}{د ف}$ ماذا تستنتج؟

إذا كان $\overline{ب جـ} \cong \overline{د ف}$ ماذا تستنتج؟





.....

.....

.....

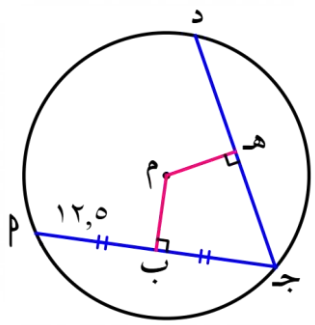
.....

نظرية (2)

- الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.
- الأوتار على أبعاد متساوية من مركز الدائرة تكون متطابقة.

مثال (2) صفحة 28

في الشكل المقابل، ليكن م مركز الدائرة. م ب = م هـ ، أوجد طول $\overline{جـ د}$. فسر.



.....

.....

.....

.....

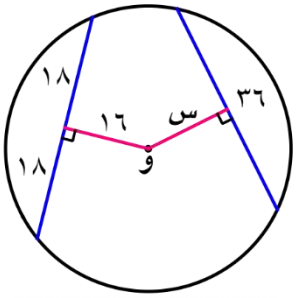
.....

.....

.....

حاول أن تحل (2) صفحة 28

في الشكل المقابل، دائرة مركزها و. أوجد قيمة س. فسر إجابتك.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

نظرية (3)

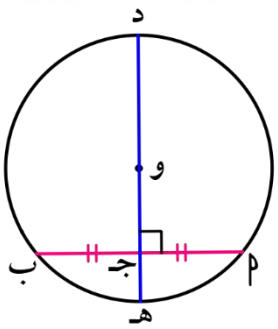
- القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلاً من قوسيه.
- القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) في دائرة يكون عموديًا على هذا الوتر.
- العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة.

أي أنه

إذا كان $\overline{\text{د هـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ فإن جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

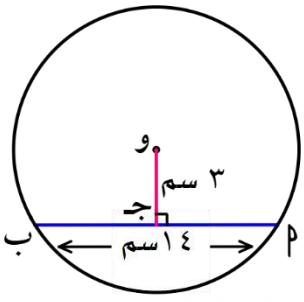
د منتصف $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ الأكبر ، هـ منتصف $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ الأصغر

وإذا كانت جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ فإن $\overline{\text{د هـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$



مثال (3) صفحة 29

أ في الشكل المقابل، أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و.



.....

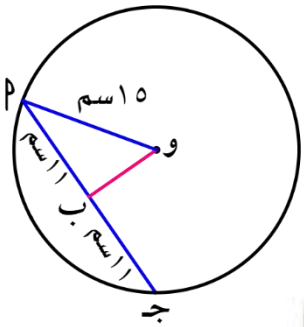
.....

.....

.....

.....

ب في الشكل المقابل، أوجد البعد بين مركز الدائرة والوتر.



.....

.....

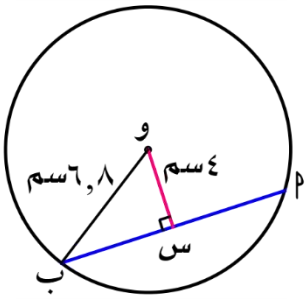
.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

حاول أن تحل(3) صفحة30



استخدم الشكل المقابل لإيجاد:

١ طول الوتر $\overline{أب}$

٢ المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر $\overset{\frown}{أب}$.

.....

.....

.....

.....

.....

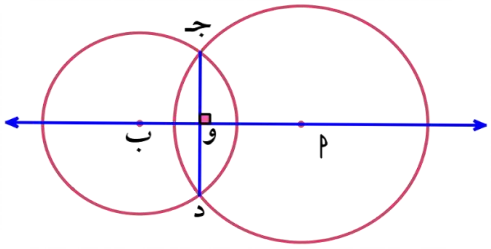
.....

.....

.....

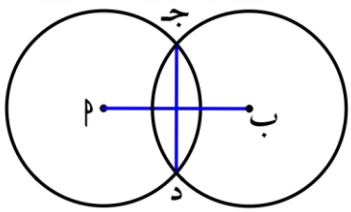
.....

نتيجة



خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًا على الوتر المشترك بينهما وينصفه.

تمرين(8)صفحة 14



دائرتان مركزاهما على الترتيب أ ، ب تتقاطعان بالنقطتين جـ ، د

وطول نصف قطر كل دائرة ٦سم

أوجـد طول $\overline{جـد}$ إذا كان طول $\overline{أب}$ يساوي ٨ سم.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

تعريف

- الزاوية التي رأسها مركز الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى بالزاوية المركزية.
- الزاوية التي رأسها إحدى نقاط الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى بالزاوية المحيطية.

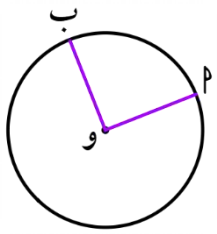
نظرية (1)

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة.

مثال(1)صفحة 33

في الشكل المقابل دائرة مركزها و. إذا كان ق($\overset{\frown}{أب}$) = ٩٠°

فأوجد ق($\overset{\frown}{أوب}$).



.....

.....

.....

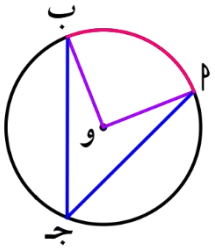
.....

.....

نظرية (2)

في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

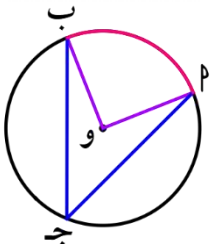
في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بنفس القوس



ق($\hat{أجب}$) = $\frac{١}{٢}$ ق($\hat{أوب}$) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{أب}$).

مثال(2)صفحة 34

في الشكل المقابل: إذا كان ق($\overset{\frown}{أب}$) = ٨٠° فأوجد ق($\hat{أجب}$).



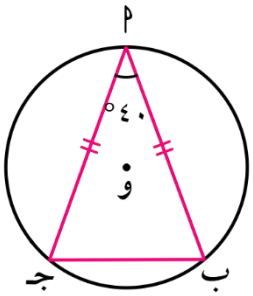
.....

.....

.....

.....

مثال (3) صفحة 34

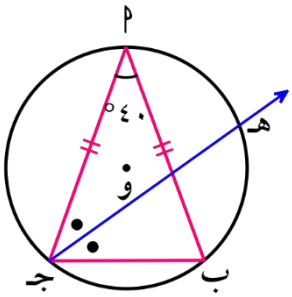


في الشكل المقابل أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين حيث

أ ، ب ، جـ نقاط على الدائرة التي مركزها و ، ق(ب $\hat{أ}$ جـ) = ٤٠°

أوجد قياس كل من الأقواس $\overset{\frown}{أب}$ ، $\overset{\frown}{بجـ}$ ، $\overset{\frown}{أجـ}$.

حاول أن تحل (3) صفحة 35



في الشكل المقابل أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين حيث

أ ، ب ، جـ نقاط على الدائرة التي مركزها و ، ق(ب $\hat{أ}$ جـ) = ٤٠°

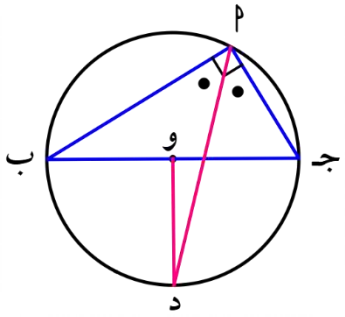
إذا كان $\overleftarrow{جـهـ}$ ، منصف الزاوية الداخلية $\hat{أجـب}$ ويقطع الدائرة في النقطة هـ

ما قياس القوس الأصغر $\overset{\frown}{أهـ}$ ؟

صفوة معلمي الكويت

مثال (4) صفحة 35

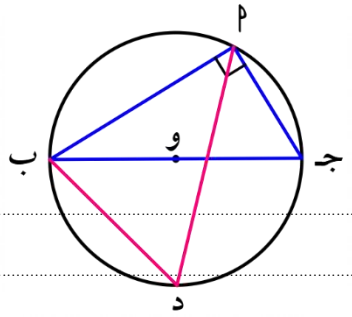
في الشكل المقابل: دائرة مركزها و. أثبت أن $\overline{د و} \perp \overline{ب جـ}$



حاول أن تحل (4) صفحة 35

في الشكل المقابل دائرة مركزها و. إذا كان ق(∠أ ب جـ) = ٣٠°

أوجد ق(∠أ د ب)

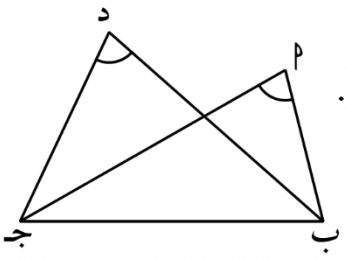


بند ٦ – ٣

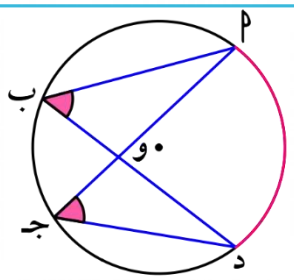
الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

نتائج

- كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.
- كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.
- كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة) تكون زواياه المتقابلة متكاملة.
- في الشكل إذا تطابقت الزاويتان $\hat{أ}$ ، $\hat{د}$ المرسومتان على القاعدة $\overline{ب جـ}$ وفي جهة واحدة منها. كان الشكل أ ب جـ د رباعيًا دائريًا

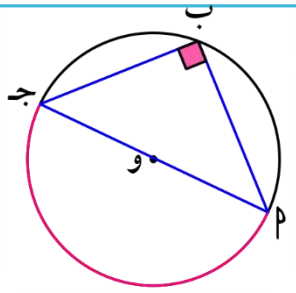


الشكل الرباعي الدائري هو مضلع رباعي تقع رؤوسه على دائرة.



$\overset{\frown}{أ ب د}$ ، $\overset{\frown}{أ جـ د}$ تحصران $\overset{\frown}{أ د}$

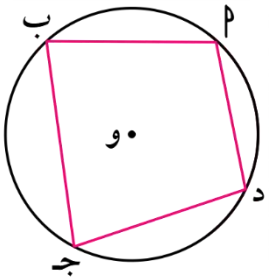
$\therefore$ ق(أ$\hat{ب}$ د) = ق(أ$\hat{جـ}$ د)



أ$\hat{ب}$ جـ تحصر $\overset{\frown}{أ جـ}$ (نصف دائرة)

$\therefore$ ق(أ$\hat{ب}$ جـ) = ٩٠°

أ$\hat{ب}$ جـ زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة وهي زاوية قائمة

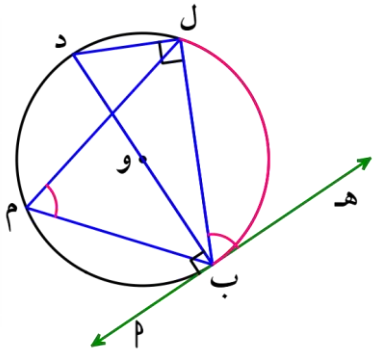


ق($\hat{أ}$) + ق($\hat{جـ}$) = ١٨٠°

ق($\hat{ب}$) + ق($\hat{د}$) = ١٨٠°

نظرية (3)

- قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.
- قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.



أي أن ق(هـ$\hat{ب}$ ل) = ق(ل م ب)

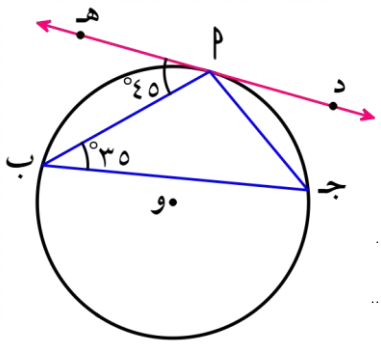
ق(هـ$\hat{ب}$ ل) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{ل ب}$)

صفوة معلمي الكويت

مثال (7) صفحة 39

في الشكل المقابل إذا كان $\overleftrightarrow{دهـ}$ مماسًا للدائرة عند م.

فأوجد ق(جـمˆ ب)

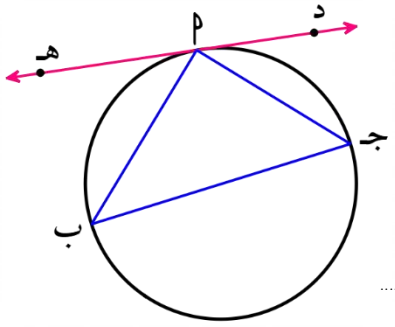


حاول أن تحل (7) صفحة 39

في الشكل المقابل، لدينا ق(د مˆ جـ) = ٤٠° ، ق(هـ مˆ ب) = ٥٠°

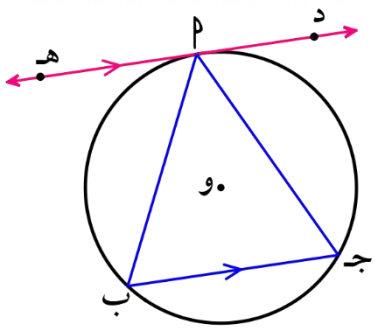
١ أوجد قياسات زوايا المثلث م ب جـ .

٢ أثبت أن $\overline{جـب}$ قطر للدائرة.



صفوة معلمي الكويت

مثال (9) صفحة 40

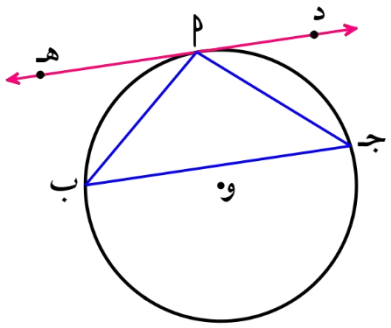


في الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{دهـ}$ مماس للدائرة عند النقطة م ،

$\overline{ب جـ}$ وتر في الدائرة موازٍ للمماس $\overleftrightarrow{دهـ}$

أثبت أن المثلث م ب جـ متطابق الضلعين

حاول أن تحل (9) صفحة 41



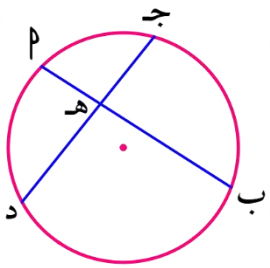
في الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{دهـ}$ مماس للدائرة عند النقطة م،

المثلث م ب جـ متطابق الضلعين (م ب = م جـ)

أثبت أن $\overleftrightarrow{دهـ}$ // $\overline{ب جـ}$

١ - تقاطع الأوتار داخل الدائرة

نظرية (1)

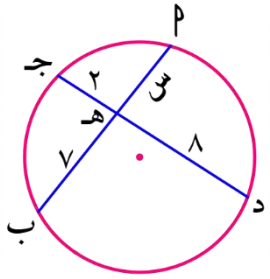


إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولي جزئي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزئي الوتر الآخر.

أي أن: هـ ب × هـ أ = هـ جـ × هـ د

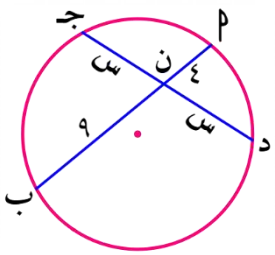
مثال (1) صفحة 43

في الشكل المقابل: أوجـــد قيمة س.

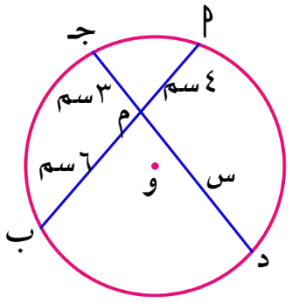


حاول أن تحل (1) صفحة 43

في الشكل المقابل: أوجـــد قيمة س.



حاول أن تحل (2) صفحة 44



في الدائرة المقابلة التي مركزها و:

م أ = ٤ سم ، م ب = ٦ سم ، م جـ = ٣ سم ، م د = س

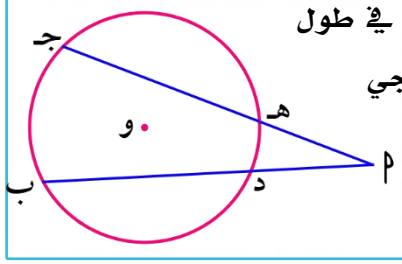
١ أوجـد قيمة س.

٢ أوجـد البعد بين المركز و والوتر $\overline{دجـ}$ إذا علمت أن طول نصف قطر الدائرة يساوي ٦ سم.

٢ - تقاطع الأوتار خارج الدائرة

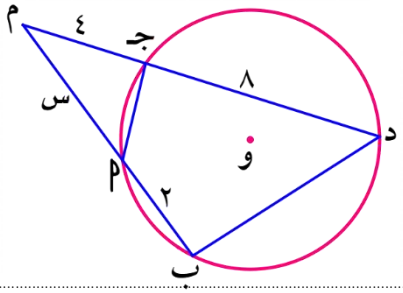
نتيجة (1)

إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي



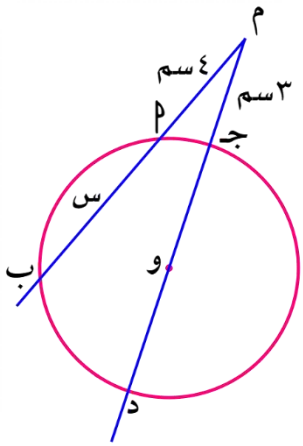
أي أن: م هـ × م جـ = م د × م ب

مثال (3) صفحة 45



في الشكل المقابل: أوجـــد قيمة س.

حاول أن تحل (3) صفحة 45



في الشكل المقابل، دائرة مركزها و. طول نصف قطرها يساوي ٤سم.

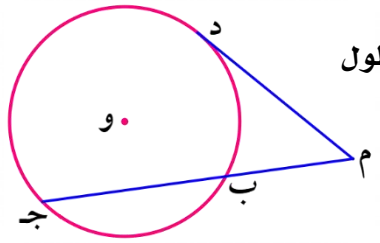
أوجد قيمة س.

صفوة معلمي الكويت

٣ - تقاطع مماس وقاطع الدائرة من نقطة خارج الدائرة

نتيجة (2)

إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.

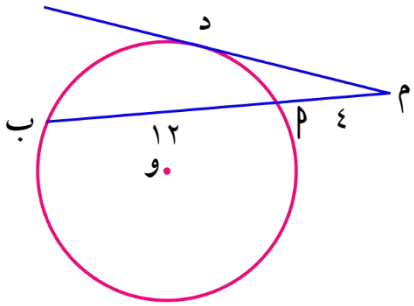


أي أن: $(م د)^{2} = م ب \times م جـ$

مثال (4) صفحة 46

في الشكل المقابل:

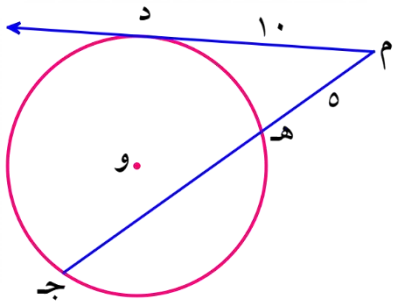
أوجـــد طول القطعة المماسية $\overline{م د}$ علمًا بأن م = ٤سم ، ب= ١٢ سم



حاول أن تحل (4) صفحة 46

في الشكل المقابل: $\overline{م د}$ قطعة مماسية حيث م د = ١٠سم ، م هـ = ٥سم

أوجـد طول $\overline{هـ جـ}$.



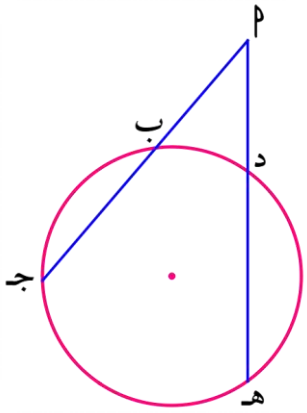
صفوة معلمي الكويت

الأوتار المتقاطعة ، المماس

تمرين (1) صفحة 21

في الشكل المقابل: أجـ = ٢٠ ، ب جـ = ١٥ ، أهـ = ٢٥

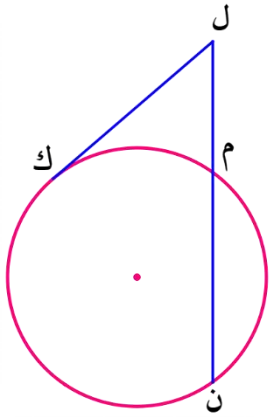
أوجـد: د هـ



تمرين (2) صفحة 21

في الشكل المقابل: $\overline{ل ك}$ مماس للدائرة ، ل ك = ٨ ، ل م = ٤

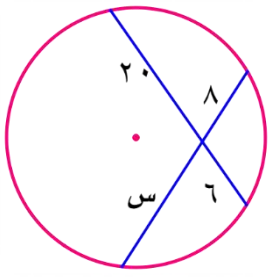
أوجـد: م ن



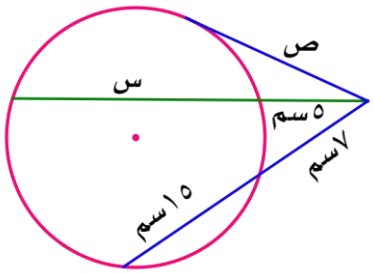
تمارين (4 – 3) صفحة 21

في التمرينين (٣ – ٤) أوجد قيمة كل متغيّر.

٣



٤



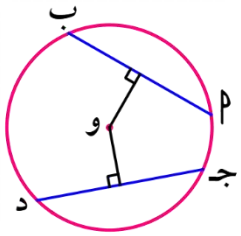
صفوة معلمي الكويت

هندسة الدائرة

الأسئلة الموضوعية

في التمارين (١ – ٧) ، ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

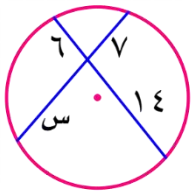
1 في الشكل المقابل: $\overline{أب} \cong \overline{جـ د}$



(أ) (ب)

---

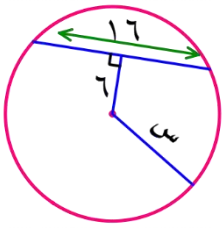
2 في الشكل المقابل: قيمة س = ١٢



(أ) (ب)

---

3 في الشكل المقابل: قيمة س = ٨



(أ) (ب)

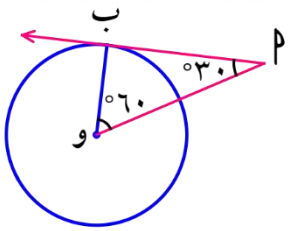
---

4 كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.

(أ) (ب)

---

5 في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{أب}$ يكون مماسا للدائرة عند ب



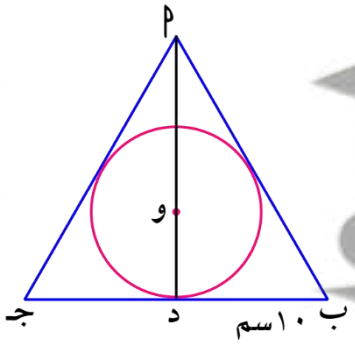
(أ) (ب)

---

6 في الشكل المقابل: دائرة محاطة بمثلث أب جـ

إذا كان المثلث أب جـ متطابق الأضلاع ، ب د = ١٠ سم

فإن محيط المثلث أب جـ يساوي ٤٥ سم.

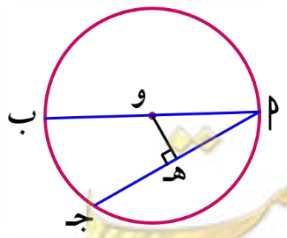


(أ) (ب)

---

7 في الشكل المقابل: إذا كان طول قطر دائرة يساوي ١٠ سم

أجـ = ٨ سم فإن هـ و = ٣ سم



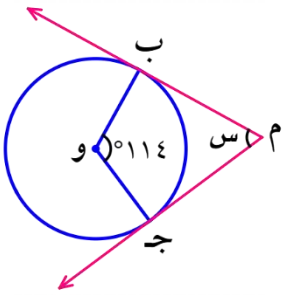
(أ) (ب)

صفوة معلمي الكويت

هندسة الدائرة

في التمارين (١ – ١٥) ، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

1 إذا كان $\overleftarrow{دب}$ ، $\overleftarrow{دجـ}$ مماسان للدائرة. فإن س =

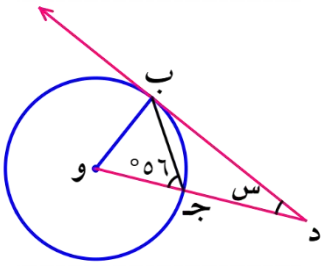


(أ) ٢٦°　(ب) ٥٧°

(جـ) ٦٦°　(د) ١١٤°

---

2 إذا كان $\overleftarrow{دب}$ مماس للدائرة. فإن س =

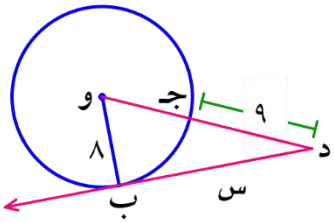


(أ) ٣٤°　(ب) ٤٠°

(جـ) ٢٢°　(د) ٢٨°

---

3 إذا كان $\overleftarrow{دب}$ مماس للدائرة. فإن س =

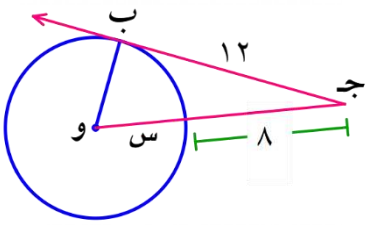


(أ) ٨　(ب) ٩

(جـ) ١٥　(د) ١٧

---

4 إذا كان $\overleftarrow{جـب}$ مماس للدائرة. فإن س =

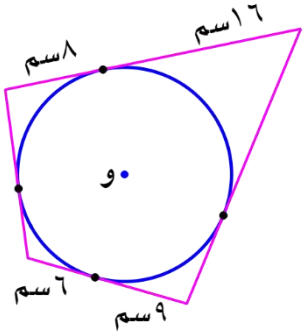


(أ) ٢　(ب) ٣

(جـ) ٤　(د) ٥

---

5 في الشكل المقابل يحيط المضلع بدائرة. محيط الشكل الرباعي يساوي:



(أ) ٧٨ سم　(ب) ٨٠ سم

(جـ) ٨٢ سم　(د) ٨٧ سم

صفوة معلمي الكويت

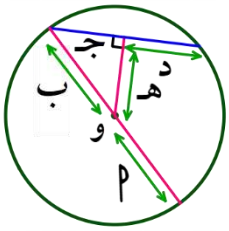
هندسة الدائرة

6 إذا كان طول قطر دائرة يساوي ٢٥سم وطول أحد أوتارها ١٦سم فإن البعد بين مركز الدائرة والوتر هو تقريبًا:

(أ) ٩سم (ب) ٩,٦سم (جـ) ١٨سم (د) ١٩,٢ سم

---

7 في الشكل المقابل العبارة الخاطئة فيما يلي هي:

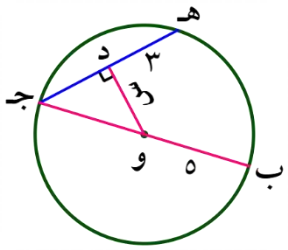


(أ) جـ = د (ب) أ = ب

(جـ) جـ^{٢} + هـ^{٢} = ب^{٢} (د) هـ = د

---

8 في الشكل المقابل قيمة س تساوي:



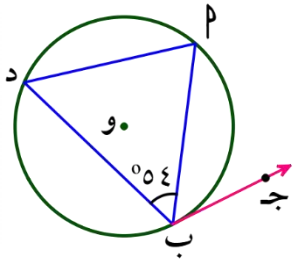
(أ) ١٠ (ب) ٤

(جـ) ٥ (د) ٦,٥

---

9 في الشكل المقابل، إذا كان ق($\overset{\frown}{ب د}$) = ١٤٠° ، $\overleftarrow{ب جـ}$ مماس

فإن: ق($\overset{\frown}{أ ب جـ}$) =



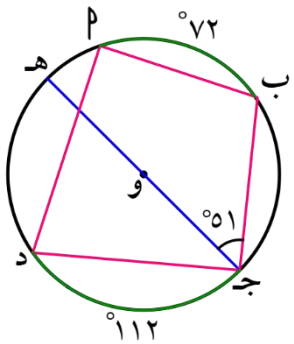
(أ) ٥٦° (ب) ١٢٤°

(جـ) ٧٠° (د) ٥٠°

---

10 في الشكل المقابل، إذا كان ق($\overset{\frown}{أ ب}$) = ٧٢° ، ق($\overset{\frown}{ب جـ هـ}$) = ٥١°

فإن: ق($\overset{\frown}{أ هـ}$) =



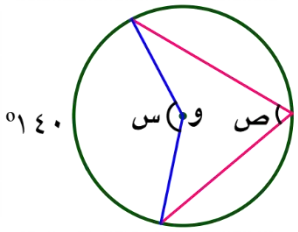
(أ) ٣٠° (ب) ١٠٢°

(جـ) ٧٢° (د) ٦٨°

صفوة معلمي الكويت

هندسة الدائرة

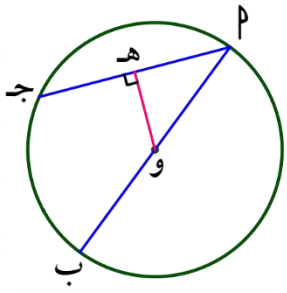
11 في الشكل المقابل، قيمة كل من س ، ص على الترتيب هما:



(أ) ٢٨٠° ، ١٤٠°
(ب) ٧٠° ، ٣٥°
(جـ) ١٤٠° ، ٤٠°
(د) ١٤٠° ، ٧٠°

---

12 في الشكل المقابل، دائرة مركزها و ، أب = ٢٠ ، أجـ = ١٦ ، وهـ ⊥ أجـ

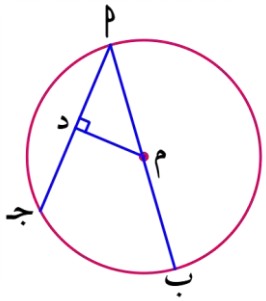


فإن وهـ =

(أ) ١٠
(ب) ٨
(جـ) ٥
(د) ٦

---

13 في الشكل المقابل: دائرة مركزها م ، أب = ٢٠ ، م د = ٦ ، م د ⊥ أجـ

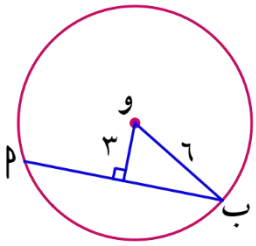


فإن أجـ =

(أ) ٨
(ب) ٦
(جـ) ١٠
(د) ١٦

---

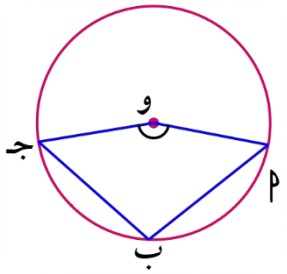
14 في الشكل المقابل: دائرة مركزها و ، ق ($\overset{\frown}{أب}$) =



(أ) ٦٠°
(ب) ١٠٠°
(جـ) ١٢٠°
(د) ١٤٠°

---

15 في الشكل المقابل، إذا كان ق(أوجـ) = ١٦٠° ، فإن: ق ($\overset{\frown}{ب}$) =



(أ) ٦٠°
(ب) ١٠٠°
(جـ) ٨٠°
(د) ١٢٠°

صفوة معلمي الكويت

الوحدة السابعة

المصفوفات

٧ – ١ تنظيم البيانات في مصفوفات

٧ – ٢ جمع وطرح المصفوفات

٧ – ٣ ضرب المصفوفات

٧ – ٤ مصفوفة الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات)

٧ – ٥ حل نظام من معادلتين خطيتين

صفوة معلمي الكويت

١ – ٧

تنظيم البيانات في مصفوفات

تعريف المصفوفة

المصفوفة هي تنظيم من الأعداد المرتبة في صفوف وأعمدة.
والأعداد المكونة للمصفوفة تسمى عناصر

رتبة المصفوفة

نرمز إلى المصفوفة بأحد حروف الهجاء ونضع تحته خطًا ، نكتب $\underline{أ}$ ونقرأ المصفوفة أ .
عدد الصفوف (م) وعدد الأعمدة (ن) يحددان رتبة المصفوفة ونكتب م × ن

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ٦ & ٧ & ٠ \end{bmatrix}$ المصفوفة $\underline{أ}$ من الرتبة ٢ × ٣

ملاحظة: لكتابة رتبة المصفوفة نكتب أولاً عدد الصفوف يليه عدد الأعمدة.

كتاب الطالب مثال و حاول أن تحل صـ ٥٥ رقم ١ :

اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي.

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣- & ٧- \\ ١ & ٠ & ٩ \end{bmatrix}$

$\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٤- & \frac{٢}{٣} & ٣- \end{bmatrix}$

$\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \\ ٠,٥ \end{bmatrix}$

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ٠ \\ ٢- & ٠,٥ & ٧ \end{bmatrix}$

$\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٨- & ٣ & ١٠ \end{bmatrix}$

$\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٠ & ١٠ \\ ٥- & ١ \\ ٩ & ٠,٦ \end{bmatrix}$

صفوة معلمي الكويت

تنظيم البيانات في مصفوفات

ترميز عناصر المصفوفة

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{21} & أ_{31} \\ أ_{12} & أ_{22} & أ_{32} \\ أ_{13} & أ_{23} & أ_{33} \end{bmatrix}$$

يحدد أي عنصر بدلالة رقم الصف والعمود

فمثلاً $أ_{31}$ تعني العنصر الذي في الصف الأول والعمود الثالث

كتاب الطالب مثال صـ ٥٧ رقم ٣ :

في المصفوفة $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٥ & ٤ \\ ٢ & -٣ & -٧ & ٣,٥ \\ ١ & ٠ & ٩ & -٤ \end{bmatrix}$ اكتب قيمة كل عنصر مما يلي:

$ب_{22}$ =	$ب_{13}$ =	$ب_{11}$ =
$ب_{23}$ =	$ب_{43}$ =	$ب_{32}$ =

المصفوفات: المربعة، الأفقية، العمودية

المصفوفة المربعة: هي مصفوفة فيها عدد الصفوفوف يساوي عدد الأعمدة وفيما عدا ذلك تسمى المصفوفة: مصفوفة مستطيلة

المصفوفة الأفقية: هي مصفوفة مكونة من صف واحد.

المصفوفة العمودية: هي مصفوفة مكونة من عمود واحد.

المصفوفة الصفرية: هي مصفوفة جميع عناصرها أصفار،ويرمز إليها بالرمز $\underline{٠}_{م \times ن}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٥٨ رقم ٤ :

صنف كلاً من المصفوفات التالية.

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٥ \\ ٢ & -٣ & ٧ \\ ١ & ٠ & ٨ \end{bmatrix}$$

$$\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠,٥ \end{bmatrix}$$

.....

$$\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ & -٥ \end{bmatrix}$$

$$\underline{د} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ٠ \\ -٢ & ٠,٥ & ٧ \end{bmatrix}$$

.....

تنظيم البيانات في مصفوفات

المصفوفات المتساوية: تكون مصفوفتان متساويتين إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها، وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية والعكس صحيح

كتاب الطالب مثال وحاول أن تحل صـ ٥٩ رقم ٥ :

هل المصفوفتان أ ، ب متساويتان ؟ فسّر.

$$أ = \begin{bmatrix} -٠,٧٥ & \frac{١}{٥} \\ -٢ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix} \quad ، \quad ب = \begin{bmatrix} -\frac{٣}{٤} & ٠,٢ \\ -٢ & ٠,٥ \end{bmatrix}$$

هل المصفوفتان س ، ص متساويتان ؟ فسّر.

$$س = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix} \quad ، \quad ص = \begin{bmatrix} -١ & ٩ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$$

كتاب الطالب مثال صـ ٥٩ رقم ٦ :

إذا كانت: $\begin{bmatrix} ٢س-٥ \\ ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ ٣ص+١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥ \\ ٣ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ٤ \\ ص+١٨ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص

صفوة معلمي الكويت

تنظيم البيانات في مصفوفات

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٥٩ رقم ٦ :

1 إذا كانت: $\begin{bmatrix} ٣٨ & ٥ \\ ٣ & ٤ص-١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س+٨ & ٥ \\ ٣ & -ص \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص

2 إذا كانت: $\begin{bmatrix} ٣س & س+ص \\ س-ص & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٩ & -١٠ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص

تمرين (6) صـ 30

أوجـد قيم كل من س، ص.

$\begin{bmatrix} س^{٢} & ٤ \\ -٢ & ص^{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٤ \\ -٢ & ٥ص \end{bmatrix}$

صفوة معلمي الكويت

جمع وطرح المصفوفات

لجمع مصفوفتين $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ يجب أن تكونا من **الرتبة نفسها**.

نجمع كل عنصرين لهما الموقع نفسه في $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$

مصفوفة الجمع لها رتبة كل من المصفوفتين $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ (أي أن $\underline{أ}_{م\times ن} + \underline{ب}_{م\times ن} = \underline{جـ}_{م\times ن}$)

كتاب الطالب مثال صـ ٦١ رقم ١ :

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٠ \\ ٣ & -٥ & ٧ \end{bmatrix}$ $\underline{ب} = \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & -٤ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix}$ $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٩ & -٣ \\ -٩ & ٦ & ١٢ \end{bmatrix}$

أوجـد إن أمكن: 1 $\underline{أ} + \underline{ب}$ 2 $\underline{أ} + \underline{جـ}$

وإذا لم يكن الجمع ممكنًا، فاذكر السبب.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٦١ رقم ١ :

أوجـد ناتج ما يلي: $\begin{bmatrix} -١٢ & ٢٤ \\ -٣ & ٥ \\ -١ & ١٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & -١ \\ -٥ & ٤ \\ ١ & -٧ \end{bmatrix}$

صفوة معلمي الكويت

جمع وطرح المصفوفات

خواص جمع المصفوفات

إذا كانت $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ ، $\underline{جـ}$ مصفوفات من الرتبة م × ن فإن:

- $\underline{أ} + \underline{ب}$ هي من الرتبة م × ن — خاصية الإقفال (الإنغلاق)
- $\underline{أ} + \underline{ب} = \underline{ب} + \underline{أ}$ — خاصية الإبدال
- $(\underline{أ} + \underline{ب}) + \underline{جـ} = \underline{أ} + (\underline{ب} + \underline{جـ})$ — خاصية التجميع
- $\underline{أ} + \underline{ن}_{م \times ن} = \underline{ن}_{م \times ن} + \underline{أ} = \underline{أ}$ — المصفوفة الصفرية هي العنصر المحايد الجمعي من الرتبة م × ن
- $\underline{أ} + (-\underline{أ}) = \underline{ن}_{م \times ن}$ — خاصية المعكوس الجمعي (النظير الجمعي)

طرح المصفوفات

يمكن طرح المصفوفات باستخدام خاصية المعكوس الجمعي:

إذا كان للمصفوفتين $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ الرتبة نفسها، فإن $\underline{أ} - \underline{ب} = \underline{أ} + (-\underline{ب})$

ملاحظة: إذا كان $\underline{أ} \neq \underline{ب}$ ولهما الرتبة نفسها فإن $\underline{أ} - \underline{ب} \neq \underline{ب} - \underline{أ}$

وبالتالي، عملية طرح المصفوفات ليست إبدالية.

كتاب الطالب مثال صـ ٦٤ رقم ٤ :

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ -١ & ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ -٢ & ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

فأوجد: $\underline{أ} - \underline{ب}$ ، $\underline{ب} - \underline{أ}$

صفوة معلمي الكويت

جمع وطرح المصفوفات

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٦٥ رقم ٤ :

أوجـد ناتج ما يلي: 1 $\begin{bmatrix} ٦ & -٩ & ٧ \\ -٢ & ١ & ٨ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٤ & ٣ & ٠ \\ ٦ & ٥ & ١٠ \end{bmatrix}$

2 $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ -١ & ١٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تمرين (9 – 5) صـ 34

اذكر ما إذا كان الجمع أو الطرح ممكنًا أو غير ممكن مع تفسير إجابتك.

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٠,٥ & ٤ & ١ \\ ٢ & ٠,٦ & ٨ & ٩ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٠,٣٣ & ٤ \\ ٠,١٥ & -٧ \end{bmatrix}$ ، $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤٤ \\ ١ & ٠ \\ ١٤ & ٢٣,٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{د} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٠ & -١ \\ ٢ & ٥ & ١ & ٩ \end{bmatrix}$

$\underline{أ} + \underline{د}$ .....

$\underline{جـ} + \underline{ب}$ .....

$\underline{أ} + \underline{ب}$ .....

$\underline{جـ} - \underline{د}$ .....

$\underline{ب} + \underline{جـ}$ .....

صفوة معلمي الكويت

جمع وطرح المصفوفات

حل المعادلات المصفوفية

المعادلة المصفوفية هي معادلة إحدى مصفوفاتها غير معلومة (المتغير)

يمكن استخدام خواص المساواة لحل المعادلات المصفوفية.

لأي مصفوفات $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ ، $\underline{جـ}$ لها الرتبة نفسها إذا كان: $\underline{أ} = \underline{ب}$

فإن: $\underline{أ} + \underline{جـ} = \underline{ب} + \underline{جـ}$ ، $\underline{أ} - \underline{جـ} = \underline{ب} - \underline{جـ}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٦٥ رقم ٥ :

أوجد $\underline{س}$ حيث: $\underline{س} - \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٧ \\ -٤ & ٤ \end{bmatrix}$

تمرين (12) صـ 35

أوجد $\underline{س}$ حيث: $-\underline{س} + \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ & ٩ \\ ١٢ & ٨ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ -٣ & ٥ & ٠ \end{bmatrix}$

تمرين (13) صـ 35

أوجد $\underline{س}$ حيث: $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٤ & -٢٤ \end{bmatrix} = \underline{س} - \begin{bmatrix} ١٣ & ٢٤ & ٥ \\ -٦ & -١٧ & ١ \end{bmatrix}$

صفوة معلمي الكويت

٧ – ٣

ضرب المصفوفات

ضرب مصفوفة في عدد

يمكنك أن تضرب عدد حقيقي في مصفوفة مثل: ٣ $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ ٦ & ١٥ \end{bmatrix}$

الضرب القياسي

الضرب القياسي هو عملية ضرب مصفوفة $\underline{أ}$ في عدد حقيقي ك : ك ≠ ٠

الناتج هو المصفوفة ك$\underline{أ}$

نحصل على المصفوفة ك$\underline{أ}$ بضرب كل عنصر من $\underline{أ}$ في ك

(رتبة المصفوفة ك$\underline{أ}$ تساوي رتبة المصفوفة $\underline{أ}$)

إذا كان ك = ٠، يكون الناتج مصفوفة صفرية.

كتاب الطالب مثال + حاول أن تحل صـ ٦٧ رقم ١ :

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -٤ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ -٢ & -١ & ٣ \end{bmatrix}$

فأوجـد: ٥$\underline{أ}$ ، ٣$\underline{ب}$ ، ٥$\underline{أ}$ – ٣$\underline{ب}$ ، ٥$\underline{ب}$ – ٤$\underline{أ}$ ، $\underline{أ}$ + ٦$\underline{ب}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

خواص الضرب القياسي

إذا كانت $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ ، $\underline{٠}$ مصفوفات من الرتبة م × ن ، ك ، د عددان قياسيان. فإن:

- ك $\underline{أ}$ مصفوفة من الرتبة م × ن — خاصية الإغلاق
- (ك د) $\underline{أ}$ = ك (د $\underline{أ}$) — خاصية التجميع للضرب
- ك ($\underline{أ}$ + $\underline{ب}$) = ك $\underline{أ}$ + ك $\underline{ب}$ — خاصية التوزيع من اليمين
- ($\underline{أ}$ + $\underline{ب}$) ك = $\underline{أ}$ ك + $\underline{ب}$ ك — خاصية التوزيع من اليسار
- ٠ × $\underline{أ}$ = $\underline{٠}$ — خاصية الضرب في صفر

معلم صفوة التوت

ضرب المصفوفات

كتاب الطالب مثال صـ ٦٩ رقم ٣ :

حل المعادلة: $٤\underline{س} + ٢ \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ثم تحقق من إجابتك.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٦٩ رقم ٣ :

حل كل معادلة مما يلي:

1. $٢\underline{س} = \begin{bmatrix} ٤ & ١٢ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$

2. $-٣\underline{س} + \begin{bmatrix} ٧ & ٠ & -١ \\ ٢ & -٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ & ٨ \\ -١٩ & -١٨ & ١٠ \end{bmatrix}$

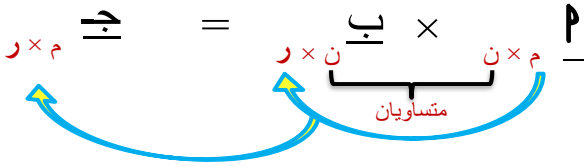
صفوة معلمي الكويت

ضرب المصفوفات

ضرب المصفوفات

المصفوفة $\underline{أ}$ هي مصفوفة من الرتبة م × ن والمصفوفة $\underline{ب}$ هي من الرتبة ن × ر ، عندئذٍ مصفوفة الضرب

$\underline{أ} \times \underline{ب}$ هي مصفوفة من الرتبة م × ر



تكون مصفوفة الضرب معرّفة إذا كان أعمدة الأولى يساوي عدد صفوف الثانية

كتاب الطالب مثال صـ ٧٠ رقم ٤ :

أوجد ناتج $\underline{أ} \times \underline{ب}$. حيث $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٤ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٧١ رقم ٤ :

أوجد ناتج الضرب: $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٣ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$

صفوة معلمي الكويت

ضرب المصفوفات

كتاب الطالب مثال صـ ٧٢ رقم ٥ :

بفرض $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١- & ٨ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٨ & ٠ \\ ٢ & ٥- \end{bmatrix}$

حـدّد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب: $\underline{أ} \times \underline{ب}$ ، $\underline{ب} \times \underline{أ}$ معرّفة أو غير معرّفة.

أوجـد رتبة كل مصفوفة ضرب معرّفة.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٧٢ رقم ٥ :

بفرض $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٥ & ٤- \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٨ & ٠ & ١- & ٠ \\ ٢ & ٥- & ١ & ٨ \end{bmatrix}$

1. حـدّد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب: $\underline{أ} \times \underline{ب}$ ، $\underline{ب} \times \underline{أ}$ معرّفة أو غير معرّفة.
2. أوجـد ناتج الضرب المعرّف.
3. بفرض أن المصفوفة $\underline{أ}$ هي من الرتبة ٢ × ٣ ، المصفوفة $\underline{ب}$ هي من الرتبة ٣ × ٢

هل $\underline{أ} \times \underline{ب}$ ، $\underline{ب} \times \underline{أ}$ متساويتان ؟ وضح إجابتك.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

ضرب المصفوفات

خواص ضرب المصفوفات المربعة

إذا كانت $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ ، $\underline{جـ}$ مصفوفات من الرتبة م × م فإن:

- $\underline{أ} \times \underline{ب}$: مصفوفة من الرتبة م × م
- $(\underline{أ} \times \underline{ب}) \times \underline{جـ} = \underline{أ} \times (\underline{ب} \times \underline{جـ})$ خاصية التجميع
- $\underline{أ} \times (\underline{ب} + \underline{جـ}) = \underline{أ} \times \underline{ب} + \underline{أ} \times \underline{جـ}$ خاصية التوزيع
- $(\underline{ب} + \underline{جـ}) \times \underline{أ} = \underline{ب} \times \underline{أ} + \underline{جـ} \times \underline{أ}$
- $\underline{أ} \times \underline{0}_{م \times م} = \underline{0}_{م \times م} \times \underline{أ} = \underline{0}_{م \times م}$ خاصية الضرب في صفر

ملاحظة: عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية.

مثال

بفرض $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix}$

أوجد: $\underline{أ} \times \underline{ب}$ ، $\underline{ب} \times \underline{أ}$ ماذا تستنتج؟

ضرب المصفوفات

مربع المصفوفة

إذا كانت $\underline{أ}$ مصفوفة مربعة، فإن المصفوفة $\underline{أ} \times \underline{أ}$ يرمز إليها بالرمز $\underline{أ}^{٢}$ وتقرأ مربع المصفوفة $\underline{أ}$

وبالمثل $\underline{أ}^{٣} = \underline{أ} \times \underline{أ} \times \underline{أ}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٧٣ رقم ٦ :

إذا كانت $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$ أوجـد: $\underline{ب}^{٢}$ ، $\underline{ب}^{٣}$

تمرين (20) صـ 41

أوجد قيمة كل من س ، ص : $\begin{bmatrix} ٢س & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & -ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ & -٩ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

صفوة معلمي الكويت

٧ – ٤ مصفوفات الوحدة والنظير الضربي

مصفوفة الوحدة

المصفوفة المربعة التي عناصر قطرها الرئيسي ١ ، وبقية العناصر صفر تسمى مصفوفة الوحدة للضرب ويرمز إليها بالرمز $\underline{و}$

$$\underline{و}_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{و}_{٣\times٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

ملاحظة: $\underline{أ} \times \underline{و} = \underline{و} \times \underline{أ} = \underline{أ}$

$\underline{و} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية.

النظير الضربي

إذا كانت $\underline{أ}$ ، $\underline{س}$ مصفوفتين مربعتين من الرتبة نفسها بحيث يكون $\underline{أ} \times \underline{س} = \underline{و}$ ، فإن $\underline{س}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{أ}$ ويرمز إليها بالرمز $\underline{أ}^{-١}$

إذاً $\underline{أ} \times \underline{أ}^{-١} = \underline{أ}^{-١} \times \underline{أ} = \underline{و}$

كتاب الطالب مثال صـ ٧٥ رقم ١ :

أثبت أن $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

صفوة معلمي الكويت

مصفوفات الوحدة والنظير الضربي

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٧٥ رقم ١ :

أثبت أن المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢,٥ & ١ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٢- & ٢ \\ ٥ & ٤- \end{bmatrix}$

محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية

ترتبط كل مصفوفة مربعة بعدد حقيقي يسمى محدد المصفوفة

محدد المصفوفة المربعة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ب & جـ \\ د & هـ \end{bmatrix}$ هو $|\underline{أ}| = ب هـ - د جـ$

ملاحظة: تسمى المصفوفة التي محددها يساوي الصفر بالمصفوفة المنفردة

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٧٦ رقم ٢ :

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية:

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٨ & ٧ \\ ٢ & ١٠ \end{bmatrix}$ ، $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ك & ٣ \\ ٣-ك & ٣- \end{bmatrix}$

مصفوفات الوحدة والنظير الضربي

بفرض أن $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ب & جـ \\ د & هـ \end{bmatrix}$ إذا كان $|\underline{أ}| = ب هـ - د جـ \neq 0$ فإن $\underline{أ}$ لها نظير ضربي $\underline{أ}^{-1}$

$$\underline{أ}^{-1} = \frac{1}{|\underline{أ}|} \begin{bmatrix} هـ & -جـ \\ -د & ب \end{bmatrix}$$

ملاحظة: ليس لكل المصفوفات المربعة نظير ضربي(معكوسات)

ملاحظة: المصفوفة التي محددها يساوي الصفر ليس لها نظير ضربي

كتاب الطالب مثال + حاول أن تحل صـ ٧٧ رقم ٣ :

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} س & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{bmatrix}$ منفردة أوجد قيمة س.

إذا كانت $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ ٤- & ٢س \end{bmatrix}$ منفردة أوجد قيمة س.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٧٨ رقم ٥ :

حدد أي مصفوفة من المصفوفات التالية لها نظير ضربي (معكوس)، ثم أوجده.

1) $\underline{م} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

2) $\underline{ن} = \begin{bmatrix} ٠,٥ & ٢,٣ \\ ٣ & ٧,٢ \end{bmatrix}$

مصفوفات الوحدة والنظير الضربي

تمرين (12 – 10) صـ 46

حـل كل معادلة في س. وإذا كان من غير الممكن حلها، فاكتب السبب.

10 $\begin{bmatrix} ١٢ & ٧ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix} \times \underline{س} = \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

11 $\begin{bmatrix} ٠ & ٤- \\ ٠ & ١- \end{bmatrix} \times \underline{س} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٤ \end{bmatrix}$

تمرين (18) صـ 47

أوجـد المصفوفة س:

$\begin{bmatrix} ٤ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \underline{س} + \begin{bmatrix} ٢ & ٧ \\ ٣- & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢- & ٣ \end{bmatrix}$

صفوة معلمي الكويت

٤ – ٧

حل نظام من معادلتين خطيتين

يمكن للمعادلة المصفوفية أن تمثل أي نظام معادلات.

نظام المعادلات

$$\begin{cases} س + ٢ص = ٥ \\ ٣س + ٥ص = ١٤ \end{cases}$$

المعادلة المصفوفية

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ١٤ \end{bmatrix}$$

١ – الحل باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة المربعة:

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٨٠ رقم ١ :

حـل النظام: $\begin{cases} ٥س + ٣ص = ٧ \\ ٣س + ٢ص = ٥ \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

صفوة معلمي الكويت

حل نظام من معادلتين خطيتين

٢ – استخدام قاعدة كرامر (المحددات) لحل معادلتين خطيتين:

كتاب الطالب مثال صـ ٨١ رقم ٢ :

استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام: $\begin{cases} ٤س - ٥ص + ٧ = ٠ \\ ٣س - ٦ص + ٣ = ٠ \end{cases}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٨١ رقم ٢ :

استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام: $\begin{cases} ٣س + ٢ص = -٦ \\ -٤س - ٣ص - ٧ = ٠ \end{cases}$

صفوة معلمي الكويت

المصفوفات

البنود الموضوعية

في التمارين (١ - ١٥) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

(١) المصفوفة $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ من الرتبة ٣×١ (أ) (ب)

---

(٢) في المصفوفة $ب = \begin{bmatrix} -٢ & ٣ & ١ \\ ١١ & ٦ & ٥ \end{bmatrix}$ قيمة العنصر $ب_{٣٢}$ يساوي ٥ (أ) (ب)

---

(٣) إذا كانت $\begin{bmatrix} ٢ \\ -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٤ \end{bmatrix}$ فإن س = ٢ (أ) (ب)

---

(٤) إذا كانت $\begin{bmatrix} س & ١ \\ ٢ & ٤ \\ ص & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ -١ & ع \\ ١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٣ & ٢ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$ فإن س + ص + ع = ١ (أ) (ب)

---

(٥) حل المعادلة المصفوفية $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} + س = \begin{bmatrix} ١ \\ -٦ \\ ٥ \end{bmatrix}$ هو س = $\begin{bmatrix} -١ \\ -٦ \\ ٤ \end{bmatrix}$ (أ) (ب)

---

(٦) حل المعادلة المصفوفية ٢س = $\begin{bmatrix} ٤ & ١٢ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ \\ ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ \\ ٤ \end{bmatrix}$ هو س = $\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٤ \end{bmatrix}$ (أ) (ب)

---

(٧) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -١ & ٢ & ٥ \end{bmatrix}$ فإن أ × ب من الرتبة ١ × ١ (أ) (ب)

---

(٨) لأي مصفوفتين أ ، ب يكون أ × ب = ب × أ (أ) (ب)

---

(٩) إن ناتج ضرب : $\begin{bmatrix} -١ \\ ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ \\ -٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ \\ -٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ \\ ٠ \end{bmatrix}$ يساوي $\begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ -٢٩ & ٩ \end{bmatrix}$ (أ) (ب)

---

(١٠) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ فإن $أ^{٢} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ (أ) (ب)

---

(١١) إن محدد المصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix}$ يساوي صفر (أ) (ب)

المصفوفات

(١٢) المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$

أ ب

---

(١٣) للمصفوفة $\begin{bmatrix} -٤ & ٠ \\ ٨ & ٢ \end{bmatrix}$ نظير ضربي

أ ب

---

(١٤) إذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٦ & س \end{bmatrix}$ منفردة فإن قيمة س تساوي ٨-

أ ب

---

(١٥) إذا كان النظام $\begin{cases} ٢س + ٣ص = ٥ \\ ٣س + ٥ص = ٧ \end{cases}$ فإن $\Delta_{ص} = ٢$

أ ب

صفوة معلمي الكويت

المصفوفات

في التمارين (١ – ١٢) ، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

1 إذا كانت: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١- & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٤- \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ فإن $\underline{أ} \times \underline{ب}$ =

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٤- \\ ٠ & ٢- \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٤ & ١١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٢- & ٠ \\ ٥- & ٤ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$

---

2 المصفوفة المنفردة فيما يلي هي:

أ) $\begin{bmatrix} ٦ & ٩ \\ ٢- & ٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٦ & ٩ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ١- & ٣ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٥ & ٥ \\ ٤- & ٤ \end{bmatrix}$

---

3 النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١- & ٢- \end{bmatrix}$ هو المصفوفة :

أ) $\begin{bmatrix} ٢- & ٥- \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١- & ٣- \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٣- & ٥- \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١- & ٢- \end{bmatrix}$

---

4 إذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} س & ٨ \\ ٢ & س \end{bmatrix}$ منفردة فإن قيمة س =

أ) ٤ ب) ٤- جـ) ١٦ د) ٤- ، ٤+

---

5 مجموعة حل النظام: $\begin{cases} ٣س + ٢ص = ٥- \\ -س - ٢ص = ٧ \end{cases}$ هي:

أ) $\{(٤- ، ١)\}$ ب) $\{(١ ، ٤-)\}$ جـ) $\{(١- ، ٤-)\}$ د) $\{(٤ ، ١-)\}$

---

6 إذا كانت: $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٣- \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٤- & ٣- \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ فإن $|\underline{ب}| \times |\underline{جـ}|$ =

أ) ٥٤ ب) ٥٤- جـ) ٩٠ د) ٩٠-

المصفوفات

7 المصفوفة التي ليس لها نظير ضربي فيما يلي هي:

أ $\begin{bmatrix} -٢ & ٥- \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣- \end{bmatrix}$ جـ $\begin{bmatrix} -٣ & ٢- \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ١- & ٢- \end{bmatrix}$

---

8 إذا كانت: $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣- & ١- \end{bmatrix} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ فإن $\underline{ب}$ =

أ $\begin{bmatrix} ٥- & ٢- \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ١- & ٢- \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$ جـ $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣- & ٥- \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١- & ٣- \end{bmatrix}$

---

9 إذا كانت: س ∈ ح: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣- & ١- \end{bmatrix}$ ونظيرها الضربي: س $\begin{bmatrix} ١- & ٢- \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فإن س =

أ ١ ب ١- جـ $\frac{١}{٢}$ د $-\frac{١}{٢}$

---

10 إذا كانت: ٤ $\underline{أ}$ + ٣ $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٣ & ٦ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ فإن $\underline{أ}$ =

أ $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix}$ جـ $\begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٤- & ٨ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ٤- & ٠ \\ ٤ & ٨- \end{bmatrix}$

---

11 إذا كانت: $\underline{أ} - \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٣- & ٥ \end{bmatrix}$ فإن $\underline{ب} - \underline{أ}$ =

أ $\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٥ & ٣- \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix}$ جـ $\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ١- & ٤- \\ ٥- & ٣ \end{bmatrix}$

---

12 إذا كانت: $\begin{bmatrix} ٢س & س - ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} أ & ب \end{bmatrix}$ فإن:

أ س = أ٢ ، ص = $\frac{١}{٢}$أ - ب ب س = $\frac{١}{٢}$أ ، ص = $\frac{١}{٢}$أ + ب

جـ س = $\frac{١}{٢}$أ ، ص = $\frac{١}{٢}$أ - ب د س = أ٢ ، ص = $\frac{١}{٢}$أ + ب

صفوة معلمي الكويت

الوحدة الثامنة

حساب المثلثات (٢)

٨-١ دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)

٨-٢ العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

٨-٣ العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

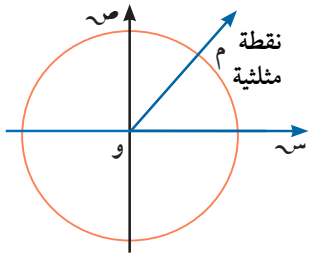
بند ٨ - ١

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية

دائرة الوحدة

هي دائرة مركزها نقطة الأصل و ، وطول نصف قطرها واحد وحدة.

النقطة المثلثية



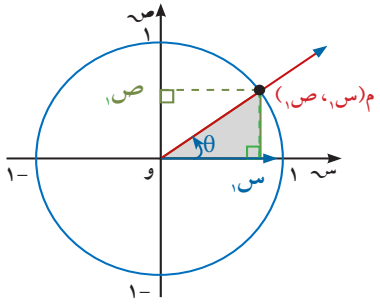
هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة.

ملاحظة: تكون النقطة (س، ص) نقطة مثلثية إذا وفقط إذا كان $س^{٢} + ص^{٢} = ١$

سوف نستخدم الرمز θ لنرمز إلى قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي.

النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ

بفرض أنّ زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ، يقطع ضلعها النهائي دائرة الوحدة في النقطة م $(س_{١}، ص_{١})$.



$$جتا\theta = \frac{المجاور}{الوتر} = \frac{س}{١} = س$$

$$جا\theta = \frac{المقابل}{الوتر} = \frac{ص}{١} = ص$$

وبالتالي تكون النسب المثلثية للزاوية θ هي

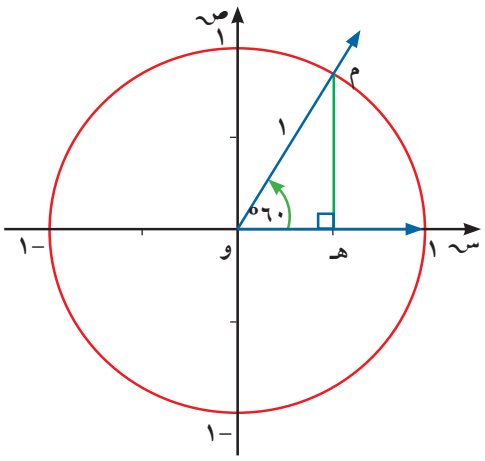
$جتا\theta = س_{١}$	$جا\theta = ص_{١}$
$ظا\theta = \frac{ص_{١}}{س_{١}}$ ، $س_{١} \neq ٠$	$ظتا\theta = \frac{س_{١}}{ص_{١}}$ ، $ص_{١} \neq ٠$
$قا\theta = \frac{١}{س_{١}}$ ، $س_{١} \neq ٠$	$قتا\theta = \frac{١}{ص_{١}}$ ، $ص_{١} \neq ٠$

صفوة معلمي الكويت

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية

كتاب الطالب مثال صـ ٨٩ رقم ١ :

باستخدام دائرة الوحدة أوجد جـا ٦٠°، جتـا ٦٠°



.....

.....

.....

.....

.....

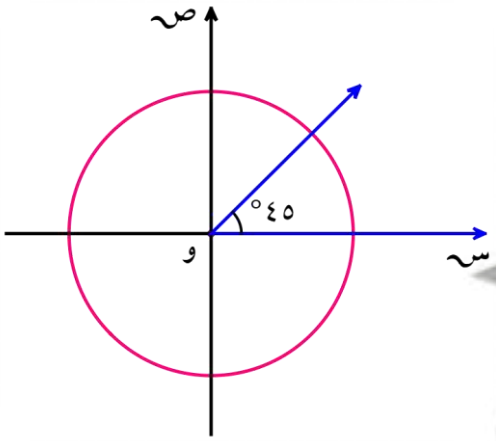
.....

.....

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٨٩ رقم ١ :

على دائرة الوحدة ، ارسم زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها ٤٥° .

ثم أوجد جتـا ٤٥° ، جـا ٤٥°



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

الدوال الدائرية (المثلثية)

إذا كانت م(س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية قياسها θ، وتحرك الضلع النهائي لهذه الزاوية في الاتجاه الموجب (الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة)، فإن م تتغير على دائرة الوحدة وبالتالي تتغير معها كل من س، ص ويكون: لكل قيمة تأخذها θ حيث θ ∈ [٠، ٢π)، قيمة واحدة لكل من المتغيرين س، ص حيث س، ص تنتميان إلى [−١، ١].

مما تقدم، نستطيع تعريف الدوال المثلثية (أو الدوال الدائرية) التالية:

تعريف:

إذا كانت (س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية قياسها θ حيث ٠ ≤ θ < ٢π فإن:

(١) دالة الجيب: د(θ) = جاθ — حيث جاθ = ص (الإحداثي الصادي للنقطة المثلثية)

(٢) دالة جيب التمام: د(θ) = جتاθ — حيث جتاθ = س (الإحداثي السيني للنقطة المثلثية)

(٣) دالة الظل: د(θ) = ظاθ — حيث ظاθ = $\frac{ص}{س}$، س ≠ ٠

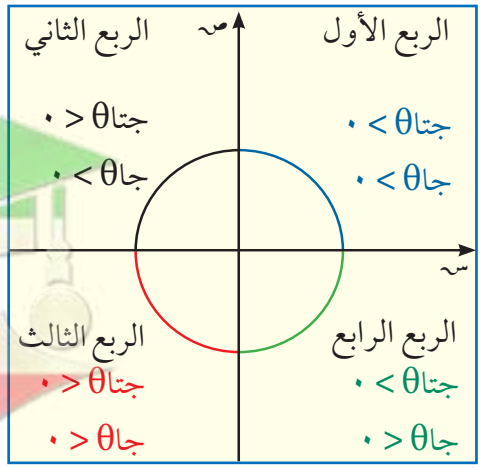
(٤) دالة القاطع: د(θ) = قاθ — حيث قاθ = $\frac{١}{س}$، س ≠ ٠

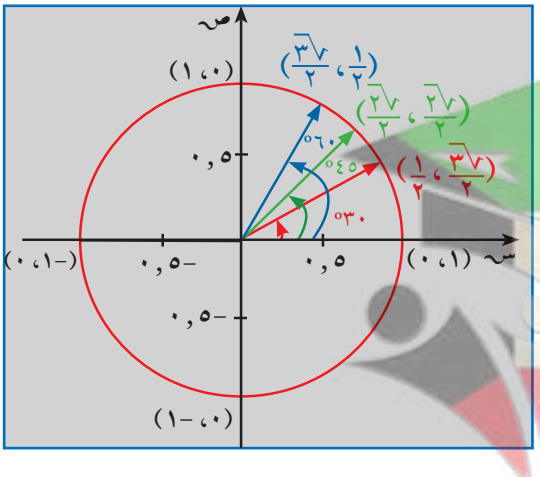
(٥) دالة قاطع التمام: د(θ) = قتاθ — حيث قتاθ = $\frac{١}{ص}$، ص ≠ ٠

(٦) دالة ظل التمام: د(θ) = ظتاθ — حيث ظتاθ = $\frac{س}{ص}$، ص ≠ ٠

يمكن بسهولة إيجاد قيم الدوال المثلثية لبعض قيم θ الخاصة.

الدالة \ قياس الزاوية θ	٠°	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°	١٨٠°	٢٧٠°	٣٦٠°
	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{\pi ٣}{٢}$	π٢
جاθ	٠	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	١	٠	−١	٠
جتاθ	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	٠	−١	٠	١
ظاθ	٠	$\frac{\sqrt{٣}}{٣}$	١	$\sqrt{٣}$	غير معرّف	٠	غير معرّف	٠





من الشكل: يمكن ملاحظة ما يلي:

إذا كانت θ في الربع الأول فإن: جاθ > ٠، جتاθ > ٠

إذا كانت θ في الربع الثاني فإن: جاθ > ٠، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الثالث فإن: جاθ < ٠، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الرابع فإن: جاθ < ٠، جتاθ > ٠

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية

كتاب الطالب مثال صـ ٩٢ رقم ٢ :

حـدد إشارة جـا θ ، جتـا θ في كل مما يلي:

$\theta = ١٣٥^\circ$

$\theta = \frac{٧\pi}{٦}$

$\theta = ٣٠٥^\circ$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٩٢ رقم ٣ :

(أ) إذا كانت $٩٠^\circ < \theta < ٢٧٠^\circ$. ما هي إشارة جتـا θ ؟

(ب) إذا كانت $\pi < \theta < ٠,٥$ د. ما هي إشارة جـا θ ؟

صفوة معلمي الكويت

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية

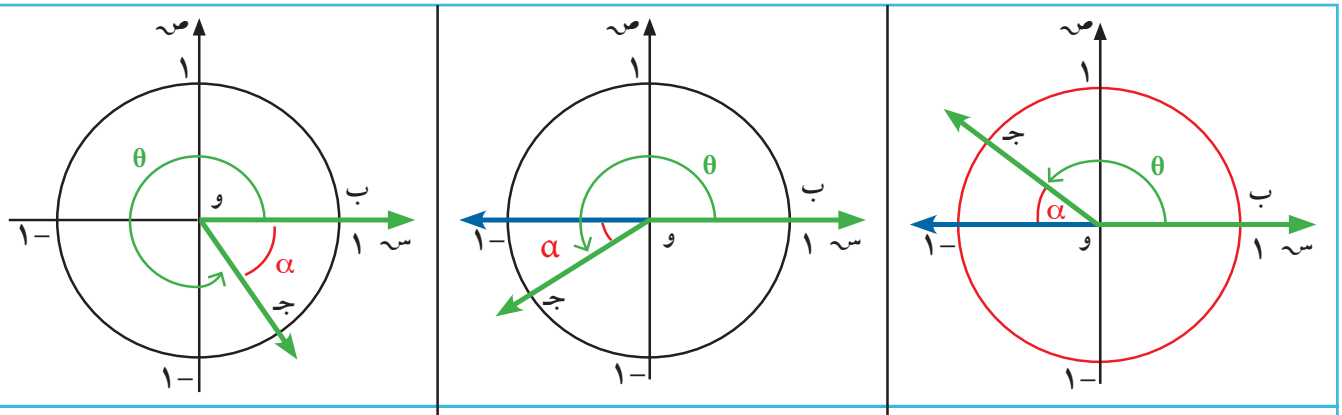
تعريف زاوية الإسناد:

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة (وب، وجـ) التي في وضع قياسي

هي الزاوية **الحادة** α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات.

فإذا كان α زاوية الإسناد فإن: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

الأشكال التالية توضح الحالات المختلفة لإيجاد زاوية الإسناد:



عندما θ تقع في الربع الثاني	عندما θ تقع في الربع الثالث	عندما θ تقع في الربع الرابع
$\theta^\circ - 180^\circ = \alpha^\circ$	$180^\circ - \theta^\circ = \alpha^\circ$	$360^\circ - \theta^\circ = \alpha^\circ$
$\theta^c - \pi = \alpha^c$	$\pi - \theta^c = \alpha^c$	$2\pi - \theta^c = \alpha^c$

كتاب الطالب مثال صـ ٩٣ رقم ٣ :

ارسم كلا من الزوايا الموجهة في وضع قياسي ، ثم عين زاوية الاسناد و أوجد قياسها لكل مما يلي

أ) 125°

ب) 215°

جـ) $\frac{11\pi}{6}$

معلمي الكويت

العلاقات بين الدوال المثلثية

تسمى جـا θ ، جتـا θ ، ظـا θ النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ وتدعى النسب المثلثية الأساسية علماً

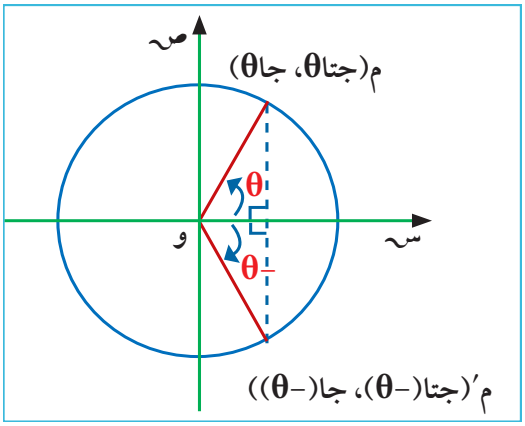
بأن $-١ \leq$ جتا $\theta \leq ١$ ، $-١ \leq$ جا $\theta \leq ١$ ، ظا $\theta \in$ ح

النسب المثلثية للزاويتين θ ، -θ

النقطة المثلثية م′ هي انعكاس للنقطة المثلثية م في محور السينات حيث م(س ، ص) $\xrightarrow{\text{ع س}}$ م′ (س ، -ص)

ويكون جتـا (-θ) = جتـا θ

جـا (-θ) = -جـا θ



قانون:

جتا(-θ) = جتاθ

جا(-θ) = -جاθ

وبالتالي ظا(-θ) = -ظاθ بشرط أن يكون ظاθ معرّف.

كتاب الطالب مثال صـ ٩٦ رقم ١ :

(أ) إذا كان جتـا $\frac{\pi ٣}{٨} = \frac{\sqrt{٢ - \sqrt{٢}}}{٢}$ فأوجد جتـا $\left(-\frac{\pi ٣}{٨}\right)$

(ب) إذا كان جـا ٣٦° ≈ ٠,٥٨٧٨ فأوجد جـا (-٣٦°)

(جـ) إذا كان ظـا ٤٥° = ١ فأوجد ظـا (-٤٥°)

صفوة معلمي الكويت

العلاقات بين الدوال المثلثية

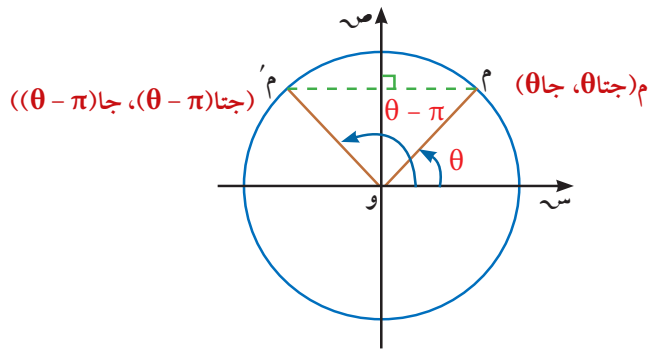
النسب المثلثية للزاويتين θ ، (θ − π).

النقطة المثلثية م′ هي انعكاس للنقطة المثلثية م في محور الصادات.

حيث م(س، ص) $\xrightarrow{\text{ع}_{\text{صـ}}}$ م′(−س، ص)

فيكون: جتا(θ − π) = −جتاθ

جا(θ − π) = جاθ



قانون:

جتا(θ − π) = −جتاθ

جا(θ − π) = جاθ

وبالتالي ظا(θ − π) = −ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

كتاب الطالب مثال صـ ٩٧ رقم ٢ :

بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) إذا كان جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$ ، أوجد جتا ١٢٠°

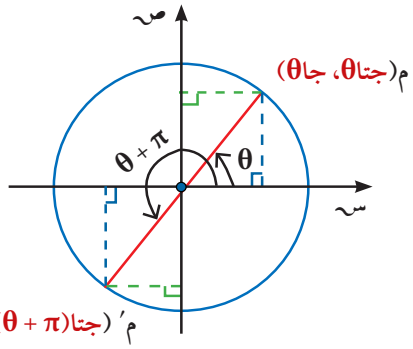
(ب) إذا كان جا $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، أوجد جا $\frac{\pi ٣}{٤}$

(جـ) إذا كان ظا θ = $\frac{٣}{٥}$ ، أوجد ظا (θ − π)

صفوة معلمي الكويت

العلاقات بين الدوال المثلثية

النسب المثلثية للزاويتين θ، (θ + π).



النقطة م′ هي انعكاس للنقطة م في نقطة الأصل.

حيث م(س، ص) ← (انعكاس في نقطة الأصل) م′(−س، −ص)

فيكون: جتا(θ + π) = −جتاθ

جا(θ + π) = −جاθ

قانون:

جتا(θ + π) = −جتاθ

جا(θ + π) = −جاθ

وبالتالي ظا(θ + π) = ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

كتاب الطالب مثال صـ ٩٨ رقم ٣ :

بدون استخدام الآلة الحاسبة.

إذا كان جـا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ ، أوجد جـا ٢١٠°

.....

إذا كان ظـا $\frac{\pi}{٨}$ = −١ + $\sqrt{٢}$ ، أوجد ظـا $\frac{\pi ٩}{٨}$

.....

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٩٨ رقم ٣ :

بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان جتـا ٤٠° ≈ ٠,٧٦٦ . فأوجد جتـا ٢٢٠°

.....

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٩٨ رقم ٤ :

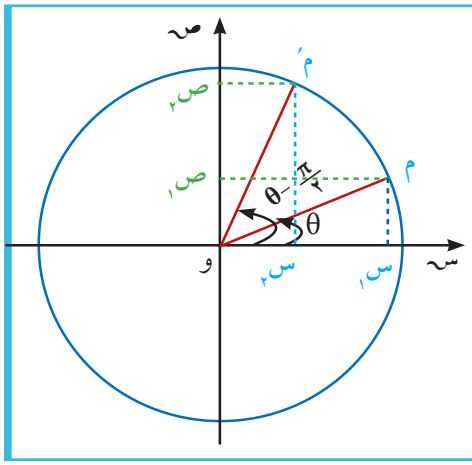
بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان جـا ٥٦° ≈ ٠,٨٢٩ . فأوجد جـا ٢٣٦°

.....

صفوة معلمي الكويت

العلاقات بين الدوال المثلثية

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$



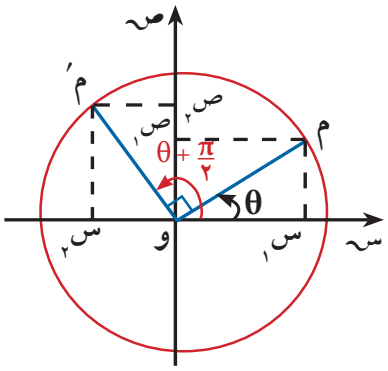
قانون:

$جا\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -جتا\theta$

$جتا\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = جا\theta$

$ظا\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -ظتا\theta$ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$



قانون:

$جا\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = جتا\theta$

$جتا\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -جا\theta$

$ظا\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -ظتا\theta$ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

كتاب الطالب مثال صـ ١٠٢ رقم ٥ :

بسط التعبير التالي لأبسط صورة:

جـاس + جـا(٩٠° + س) + جـا(١٨٠° + س) + جـا(٩٠° − س)

.....

.....

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٠٢ رقم ٥ :

(أ) جتـا(٩π + θ)

.....

.....

(ب) جتـا$\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

العلاقات بين الدوال المثلثية

ك تمارين (2 – 1) صفحة 62

اكتب النسب المثلثية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ.

1. جتا $(\theta + \pi)$ .....
2. جتا $(\theta - \pi)$ .....
3. جا $(\theta + \frac{\pi}{2})$ .....
4. جتا $(\theta - \frac{\pi}{2})$ .....
5. ظا $(180^\circ - س)$ .....
6. ظا $(180^\circ + س)$ .....

ك تمارين (5 – 4) صفحة 63

أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

1. جا 150° .....
2. ظا (-225°) .....
3. جتا (-135°) .....
4. جتا $\frac{7\pi}{6}$ .....
5. جا $(-\frac{2\pi}{3})$ .....
6. ظا $\frac{11\pi}{6}$ .....

ك تمارين (11) صفحة 63

بسط التعبيرات التالية لأبسط صورة:

1. جتا $(\theta - \pi)$ – جتا $(-\theta)$ + جا $(\theta + \pi)$ + جتا $(\theta - \frac{\pi}{2})$

.....

.....

.....

.....

.....

2. جا $(\theta + \pi)$ – جتا $(\theta + \frac{\pi}{2})$ + جتا $(\pi - \theta)$ + جا $(\frac{\pi}{2} + \theta)$

.....

.....

.....

.....

.....

العلاقات بين الدوال المثلثية

حل معادلات مثلثية

حل المعادلة: جتا س = جتا θ

هو س = θ + ٢ك π أو س = −θ + ٢ك π (ك ∈ صـ)

لاحظ أن جيب تمام الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع.

كتاب الطالب مثال صـ ١٠٣ رقم ٦ :

حـل كلاً من المعادلتين:

1 جتاس = $\frac{١}{٢}$

2 ٢جتاس − $\sqrt{٣}$ = ٠

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٠٣ رقم ٦ :

حـل المعادلة: $\sqrt{٢}$ جتاس = ١

صفوة معلمي الكويت

العلاقات بين الدوال المثلثية

حل المعادلة جا س = جا θ

هو س = θ + ٢ك π أو س = (π − θ) + ٢ك π ، (ك ∈ صـ)

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني.

كتاب الطالب مثال صـ ١٠٤ رقم ٧ :

حـل كلاً من المعادلتين:

1 جـاس = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

2 ٢جـاس = $\sqrt{٢}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٠٤ رقم ٧ :

حـل المعادلة: ٢جـاس − ١ = ٠

العلاقات بين الدوال المثلثية

حل المعادلة ظا س = ظا θ هو س = θ + ك π، (ك ∋ صـ)

لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث.

كتاب الطالب مثال صـ ١٠٥ رقم ٨ :

حـل المعادلة: ظـاس = $\sqrt{٣}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٠٥ رقم ٨ :

حـل المعادلة: $\sqrt{٣}$ ظـاس = ١

ك تمارين (12) صفحة 64

حـل المعادلة: ظتـاس = $\sqrt{٣}$

معلمي الكويت صفوة

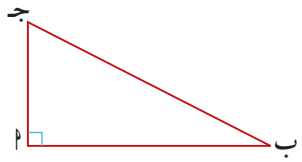
بند ٨ - ٣

العلاقات بين الدوال المثلثية

المتطابقات المثلثية الأساسية

$\text{ظا}\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ ، $\text{ظتا}\theta = \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$ ، $\text{ظتا}\theta = \frac{١}{\text{ظا}\theta}$ حيث المقام $\neq ٠$

$\text{قا}\theta = \frac{١}{\text{جتا}\theta}$ ، $\text{قتا}\theta = \frac{١}{\text{جا}\theta}$



متطابقات فيثاغورث

جـا$^{٢}\theta$ + جتـا$^{٢}\theta$ = ١ تسمى متطابقة فيثاغورث

١ + ظـا$^{٢}\theta$ = قـا$^{٢}\theta$ ، ١ + ظتـا$^{٢}\theta$ = قتـا$^{٢}\theta$

كتاب الطالب مثال صـ ١٠٨ رقم ١ :

بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان جتـا θ = ٠,٤ ، $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$. أوجد جـا θ ثم استنتج ظـا θ .

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٠٨ رقم ١ :

بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان جـا $\theta = \frac{٣}{٥}$ ، $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$. فأوجد جتـا θ ، ظـا θ .

صفوة معلمي الكويت

العلاقات بين الدوال المثلثية

كتاب الطالب مثال صـ ١٠٩ رقم ٢ :

بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان ظـا θ = ٢ $\sqrt{٢}$ ، جتـا θ > ٠ فأوجد جـا θ ، جتـا θ .

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٠٩ رقم ٢ :

بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان ظـا θ = $\frac{٣}{٤}$ ، جـا θ > ٠ فأوجد جـا θ ، جتـا θ .

كتاب الطالب مثال صـ ١١٠ رقم ٣ :

بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان ظـا θ = $\frac{١٢}{٥}$ ، جـا θ < ٠ فأوجد جـا θ ، جتـا θ .

صفوة معلمي الكويت

العلاقات بين الدوال المثلثية

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١١٠ رقم ٣ :

بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان ظا $\theta = \frac{٢٤}{٧}$ ، جتا $\theta > ٠$ فأوجد جا θ ، جتا θ .

كتاب الطالب مثال صـ ١١١ رقم ٤ :

بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان جا $\theta = \frac{٣}{٧}$ ، جتا $\theta > ٠$ فأوجد ظتا θ ، ظا θ .

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١١١ رقم ٤ :

بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان ظتا $\theta = \frac{٥}{٨}$ ، جتا $\theta > ٠$ فأوجد جا θ

العلاقات بين الدوال المثلثية

كتاب الطالب مثال صـ ١١٢ رقم ٥ :

أثبت صحة المتطابقة التالية: جـا^{٣}س + جـاس × جتـا^{٢}س = جـاس

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١١٢ رقم ٥ :

أثبت صحة المتطابقة التالية: جتـا^{٤}س + جـا^{٢}س × جتـا^{٢}س = جتـا^{٢}س

كتاب الطالب مثال صـ ١١٢ رقم ٦ :

أثبت صحة المتطابقة التالية: $\frac{(\text{قـا}\ \theta + ١)(\text{قـا}\ \theta - ١)}{\text{جـا}^{٢}\ \theta} = \text{قـا}^{٢}\ \theta$ حيث المقام $\neq ٠$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١١٢ رقم ٦ :

أثبت صحة المتطابقة التالية: (قـا^{٢} θ + قتـا^{٢} θ) − (ظـا^{٢} θ + ظتـا^{٢} θ) = ٢

صفوة معلمي الكويت

حساب المثلثات

الأسئلة الموضوعية

في التمارين (١ –٢٣) ، ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

1 جتا(–٣٠٠°) = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

2 جا(١٢٠°) = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

3 ظا(–١٥٠°) = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (أ) (ب)

4 قا(٣١٥°) = $\sqrt{٢}$ (أ) (ب)

5 إذا كانت جا θ = ٠,٢ فإن جا(π + θ) = ٠,٢ (أ) (ب)

6 إذا كانت جتا θ = $\frac{٢}{٣}$ فإن قا(θ) = $\frac{٣}{٢}$ (أ) (ب)

7 إذا كانت ظا θ = ٣ فإن ظتا(π + θ) = ٣ (أ) (ب)

8 إذا كانت جا θ = $\frac{١}{٥}$ فإن قتا(π + θ) = –٥ (أ) (ب)

9 ظا٢٢٥° – ٣جا١٢٣٠° + ٢جتا(–٩٦٠°) = – $\frac{٣}{٢}$ (أ) (ب)

10 قتا$\frac{١٩\pi}{٦}$ – ٢قا$\frac{١٣\pi}{٦}$ + جا(–$\frac{٨\pi}{٦}$) – جتا(–$\frac{١٧\pi}{٦}$) = ٢ (أ) (ب)

11 ظتا $\frac{١٩\pi}{٤}$ – ٣ظا$\frac{١١\pi}{٦}$ + جتا(–$\frac{٢٤\pi}{٣}$) – ٢جا($\frac{٤٥\pi}{٦}$) = ١ (أ) (ب)

12 قا(–٣١٥°)+ ٢قتا٥٨٥° – ٢جتا٨٥٥° = $\sqrt{٢}$ (أ) (ب)

صفوة معلمي الكويت

حساب المثلثات

13 إذا كان جـاس = $\sqrt{٣}$ فإن مجموعة الحل = ∅ (أ) (ب)

14 إذا كان جتـاس = $\frac{١}{٢}$ فإن س = $\frac{\pi}{٣}$ (أ) (ب)

15 إذا كانت س = $\frac{\pi}{٦}$ فإن جـاس = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

16 مجموعة حل قـاس = ٠,٣ هي ∅ (أ) (ب)

17 ظـا(٥π١) =٠ (أ) (ب)

18 قتـا θ × جتـا θ – ظتـا θ = ٠ (أ) (ب)

19 ظتـا^{٢} (–θ) – قتـا^{٢} θ =–١ (أ) (ب)

20 (قـا θ + ظـا θ) (قـا θ – ظـا θ) =١ (أ) (ب)

21 جـا θ قتـا θ – جتـا^{٢} θ – جـا^{٢} θ = ٠ (أ) (ب)

22 ظـا θ + ظتـا θ – قـا θ قتـاθ = ٠ (أ) (ب)

23 $\frac{\text{جـا}^{٢}\ \theta}{\text{١– جتـا}\ \theta}$ – جتـا θ = –١ (أ) (ب)

صفوة معلمي الكويت

حساب المثلثات

في التمارين (13 – 1)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

1 الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها تختلف عن الزوايا الأخرى هي:

(أ) 190° (ب) 170° (جـ) 350° (د) 110°

---

2 الزاوية التي في الوضع القياسي وضلعها النهائي يمر بالنقطة م $(-\frac{\sqrt{27}}{2}، \frac{\sqrt{27}}{2})$ التي تقع على دائرة الوحدة هي:

(أ) 45° (ب) 225° (جـ) 135° (د) 330°

---

3 الزاوية التي يقع ضلعها النهائي في الربع الرابع فيما يلي هي:

(أ) -320° (ب) -270° (جـ) $\frac{5\pi}{3}$ (د) $\frac{13\pi}{9}$

---

4 الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها يختلف عن الزوايا الأخرى هي:

(أ) 135° (ب) 215° (جـ) $\frac{7\pi}{4}$ (د) $\frac{3\pi}{4}$

---

5 الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها $\frac{\pi}{3}$ هي:

(أ) 255° (ب) $\frac{11\pi}{6}$ (جـ) $\frac{7\pi}{8}$ (د) $\frac{5\pi}{3}$

---

6 زاوية في الوضع القياسي قياسها يساوي -225°. فإن النقطة المثلثية التي يمكن أن تقع على الضلع النهائي لهذه الزاوية هي:

(أ) $(\frac{\sqrt{27}}{2}، -\frac{\sqrt{27}}{2})$ (ب) $(-\frac{\sqrt{27}}{2}، \frac{\sqrt{27}}{2})$ (جـ) $(-\frac{\sqrt{27}}{2}، -\frac{\sqrt{27}}{2})$ (د) $(-1، 1)$

حساب المثلثات

7 [جا(-١٣٥°)]^{٢} + [جتا(-١٣٥°)]^{٢} =

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) صفر

---

8 إذا كانت جتا θ سالبة ، جا θ موجبة. يقع الضلع النهائي للزاوية θ في:

(أ) الربع الأول (ب) الربع الثاني (جـ) الربع الثالث (د) الربع الرابع

---

9 النسبة المثلثية فيما يلي التي قيمتها $\frac{١}{٢}$ هي:

(أ) جا(-٣٣٠°) (ب) جتا(-٢٤٠°) (جـ) ظتا(-١٥٠٠°) (د) ظا ٧٦٥°

---

10 النسبة المثلثية فيما يلي التي قيمتها $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هي:

(أ) جتا $\frac{٣١\pi}{٦}$ (ب) جا($-\frac{٣٥\pi}{٣}$) (جـ) ظا $\frac{١٧\pi}{٦}$ (د) قا $\frac{١٣\pi}{٣}$

---

11 إن قيمة المقدار قا (٢π - θ) - قتا ($\frac{\pi}{٢}$ + θ) + جتا ($\frac{\pi}{٢}$ + θ) + جا θ هي:

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

---

12 إذا كانت جتا θ = $-\frac{٥}{٧}$ ، θ تقع في الربع الثالث. فإن جا θ =

(أ) $\frac{-٧}{\sqrt{٦٧٢}}$ (ب) $\frac{٧}{\sqrt{٦٧٢}}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٦٧٢}}{٧}$ (د) $\frac{\sqrt{٦٧٢}}{٧}$

---

13 إذا كانت قا θ = $\frac{٣}{٢}$ ، θ تقع في الربع الرابع. فإن ظا θ =

(أ) $\frac{\sqrt{٥٧}}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{\sqrt{٥٧}}$ (جـ) $\frac{-٢}{\sqrt{٥٧}}$ (د) $\frac{-\sqrt{٥٧}}{٢}$

صفوة معلمي الكويت

الوحدة التاسعة

الهندسة التحليلية

٩ – ١	المستوى الإحداثي
٩ – ٢	تقسيم قطعة مستقيمة
٩ – ٣	(أ) ميل الخط المستقيم
٩ – ٣	(ب) معادلة الخط المستقيم
٩ – ٤	البعد بين نقطة ومستقيم
٩ – ٥	معادلة الدائرة

صفوة معلمي الكويت

المسافة بين نقطتين

قانون:

المسافة بين أي نقطتين أ(س١ ، ص١) ، ب(س٢ ، ص٢) تساوي $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

كتاب الطالب مثال صـ ١٢٦ رقم ١ :

أوجد المسافة بين ك (١ ، -٥) ، ل (٣ ، -٢).

.....

.....

.....

.....

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٢٦ رقم ١ :

أوجد المسافة بين م (-٢، ١) ، ن (-٧ ، ٤). قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

.....

.....

.....

.....

نقطة المنتصف

قانون:

إذا كانت أ(س١ ، ص١) ، ب(س٢ ، ص٢) فإن إحداثيات نقطة المنتصف هي م (س ، ص) حيث

$س = \frac{س_١ + س_٢}{٢}$ ، $ص = \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٢٦ رقم ٢ :

أوجد نقطة منتصف $\overline{جـد}$ حيث جـ(-١ ، ٥) ، د(٣ ، ٠).

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

تقسيم قطعة مستقيمة

١- التقسيم من الداخل

قانون:

إذا كانت $\overline{أب}$ قطعة مستقيمة بحيث أ(س١ ، ص١) ، ب(س٢ ، ص٢) ويراد تقسيمها من جهة أ بنسبة م:ن من الداخل وكانت نقطة التقسيم جـ (س ، ص) فإن:

$$س = \frac{م\ س_٢ + ن\ س_١}{م + ن} \quad ، \quad ص = \frac{م\ ص_٢ + ن\ ص_١}{م + ن}$$

كتاب الطالب مثال صـ ١٢٦ رقم ١ :

إذا كانت أ (-٥ ، ٣) ، ب (٧ ، -٤). فأوجد نقطة تقسيم $\overline{أب}$ من جهة أ بنسبة ٣:١ من الداخل

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٢٦ رقم ١ :

إذا كان أ (٣ ، -٤) ، ب (-٢ ، ٣). فأوجد جـ بحيث ٢أجـ = جـب ، جـ ∈ $\overline{أب}$ [إرشاد: أجـ : جـب = ١ : ٢]

ملاحظة: الرسم ليس جزء من الحل ولكنه يساعد على التحقق من معقولية الإجابة.

تقسيم قطعة مستقيمة

كتاب الطالب مثال صـ ١٢٦ رقم ١ :

إذا كان أ (٢ ، ٤) ، ب (٥ ، ٩). ويراد تقسيم $\overline{أب}$ من الداخل من جهة ب بنسبة ٣:٥

أوجد إحداثيات النقطة جـ

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٢٦ رقم ٢ :

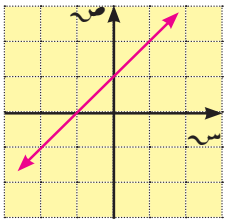
لتكن أ (٢ ، -٣) ، ب (-٤ ، ٧) أوجد إحداثيات النقطة جـ على $\overline{أب}$ بحيث: ٧جـب = ٢ جـ أ.

ميل الخط المستقيم

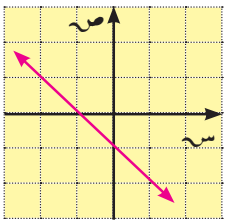
قانون:

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} \quad ، \quad س_٢ - س_١ \neq ٠$$

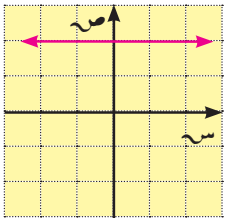
ميل المستقيم موجب



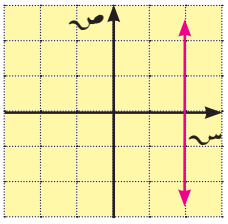
ميل المستقيم سالب



ميل المستقيم الأفقي يساوي صفرًا



المستقيم الرأسي ليس له ميل



كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٣٣ رقم ٢ :

أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بكل زوج من النقاط.

1 جـ (٢ ، ٥) ، د (٤ ، ٧)

2 ق (−١ ، ٤) ، ك (٣ ، −٢)

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٣٤ رقم ٣ :

أثبت أن النقاط أ (٢ ، −١) ، ب (−١ ، ٥) ، جـ (٣ ، −٣) . على استقامة واحدة.

صفوة معلم الكويت

بند ٩ ـ ٣ أ

ميل الخط المستقيم

تذكر أن العلاقة بين ظل الزاوية θ التي يصنعها مستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وميل هذا المستقيم م هي: م = ظا θ.

كراسة التمارين صـ ٧٩ رقم ١٠ :

أوجد ميل المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

.....

.....

.....

.....

.....

كراسة التمارين صـ ٧٩ رقم ١١ :

أثبت أن المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° يوازي المستقيم: س = ص + ٧

.....

.....

.....

.....

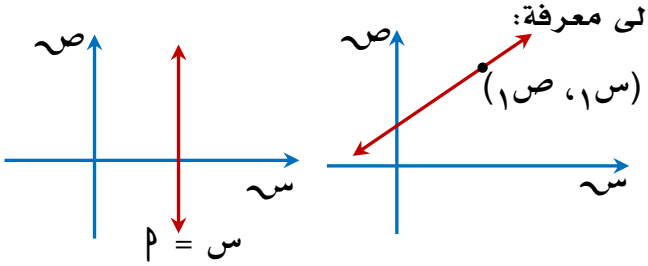
.....

صفوة معلمي الكويت

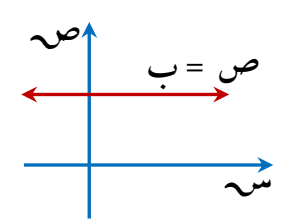
معادلة الخط المستقيم

ملاحظة:

1. لكتابة معادلة خط مستقيم ليس رأسيًا نحن بحاجة إلى معرفة:
   - الميل
   - نقطة من نقاط المستقيم ولتكن (س١، ص١)



تكون معادلة المستقيم: ص − ص١ = م(س − س١)



2. معادلة المستقيم الرأسي هي س = أ (وهذا المستقيم ليس له ميل)

3. معادلة المستقيم الأفقي هي ص = ب (ميل هذا المستقيم = صفر)

كتاب الطالب مثال صـ ١٣٦ رقم ١ :

اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{٣}{٢}$ ويمر بالنقطة (٤ ، −١).

.....

.....

.....

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٣٦ رقم ١ :

اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{-٢}{٣}$ ويمر بالنقطة (−٦ ، ٥).

.....

.....

.....

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٣٧ رقم ٢ :

اكتب معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين جـ(٣ ، −١) ، د(٢ ، −٢)

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلم الكويت

بند ٩ ـ ٣ب

معادلة الخط المستقيم

لأي مستقيمين غير رأسيين ومتوازيين الميل نفسه.

أما إذا كان المستقيمان متعامدين وليس أحدهما رأسيًّا، فناتج ضرب ميليهما يساوي −١ .

وبالتالي إذا علمنا ميل أحد المستقيمات فـ مكننا إيجاد ميل المستقيمات المتوازية

معه أو ميل المستقيمات المتعامدة معه ، كذلك يمكننا إيجاد معادلته بمعرفة نقطة على هذا المستقيم

الصورة العامة لمعادلة مستقيم هي: أ س + ب ص + جـ = ٠ ، أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠

كتاب الطالب مثال صـ ١٣٧ رقم ٣ :

إذا كان المستقيم ل: ص = ٢س + ١ ، فأوجد:

معادلة المستقيم هـ الموازي للمستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٢ ، −٣).

معادلة المستقيم ف العمودي على المستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٤ ، −٣).

صفوة معلمي الكويت

معادلة الخط المستقيم

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٣٧ رقم ٣ :

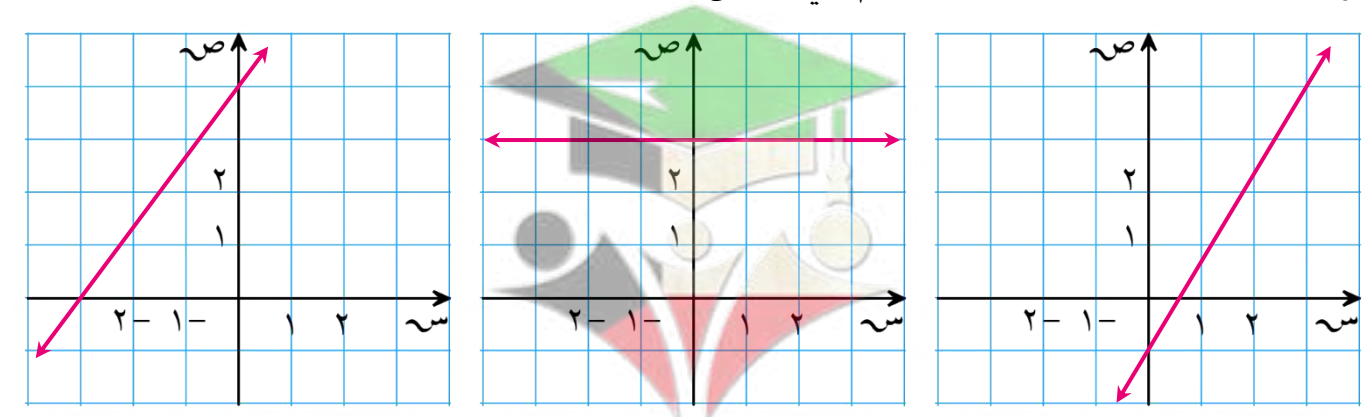
إذا كان المستقيم ك: ٣ص + س + ٣=٠ ، فأوجد:

معادلة المستقيم ﻝ الموازي للمستقيم ك والذي يمر بالنقطة (-٣ ، ٢).

معادلة المستقيم ز العمودي على المستقيم ك والذي يمر بالنقطة (١ ، ٤).

كراسة التمارين صـ ٨٤ رقم ٢ :

أوجد الصورة العامة لمعادلة المستقيم في كل من الأشكال التالية:



بند ٩ – ٤

البعد بين نقطة و مستقيم

إذا كانت معادلة الخط المستقيم على الصورة ل: أ س + ب ص + جـ = ٠ ، فإن البعد ف بين النقطة د(س١ ، ص١) والمستقيم ل تعطى بالصيغة: $ف = \frac{|أ س_{١} + ب ص_{١} + جـ|}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}}$

إذا كانت النقطة د تنتمي إلى المستقيم ل فالبعد بينهما يساوي صفرا.

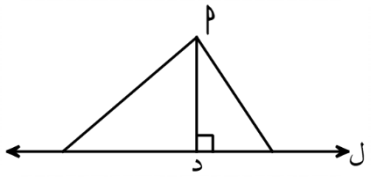
كتاب الطالب مثال صـ ١٤٢ رقم ١ :

أثبت أن النقطة هـ(٢ ، ١) لا تنتمي إلى المستقيم ل الذي معادلته: ص = ٣س – ٤ ، ثم أوجد البعد بين المستقيم ل والنقطة هـ.

ملاحظة:

بعد النقطة عن مستقيم هو طول القطعة العمودية المرسومة من النقطة على الخط المستقيم.

أد هي أقصر مسافة بين النقطة أ والمستقيم ل.



كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٤٢ رقم ١ :

أوجد البعد بين المستقيم ل: ص = –س +٣ والنقطة د(٢ ، ٥)

بند ٩ – ٤

البعد بين نقطة و مستقيم

كتاب الطالب مثال صـ ١٤٢ رقم ٢ :

أوجد البعد من النقطة د(–٤ ، –٣) إلى المستقيم ل: ٢ص = ٣س –٧.

كراسة التمارين صـ ٨٧ رقم ٦ :

أوجـد البعد بين نقطة الأصل والمستقيم: ٢ص = ٣س + ٤

كراسة التمارين صـ ٨٧ رقم ٧ :

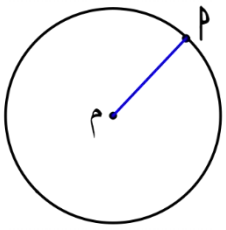
أوجـد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و(٢ ، –١) إذا كان المستقيم: ٣س – ٤ص +٧ = ٠ مماس لها.

صفوة معلمي الكويت

معادلة الدائرة

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة:

لأي دائرة مركزها م(د ، هـ) وطول نصف قطرها نـ فإن المسافة بين مركز الدائرة وأي نقطة أ(س ، ص) على الدائرة يمكن إيجادها باستخدام قانون المسافة بين نقطتين.



المسافة = $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

نـ = $\sqrt{(س - د)^2 + (ص - هـ)^2}$

$نـ^2 = (س - د)^2 + (ص - هـ)^2$

وعلى ذلك ، تكون معادلة الدائرة التي مركزها (د ، هـ) وطول نصف قطرها نـ على الصورة:

$(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = نـ^2$

وتسمى هذه الصورة القياسية لمعادلة بمعلومية المركز م(د ، هـ) وطول نصف القطر نـ.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٤٣ رقم ١ :

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٥ ، –٣) وطول نصف قطرها ٥ وحدات.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٤٤ رقم ٢ :

أوجد معادلة دائرة قطرها $\overline{أب}$ حيث أ(–٣ ، ٦) ، ب(١ ، –٢).

بند ٩ ـ ٥

معادلة الدائرة

إذا كان نق طول نصف القطر الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ، فإن معادلتها على الصورة:

$$س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}$$

كتاب الطالب مثال صـ ١٤٤ رقم ٣ :

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٤ وحدات.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٤٥ رقم ٥ :

أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:

1. $س^{٢} + ص^{٢} = ٤٩$.

2. $(س - ٤)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٣٦$

صفوة معلمي الكويت

معادلة الدائرة

الصورة العامة لمعادلة الدائرة

معادلة الدائرة التي مركزها م(د ، هـ) وطول نصف قطرها نو^{٢} تكتب على الصورة التالية:

(س – د)^{٢} + (ص – هـ)^{٢} = نو^{٢}

وبالفك نحصل على الصورة التالية: س^{٢} + ص^{٢} – ٢ د س – ٢ هـ ص + د^{٢} + هـ^{٢} – نو^{٢} = ٠

بوضع ل = –٢ د ، ك = –٢ هـ ، ب= د^{٢} + هـ^{٢} – نو^{٢} تصبح صورة المعادلة:

س^{٢} + ص^{٢} + ل س + ك ص + ب = ٠ ، حيث ل ، ك ، ب ثوابت

وتسمى الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها $(-\frac{ل}{٢} ، -\frac{ك}{٢})$

طول نصف قطرها نو = $\frac{١}{٢}\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب}$ حيث ل^{٢} + ك^{٢} – ٤ب > ٠

الصورة العامة: س^{٢} + ص^{٢} + ل س + ك ص + ب = ٠ هي معادلة دائرة ونلاحظ التالي:

- إنها معادلة من الدرجة الثانية في س ، ص.
- معامل س^{٢} = معامل ص^{٢}
- لا يوجد الحد الذي يتضمن س ص.

كتاب الطالب مثال صـ ١٤٧ رقم ٦ :

عيّن مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة: ٣س^{٢} + ٣ص^{٢} – ٦ س + ٩ ص – ١٢ = ٠

.....

.....

.....

.....

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٤٧ رقم ٦ :

عيّن مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة: ٢س^{٢} + ٢ص^{٢} – ١٢ س – ٤ ص – ٣٠ = ٠

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

معادلة الدائرة

ملاحظة:

عندما يكون لدينا معادلة على الصورة العامة التالية: $س^{٢} + ص^{٢} + ل\,س + ك\,ص + ب = ٠$

يمكننا معرفة ما تمثله بيانيًا هذه المعادلة بمجرد مقارنة $ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب$ مع الصفر

- عندما $ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب > ٠$ فإن المعادلة لا تمثل معادلة دائرة
- عندما $ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب = ٠$ فإن المعادلة تمثل نقطة
- عندما $ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب < ٠$ فإن المعادلة تمثل معادلة دائرة

كتاب الطالب مثال و حاول أن تحل صـ ١٤٨ رقم ٧ :

هل كل معادلة مما يلي تمثل معادلة دائرة ؟ فسّر.

1) $س^{٢} + ص^{٢} - ٣س + ٥ ص - \frac{١٥}{٤} = ٠$

2) $س^{٢} + ص^{٢} + ٤س - ٧ص + ٢٠ = ٠$

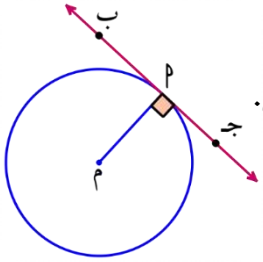
3) $س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س + ٨ ص + ٢٥ = ٠$

4) $س^{٢} + ص^{٢} - ٤س + ٧ ص + ١٧ = ٠$

صفوة معلمي الكويت

معادلة الدائرة

معادلة مماس لدائرة



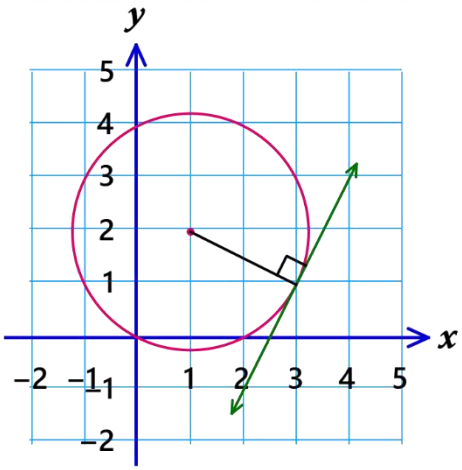
سبق وتبين لنا أن نصف قطر الدائرة عمودي على مماس الدائرة عند نقطة التماس.

باستخدام هذه الخاصية ، نستطيع إيجاد معادلة مماس الدائرة.

كتاب الطالب مثال صـ ١٤٨ رقم ٨ :

أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها:

$(س-١)^{٢} + (ص-٢)^{٢} = ٥$ عند نقطة التماس $أ(٣ ، ١)$.



كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٤٩ رقم ٨ :

أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها $(س-٢)^{٢} + (ص-١)^{٢} = ٢٥$ عند نقطة التماس $أ(٦ ، ٤)$.

الهندسة التحليلية

الأسئلة الموضوعية

في التمارين (7 – 1)، ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

1 من الممكن أن يكون لمستقيمين مختلفين الميل نفسه. (أ) (ب)

2 إن ميل المستقيم الذي يمر بالربع الثالث ونقطة الأصل هو دائمًا سالب. (أ) (ب)

3 لا يمر المستقيم الذي ميله يساوي صفرًا بنقطة الأصل. (أ) (ب)

4 نقطتين لديهما الإحداثي السيني نفسه، فإنهما ينتميان إلى المستقيم الرأسي نفسه. (أ) (ب)

5 معدل التغير دائمًا موجبًا أو يساوي الصفر. (أ) (ب)

6 كل المستقيمات الأفقية لها الميل نفسه. (أ) (ب)

7 المستقيم الذي ميله يساوي ١ دائمًا يمر بنقطة الأصل. (أ) (ب)

صفوة معلمي الكويت

الهندسة التحليلية ـ

في التمارين (15 – 1)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

1 المسافة بين النقطتين (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٤) بالوحدات الطولية تساوي:

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

---

2 نقطة المنتصف لـ $\overline{أب}$ حيث أ (١٢ ، -٢) ، ب (-٢ ، -٩) هي:

(أ) $(٥ ، ٥\frac{١}{٢})$ (ب) $(٥ ، -٥\frac{١}{٢})$ (جـ) $(٧ ، ٥\frac{١}{٢})$ (د) $(٧ ، -٥\frac{١}{٢})$

---

3 إذا كانت جـ(١ ، -٣) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (٢ ، -١) فإن النقطة ب هي:

(أ) ب (٠ ، ٥) (ب) ب (٠ ، ٧) (جـ) ب (٠ ، -٥) (د) ب (-٥ ، ٠)

---

4 مستقيم ميله = $-\frac{٥}{٢}$ ويمر بالنقطتين أ (س ، ٣) ، ب (٢ ، ٨) فإن قيمة س هي:

(أ) ٠ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

---

5 مستقيم ميله =٦ ويمر بالنقطتين أ (-٤ ، ص) ، ب (٢ ، ٤ص) فإن قيمة ص هي:

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ١٢

---

6 إذا كانت النقطة م(١، ٤) تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ١ : ٣ من جهة أ حيث أ (٢ ، ٤) ، ب (س ، ٤) فإن قيمة س =

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) -٢ (د) -٤

---

7 طول قطر الدائرة التي معادلتها $(س-٢)^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ هو:

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٥ (د) ٩

الهندسة التحليلية ـ

8 إذا كانت النقطة (١ ، ص) تبعد وحدة واحدة عن النقطة (٠ ، ١) . فإن قيمة ص =

(أ) ٠ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

---

9 إذا كان المستقيمان: ٤س – أص= ٦، حيث أ ثابت ، ٦س + ٣ص +٢ = ٠ متعامدين. فإن قيمة أ هي:

(أ) ٤ (ب) ٤- (جـ) ٨ (د) ٨-

---

10 معادلة المستقيم المار بالنقطة (٤ ، ٥) ويوازي المستقيم ص = ٠ هي:

(أ) س = ٤ (ب) ص = ٥ (جـ) ص = ٤ (د) س = ٥

---

11 ميل المستقيم الموازي للمستقيم: ٦س + ٣ص – ٧ = ٠ يساوي:

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $-\frac{١}{٢}$ (جـ) ٢ (د) ٢-

---

12 معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) ويوازي المستقيم س = ٠ هي:

(أ) س = ٣ (ب) ص = ٢ (جـ) ص = ٣ (د) س = ٢

---

13 بعد النقطة (٠ ، ٠) عن المستقيم الذي معادلته ص = ٤ يساوي:

(أ) ٥ وحدات (ب) ٣ وحدات (جـ) ٤ وحدات (د) ١٠ وحدات

---

14 النقطة التي تنتمي للمستقيم ٣ص – س+ ١ = ٠ هي:

(أ) (٣، ٣) (ب) (٠، ٢) (جـ) (٢، ٠) (د) (١، ٤)

---

15 المسافة بين النقطتين (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٣) بوحدات الطول تساوي:

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

الوحدة العاشرة

الإحصاء والاحتمال

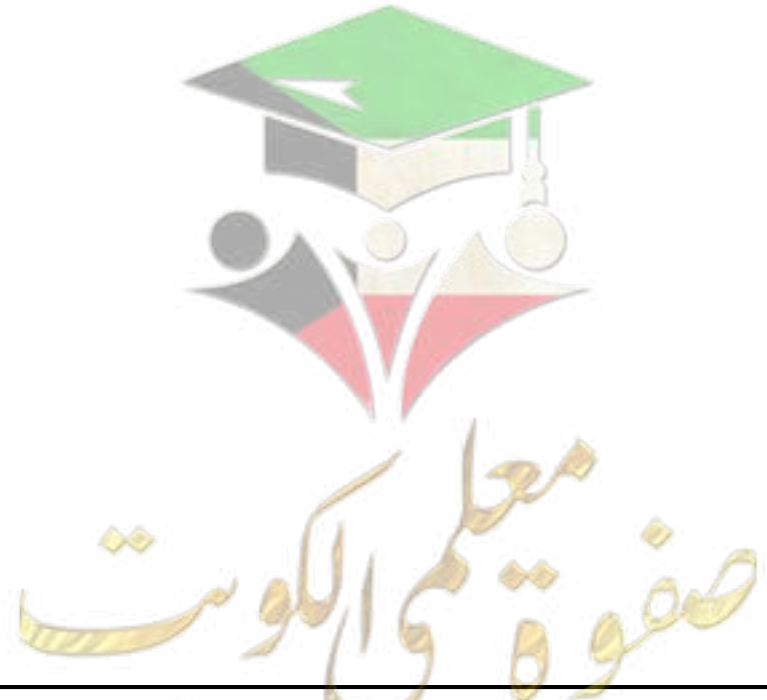
١٠ – ١ تحليل البيانات ..... (معلق)

١٠ – ٢ الأرباعيات ..... (معلق)

١٠ – ٣ الانحراف المعياري

١٠ – ٣ طرق العد

١٠ – ٤ الاحتمال المشروط



الانحراف المعياري

التباين والانحراف المعياري:

إذا كانت س١ ، س٢ ، س٣ ، ..... سن ،مجموعة من القيم عددها ن حيث متوسطها الحسابي $\overline{س}$ فإن:

$$\text{التباين } ع^{٢} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^{٢}}{ن}$$

ومنه الانحراف المعياري $ع = \sqrt{ع^{٢}}$

إذا كانت س١ ، س٢ ، س٣ ، ..... سن ، هي قيم بيانات ؛ ت١ ، ت٢ ، ت٣ ، ..... تن هي تكرار هذه القيم على الترتيب فيكون التباين لهذه القيم هو:

$$\text{التباين } ع^{٢} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر (س_ر - \overline{س})^{٢}}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر}$$

مثال (1) صفحة 177

أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم البيانات: ٤ ، ٦ ، ٨ ، ٥ ، ٣ ، ٧ ، ٢

$س_ر$	$(س_ر - \overline{س})$	$(س_ر - \overline{س})^{٢}$

صفوة معلمي الكويت

حاول أن تحل (1) صفحة 178

أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم البيانات: ٩ ، ٧ ، ٨ ، ٦ ، ٤ ، ٢

$س_ر$	$(س_ر - \overline{س})$	$(س_ر - \overline{س})^2$

مثال (3) صفحة 180

يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات ٦٠ طالبًا في امتحان نهاية العام الدراسي حيث النهاية العظمى ١٠٠ درجة.

الفئة (درجات)	٠ -	٢٠ -	٤٠ -	٦٠ -	٨٠ -
التكرار	٤	٦	١٦	٢٤	١٠

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لقيم هذه البيانات.

صفوة معلمي الكويت

مثال (4) صفحة 182

إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من بيانات هو ع = ٦ وأن مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو ٥٤٠ ، فما عدد قيم هذه البيانات؟

.....

.....

.....

.....

.....

حاول أن تحل (4) صفحة 182

الانحراف المعياري لمجموعة من بيانات هو ع = ٤ ومجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو ٤٨٠ ، فما عدد قيم هذه البيانات؟

.....

.....

.....

.....

.....

طرق العد

مبدأ العد

إذا كان لدينا عملية مركبة ع تتكون من عدة عمليات متتالية عددها ن وهي:

ع١ ، ع٢ ، ع٣ ، ..... ، عن وإذا كانت

ع١ يمكن أن تحدث بـ ر١ طريقة،

ع٢ يمكن أن تحدث بـ ر٢ طريقة،

عن يمكن أن تحدث بـ رن طريقة،

فإن عدد الطرق التي يمكن أن يحدث بها الإجراء هي: ر١ × ر٢ × ... × رن

مثال (2) صفحة 184

في تجربة على سلوك الحيوان، استخدم علماء النفس نوعين من الأطعمة على التوالي كمكافأة. كل مكافأة عبارة عن واحد من ثلاثة أنواع ممكنة. كم عدد التشكيلات المختلفة الممكنة في حال كانت أنواع الجوائز غير مكررة؟

مثال (4) صفحة 185

يوجد ثمانية متسابقين في سباق ١٠٠ م جري. ما هو عدد النتائج الممكنة لهذا السباق؟ افترض عدم وجود تعادل بين أي متسابقين. علما بأن المتسابقين وصل كلا منهم إلى خط النهاية.

صفوة معلم الكويت

حاول أن تحل (4) صفحة 186

اشترك ٢٠ جملاً في سباق للهجن ووصلت جميعها إلى خط النهاية في أوقات مختلفة (أي أنه لا يوجد أي تعادل).ما هو عدد النتائج الممكنة لهذا السباق؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تذكر:

مضروب ن

ن! هو: ن × (ن−١) × ... × ٣ × ٢ × ١

فمثلاً: ٥! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

٠! = ١ تقرأ مضروب صفر = ١

التباديل

إذا كان الترتيب مهما ومعتمداً. مثل هذا الترتيب يسمى بالتبادل. وعموما عدد تبادل ن من الأشياء هو ن! (مضروب ن) كما هو مبيّن في المثال (٤) وفي حالة العديد من المواقف التي تتعامل مع تباديل الأشياء يهتم فقط بمجموعة جزئية من الأشياء المتضمنة.

مثال (5) صفحة 186

افترض أن ٣١ عضوا من جمعية الرياضيات في مدرستك يريدون اختيار أربعة أشخاص لأربعة مناصب: رئيس ، نائب رئيس ، أمير السر ، أمين الصندوق. حدد كم طريقة يكن بها الاختيار لهذه المناصب.

.....

.....

.....

.....

حاول أن تحل (5) صفحة 186

في إحدى الجمعيات الخيرية يوجد ٢٠ عضوّا يشكلون مجلس الأمناء. يريدون اختيار رئيسا ، أمينا للسر ، أمينا للصندوق. حدد كم طريقة يمكن بها الاختيار لهذه المناصب.

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

قانون التباديل

قانون

$$ل^{ن}_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!} \quad \text{حيث } ر ، ن \in ص^{+} ، ر \leq ن ، \quad ل^{ن}_{٠} = ١ \ ، \ ل^{ن}_{١} = ن \ ، \ ل^{ن}_{ن} = ن!$$

مثال (6) صفحة 187

أوجد قيمة كل تبديل بدون استخدام الآلة الحاسبة بصورة مباشرة.

1 $ل^{٦}_{٤}$	2 $ل^{١١}_{٣}$	3 $ل^{ن}_{٣}$

حاول أن تحل (6) صفحة 188

أوجد قيمة كل تبديل بدون استخدام الآلة الحاسبة بصورة مباشرة.

1 $ل^{٥}_{٣}$	2 $ل^{١٠}_{٤}$	3 $ل^{ن}_{٤}$

مثال (7) صفحة 188

ما عدد الكلمات التي يمكن أن تتشكل من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية العربية وذلك في حال عدم تكرار أي منها؟

صفوة معلمي الكويت

التوافيق

عندما تريد إيجاد عدد المجموعات الجزئية والمكون كل منها من ر عنصر ، والتي يمكن اختيارها من مجموعة مكونة من ن عنصر (ر ≤ ن) دون الاعتماد على الترتيب فنحن نحسب التوافيق.

مثال (8) صفحة 188

ما عدد اللجان المكونة من ثلاثة أشخاص ، والتي يمكن تكوينها من مجموعة من أربعة أشخاص؟

.....

.....

حاول أن تحل (8) صفحة 189

ما عدد اللجان المكونة من شخصين والتي يمكن تكوينها من مجموعة من أربعة أشخاص؟

.....

.....

وبصفة عامة ، عدد التوافيق المكون كل منها من ر عنصر والمختارة من بين مجموعة مكونة من ن عنصر يمكن إيجادها كالآتي:

$$\text{عدد التوافيق} = \frac{\text{ن ل ر}}{\text{ر!}} = \frac{\text{ن!}}{\text{(ن – ر)! × ر!}}$$

تعريف: قانون التوافيق

إذا كان ن ، ر عددان صحيحان موجب ان حيث ن ≤ ر ، فإن:

عدد التوافيق المكونة كل منها من ر من الأشياء والمختارة من بين ن من الأشياء هو:

$$\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \frac{\text{ن!}}{\text{(ن – ر)! × ر!}} \quad ، \quad \binom{\text{ن}}{\text{٠}} = ١ \quad ، \quad \binom{\text{ن}}{\text{١}} = \text{ن} \quad ، \quad \binom{\text{ن}}{\text{ن}} = ١$$

ملاحظة: يستخدم الرمز ن ل ر للتعبير عن عدد التوافيق

مثال (9) صفحة 190

إذا كان فريق كرة سلة يتكوّن من ١٢ لاعبًا. فما عدد الفرق المختلفة التي يمكن تكوينها من خمسة لاعبين من بين لاعبي هذا الفريق (يمكن لأي لاعب اللعب في كل المراكز)؟

.....

.....

.....

صفوة معلمي الكويت

مثال (10) صفحة 190

من أجل اختيار لوائح المرشحين للانتخابات النيابية ، يجب اختيار ١٠ مرشحين من ٥١ مرشحا.

ما عدد اللوائح المختلفة التي يمكن تكوينها؟

.....

.....

.....

مثال (11) صفحة 191

في كل مما يلي حدّد ما إذا كان المثال يبيّن تبديلاً أو توفيقًا واحسب عدد الطرق في كل حالة.

- اختيار رئيس ، نائب رئيس ، أمين سر من بين ٢٥ عضو في نادي القراءة.

.....

- اختيار ٥ حبات بطاطا من كيس يحتوي على ١٢ حبة لإعداد وجبة غذائية.

.....

- وضع معلم مخططًا يبيّن مقاعد ٢٢ طالبًا في غرفة بها ٢٥ مقعدًا.

.....

- اختيار ٤ أبيات من قصيدة شعرية مكونة من ١١ بيتًا لكتابتها وتعليقها في غرفة الفصل

.....

حاول أن تحل (11) صفحة 191

فيما يلي ، حدد ما إذا كان المثال يبين تبديلاً أو توفيقًا.

- اختيار ٣ طلاب من الصف العاشر للمشاركة في مسابقة تلاوة القرآن.

.....

- مراكز المشاركين الثلاثة في مسابقة تلاوة القرآن

.....

صفوة معلمي الكويت

الاحتمال

في كل تجربة عشوائية ، نهتم أولا بمعرفة مجموعة النواتج الممكنة والتي تسمى فضاء العينة (ف). كل حدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

إذا كانت جميع نواتج التجربة لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث أ هو:

$$\text{ل (الحدث أ)} = \frac{\text{عدد نواتج الحدث أ}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$$

أي أنه: $\text{ل}(أ) = \frac{\text{ن}(أ)}{\text{ن}(ف)}$

يكتب الاحتمال بصورة كسر عشري أو كسر أو نسبة أو نسبة مئوية

مثال (1) صفحة 192 + حاول أن تحل (1) صفحة 192

في لعبة ((رمي حجري نرد منتظمين ومتمايزين)) والتجربة هي ملاحظة الوجه العلوي لكل من الحجرين

- مم يتألف كل ناتج؟ اكتب فضاء العينة. وما عدد النواتج الممكنة؟
- مثل فضاء العينة بيانيًا.
- ما احتمال الحدث ((أ)) : ((ظهور عددين مجموعهما يساوي ٤)) ؟
- ما احتمال الحدث ((ب)) : ((ظهور عددين مجموعهما يساوي ٧)) ؟
- ما احتمال الحدث ((جـ)) : ((ظهور عددين مجموعهما يساوي ١٣)) ؟
- ما احتمال الحدث ((د)): ((ظهور عددين أحدهما مربعًا للآخر)) ؟

صفوة معلمي الكويت

ولأن أي حدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ، فإن عدد النواتج في حدث ما يكون دائما أصغر من أو يساوي عدد نواتج فضاء العينة. لذلك فإن احتمال وقوع حدث ما ، هو عدد ينتمي إلى الفترة [٠ ، ١].

خواص الاحتمال لحدث ما

ليكن أ حدث في فضاء عينة ف منته وغير خالٍ فإن:

1. ٠ ≤ ل (أ) ≤ ١
2. إذا كان أ = { } إذًا ل (أ) = ٠ ويسمى أ حدثًا مستحيلاً.
3. إذا كان أ = ف إذًا ل (أ) = ١ ويسمى أ حدثًا مؤكدًا.
4. مجموع احتمالات جميع النواتج في فضاء العينة يساوي الواحد الصحيح

حاول أن تحل (2) صفحة 194

في تجربة رمي حجري نرد متمايزين معًا وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما ، كان الحدث ب « الحصول على مجموع أصغر من ١٣» ، فما احتمال وقوع الحدث ب ؟

صفوة معلم الكويت

قاعدة الاحتمال لاتحاد حدثين:

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

ومنها ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)

قاعدة الاحتمال لمتمم الحدث أ :

ل($\overline{أ}$) = ١ − ل(أ)

قاعدة الاحتمال لحدثين متنافيين:

إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف فإن ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب)

مثال (5) صفحة 196

إذا كان أ ، ب حدثان في فضاء العينة ف وكان:

ل(أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٤ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٤ ، أوجد كلاً من:

1) ل(أ ∪ ب)

2) ل($\overline{أ}$)

حاول أن تحل (5) صفحة 196

إذا كان أ ، ب حدثان في فضاء العينة ف وكان:

ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٥ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٦ ، أوجد كلاً من:

1) ل(أ ∩ ب)

2) ل($\overline{ب}$)

معلم الكويت

مثال (6) صفحة 197

إذا كان أ ، ب حدثان في فضاء العينة ف ، وكان:

ل($\overline{أ}$) = ٠,٢ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٩ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٤ أوجد ل($\overline{ب}$) ، ل($\overline{أ \cap ب}$).

حاول أن تحل (6) صفحة 197

إذا كان أ ، ب حدثان في فضاء العينة ف ، وكان ل(أ) = ٠,٥ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٢

أوجد ل($\overline{أ \cup ب}$).

حاول أن تحل (7) صفحة 198

في فضاء عينة ف لدينا حدثان أ ، ب متنافيان حيث ل(أ) = ٠,٤ ، ل(ب) = ٠,٥

1. احسب ل(أ ∪ ب).
2. احسب ل($\overline{أ \cup ب}$).

صفوة معلمي الكويت

الأحداث المستقلة

يكون الحدثان مستقلين إذا كان وقوع (أو عدم وقوع) أحدها لا يؤثر على وقوع (أو عدم وقوع) الآخر.

إذا كان أ ، ب حدثان مستقلان فإن احتمال وقوع الحدثين معًا هو:

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب)

حاول أن تحل (8) صفحة 199

في تجربة عشوائية عند رمي قطعة نقود ثلاث مرات وملاحظة الوجه العلوي

ما احتمال أن يكون الناتج (ص ، ك ، ص)؟

.....

.....

.....

.....

الاحتمال المشروط

احتمال وقوع الحدث ب بشرط وقوع الحدث أ يسمى بالاحتمال المشروط (الشرطي) ويكتب ل(ب/ أ)ويقرأ

احتمال الحدث ب بشرط أ ويمكن إيجاد ل(ب/ أ)باستخدام القاعدة التالية:

قاعدة الاحتمال المشروط

إذا كان وقوع الحدث ب مشروطا بوقوع الحدث أ فإن:

$$ل(ب/أ) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)} \quad \text{حيث} \quad ل(أ) \neq ٠$$

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب/ أ)

مثال (10) صفحة 202

في تجربة عشوائية أ ، ب حدثان حيث ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٢

أوجد احتمال كل من الأحداث التالية: 1 ل(ب/ أ) 2 ل(أ / ب)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حاول أن تحل (10) صفحة 202

في تجربة عشوائية ، إذا كان ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب/ أ) = ٠,٢ أوجد ل(أ ∩ ب)

مثال (11) صفحة 202

رمى جاسم حجر نرد منتظم ولاحظ الوجه العلوي له.

نسمي الحدث ب: الحصول على عدد أكبر من أو يساوي ٥ ، الحدث أ: الحصول على عدد فردي.

احسب ل(ب/ أ) (احتمال ظهور عدد أكبر من أوي يساوي ٥ بشرط أن يكون عددا فرديا)

حاول أن تحل (11) صفحة 202

في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم ، إذا كان الحدث ب الحصول على عدد زوجي ، والحدث أ الحصول على عدد أولي. فاحسب ل(ب/ أ)

صفوة معلمي الكويت

الاحتمال

الأسئلة الموضوعية

في التمارين (2 – 1)، ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

(١) مجموع انحرافات مجموعة من القيم عن متوسطها الحسابي يساوي صفرًا. (أ) (ب)

---

(٢) إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم يساوي ٣ وكان مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي يساوي ١٨٠ فإن عدد القيم هو ٦ (أ) (ب)

في التمارين (8 – 1)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

1 في البيانات ١٠ ، ١٣ ، ٩ ، ٧ ، ١٢ ، ١٥ الانحراف المعياري هو:

(أ) ٧ (ب) ٦ (جـ) $\sqrt{٧٨}$ (د) ليس أيّ مما سبق

---

2 إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم بيانات يساوي ٤ ومجموع مربعات انحرافات قيم هذه البيانات عن متوسطها الحسابي يساوي ١٩٢ فإن عدد قيم هذه البيانات هو:

(أ) ١٦ (ب) ٤٨ (جـ) ١٢ (د) ليس أيّ مما سبق

---

3 إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٥ فإن ل(أ ∪ ب) =

(أ) ٠,٥ (ب) ٠,٧ (جـ) ٠,٨ (د) ٠,٦

---

4 إذا كان أ ، ب حدثين في فضاء العينة وكان ل(أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٥ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٨ فإن ل(أ ∩ ب) =

(أ) ٠,٢ (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,٦ (د) ١,٢

صفوة معلمي الكويت

الاحتمال

5 إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين في فضاء العينة وكان ل(أ) = ٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٤

فإن ل(أ / ب) =

أ) ٠,٦ ب) ٠,٤ جـ) ٠,٢ د) ٠,٢٤

---

6 $ل_{٣}^{٥}$ =

أ) ١٥ ب) ١٢٠ جـ) ٥ د) ٦٠

---

7 إذا كان التباين لمجموعة قيم من بيانات هو ع٢ = ٣٦ ومجموع مربعات انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي هو ٥٤٠ فإن عدد قيم هذه البيانات يساوي:

أ) ١٥ ب) ٩٠ جـ) ٥٠٤ د) ٥٧٦

---

8 إذا كان أ ، ب حدثين في فضاء العينة وكان ل(أ) = ٠,٥ ، ل(ب/ أ) = ٠,٢

فإن ل(أ ∩ ب) =

أ) ٠,٥ ب) ٠,١ جـ) ٠,٢ د) ٠,٢٥

صفوة معلمي الكويت