2025/2026

الرياضيات

الفصل الدراسي الثاني

الصف الحادي عشر علمي

اعداد:

أ/ حسام بيومي

الوحدة السابعة

الأعداد المركبة

الأعداد المركبة

الوحدة التخيلية : هي العدد الذي مربعه (-1) و يرمز له بالرمز i

$i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$

- **الأعداد التخيلية** : لأي عدد حقيقي موجب m ، $\sqrt{-m} = \sqrt{m}\, i$
- تسمى الأعداد التي على الصورة bi حيث $b \in R^*$ أعداد تخيلية

مجموعة الجذور التربيعية الموجبة و السالبة للأعداد الحقيقية السالبة تكون مجموعة الاعداد التخيلية

كتاب الطالب مثال و حاول أن تحل صـ 13 رقم 1

بسط كلا مما يلي مستخدما الوحدة التخيلية i

(a) $\sqrt{-4}$

(b) $\sqrt{-8}$

(a) $\sqrt{-2}$

(b) $-\sqrt{-12}$

(c) $\sqrt{-36}$

تعريف العدد المركب

هو عدد على الصورة $z = a + b\,i$ حيث a ، b عددان حقيقيان ، i الوحدة التخيلية

و يمكن كتابة أي عدد مركب على الصورة $z = a + b\,i$ و تسمى الصورة الجبرية للعدد المركب

حيث a الجزء الحقيقي

، حيث b الجزء التخيلي

$z = a + b\,i$

الجزء الحقيقي ← a ، الجزء التخيلي ← b

و يرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$

لاحظ : إذا كان $b = 0$ فإن $z = a$ يسمى عددا حقيقيا

و إذا كان $z = b\,i$ عددا تخيليا فإن $a = 0$

تابع الأعداد المركبة

أكمل الجدول :

الجزء التخيلي	الجزء الحقيقي	العدد المركب
3	2	$2+3i$
-5	4	
		$i-1$
		7
-1	0	

كتاب الطالب مثال و حاول أن تحل ص 14 رقم 2 :

أكتب كلا من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية :

c) $1-\sqrt{-20}$

b) $\dfrac{1+\sqrt{-25}}{4}$

a) $\sqrt{-9}+6$

c) $\dfrac{\sqrt{-9}+5}{7}$

b) $\dfrac{10-\sqrt{-100}}{5}$

a) $\sqrt{-18}+7$

لاحظ :

- كل عدد حقيقي هو عدد مركب . $a = a + 0i$
- مجموعة الأعداد الحقيقية و مجموعة الأعداد التخيلية هما مجموعتان جزئيتان من مجموعة الأعداد المركبة . المخطط التالي يوضح ذلك

الأعداد المركبة

- الأعداد الحقيقية
  - الأعداد النسبية: $\frac{4}{7}$ ، 0.3
    - الأعداد الصحيحة: -1,2,-3
      - الأعداد الكلية: 0,1,2,3,7
  - الأعداد الغيرنسبية: $-\sqrt{2}$ ، e ، π
- الأعداد التخيلية: $2i$ ، $-\sqrt{3}\,i$

تساوي عددين مركبين

يتساوي عددان مركبان إذا و فقط إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان و تساوى جزءاهما التخيليان

و ليكن :

$$z_1 = a_1 + b_1 i \text{ ، } z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 = z_2 \longleftrightarrow a_1 = a_2 \text{ ، } b_1 = b_2$$

كتاب الطالب حاول أن تحل ص 15 رقم 3 :

أوجد قيم كل من $x ، y \in R$ في كل مما يأتي

a $x + 5i = 7 - 3y\, i$

b $(x+3) + y^2\, \mathrm{i} = 5 - y\, i$

c $3\, i = 2x - 5y\, i$

ملحوظة : إذا ساوى عدد مركب الصفر فإن جزءه الحقيقي يساوي الصفر و جزءه التخيلي يساوي الصفر

$$x + y\, i = 0 \longrightarrow x = 0 \text{ ، } y = 0$$

التمثيل البياني للعدد المركب

التمثيل البياني لعدد مركب :

يمكن وضع العدد المركب $z = a + b\,i$ على صورة الزوج المرتب (a,b)

حيث : الإحداثي السيني هو الجزء الحقيقي و الإحداثي الصادي هو الجزء التخيلي

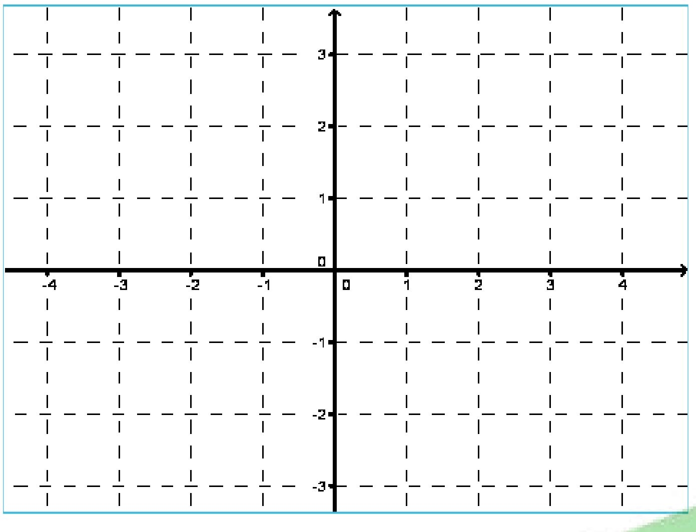
$z = a + b\,i$ ⟷	$M\,(a,b)$
الصورة الجبرية	الصورة الديكارتية

كل نقطة في المستوى الإحداثي تمثل عدد مركبا ، و كل عدد مركب يناظر (تمثله) نقطة في المستوى الإحداثي
في هذه الحالة يسمى المستوى الإحداثي المستوى المركب (مستوى أرجاند)
و يسمى محور السينات بالمحور الحقيقي ، و يسمى محور الصادات بالمحور التخيلي .

كتاب الطالب مثال صـ 17 رقم 4 :

مثل كلا مما يلي في المستوى المركب :

(a) $z_1 = 3 + 2\,i$ (b) $z_2 = -1$ (c) $z_3 = -i - 2$ (d) $z_4 = i$



كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 16 رقم 5 :

أكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط التالية :

k(7, 0) , H(1 ,-2) , N(-4 , 1)

بند 1 - 7

جمع و طرح الأعداد المركبة

العمليات على الأعداد المركبة

أولا جمع و طرح الأعداد المركبة :

في الجمع نجمع جزءيهما الحقيقين معا و نجمع جزءيهما التخيلين معا
كذلك في الطرح نطرح جزءيهما الحقيقين معا و نطرح جزءيهما التخيلين معا

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i$ ، $z_2 = a_2 + b_2 i$ عددين مركبين فإن

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

خواص عملية الجمع على الأعداد الحقيقية تستمر مع عملية الجمع على الأعداد المركبة كما يلي :

الخاصية	$\forall\ z_1 ، z_2 ، z_3 \in \mathbb{C}$
الإبدالية	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
التجميعية	$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 17 رقم 6 :

إذا كان $z_3 = -0.3i$ ، $z_2 = 3.4 - 1.2i$ ، $z_1 = -2 + 5i$ فأوجد :

(a) $z_1 + z_2$

(b) $z_2 - z_1$

(c) $z_3 - z_2 - z_1$

ملاحظات :

الصفر هو العنصر المحايد لعملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة $0 = 0 + 0i$

المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = a + b\,i$ هو العدد المركب $-z = -a - b\,i$

إذا كان مجموع عددين مركبين يساوي صفرا فإن كلا منهما معكوس جمعي للأخر و العكس صحيح

$z_1 = -z_2 \longrightarrow z_1 + z_2 = 0$

لإيجاد ناتج طرح $z_1 - z_2$ يمكن إضافة المعكوس الجمعي لـ z_2 إلى z_1 أي أن

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

بند 1 - 7

ضرب الاعداد المركبة

ثانيا ضرب الأعداد المركبة

قاعدة الضرب :

$\forall z_1 . z_2 \in \mathbb{C} \quad . \quad c \in R$

حيث $z_2 = a_2 + b_2 i \qquad z_1 = a_1 + b_1 i$,

1. $cz_1 = ca_1 + cb_1 i$
2. $z_1 \times z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

خواص عملية ضرب الأعداد المركبة :

الخاصية	$\forall z_1 . z_2 . z_3 \in \mathbb{C}$
الإبدالية	$z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$
التجميعية	$z_1 \times (z_2 \times z_3) = (z_1 \times z_2) \times z_3$
التوزيعية	$z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$ $z_1 \times (z_2 - z_3) = z_1 \times z_2 - z_1 \times z_3$

العدد 1 هو العنصر المحايد لعملية ضرب الأعداد المركبة $(1 = 1 - 0i)$ لضرب عدديين يمكن إستخدام $i^2 = -1$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 19 رقم 7 :

أوجد ناتج

a. $(6 - 5i)(4 - 3i)$

b. $(9 + 4i)(4 - 9i)$

c. $(12i)(7i)(i + 1)$

ضرب و قسمة الأعداد المركبة

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 20 رقم 8 :

إذا كان $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + 4i$ فأوجد

(b) $z_1 . z_2$

(a) $\frac{1}{2} z_1$

قوى العدد المركب (i)

إذا كان P عدد كلي فإن :

$i^{4P} = 1$. $i^{4P+1} = i$. $i^{4P+2} = -1$. $i^{4P+3} = -i$

كتاب الطالب مثال صـ 20 رقم 9 :

إذا كان $z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$, $z_2 = -2i$, $z_1 = i$ أوجد

(a) ${z_1}^{21}$

(b) ${z_2}^{6}$

(c) ${z_3}^{2}$

ثالثاً قسمة الأعداد المركبة

مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

ملاحظة :

لإيجاد مرافق العدد المركب يجب أن يكون العدد المركب على الصورة الجبرية $z = a + bi$ حيث $\forall a , b \in R$

خواص مرافق العدد المركب : إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ فإن

- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z_1} \pm \bar{z_2}$
- $\overline{(\bar{z_1})} = z_1$
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z_1}\ \bar{z_2}$
- $z_1 + \bar{z_1} = 2a_1$
- $z_1 - \bar{z_1} = 2b_1$
- $z_1 \bar{z_1} = {a_1}^2 + {b_1}^2$

تابع ضرب و قسمة الأعداد المركبة

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 22 رقم 10 :

إذا كان $z_2 = 3 + 5i$ ، $z_1 = 2 - 7i$ فأوجد :

(d) $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(c) $\overline{(z_1 \cdot z_2)}$

(b) $\overline{(z_1 - z_2)}$

المعكوس الضربي لعدد مركب غير صفري $z = a + b\,i$ هو z^{-1}

أي أن :

$$z^{-1} = \frac{1}{a+b\,i} \times \frac{a-b\,i}{a-b\,i} \longrightarrow z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\,i$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 23 رقم 11 :

أوجد المعكوس الضربي لكل من :

(c) $z_3 = 6i$

(a) $z_1 = -3i - 7$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 24 رقم 12 :

أوجد ناتج قسمة $6i - 3$ على $1 + 2i$

تابع قسمة الاعداد المركبة

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 24 رقم 13 :

أكتب كلا من مما يلي في الصورة الجبرية للعدد المركب :

a) $\frac{3+i}{2+5i}$

b) $\frac{2-i}{2+i}$

c) $\frac{2}{3-i}$

كراسة التمارين صـ 9 رقم 22 :

بسط ما يلي : $\left(-2+\sqrt{-9}\right)\left(6+\sqrt{-25}\right)$

كراسة التمارين صـ 10 رقم 26 :

إذا كان $z=\frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$ فأوجد: $\overline{z}$

الأعداد المركبة: التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. الصورة الجبرية للعدد : $3+\sqrt{-4}$ هي : $3+2i$ ⓐ ⓑ
2. مرافق العدد المركب : $z=3+4i$ هو: $\bar{z}=-3-4i$ ⓐ ⓑ
3. المعكوس الجمعي للعدد المركب $z=3-2i$ هو: $-z=3+2i$ ⓐ ⓑ
4. الصورة المبسطة للتعبير : $(12+5i)-(2-i)$ هي : $10+6i$ ⓐ ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة :

5. العدد : $32+\sqrt{-225}$ يكتب بالصورة الجبرية كما يلي :

ⓐ $-15+6i$ ⓑ $6+15i$ ⓒ $6-15i$ ⓓ $32+15i$

6. حل المعادلة : $-10-6i=2x+3yi$ هو :

ⓐ $x=5,\ y=-2$ ⓑ $x=-5,\ y=-2$ ⓒ $x=-5,\ y=2$ ⓓ $x=5,\ y=2$

7. إذا كان $z_1=5i+2\ ,\ z_2=-3-i$ فإن $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ تساوي :

ⓐ $\frac{1}{10}+\frac{17}{10}i$ ⓑ $\frac{-1}{10}-\frac{17}{10}i$ ⓒ $\frac{-1}{10}+\frac{17}{10}i$ ⓓ $\frac{1}{10}-\frac{17}{10}i$

8. إذا كان : : $xi^2+3yi=5+3i^5$ فإن (x,y) تساوي :

ⓐ $(5,1)$ ⓑ $(-5,-1)$ ⓒ $(5,-1)$ ⓓ $(-5,1)$

9. أبسط صورة للتعبير : $(3+\sqrt{-4})(4+\sqrt{-9})$ هي :

ⓐ $18+17i$ ⓑ $18+3\sqrt{-9}+4\sqrt{-4}$ ⓒ $6+17i$ ⓓ 18

10. الصورة الجبرية للعدد المركب : $z = (1+2i)^2$ هي :

ⓐ $z = -3+4i$ ⓑ $z = 5+4i$ ⓒ $z = -3$ ⓓ $z = 5$

---

11. الصورة الجبرية للعدد المركب : $z = (2-i)^3$ هي :

ⓐ $z = 14+13i$ ⓑ $z = 14-13i$ ⓒ $z = 2-11i$ ⓓ $z = 2-13i$

---

12. الصورة الجبرية للعدد المركب : $z = \frac{i}{i+2}$ هي :

ⓐ $z = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ ⓑ $z = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ ⓒ $z = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$ ⓓ $z = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$

---

13. إذا كان $z = i$ فإن z^{250} يساوي :

ⓐ $-i$ ⓑ i ⓒ 1 ⓓ -1

---

14. ليكن $x \in \mathbb{Z}^+$ فإن مجموعة قيم x التي تجعل العدد $(5+i^x)$ عددا حقيقيا هي :

ⓐ $\mathbb{Z}+$ ⓑ $\{0,2,4,6,\dots\}$ ⓒ $\{1,3,5,\dots\}$ ⓓ $\{2,4,6,\dots\}$

الإحداثيات القطبية و الصورة المثلثية لعدد مركب

القيمة المطلقة لعدد مركب :

هي المسافة بين بين النقطة التي تمثل هذا العدد المركب و نقطة الأصل في المستوى الإحداثي المركب

$z = a + b i \longrightarrow |z| = |a + b\, i| = \sqrt{a^2 + b^2}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 26 رقم 1 : أوجد

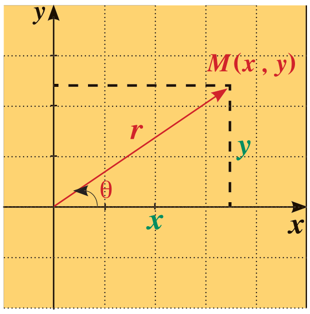
b) $|-2 + 5\, i|$

a) $|6 - 4\, i|$

الإحداثيات القطبية :

يمثل الزوج المرتب $(r . \theta)$ الإحداثيات القطبية للنقطة M على المستوى الإحداثي المركب

و يمكن التحويل بين الإحداثيات القطبية و الإحداثيات الديكارتية باستخدام



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

حيث θ هي الزاوية الموجهة في الوضع القياسي التي يمر ضلعها النهائي بالنقطة M

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 27 رقم 2 :

أوجد الزوج المرتب $(x . y)$ الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية لكل من النقطتين :

b) $B\left(2 , \frac{2\pi}{3}\right)$

a) $A(5{,}300)$

تابع الإحداثيات القطبية و الصورة المثلثية لعدد مركب

و يمكن التحويل من الإحداثيات الديكارتية $(x.y)$ إلى الإحداثيات القطبية $(r.\theta)$

باستخدام $r=\sqrt{x^2+y^2}$ ثم نوجد قياس زاوية الإسناد $\propto$ باستخدام $\tan\propto=\left|\frac{y}{x}\right|$

ثم نحدد الربع الذي تقع فيه هذه الزاوية θ من إشارة كل من x,y و نوجدها

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 28 رقم 3 :

أوجد الزوج المرتب $(r.\theta)$ لكل من نقطة مما يلي حيث $0\le\theta<2\pi$

a) $D(3\sqrt{3},3)$

....

b) $C(4.-2\sqrt{5})$

....

تابع الإحداثيات القطبية و الصورة المثلثية لعدد مركب

الصورة المثلثية

يمكن كتابة العدد المركب $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ على الصورة :

$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta\,)$ و تعرف بالصورة المثلثية للعدد المركب z

و يسمى r مقياس العدد أو القيمة المطلقة و يرمز له $|z|$ و يتعين بالعلاقة $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

، θ سعة العدد المركب و تتعين من $\cos\theta = \frac{x}{r}$ ، $\sin\theta = \frac{y}{r}$

أو من $x \neq 0$ ، $\tan\theta = \frac{y}{x}$ و تحديد الربع

ملاحظة :

الصورة المثلثية للعدد المركب ليست وحيدة ، لأنه إذا كانت θ سعة العدد المركب $x + yi$

فإن كلا مما يلي سعة للعدد نفسه : $\theta + 2\pi\ ,\ \theta + 4\pi \ldots\ldots \theta + 2\pi k : k \in Z$

و إذا كانت $\theta \in [0.2\pi)$ أو $0 \le \theta < 360$ فتسمى السعة في هذه الحالة بالسعة الأساسية .

كتاب الطالب مثال صـ 29 رقم 4 :

ضع كلا مما يلي في الصورة المثلثية :

a) $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$

b) $z_2 = -2 - 2\,i$

(c) $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 30 رقم 4 :

ضع كلا مما يلي في الصورة المثلثية :

(a) $z_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}i$

(c) $z_3 = -2 + 2\sqrt{3}\, i$

تابع الإحداثيات القطبية و الصورة المثلثية لعدد مركب

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 31 رقم 6 :

ضع كلا مما يلي في الصورة الجبرية :

(a) $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(b) $z_2 = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

الصورة المثلثية في حالات خاصة :

كل عدد حقيقي يمثل بنقطة على خط الأعداد على المحور الأفقي (محور السينات) .

وكل عدد تخيلي يمثل بنقطة على على المحور التخيلي (محور الصادات)

العدد	المقياس	سعة (الراديان)
a	a	0
$-a$	$\lvert -a\rvert = a$	π
bi	b	$\frac{\pi}{2}$
$-bi$	$\lvert -b\rvert = b$	$\frac{3\pi}{2}$

ملاحظة : إذا كان $Z = 0$ فإن : θ غير معينة . $r = 0$. $y = 0$. $x = 0$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 32 رقم 7 :

ضع في الصورة المثلثية كلا من الأعداد التالية

(a) $z_1 = 2i$

(b) $z_2 = 5$

(c) $z_3 = \frac{-3}{4}$

(d) $z_4 = -\frac{3}{4}\,i$

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. الإحداثيات الديكارتية للنقطة : $A(4,\frac{7\pi}{6})$ هي $A(-2\sqrt{3},2)$ ⓐ   ⓑ

2. الإحداثيات الديكارتية للنقطة : $B(\sqrt{2},135°)$ هي : $B(-1,1)$ ⓐ   ⓑ

3. الإحداثيات القطبية للنقطة : $M(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2})$ هي $M(1,\frac{5\pi}{4})$ ⓐ   ⓑ

4. العدد المركب : $z=\sqrt{3}-i$ بصورة المثلثية هو : $z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ⓐ   ⓑ

5. الصورة الجبرية للعدد المركب : $z=\sqrt{2}(i\sin\frac{7\pi}{4}+\cos\frac{7\pi}{4})$ هي : $z=1-i$ ⓐ   ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة :

7. الإحداثيات الديكارتية للنقطة : $A\left(4,\frac{5\pi}{3}\right)$ هي :

ⓐ $A(2,2\sqrt{3})$ ⓑ $A(-2,2\sqrt{3})$ ⓒ $A(-2,-2\sqrt{3})$ ⓓ $A(2,-2\sqrt{3})$

8. الإحداثيات القطبية للنقطة : $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ هي :

ⓐ $B(1,\frac{-\pi}{4})$ ⓑ $B(1,\frac{\pi}{4})$ ⓒ $B(1,\frac{3\pi}{4})$ ⓓ $B(1,\frac{-3\pi}{4})$

9. الصورة المثلثية للعدد المركب $z=2-2\sqrt{3}i$ حيث $\theta\in[0,2\pi]$ هي:

ⓐ $z=4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ ⓑ $z=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ⓒ $z=4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ⓓ $z=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

10. الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = \frac{-4}{1-i}$ حيث $0 \le \theta < 2\pi$ هي :

ⓐ $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

ⓓ $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

ⓒ $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

ⓓ $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

---

11. الصورة الجبرية للعدد المركب $z = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ حيث $0 \le \theta < 2\pi$ هي :

ⓐ $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

ⓑ $z = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

ⓒ $z = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

ⓓ $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

---

12. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ فإن قيمة $(i^{2n+2} + i^{2n+8})$ تساوي :

ⓐ 1

ⓑ 0

ⓒ -1

ⓓ i^{-2n}

---

13. $(6 - 2i + 3i^5)^2$ تساوي :

ⓐ $35 - 12\,i$

ⓑ $35 + 12\,i$

ⓒ $81 - 12\,i$

ⓓ $81 + 12\,i$

حل المعادلات

حل معادلات الدرجة الأولى :

نحل معادلات الدرجة الأولي في الأعداد المركبة بنفس الطريقة التي نحل بها في الأعداد الحقيقية

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 33 رقم 1 :

أوجد مجموعة حل المعادلة : $2z + i = 3 + 2i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

كتاب الطالب مثال صـ 34 رقم 2 :

أوجد مجموعة حل المعادلة : $2z + i\bar{z} = 5 - 2i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 34 رقم 2 :

أوجد مجموعة حل المعادلة : $z + i = 2\bar{z} + 1$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

تابع حل المعادلات

ثانيا حل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد في $\mathbb{C}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 35 رقم 3 :

أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي حيث $x \in \mathbb{C}$

a $3x^2 + 48 = 0$

b $-5x^2 - 150 = 0$

c $8x^2 + 2 = 0$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 35 رقم 4 :

أوجد مجموعة حل المعادلة : $z^2 - 2z + 2 = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

تابع حل المعادلات

كتاب الطالب مثال صـ 35 رقم 4 :

أوجد مجموعة حل المعادلة : $4z^2 + 16z + 25 = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

كراسة التمارين صـ 15 رقم 8 :

أوجد مجموعة حل المعادلة : $x^2 - 2x + 4 = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

كراسة التمارين صـ 15 رقم 9 :

أوجد مجموعة حل المعادلة : $z + \frac{4}{z} = 2$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

تابع حل المعادلات

الجذر التربيعي لعدد مركب :

لإيجاد الجذر التربيعي لعدد مركب Z نبحث عن عدد w يكون مربعه يساوي Z

ليكن $Z = a + bi$

نبحث عن $w = m + ni$ بحيث يكون : $w^2 = Z$

$$(m + ni)^2 = a + bi$$

$$m^2 - n^2 + 2mni = a + bi$$

$$m^2 - n^2 = a$$

$$2mn = b$$

للمساعدة في حل هذا النظام ندخل معادلة ثالثة ناتجة عن كون $|w|^2 = |z|$

أي $\boxed{\left(\sqrt{m^2 + n^2}\right)^2 = \sqrt{a^2 + b^2}}$

كتاب الطالب مثال صـ 36 رقم 6 :

أوجد الجذرين التربيعين للعدد المركب $Z = 3 + 4i$

تابع حل المعادلات

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 37 رقم 6 :

أوجد الجذرين التربيعين للعدد المركب $Z = -3 - 4i$

كتاب الطالب مثال صـ 37 رقم 7 :

أوجد الجذرين التربيعين للعدد المركب $Z = 7 - 24i$

تابع حل المعادلات

كراسة التمارين صـ 15 رقم 2 :

أوجد مجموعة حل المعادلة : $z + 2\bar{z} = 4 + i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

كراسة التمارين صـ 15 رقم 3 :

أوجد مجموعة حل المعادلة : $5z - 4 + 2i = 3z + 1 - 4i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

كراسة التمارين صـ 15 رقم 4 :

أوجد مجموعة حل المعادلة : $z + 3(1 + i)z - 8(2 - i) = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

حل المعادلات في $\mathbb{C}$: التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. حل المعادلة : $\bar{z} + 2 = 5 - i$ هو : $z = 3 + i$ (a) (b)
2. حل المعادلة : $2z + \bar{z} - 3 - 5i = 0$ هو $z = 1 - 5i$ (a) (b)
3. مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 4z + 5 = 0$ هي $\{-2 - i, 2 + i\}$ (a) (b)
4. الجذران التربيعيان للعدد -1 هما : $-1, 1$ (a) (b)
5. الجذران التربيعيان للعدد المركب : $z = 16 + 30i$ هما : $z_1 = 5 + 3i, z_2 = -5 - 3i$ (a) (b)
6. إذا كان z_1, z_2 جذرين تربيعيين للعدد z فإن $z_1 + z_2 = 0$ (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة :

7. حل المعادلة : $2z - 5 + 6i = -3\bar{z}$ هو :

(a) $z = 1 + 6i$ (b) $z = -1 + 6i$ (c) $z = 1 - 6i$ (d) $z = -1 - 6i$

8. مجموعة حل المعادلة : $z^2 - 4z + 20 = 0$ هي :

(a) $\{2 - 4i, -2 - 4i\}$ (b) $\{-2 + 4i, -2 - 4i\}$
(c) $\{2 - 4i, -2 + 4i\}$ (d) $\{2 - 4i, 2 + 4i\}$

9. الجذران التربيعيان للعدد المركب : $z = 33 - 56i$ هما :

(a) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = 7 + 4i \end{cases}$ (b) $\begin{cases} z_1 = 7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$ (c) $\begin{cases} z_1 = 7 + 4i \\ z_2 = 7 - 4i \end{cases}$ (d) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

10. حل المعادلة $(3 - 4i)z = 5 - 2i$ هو :

(a) $\frac{5}{3} + \frac{1}{2}i$ (b) $\frac{5}{3} - \frac{1}{2}i$ (c) $\frac{23}{25} + \frac{14}{25}i$ (d) $\frac{23}{25} - \frac{14}{25}i$

الوحدة الثامنة

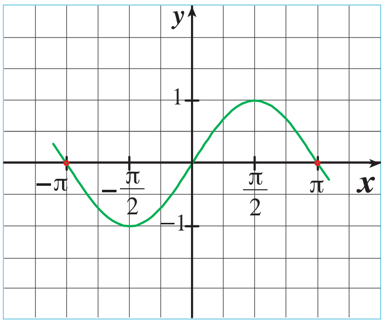
حساب المثلثات

التمثيل البياني للدوال المثلثية

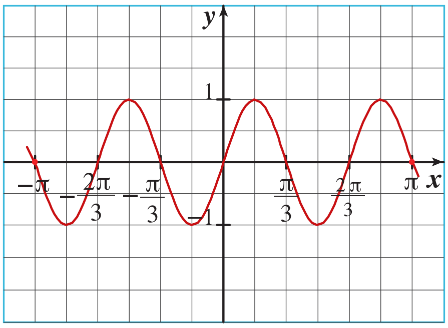
الدوال الجيبية

تسمّى الدالة على الصورة $y = a\sin bx$ **دالة الجيب** والدالة على الصورة $y = a\cos bx$ **دالة جيب التمام** حيث $b \neq 0$, $a \neq 0$ وهما دالتان جيبيتان وكل منهما دورية.

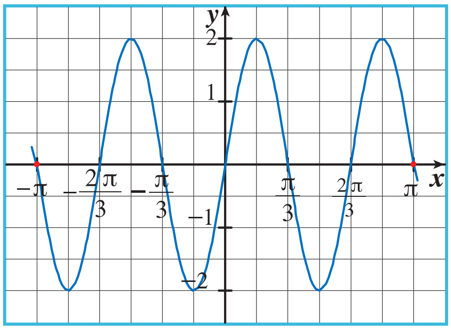
تمثل الأشكال التالية بيانات بعض دوال الجيب:



$y = \sin x$



$y = \sin 3x$



$y = 2\sin 3x$

1. تسمى $|a|$ سعة الدالة الجيبية.
2. $|b|$ تمثل عدد الدورات في الفترة $[0, 2\pi]$
3. $\frac{2\pi}{|b|}$ تمثل دورة الدالة.

كتاب الطالب مثال صـ 45 رقم 1 :

أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

a) $y = 2\cos x$

b) $y = -5\cos\frac{x}{3}$

التمثيل البياني للدوال المثلثية

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 46 رقم 1 :

أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

a) $y = -2\cos 5x$

b) $y = \frac{1}{2}\cos(-x)$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 46 رقم 2 :

اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\cos bx$ إذا كانت:

a) الدورة هي $\frac{\pi}{3}$ ، $a = -2$

b) الدورة هي π ، $a = 0.25$

c) الدورة هي 2 ، $a = 1$

بند 1 - 8

التمثيل البياني لدالة الجيب

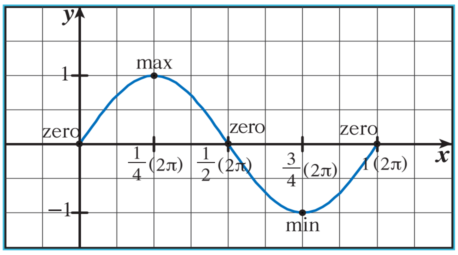
التمثيل البياني للدوال المثلثية

أوّلًا: دالة الجيب

$y = \sin x$ هي دالة مثلثية مجالها $\mathbb{R}$ ومداها $[-1,1]$، وهي دالة دورية ذات دورة 2π وسعتها تساوي واحد.

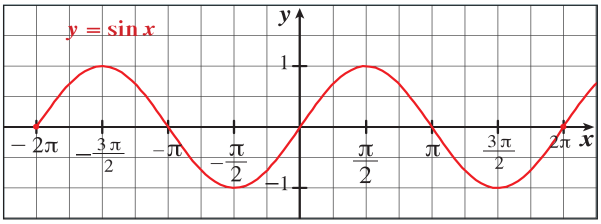
للحصول على التمثيل البياني لِـ $y = \sin x$ في دورة واحدة، تقسم الدورة الواحدة إلى أرباع، ثم نكوّن الجدول في الفترة $[0, 2\pi]$ كالتالي:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0



وحيث إنها دالة دورية، دورتها 2π فإنها تكرر قيمها ومن ذلك يمكن رسم بيان الدالة: $f(x) = \sin x \ , \ x \in \mathbb{R}$ يمكنك التحقق باستخدام آلة حاسبة.

من بيان دالة الجيب نلاحظ:



1. لأي عدد صحيح n فإن $\sin(n\pi) = 0$
2. لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x) = \sin x$ قيمة عظمى تساوي (1) عند $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي (-1) عند $x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$
3. دالة الجيب دالة فردية لأن: $\sin(-x) = -\sin x \ , \forall x \in \mathbb{R}$
4. منحنى الدالة متناظر حول نقطة الأصل.
5. سعة الدالة هي: $\frac{\max f - \min f}{2}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 48 رقم 3 :

أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a) $y = \frac{1}{2} \sin 4x$

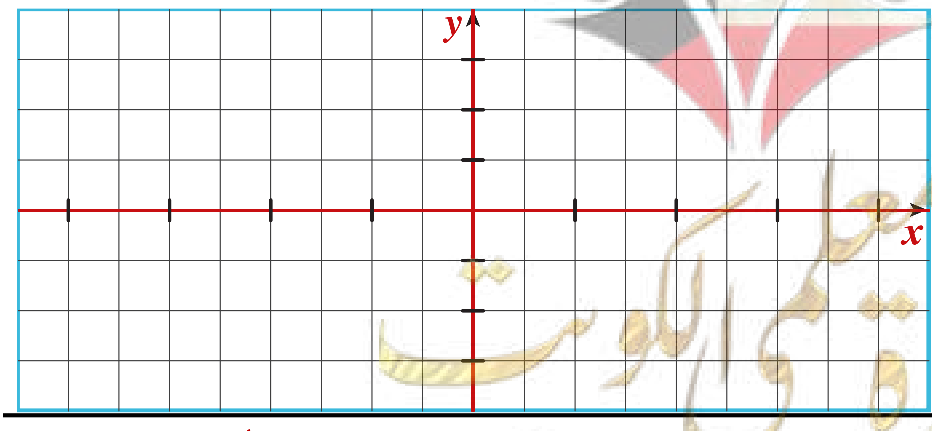
....

....

....

....

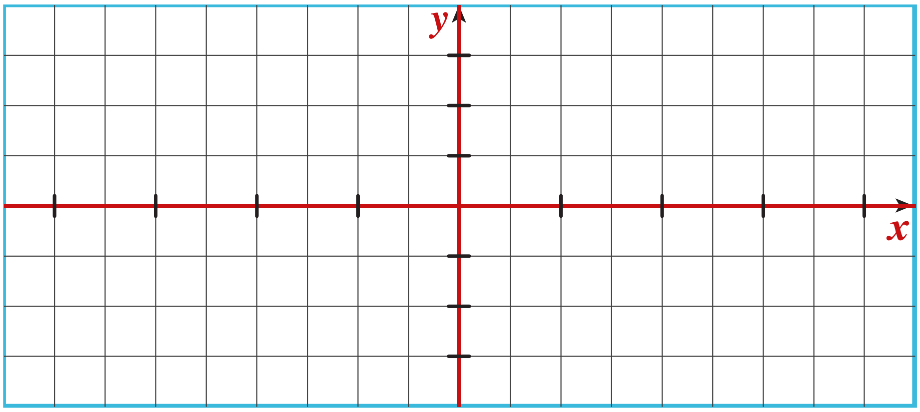
....



تابع التمثيل البياني لدالة الجيب

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 48 رقم 3 :

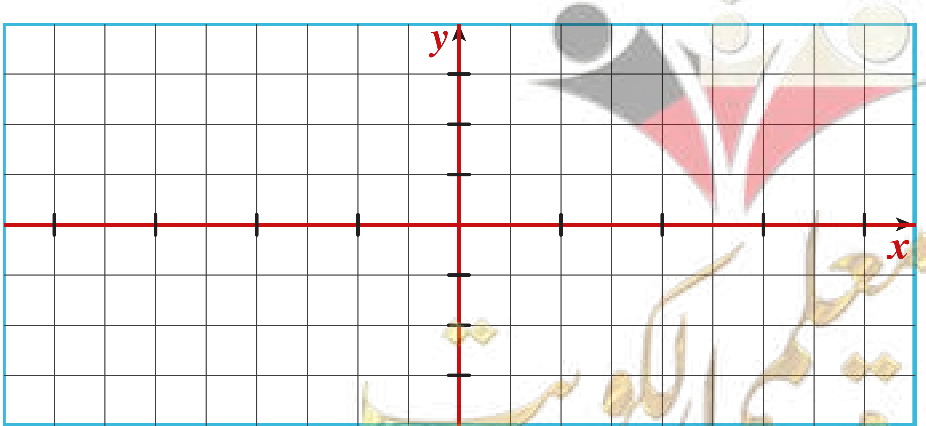
b $y = -4\sin x \ , \ x \in [-\pi \ , \ 2\pi]$



تابع كتاب الطالب مثال صـ 47 رقم 3 :

أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

b $y = -2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \ , \ -4\pi \le x \le 4\pi$

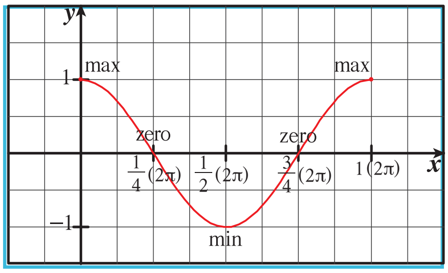


التمثيل البياني لدالة جيب التمام

ثانيًا: دالة جيب التمام

$y = \cos x$ هي دالة مثلثية مجالها هو أيضًا $\mathbb{R}$ ومداها هو $[-1,1]$، وهي دالة دورية ذات دورة 2π وسعتها تساوي واحد.

ونستطيع الحصول على التمثيل البياني للدالة $y = \cos x$ على مجالها عن طريق رسمها على الفترة $[0, 2\pi]$ تمامًا مثلما فعلنا في دالة الجيب.

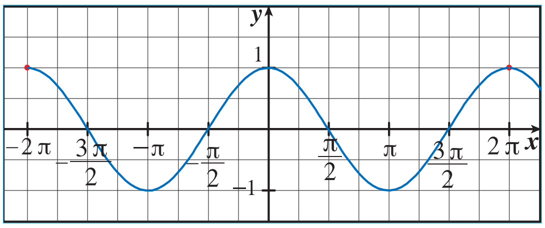


وتكرر نفسها ونحصل على البيان التالي:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1

يمكنك التحقق باستخدام الآلة الحاسبة.

من بيان دالة جيب التمام نلاحظ أن:



1. لأي عدد صحيح n فإن $\cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0$
2. لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x) = \cos x$ قيمة عظمى تساوي (1) عند $x = 2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي (-1) عند $x = \pi + 2n\pi$
3. دالة جيب التمام دالة زوجية لأن: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$
4. محور الصادات هو خط تناظر لمنحنى الدالة.
5. سعة الدالة هي: $\frac{\max f - \min f}{2}$

كتاب الطالب حاول أن تحل ص 49 رقم 4 :

أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

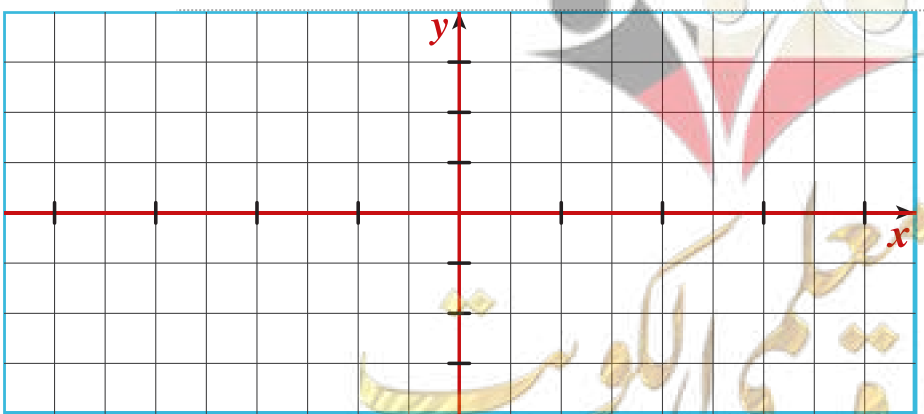
a $y = 3\cos 2x$

....

....

....

....



تابع التمثيل البياني لدالة جيب التمام

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 49 رقم 4 :

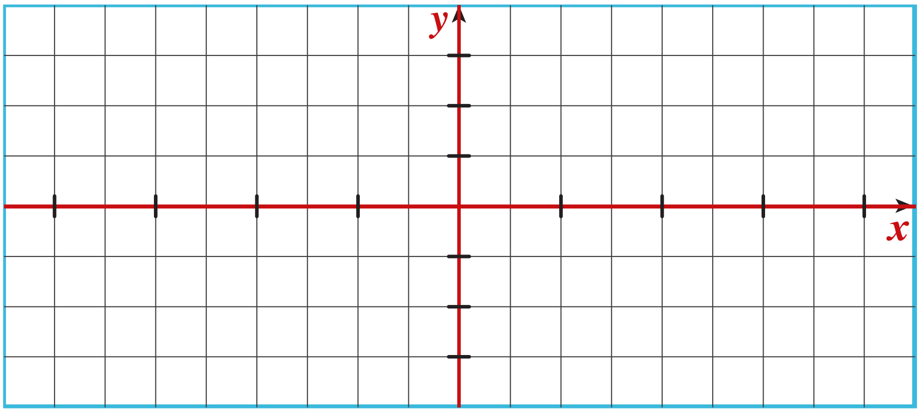
b $y = -2\cos\left(\frac{3}{4}x\right)$, $0 \le x \le 2\pi$

....

....

....

....



كتاب الطالب مثال صـ 49 رقم 4 :

أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

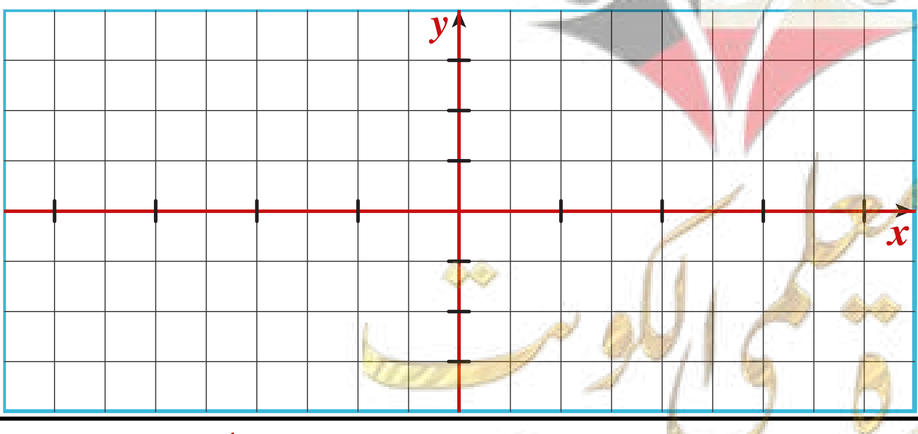
b $y = -5\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$, $x \in [-3\pi\ ,\ 3\pi]$

....

....

....

....



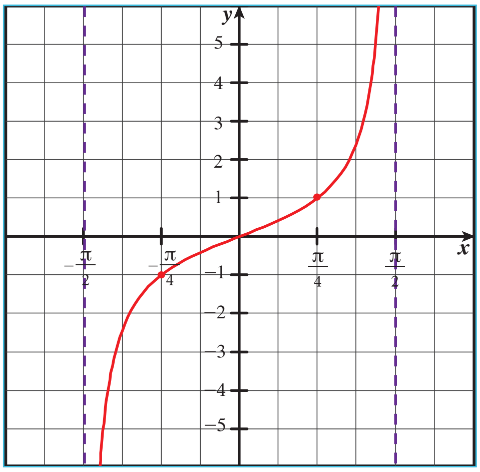
التمثيل البياني لدالة الظل

بند 1 - 8

ثالثًا: دالة الظل

هي الدالة المثلثية على الصورة $y = \tan x$ وتكتب: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$: $\cos x \neq 0$

مجالها: $D = \mathbb{R} - \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + n\pi \ , \ n \in \mathbb{Z}\right\}$ ومداها: $\mathbb{R}$



وهي دالة دورية ذات دورة π

وللحصول على التمثيل البياني لـ: $y = \tan x$

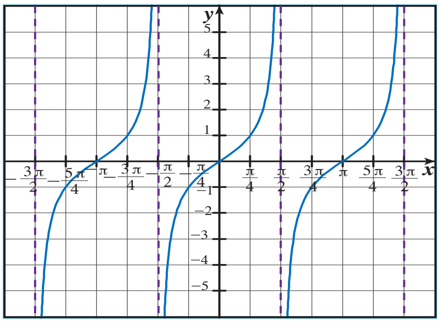
في دورة واحدة $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

نقسم الدورة إلى أرباع كما هو في الجدول التالي:

x	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف

وحيث إنها دالة دورية دورتها π فإنها تكرر قيمتها.

ومن ذلك يمكننا رسم الدالة $y = \tan x$ على مجالها.



من بيان دالة الظل نلاحظ أن دالة الظل:

1. ليس لها سعة.
2. لأي عدد صحيح n فإن $\tan(n\pi) = 0$
3. لأي عدد صحيح n فإن $\tan\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ غير معرف.
   وتسمى المستقيمات $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ محاذيات رأسية لبيان الدالة $y = \tan x$
4. دالة فردية لأن: $\tan(-x) = -\tan x \ , \ \forall x \in D$
5. منحناها متناظر حول نقطة الأصل.

وبصفة عامة: الدالة $y = a \tan bx$، دورتها: $\frac{\pi}{|b|}$ أي في الفترة $\left(\frac{-\pi}{2b} \ , \ \frac{\pi}{2b}\right)$ وتكرر منحناها على مجالها.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 51 رقم 5 :

أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a) $y = -\tan x$

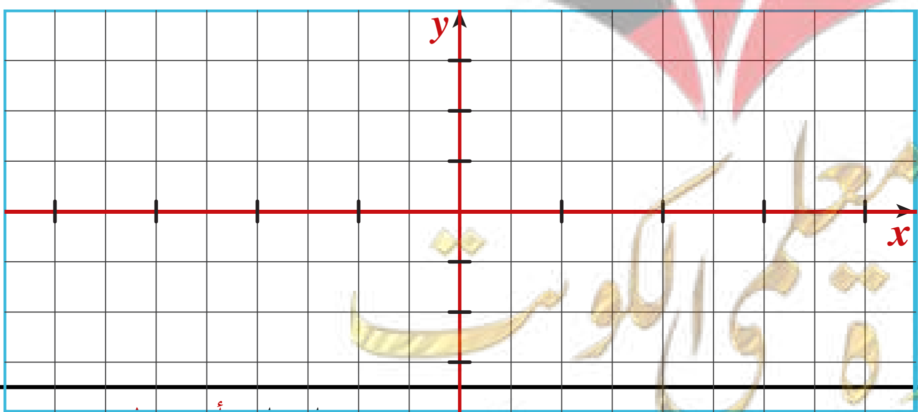
....

....

....

....

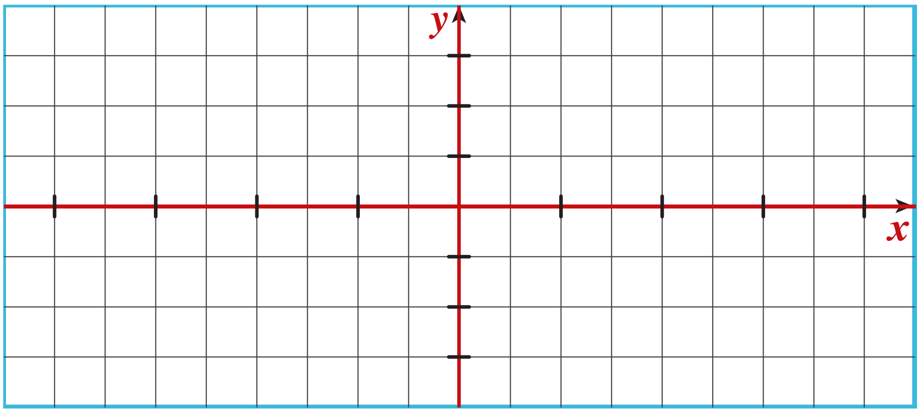
....



تابع التمثيل البياني لدالة الظل

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 51 رقم 5 :

b $y=\frac{1}{2}\tan x$



خصائص الدوال المثلثية باعتبار $n \in \mathbb{Z}$

الخاصية	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
الدورة	2π	2π	π
المجال	$(-\infty , \infty)$	$(-\infty , \infty)$	$\mathbb{R}-\left\{x , x=\frac{\pi}{2}+n\pi\right\}$
المدى	$[-1 , 1]$	$[-1 , 1]$	$(-\infty , \infty)$
الأصفار	$x=n\pi$	$x=\frac{\pi}{2}+n\pi$	$x=n\pi$
زوجية أو فردية	فردية	زوجية	فردية

البنود الموضوعية

في التمارين (7–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) معادلة الدالة المثلثية $y = a\sin(b\theta)$ حيث السعة 5 والدورة 3π هي $y = 5\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)$ — (a) (b)

(2) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{2}$ وسعتها 3 يمكن أن تكون $y = 3\sin\left(\frac{\pi\theta}{2}\right)$ — (a) (b)

(3) الدالة $y = 3\tan\left(\frac{3}{4}x\right)$ دورتها $\frac{4}{3}\pi$ — (a) (b)

(4) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{3}$ وسعتها 4 يمكن أن تكون $y = -4\cos(6x)$ — (a) (b)

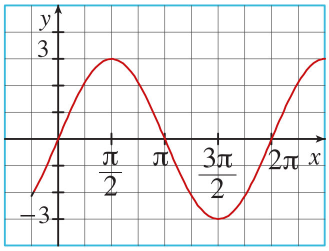
(5) سعة الدالة $y = -5\cos 2x$ هي -5 — (a) (b)

(6) في الدالة f حيث $f(x) = a\cos bx$ يكون: $2|a| = \max f + \min f$ — (a) (b)

(7) الدالتان f, g حيث $g(x) = \tan 4x$ ، $f(x) = \cos 8x$ لهما نفس الدورة. — (a) (b)

في التمارين (17–8)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(8) البيان التالي يمثل بيان الدالة:



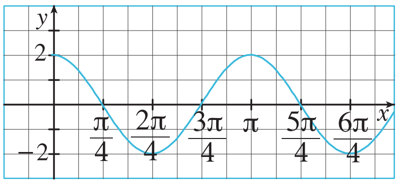
(a) $f(x) = 3\cos x$ (b) $f(x) = 3\sin x$

(c) $f(x) = -3\sin x$ (d) $f(x) = \sin 3x$

(9) لتكن $f(x) = 3\tan 2x$ فإن:

(a) السعة $= 1$ (b) السعة $= 2$ (c) السعة $= 3$ (d) f ليس لها سعة

(10) ليكن بيان f كما في الشكل التالي:

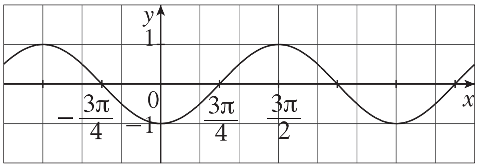


فإن f يمكن أن تكون:

(a) $2\cos 2x$ (b) $\cos 2x$ (c) $\cos\frac{x}{2}$ (d) $\sin 2x$

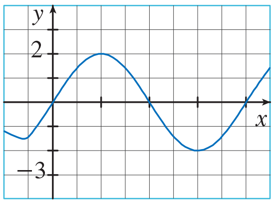
البنود الموضوعية

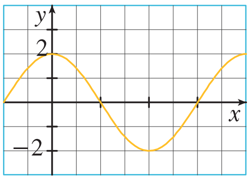
(11) ليكن g دالة دورية بيانها كما في الشكل التالي فإن الدورة تساوي:

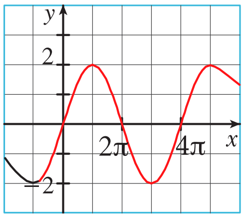


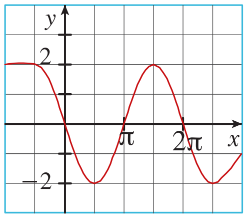
ⓐ π ⓑ 2π ⓒ 3π ⓓ $\frac{6\pi}{4}$

(12) لتكن الدالة g حيث: $g(x) = a\sin bx$ فإن بيان g لا يمكن أن يكون:

ⓐ


ⓑ


ⓒ


ⓓ


(13) معادلة الدالة المثلثية $y = a\cos(bx)$ حيث السعة 4 والدورة 6 يمكن أن تكون:

ⓐ $y = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ ⓑ $y = -4\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

ⓒ $y = -4\cos\left(\frac{3}{\pi}x\right)$ ⓓ $y = 4\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

(14) الدالة $y = a\cos(bx)$ حيث $a = 2$ ودورتها $\frac{\pi}{4}$ يمكن أن تكون:

ⓐ $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ ⓑ $y = 8\cos(8x)$

ⓒ $y = 2\cos(8x)$ ⓓ $y = 8\cos\left(\frac{x}{4}\right)$

(15) معادلة الدالة المثلثية $y = a\sin(bx)$ حيث السعة 3 والدورة $\frac{\pi}{2}$ يمكن أن تكون:

ⓐ $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ⓑ $y = 3\sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$

ⓒ $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ ⓓ $y = 3\sin(4x)$ أو $y = -3\sin(4x)$

(16) معادلة الدالة المثلثية $y = \tan(bx)$ حيث الدورة $\frac{3}{4}$ يمكن أن تكون:

ⓐ $y = \tan\left(\frac{4}{3}\pi x\right)$ ⓑ $y = \tan\left(\frac{3}{4}x\right)$

ⓒ $y = \tan\left(\frac{4}{3}x\right)$ ⓓ $y = \tan\left(\frac{3}{4}\pi x\right)$

(17) في الدالة المثلثية $y = -2\sin\left(\frac{3}{5}x\right)$ السعة والدورة هما:

ⓐ $-2\ ,\ \frac{3\pi}{5}$ ⓑ $2\ ,\ \frac{10\pi}{3}$

ⓒ $2\ ,\ \frac{3\pi}{5}$ ⓓ $2\ ,\ \frac{2\pi}{15}$

قانون الجيب

قانون الجيب

في أي مثلث ABC :

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

كتاب الطالب مثال صـ 64 رقم 1 :

حل ΔABC حيث: $\alpha=40^{o}\ ,\ \beta=60^{o}\ ,\ a=4\text{ cm}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 64 رقم 1 :

حل ΔABC حيث: $\alpha=36^{\circ}\ ,\ \beta=48^{\circ}\ ,\ a=8\text{ cm}$

الحالة الغامضة

الحالة الغامضة هي الحالة التي يكون معلوم فيها طولي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.

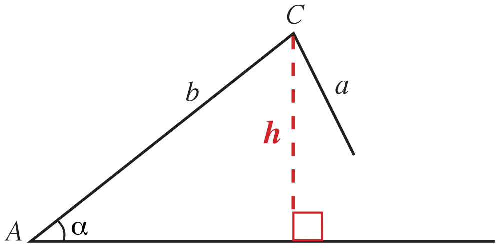
لأن البيانات المعروفة قد تعطي صفر مثلث أو مثلث واحد أو مثلثين.

لنفرض أن الأجزاء المعلومة هي: a, b, α

كما هو مبين في الشكل المقابل.

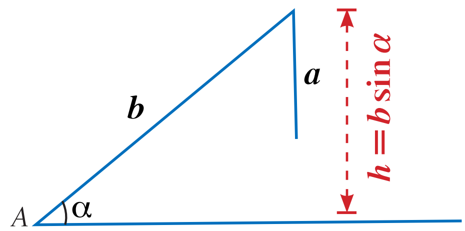
يكمن الحل في معرفة الارتفاع h،

ومنه $h = b\sin\alpha$ وربطه بالأجزاء المعروفة.



لا يوجد مثلث

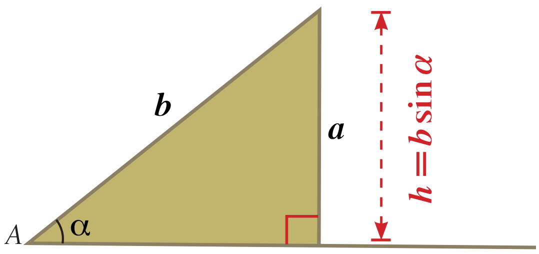
إذا كان $h = b\sin\alpha$ و كان $a < h$، يكون طول الضلع a غير كاف لتكوين مثلث.



يوجد مثلث واحد قائم

إذا كان $h = b\sin\alpha$ و كان $a = h$

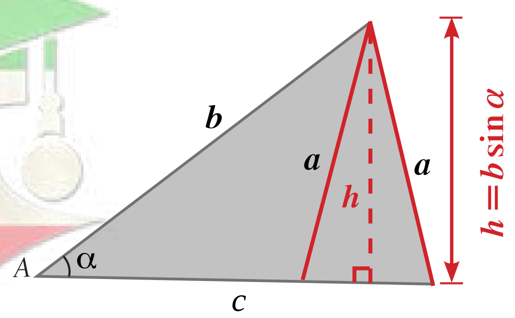
طول الضلع a يكفي لتكوين مثلث قائم.



يوجد مثلثان

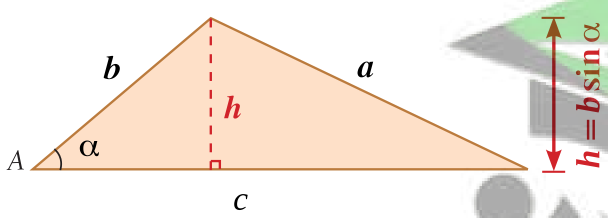
إذا كان $h < a < b$

يمكن تكوين مثلثين مختلفين.



يوجد مثلث واحد

إذا كان $a \geq b$ يمكن تكوين مثلث واحد.



تابع قانون الجيب

كتاب مثال أن تحل صـ 66 رقم 2 :

حل ΔABC حيث: $a = 3\text{ cm}\ ,\ b = 2\text{ cm}\ ,\ \alpha = 40^{\circ}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 66 رقم 2 :

حل ΔABC حيث: $a = 7\text{ cm}\ ,\ b = 6\text{ cm}\ ,\ \alpha = 26.3^{\circ}$

تابع قانون الجيب

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 67 رقم 3 :

حل ΔABC حيث: $a = 6\text{ cm}\ ,\ b = 7\text{ cm}\ ,\ \alpha = 45^{\circ}$

كتاب مثال أن تحل صـ 67 رقم 3 :

حل ΔABC حيث: $a = 5\text{ cm}\ ,\ b = 8\text{ cm}\ ,\ \alpha = 30^{\circ}$

قانون الجيب ـ البنود الموضوعية

في التمارين (1—3)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 100^{\circ}$, $m(\widehat{B}) = 30^{\circ}$, $BC = 20\text{ cm}$ فإنّ: $AC = 10.154\text{ cm}$ (a) (b)

(2) في المثلث ABC: $m(\widehat{B}) = 80^{\circ}$, $AB = 12\text{ cm}$, $AC = 16\text{ cm}$ فإنّ: $m(\widehat{C}) = 50^{\circ}$ (a) (b)

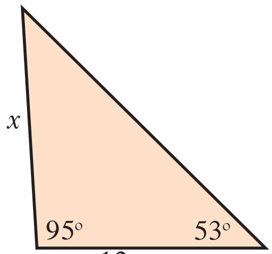
(3) في كل مثلث ABC يكون: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$ (a) (b)

في التمارين (4—7)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(4) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 80^{\circ}$, $m(\widehat{B}) = 40^{\circ}$, $AC = 10\text{ cm}$ فإنّ طولي $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ يساويان:

(a) 7.43 cm , 15.32 cm
(b) 6.53 cm , 13.47 cm
(c) 13.47 cm , 15.32 cm
(d) 7.43 cm , 6.53 cm

(5) في المثلث المقابل، x تساوي حوالى:



(a) 8.6 cm
(b) 15 cm
(c) 18.1 cm
(d) 19.2 cm

(6) مثلث قياسات زواياه: $70^{\circ}, 60^{\circ}, 50^{\circ}$، طول أصغر ضلع فيه هو 9 cm
طول أطول ضلع حوالى:

(a) 11 cm
(b) 11.5 cm
(c) 12 cm
(d) 12.5 cm

(7) القياسات المعطاة في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 56^{\circ}$, $AC = 23\text{ cm}$, $AB = 19\text{ cm}$، طول $\overline{BC}$ يساوي:

(a) 12 cm
(b) 18 cm
(c) 19 cm
(d) لا يمكن استخدام قانون الجيب

قانون جيب التمام

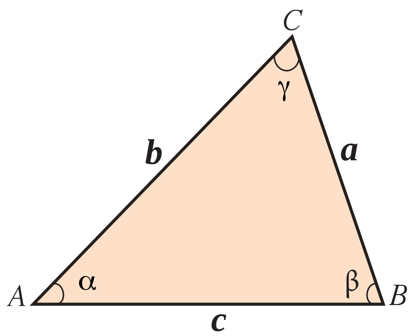
قانون جيب التمام

في ΔABC

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



كتاب الطالب مثال صـ 71 رقم 1 :

حل ΔABC حيث: $\gamma = 60^{\circ}$, $b = 3\text{ cm}$, $a = 2\text{ cm}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 72 رقم 1 :

حل ΔABC حيث: $\gamma = 20^{\circ}$, $b = 5\text{ cm}$, $a = 11\text{ cm}$

تابع قانون جيب التمام

كتاب الطالب مثال صـ 72 رقم 2 :

حل ΔABC حيث: $a = 4\text{ cm}$, $b = 3\text{ cm}$, $c = 6\text{ cm}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 72 رقم 2 :

في ΔABC حيث: $a = 9\text{ cm}$, $b = 7\text{ cm}$, $c = 5\text{ cm}$ أوجد قياس الزاوية الأكبر.

تابع قانون جيب التمام الجيب – البنود الموضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC: $AB = 24\text{ cm}$, $AC = 19\text{ cm}$, $BC = 27\text{ cm}$ فإنّ: $m(\widehat{A}) \approx 76.82^\circ$ (a) (b)

(2) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 60^\circ$, $BC = 44\text{ cm}$, $AB = 20\text{ cm}$ فإنّ: $AC \approx 50.5\text{ cm}$ (a) (b)

(3) في المثلث ABC: $b^2 + c^2 < 2bc\cos A$ (a) (b)

(4) إذا كانت أطوال أضلاع مثلث تساوي $12\text{ cm}, 8\text{ cm}, 5\text{ cm}$ فإن قياس الزاوية الكبرى في هذا المثلث يساوي حوالى 133.4° (a) (b)

في التمارين (5–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) في المثلث ABC : $m(\widehat{C}) = 60^\circ$, $AC = 10\text{ cm}$, $BC = 20\text{ cm}$ فإن طول $\overline{AB}$ يساوي:

(a) $AB = 10\sqrt{7}\text{ cm}$ (b) $AB = 10\sqrt{3}\text{ cm}$ (c) $AB = 12.4\text{ cm}$ (d) $AB = 29\text{ cm}$

---

(6) في المثلث ABC : $m(\widehat{A}) = 120^\circ$, $AB = 30\text{ cm}$, $AC = 40\text{ cm}$ فإنّ طول $\overline{BC}$ يساوي:

(a) $BC \approx 60.8\text{ cm}$ (b) $BC \approx 36\text{ cm}$ (c) $BC \approx 68\text{ cm}$ (d) $BC \approx 21\text{ cm}$

---

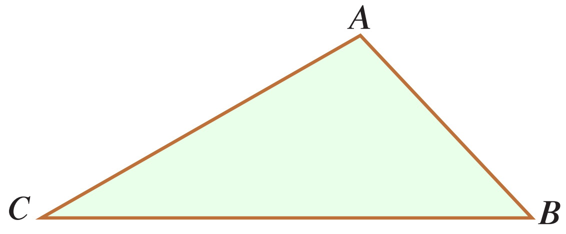
(7) إذا كان $BC = 25\text{ cm}$, $AC = 17\text{ cm}$, $AB = 12\text{ cm}$ فإنّ قياس الزاوية الكبرى في المثلث ABC يساوي حوالى:

(a) 118° (b) 110° (c) 125° (d) 100°

مساحة المثلث

يمكن إيجاد مساحة مثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما كما يلي:

$$Area(ABC) = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$



قاعدة هيرون

تعطى مساحة مثلث ABC أطوال أضلاعه a, b, c بالقاعدة:

$$\text{Area}(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

حيث: $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = $ semiperimeter (نصف محيط المثلث)

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 76 رقم 1 :

أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $a = 5\text{ cm}$, $b = 6\text{ cm}$, $c = 8\text{ cm}$

تابع مساحة المثلث

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 75 رقم 2 :

أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $a = 5\text{ cm}$, $b = 6\text{ cm}$, $c = 8\text{ cm}$

كراسة التمارين حاول أن تحل صـ 30 رقم 2 :

أوجد مساحة المثلث ABC بطريقتين مختلفتين. $a = 4\text{ cm}$, $b = 5\text{ cm}$, $c = 8\text{ cm}$

مساحة المثلث ــ البنود الموضوعية

في التمارين (1—6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا عرفت أطوال أضلاع مثلث فيمكن استخدام قاعدة هيرون لإيجاد مساحته. (a) (b)

(2) لا يمكن إيجاد مساحة مثلث بمعلومية قياسات زواياه الثلاثة. (a) (b)

(3) لا يمكن استخدام قاعدة هيرون إذا كان المثلث قائم الزاوية. (a) (b)

(4) إن معرفة قياس إحدى زوايا مثلث هو شرط ضروري لإيجاد مساحته. (a) (b)

(5) إذا كان a, b طولا ضلعين متتاليين في متوازي أضلاع و θ قياس الزاوية بينهما
فإن مساحة متوازي الأضلاع تساوي $ab\sin\theta$ (a) (b)

(6) في المثلث ABC: $AC = 9\text{ cm}\ ,\ AB = 7\text{ cm}\ ,\ BC = 5\text{ cm}$
فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالي 15 cm^2 (a) (b)

في التمارين (7—10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كان: $a = 2\text{ cm}\ ,\ b = 3\text{ cm}\ ,\ m(\widehat{C}) = 40^{\circ}$ فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالي:

(a) 4.6 cm^2 (b) 3.86 cm^2

(c) 1.93 cm^2 (d) 2.3 cm^2

(8) مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه $7\text{ cm}\ ,\ 8\text{ cm}\ ,\ 9\text{ cm}$ هي:

(a) $6\sqrt{15}\text{ cm}^2$ (b) $12\sqrt{5}\text{ cm}^2$

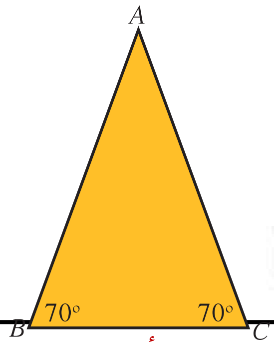
(c) $16\sqrt{3}\text{ cm}^2$ (d) $18\sqrt{3}\text{ cm}^2$

(9) مساحة مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه a هي:

(a) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\text{ units}^2$ (b) $a^2\text{ units}^2$

(c) $\frac{1}{2}a^2\text{ units}^2$ (d) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\text{ units}^2$

(10) إذا كانت مساحة المثلث ABC تساوي حوالي 8 cm^2 فإن طول $\overline{AB}$ هو حوالي:



(a) 5 cm (b) 8 cm

(c) 4 cm (d) 6 cm

الوحدة التاسعة

تطبيقات على حساب المثلثات

إثبات صحة متطابقة مثلثية

تذكر ما يلي :

تستخدم المتطابقات المثلثية الأساسية لتحويل المقادير المثلثية إلى شكل أبسط.

المتطابقات المثلثية الأساسية

- متطابقات القسمة (الظل وظل التمام) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$
- متطابقات المقلوب $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} \quad , \quad \cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$
- متطابقات فيثاغورث

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad , \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad , \quad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

إثبات صحة متطابقة

لإثبات أن معادلة ما هي متطابقة نحتاج إلى محاولة إثبات أن طرفي المعادلة متساويان عند كل قيم المتغير نفسها. من خلال استخدام إحدى الإستراتيجيات التالية:

1. تبسيط الطرف الأيمن بصورة الطرف الأيسر أو العكس.
2. تبسيط كلًّا من الطرفين على حدة حتى يتطابق ناتج تبسيطهما.

ويتم تبسيط كل طرف باستخدام إحدى الطرق التالية:

- دمج الحدود
- ضرب العوامل
- استخدام متطابقات معلومة
- التحويل إلى الجيب وجيب التمام
- فصل الحدود
- التحليل
- تبسيط الكسور

كتاب الطالب مثال صـ 88 رقم 1 :

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 88 رقم 1 :

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = 2\csc\theta$

تابع إثبات صحة متطابقة مثلثية

كتاب الطالب مثال صـ 88 رقم 2 :

أثبت صحة المتطابقة: $2\cot x \csc x = \dfrac{1}{\sec x - 1} + \dfrac{1}{\sec x + 1}$

كتاب الطالب حاول أن تحل 2 صـ 89 :

أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} - \dfrac{1-\sin x}{1+\sin x} = 4\tan x \cdot \sec x$

كتاب الطالب مثال صـ 89 رقم 3 :

أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{\cos x}{1-\sin x} = \dfrac{1+\sin x}{\cos x}$

تابع إثبات صحة متطابقة مثلثية

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 90 رقم 3 :

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = (\csc x - \cot x)^2$

كتاب الطالب مثال صـ 90 رقم 4 :

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = (\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta)$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 90 رقم 4 :

أثبت أن: $\frac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} = \sin x + \sin x \tan^2 x$

تابع إثبات صحة متطابقة مثلثية

كراسة التمارين صـ 36 رقم 5 :

أثبت صحة المتطابقة $\tan x + \cot x + 2 = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x}$

كراسة التمارين صـ 36 رقم 5 :

أثبت صحة المتطابقة $\frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} = 2\csc^2 x$

إثبات صحة متطابقة مثلثية – البنود الموضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $3\sin x = \sin(3x)$ تمثل متطابقة. (a) (b)

(2) $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$ تمثل متطابقة. (a) (b)

(3) $\sec x - \cos x = \tan x \sin x$ تمثل متطابقة. (a) (b)

في التمارين (5–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) المقدار: $\frac{\sec^2 x - 1}{\sin x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sin x \tan x$ (b) $\sin x \sec^2 x$

(c) $\cos x \sec^2 x$ (d) $\sin x \csc x$

(6) المقدار: $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$ متطابق مع المقدار:

(a) $-4\sin x \cos x$ (b) 2

(c) -2 (d) $4\sin x \cos x$

(7) المقدار: $\tan x + \frac{1}{\tan x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sec x \csc x$ (b) $\sec x \sin x$

(c) $\sec x \cos x$ (d) $\sin x \cos x$

(8) المقدار: $\tan^2 x - \sin^2 x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\tan^2 x$ (b) $\cot^2 x$

(c) $\tan^2 x \sin^2 x$ (d) $\cot^2 x \cos^2 x$

(9) المقدار: $1 + \frac{\cos x}{\sec x} + \frac{\sin x}{\csc x}$ متطابق مع المقدار:

(a) 1 (b) -1

(c) 2 (d) -2

(10) المقدار: $\frac{\cos^2 x - 1}{\cos x}$ متطابق مع المقدار:

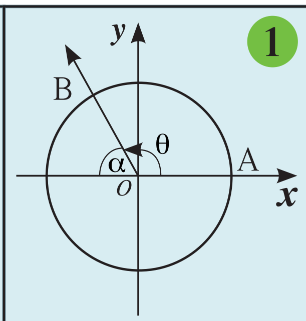
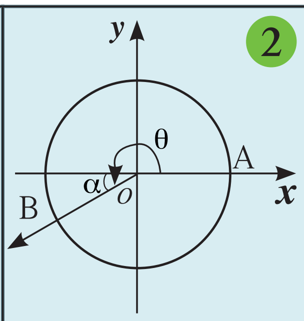
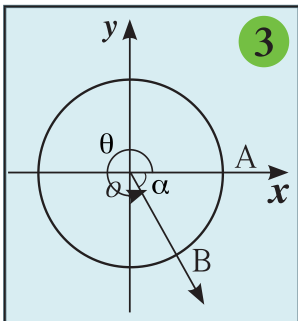
(a) $-\tan x \sin x$ (b) $-\tan x$

(c) $\tan x \sin x$ (d) $\tan x$

حل معادلات مثلثية

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة $\theta = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ في الوضع القياسي، هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات.

لتكن α زاوية الإسناد حيث $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$، أكمل الجدول التالي:

الشكل			
الربع من المستوى الإحداثي	θ تقع في الربع **الثاني**	θ تقع في الربع **الثالث**	θ تقع في الربع
زاوية الإسناد	$\alpha = \pi - \theta$	$\alpha = \pi + \theta$	$\alpha = 2\pi - \theta$
الزاوية في الوضع القياسي	$\theta = \pi - \alpha$	$\theta = \pi + \alpha$	$\theta = 2\pi - \alpha$

الدوال الجيبية هي دوال دورية. يمكن لخط مستقيم أفقي (مثل محور السينات) أن يتقاطع منحناها في عدد غير منتهٍ من النقاط. نوجد عادة حلول المعادلة المثلثية على فترة دورة ثم نستنتج باقي قيم الحلول بإضافة دورة الدالة.

حل معادلات مثلثية

كتاب الطالب مثال صـ 93 رقم 1 :

حل المعادلة : $\cos x + \sqrt{3} = 0$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 93 رقم 1 :

حل المعادلة : $\sqrt{2}\cos x = 1$

حل معادلات مثلثية

كتاب الطالب مثال صـ 94 رقم 2 :

حل المعادلة : $\sin\theta = 4\sin\theta + 1$ حيث $0 \leq \theta < 2\pi$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 94 رقم 2 :

حل المعادلة : $\sin\theta = 5\sin\theta - 3$

تابع حل معادلات مثلثية

كتاب الطالب مثال تحل صـ 95 رقم 3 :

حل المعادلة : $\tan x = \sqrt{3}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 95 رقم 3 :

حل المعادلة : $\tan x = 1$

تابع حل معادلات مثلثية

كتاب الطالب مثال صـ 96 رقم 4 :

حل المعادلة : $2\cos\theta \;\; \sin\theta \;\; = -\sin\theta$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 96 رقم 4 :

حل المعادلة : $\sin\theta\cos\theta - \cos\theta \;\; = 0$

تابع حل معادلات مثلثية

كتاب الطالب مثال صـ 96 رقم 5 :

حل المعادلة : $4sin^2x - 8sinx + 3 = 0$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 97 رقم 5 :

حل المعادلة : $cos^2\theta + 3cos\theta + 2 = 0$

تابع حل معادلات مثلثية ـ البنود الموضوعية

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(2) حل المعادلة $\cos x = \sqrt{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(3) حل المعادلة $\tan x = -\sqrt{3}$ هو: $x = +\frac{5\pi}{6} + k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(4) حلول المعادلة $\sin x \tan^2 x = \sin x$ على الفترة $(0, \pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ (a) (b)

(5) حلول المعادلة $2\sin^2 x = 1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ (a) (b)

في التمارين (6—11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $\sin x + \cos x = 0$ فإن x تقع في الربع:

(a) الأول
(b) الأول أو الثالث
(c) الثالث
(d) الثاني أو الرابع

(7) حلول المعادلة: $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

(a) $-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$
(b) $\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$
(c) $\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$
(d) $\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

(8) حلول المعادلة: $2\sqrt{2}\sin x \cos x - \sqrt{2}\cos x - 2\sin x = -1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

(a) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$
(b) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}$
(c) $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}$
(d) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$

متطابقات الدوال المتكافئة

متطابقات الدوال المتكافئة

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$$

كتاب الطالب مثال صـ 100 رقم 1 :

أثبت أن : $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 100 رقم 2 :

أثبت أن : $\csc\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = -\sec\theta$

كتاب الطالب مثال صـ 101 رقم 2 :

أثبت أن : $\csc\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = \sec\theta$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 101 رقم 2 :

أثبت أن : $\sec\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = \csc\theta$

متطابقات المجموع و الفرق

متطابقات المجموع و الفرق

$$\cos(\beta+\alpha)=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha$$

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\beta+\alpha)=\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$$

$$\tan(\beta+\alpha)=\frac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}$$

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 103 رقم 3 :

أوجد دون استخدام الالة الحاسبة كلا مما يلي :

$a)\ \sin 15^{\circ}$ $\quad b)\ \cos 75^{\circ}$ $\quad c)\ \tan 105^{\circ}$

تابع متطابقات المجموع و الفرق

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 104 رقم 4 :

إذا كان :

$$\sin\alpha = \frac{4}{5} \quad , \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\beta = \frac{-12}{13} \quad , \quad \pi > \beta > \frac{3\pi}{2}$$

أوجد كلا مما يلي :

$a)\ \cos(\alpha+\beta)$ $\qquad$ $b)\ \tan(\alpha+\beta)$ $\qquad$ $c)\ \sin(\beta-\alpha)$

متطابقات المجموع و الفرق - البنود الموضوعية

في التمارين (1—4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sin 75° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (a) (b)

(2) $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (a) (b)

(3) $\cos(h+\frac{\pi}{2}) = -\cos h$ (a) (b)

(4) $\tan^2\dfrac{\pi}{12} + \tan^2\dfrac{5\pi}{12} = 14$ (a) (b)

في التمارين (5—11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) $\tan\dfrac{7\pi}{12}$ تساوي:

(a) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ (b) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

(c) $2+\sqrt{3}$ (d) $-2-\sqrt{3}$

(6) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ (b) $\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$

(7) $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

(a) $1+\tan h$ (b) $\dfrac{1-\tan h}{1+\tan h}$

(c) $\dfrac{1+\tan h}{1-\tan h}$ (d) $1-\tan h$

(8) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$ (b) $\sqrt{2}(\cos x + \sin x)$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos x + \sin x)$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$

(9) $\cos 94°\cos 18° + \sin 94°\sin 18°$ تساوي:

(a) $\cos 112°$ (b) $\cos 76°$

(c) $\sin 112°$ (d) $\sin 76°$

متطابقات المجموع و الفرق - البنود الموضوعية

(10) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{3}$ تساوي:

ⓐ $\cos\frac{4\pi}{21}$ ⓑ $\sin\frac{4\pi}{21}$

ⓒ $\cos\frac{10\pi}{21}$ ⓓ $\sin\frac{10\pi}{21}$

(11) $\dfrac{\tan\frac{\pi}{5}-\tan\frac{\pi}{3}}{1+\tan\frac{\pi}{5}\tan\frac{\pi}{3}}$ تساوي:

ⓐ $\tan\frac{2\pi}{15}$ ⓑ $\tan\frac{8\pi}{15}$

ⓒ $\tan\left(\frac{-8\pi}{15}\right)$ ⓓ $\tan\left(\frac{-2\pi}{15}\right)$

متطابقات ضعف الزاوية

أولًا: جيب تمام ضعف الزاوية

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

كتاب الطالب مثال صـ 105 رقم 1 :

أثبت صحة متطابقة جيب تمام ضعف الزواية : $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 105 رقم 1 :

أثبت صحة متطابقة جيب تمام ضعف الزواية : $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

كتاب الطالب مثال صـ 106 رقم 2:

إذا كان $\cos x = \frac{3}{5}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد $\cos 2x$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 106 رقم 2 :

إذا كان $\sin x = \frac{5}{13}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد $\cos 2x$

تابع متطابقات ضعف الزاوية

ثانيًا: جيب ضعف الزاوية $\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta$

كتاب الطالب مثال صـ 106 رقم 3 : إذا كان

$$\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} , \quad \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

فأوجد $\sin 2\theta$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 106 رقم 3 : إذا كان

$$\cos\theta = \frac{3}{5} , \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

فأوجد $\sin 2\theta$

ثالثًا: ظل ضعف الزاوية

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 107 رقم 4 :

إذا كان : $\tan\theta = \sqrt{3}$ استخدم متطابقة ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

تابع متطابقات ضعف الزاوية

كتاب الطالب مثال صـ 107 رقم 5:

أثبت صحة المتطابقة : $\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 107 رقم 5 :

أثبت صحة المتطابقة : $2\cos 2\theta = 4\cos^2\theta - 2$

تابع متطابقات ضعف الزاوية

كتاب الطالب مثال صـ 108 رقم 6 :

أثبت صحة المتطابقة : $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 108 رقم 6 :

أثبت صحة المتطابقة : $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

متطابقات نصف الزاوية

متطابقات نصف الزاوية

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 109 رقم 7 :

إستخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد $\cos 15$

كتاب الطالب مثال صـ 109 رقم 8 :

إذا كانت : $180 < \theta < 270$ ، $\sin\theta = \frac{-24}{25}$ فأوجد $\sin\frac{\theta}{2}$

تابع متطابقات نصف الزاوية

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 109 رقم 8 :

إذا كانت : $180 < \theta < 270$. $\sin\theta = \frac{-24}{25}$ فأوجد $\tan\frac{\theta}{2}$. $\cos\frac{\theta}{2}$

تابع متطابقات نصف الزاوية ـ البنود الموضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$ (a) (b)

(3) $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ (a) (b)

(4) $\cos 6x = 2\cos^2 3x - 1$ (a) (b)

(5) $\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$ (a) (b)

في التمارين (6–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $2\cos^2 \frac{x}{2}$ تساوي:

(a) $\frac{1+\cos x}{2}$ (b) $1+\cos x$

(c) $1+\cos 2x$ (d) $\frac{1-\cos 2x}{2}$

(7) $\cos \frac{\pi}{8}$ تساوي:

(a) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ (b) $\sqrt{2}-1$

(c) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ (d) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$

(8) إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\cos\theta = \frac{-7}{25}$ فإن $\cos\frac{\theta}{2}$ يساوي:

(a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{-2}{5}$

(c) $\frac{-3}{5}$ (d) $\frac{3}{5}$

الوحدة العاشرة

الهندسة الفراغية (هندسة الفضاء)

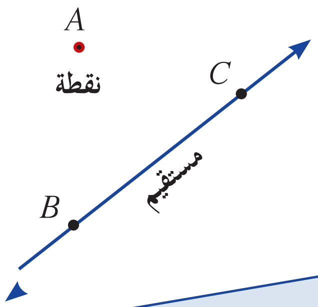
الهندسة الفراغية (هندسة الفضاء)

المستقيمات والمستويات في الفضاء

إن دراسة الأشكال ثلاثية الأبعاد تسمى «الهندسة الفراغية أو هندسة الفضاء». للأشكال ثنائية الأبعاد ما يماثلها في الفراغ ثلاثي الأبعاد.

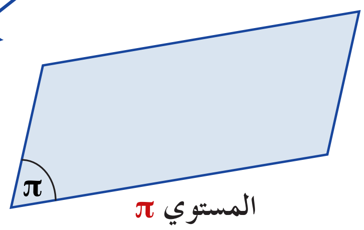
النقطة والمستقيم والمستوي في الفضاء

استخدمت في دراستك السابقة بعض المسميات الأولية مثل النقطة، المستقيم، المستوي وذلك لتعريف بعض المفاهيم أو وصف أشياء معينة.



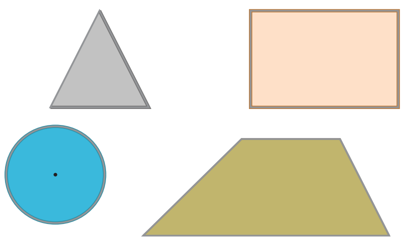
وعلمت أن المستوي هو سطح يمتد إلى ما لا نهاية في جميع الاتجاهات مثل سطح الطاولة أو سطح السبورة وغيرها.

يمثل المستوي هندسيًّا بشكل رباعي أو أي منحنى مغلق (غالبًا ما يكون متوازي أضلاع) ويرمز له بالرمز π أو بثلاث نقاط على هذا المستوي ليست على استقامة واحدة A, B, C مثلًا ويرمز إليه بالرمز (ABC).

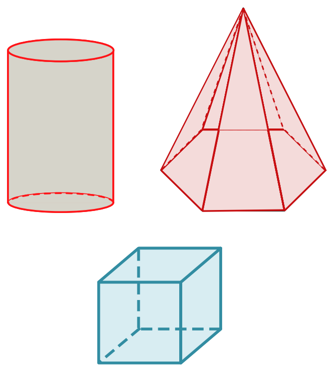


يضم المستوي مجموعة غير منتهية من النقاط .

الأشكال المستوية مثل المثلث، المستطيل، شبه المنحرف، الدائرة وغيرها هي أشكال **ذات بعدين**.



كذلك سبق لك دراسة بعض المجسمات مثل المكعب، المنشور، الهرم، الأسطوانة، المخروط، الكرة وغيرها وهذه المجسمات تشغل حيزًا من الفراغ وتوصف بأنها أشكال هندسية ذات **ثلاثة أبعاد** (ثلاثية الأبعاد). لذلك تسمى أشكال الفراغ الثلاثي.



تهتم الهندسة الفراغية (هندسة الفضاء) بدراسة:

- الأشكال الهندسية ثلاثية الأبعاد.
- تقاطع المستقيمات، تقاطع المستويات وتقاطع المستقيمات والمستويات.
- الحجوم.
- مساحات الأسطح.

الهندسة الفراغية (هندسة الفضاء)

مسلمات (موضوعات) الفضاء

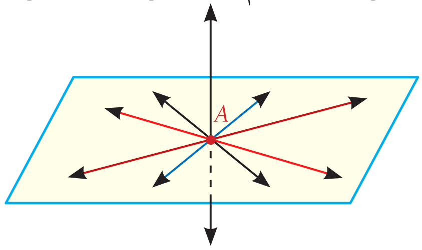
يرتكز بناء علم الهندسة على مجموعة من النظريات الهندسية التي يتم إثباتها انطلاقًا من التسليم بصحة عبارات رياضية نقبلها دون برهان تسمى «المسلمات» أو «الموضوعات» ومنها:

(i) أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد (واحد فقط).

(ii) كل مستقيم يحوي على الأقل نقطتين مختلفتين.

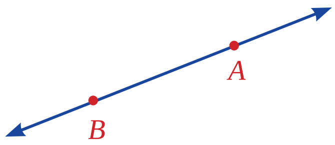
(iii) من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بالنقطة ويوازي المستقيم المعلوم.

أي نقطة يمر بها عدد لا نهائي من المستقيمات في المستوي أو في الفضاء. ولكن أي نقطتين مختلفتين يمر بهما وحيد لذلك يعيّن المستقيم بنقطتين مختلفتين.



نقطة واحدة

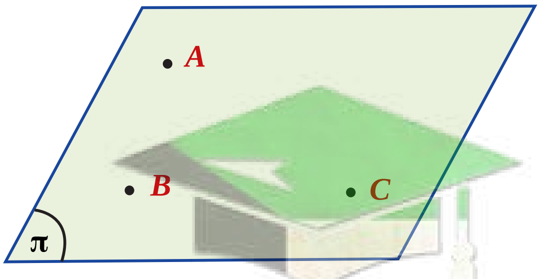
عدد لا نهائي من المستقيمات



نقطتان مختلفتان

مستقيم واحد فقط

(i) في كل مستوٍ يوجد على الأقل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

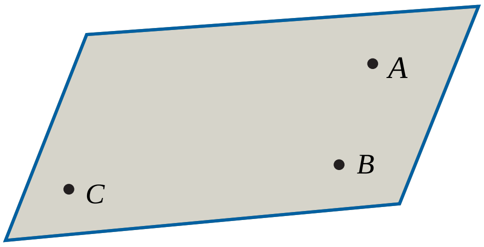


A, B, C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

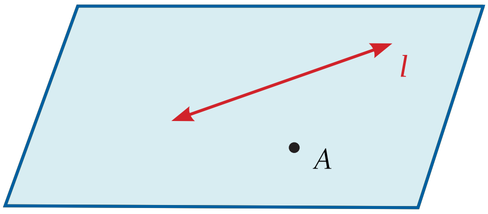
الهندسة الفراغية (هندسة الفضاء)

حالات تعيين المستوي في الفضاء

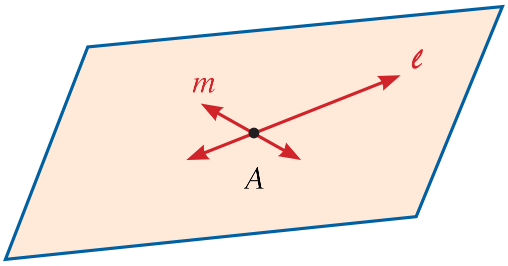
- أي ثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة واحدة تعيّن مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيم ونقطة خارجة عنه يعيّنان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متقاطعان يعينان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متوازيان مختلفان يعينان مستويًا واحدًا فقط.



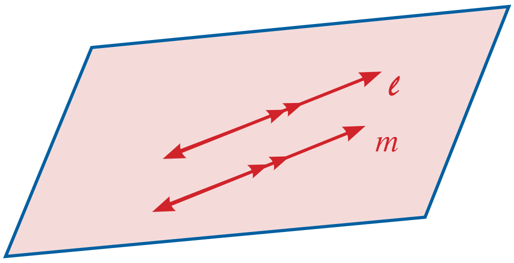
ثلاث نقاط غير مستقيمة



مستقيم ونقطة خارجة عنه

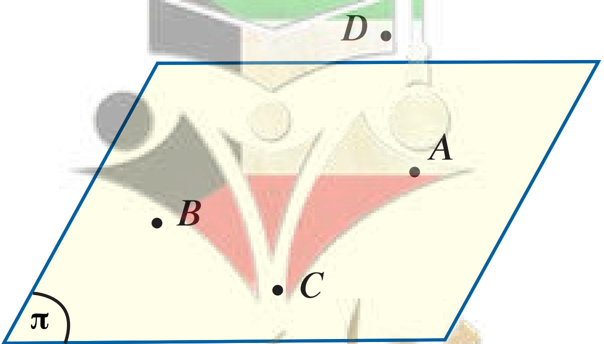


مستقيمان متقاطعان



مستقيمان متوازيان

يحوي الفضاء على الأقل أربع نقاط مختلفة غير مستوية.

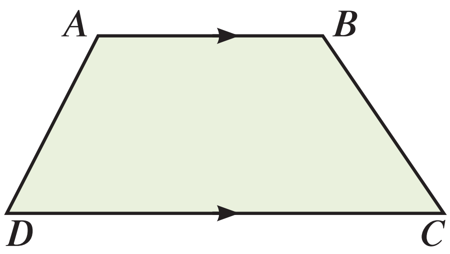


النقاط A, B, C, D لا تقع في مستوٍ واحد

الهندسة الفراغية (هندسة الفضاء)

كتاب الطالب مثال صـ 119 رقم 1 :

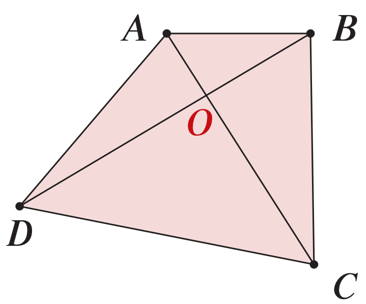
أثبت أن أضلاع أي شبه منحرف تقع جميعها في مستو واحد.



كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 119 رقم 1 :

في الشكل المقابل $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ يتقاطعان في O

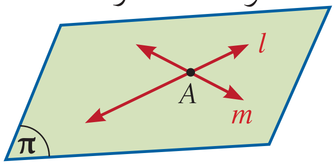
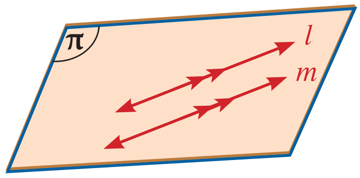
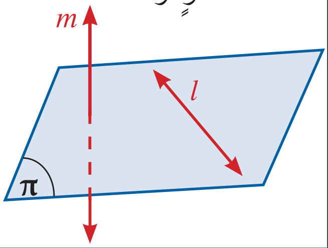
أثبت أن أضلاع الرباعي $ABCD$ تقع جميعها في مستوٍ واحد.



الهندسة الفراغية (هندسة الفضاء)

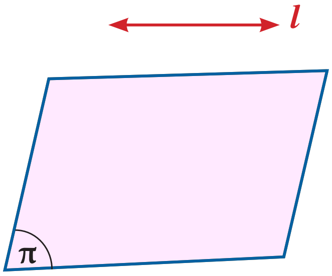
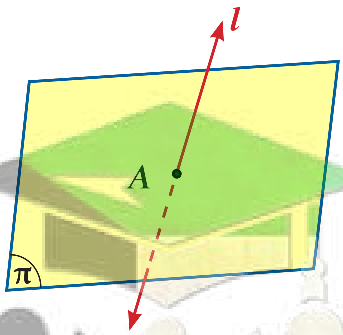
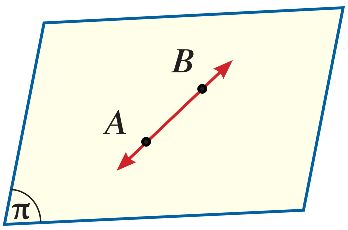
أوضاع المستقيمات في الفضاء

لمستقيمين مختلفين في الفضاء أنهما:

a متقاطعان	b متوازيان	c متخالفان
إذا وقعا في مستوٍ واحد وكان بينهما نقطة واحدة مشتركة فقط. 	إذا وقعا في مستوٍ واحد وكانا غير متقاطعين. 	إذا كان لا يحويهما مستوٍ واحد. 
$\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \{A\}$ مستقيمان متقاطعان	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi \Longrightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متوازيان	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi$, $m \not\subset \pi$ $\Longrightarrow \overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi$ مستقيمان متخالفان

أوضاع مستقيم ومستوٍ في الفضاء

إن معرفة عدد النقاط المشتركة بين مستقيم ومستوٍ في الفضاء تسمح بمعرفة أوضاعهما وهي:

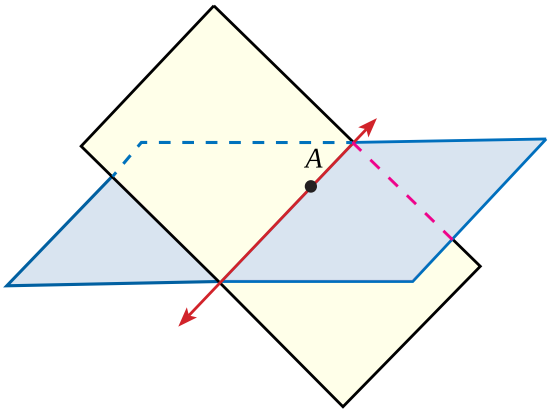
a صفر نقطة مشتركة:	b نقطة مشتركة واحدة:	c نقطتان مختلفتان مشتركتان على الأقل
المستقيم موازٍ للمستوي (في هذه الحالة يكون البعد بينهما ثابت). 	المستقيم يقطع المستوي. 	المستقيم يقع بكامله (بتمامه) في المستوي (المستقيم يوازي المستوي). 
$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \phi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \pi$	$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \{A\}$	$\overleftrightarrow{AB} \cap \pi = \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$ $\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \pi$

الهندسة الفراغية (هندسة الفضاء)

أوضاع مستويين في الفضاء

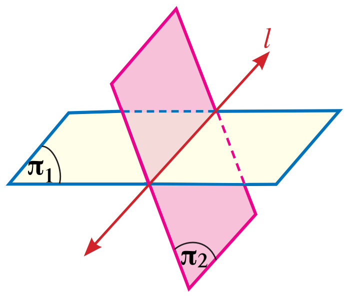
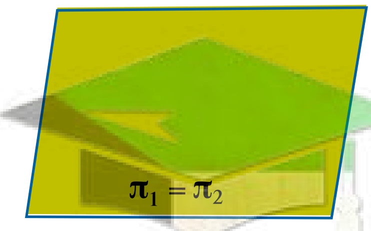
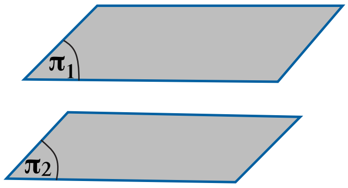
إذا اشترك مستويان مختلفان في نقطة فإنه يوجد على الأقل نقطة أخرى مشتركة بين هذين المستويين.

إذا تقاطع مستويان مختلفان فإنهما يتقاطعان في مستقيم.



إذا اشترك مستويان في ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة واحدة يكون المستويان منطبقين.

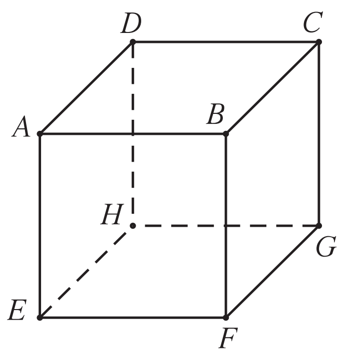
يمكن حصر أوضاع مستويين في الفضاء بثلاث حالات:

(a) المستويان متقاطعان في مستقيم. 	(b) المستويان منطبقان (يشتركان في جميع النقاط). 	(c) المستويان متوازيان (لا توجد نقاط مشتركة بينهما). 
$\pi_1 \cap \pi_2 \neq \phi \Longrightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$	$\pi_1 = \pi_2 \Longrightarrow \pi_1 \,/\!/\, \pi_2$	$\pi_1 \cap \pi_2 = \phi \Longrightarrow \pi_1 \,/\!/\, \pi_2$

الهندسة الفراغية (هندسة الفضاء) – البنود الموضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

$ABCDEFGH$ مكعّب.



(1) المستقيمان HG , AB يعينان مستويًا. (a) (b)

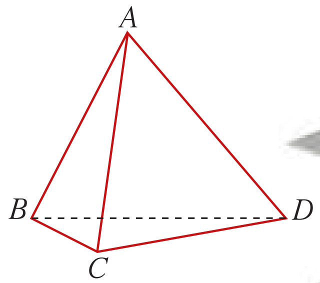
(2) النقاط B, D, H, F تعيّن مستويًا. (a) (b)

(3) النقاط A, B, G, C تعيّن مستويًا. (a) (b)

(4) المستقيمان EF , GC يعينان مستويًا. (a) (b)

(5) المستقيمان AB , BC يعينان مستويًا. (a) (b)

في التمرينين (6–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.



(6) النقاط B, C, D تعيّن:

(a) مستويًا واحدًا　(b) مستويين مختلفين

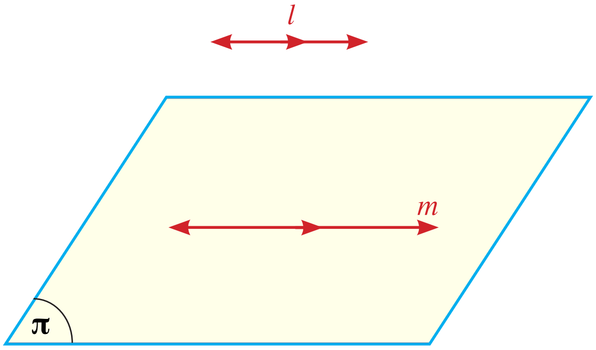
(c) عدد لا منته من المستويات المختلفة　(d) لا يمكن أن تعيّن مستويًا

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

نظرية (1)

إذا وازى مستقيم خارج مستوٍ مستقيمًا في المستوي،

فإنه يوازي المستوي .

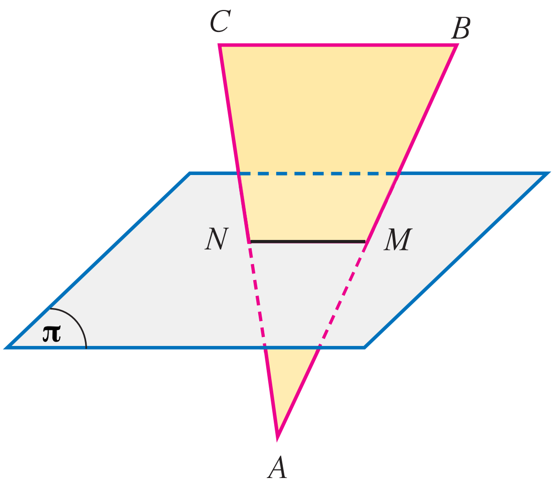


كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 125 رقم 1 :

في الشكل المقابل: المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{AC}$ ،

M ، N تتميان إلى المستوي π .

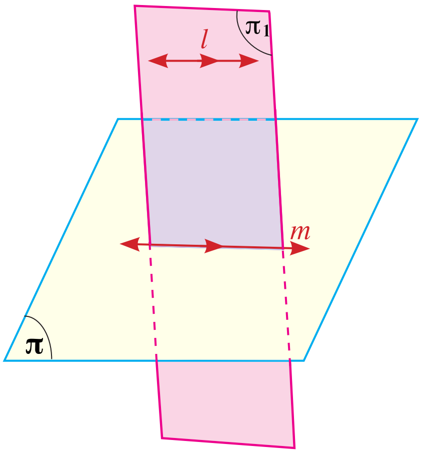
أثبت أن $\overleftrightarrow{BC} \parallel \pi$.



المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

نظرية (2)

إذا وازى مستقيم مستويًا، فكل مستوٍ مار بالمستقيم ويقطع المستوي، يقطعه في مستقيم موازٍ للمستقيم المعلوم.

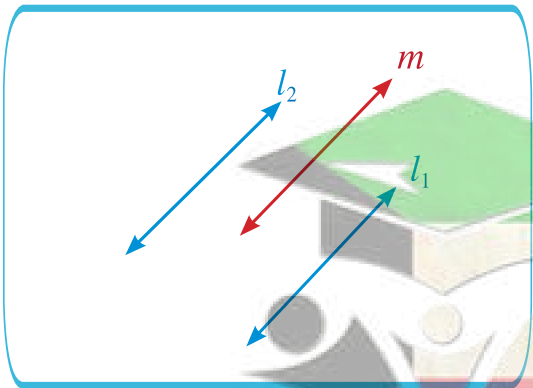


$\because\ \overleftrightarrow{l} \parallel \pi \quad \overleftrightarrow{l} \subset \pi_1 \quad \pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{m}$

$\therefore\ \overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l}$

نظرية (3)

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيان.

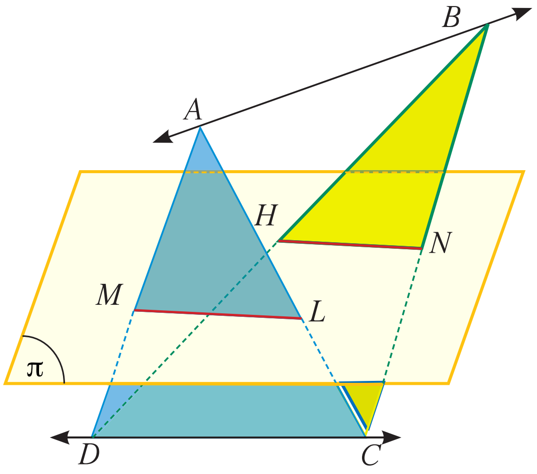


$\because \overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{m} \quad , \quad \overleftrightarrow{l_2} \parallel \overleftrightarrow{m}$

$\therefore\ \overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2}$

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

كتاب الطالب مثال صـ 126 رقم 2 :



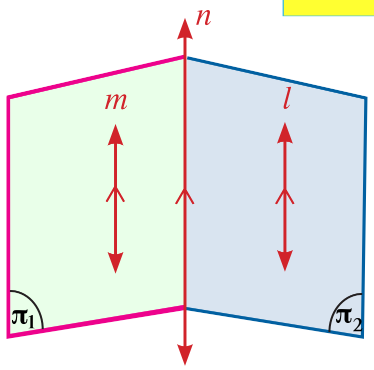
في الشكل المقابل: إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متخالفان، $\overleftrightarrow{CD} \mathbin{/\mkern-6mu/} \pi$.

$\overleftrightarrow{AD}$ تقطع π في M، $\overleftrightarrow{AC}$ تقطع π في L .

$\overleftrightarrow{BD}$ تقطع π في H، $\overleftrightarrow{BC}$ تقطع π في N .

أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \mathbin{/\mkern-6mu/} \overleftrightarrow{NH}$

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء



نتيجة (1)

إذا توازى مستقيمان ومرّ بهما مستويان متقاطعان،

فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلًّا من هذين المستقيمين.

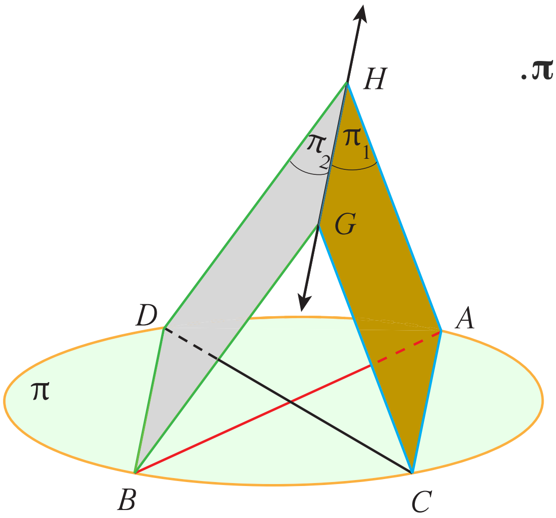
$$(\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l} \;,\; \overleftrightarrow{m} \subset \pi_1 \;,\; \overleftrightarrow{l} \subset \pi_2 \;,\; \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{n}) \Rightarrow (\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{n})$$

كتاب الطالب مثال صـ 127 رقم 3 :

في الشكل المقابل: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ قطران في مستوي الدائرة π.

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

أثبت أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$.



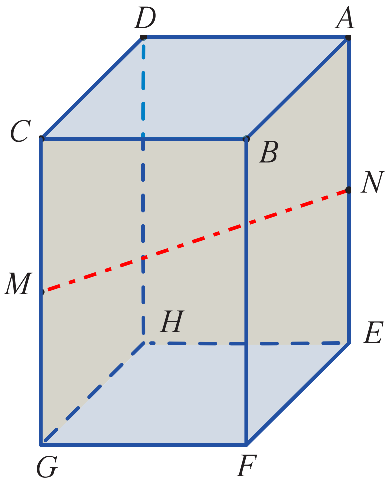
المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 127 رقم 3 :

$ABCDEFGH$ شبه مكعب.

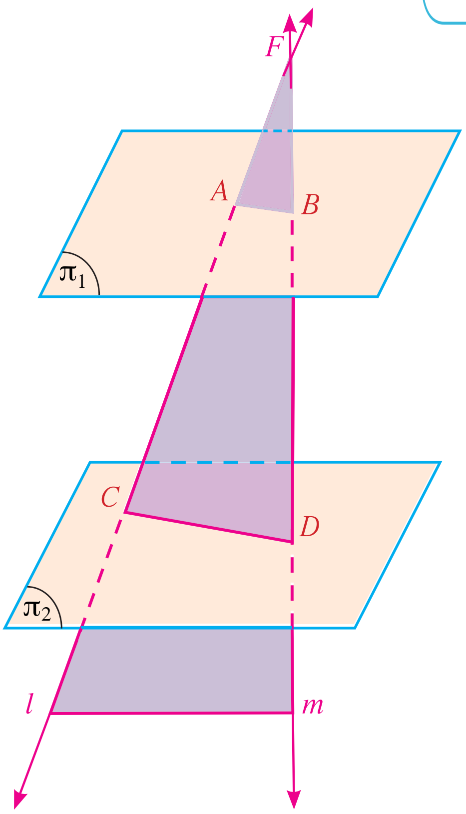
M منتصف $\overline{CG}$, N منتصف $\overline{AE}$.

أثبت أن $(EFGH)$ يوازي $\overleftrightarrow{MN}$.



نظرية (4)

إذا قطع مستوٍ مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين.



كتاب الطالب مثال صـ 128 رقم 4 :

في الشكل المقابل: π_1 , π_2 مستويين متوازيين.

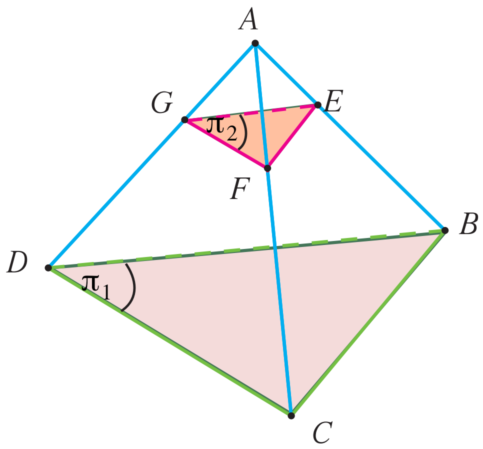
$\overleftrightarrow{l} , \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متقاطعان في F ويقطعان كلًّا من π_1 في A, B ، π_2 في C, D

إذا كان $FB = 5\text{ cm}$, $CD = 9\text{ cm}$, $AC = 6\text{ cm}$, $BD = 4\text{ cm}$

فأوجد محيط المثلث FAB

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

كتاب الطالب حاول أن تحل ص 129 رقم 4 :



في الشكل المقابل، $ABCD$ هرم ثلاثي.

المستويان π_2 , π_1 متوازيان.

إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ ، $FG = 6\text{ cm}$

فأوجد DC

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء – البنود الموضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) يكون المستويان متوازيين إذا اشتركا في نقطة واحدة على الأقل. (a) (b)

(2) إذا وازى مستقيم مستويًا فإنهما لا يشتركان في أي نقطة من نقاطهما. (a) (b)

(3) إذا وازى مستقيم l مستوي π فإن $\overleftrightarrow{l}$ يوازي مستقيمًا وحيدًا في π (a) (b)

(4) إذا كان: $\pi \parallel \overleftrightarrow{m}$, $\pi \parallel \overleftrightarrow{l}$ فإن $\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l}$ (a) (b)

(5) إذا توازى مستقيمان ومرّ بهما مستويان متقاطعان فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلًّا من هذين المستقيمين. (a) (b)

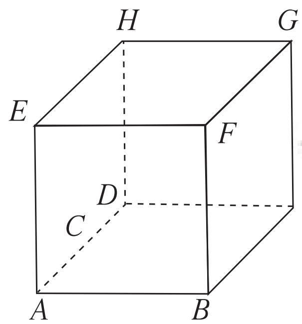
في التمارين (6–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا توازى مستويان مختلفان وقطعهما مستوٍ ثالث فإن خطّي التقاطع:

(a) متقاطعان (b) متخالفان

(c) متوازيان (d) متعامدان

(8) في المكعّب $ABCDEFGH$، $\overleftrightarrow{EG}$, $\overleftrightarrow{BD}$ هما:



(a) متوازيان (b) متقاطعان

(c) متخالفان (d) يحويهما مستوٍ واحد

تعامد مستقيم مع مستوٍ

الزاوية بين مستقيمين متخالفين

الزاوية بين مستقيمين متخالفين هي الزاوية التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيمٍ قاطعٍ له وموازٍ للآخر.

تعريف

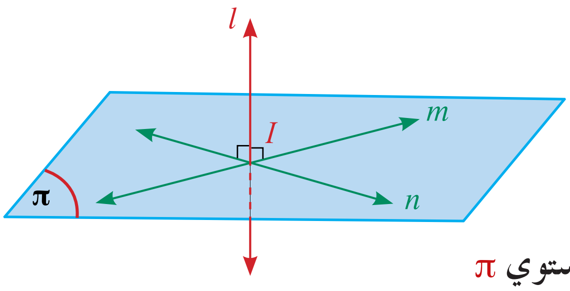
يكون المستقيم l عموديًّا على المستوي π إذا كان $\overleftrightarrow{l}$ عموديًّا على جميع المستقيمات الواقعة في π ويرمز لذلك بـ : $\overleftrightarrow{l} \perp \pi$

نقول أيضًا إن π عمودي على $\overleftrightarrow{l}$

ونرمز لذلك بـ: $\pi \perp \overleftrightarrow{l}$

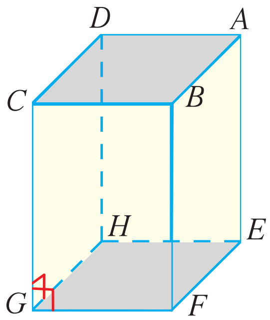
والعكس صحيح ،

فإذا كان $\pi \perp \overleftrightarrow{l}$ فإن l عموديًّا على كل المستقيمات في المستوي π



نظرية (5)

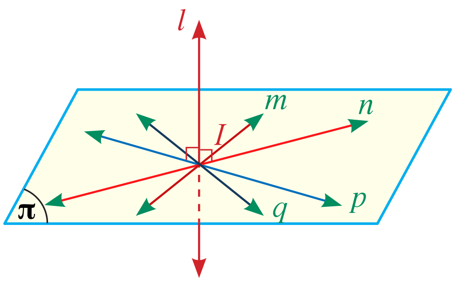
المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديًّا على مستويهما.



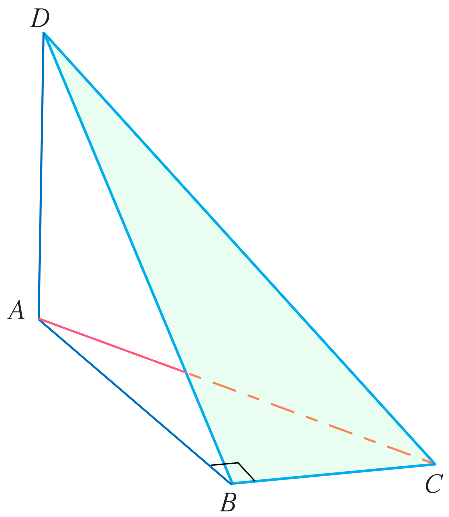
$$\left.\begin{array}{l} \overleftrightarrow{GF} \cap \overleftrightarrow{GH} = \{G\} \\ \overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GF} \;,\; \overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GH} \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{CG} \perp (EFGH)$$

نتيجة (2)

جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي إلى هذا المستقيم تكون محتواة في مستوٍ واحد عموديًّا على المستقيم المعلوم.



كتاب الطالب مثال صـ 131 رقم 1 :



في الشكل المقابل، المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$.

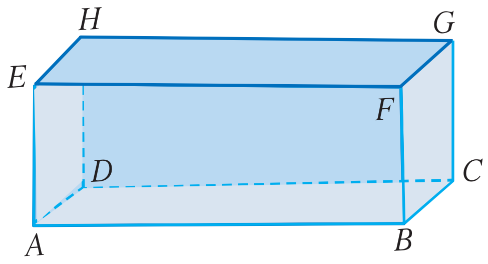
أثبت أن المثلث DBC قائم في $\widehat{B}$

تعامد مستقيم مع مستوٍ

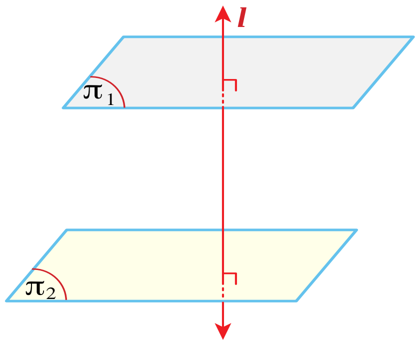
كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 132 رقم 1 :

في شبه المكعب المقابل،

أثبت أن المثلث BEH قائم في $\widehat{E}$.



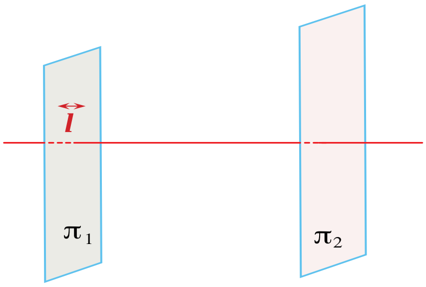
تعامد مستقيم مع مستوٍ



نظرية (6)

إذا كان مستقيم عموديًّا على كلٍّ من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيين.

$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \;,\; \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2 \implies \pi_1 \parallel \pi_2$$



نظرية (7)

إذا كان مستقيم عموديًّا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديًّا على المستوي الآخر.

$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \;,\; \pi_1 \parallel \pi_2 \implies \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2$$

كتاب الطالب مثال صـ 132 رقم 2 :

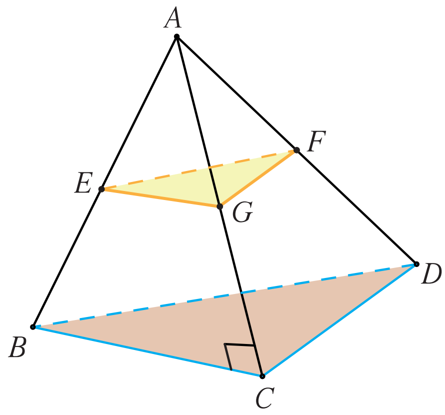
في الشكل المقابل: A نقطة خارج المستوى BCD،

والنقاط E, G, F منتصفات $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ على الترتيب.

إذا كان $\overline{AC} \perp \overline{CB}$

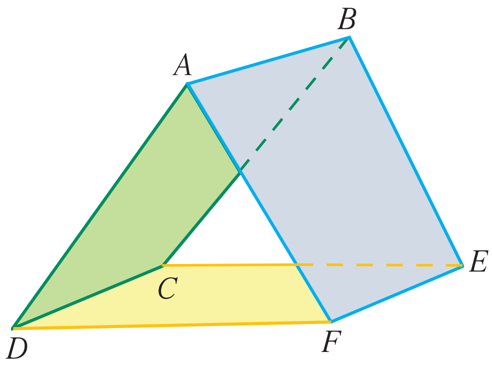
وكان $AD = 13\text{ cm}$ ، $AC = 12\text{ cm}$ ، $CD = 5\text{ cm}$

فأثبت أن: $(EGF) \parallel (BCD)$.



تعامد مستقيم مع مستوٍ

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 133 رقم 2 :



في الشكل المقابل:

$ABCD$, $ABEF$ مستطيلان

أثبت أن: $(BEC) \,/\!/\, (AFD)$

تعامد مستقيم مع مستوٍ

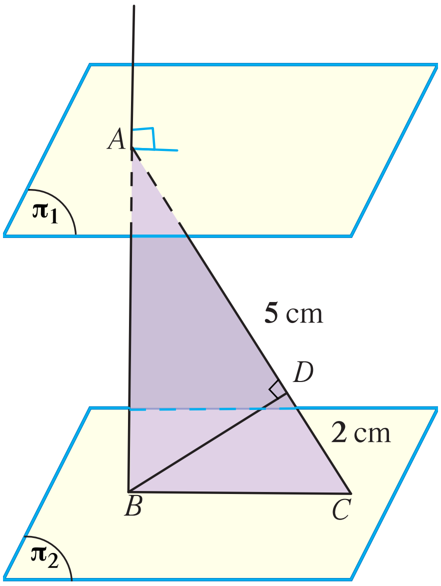
كتاب الطالب مثال صـ 134 رقم 3 :

في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$, $A \in \pi_1$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$, $\pi_1 \parallel \pi_2$

رسم: $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}$ في المستوي ABC

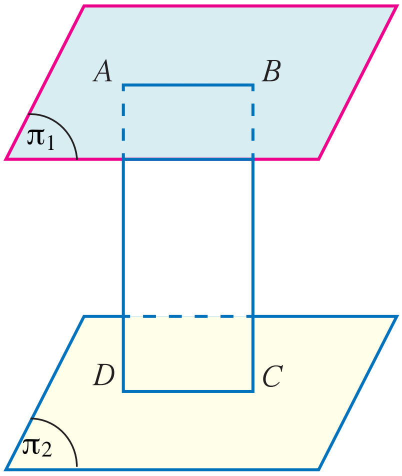
إذا كان: $DC = 2\text{ cm}$, $AD = 5\text{ cm}$

أوجد: BD



تعامد مستقيم مع مستوٍ

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 134 رقم 3 :



في الشكل المقابل: $\pi_1 \parallel \pi_2$

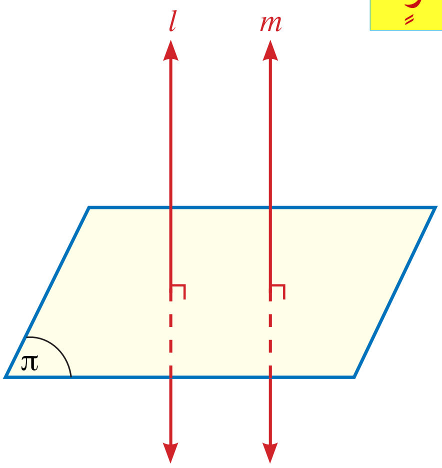
A, B نقطتان في π_1،

C, D نقطتان في π_2 حيث: A, B, C, D في مستوى واحد

$\overline{AD} \perp \pi_2 \;,\; \overline{BC} \perp \pi_2$

أثبت أن $ABCD$ مستطيل.

تعامد مستقيم مع مستوٍ



نظرية (8)

المستقيمان العموديان على مستوٍ متوازيان.

$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi \ , \ \overleftrightarrow{m} \perp \pi \implies \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$$

نظرية (9)

إذا توازى مستقيمان أحدهما عموديًّا على مستوٍ كان المستقيم الآخر عموديًّا على المستوي أيضًا.

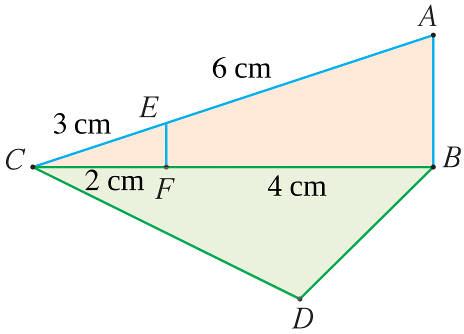
$$\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m} \ , \ \overleftrightarrow{l} \perp \pi \implies \overleftrightarrow{m} \perp \pi$$

كتاب الطالب مثال صـ 135 رقم 4 :

في الشكل المقابل إذا كان $\overline{AB} \perp (BCD)$

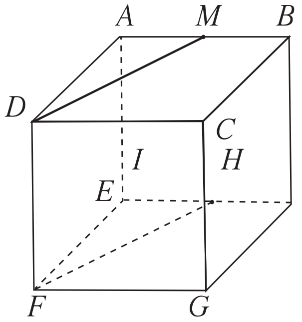
وكان $CE = 3\text{ cm}$ ، $EA = 6\text{ cm}$ ، $CF = 2\text{ cm}$ ، $FB = 4\text{ cm}$

أثبت أن: $\overline{EF} \perp \overline{DB}$



تعامد مستقيم مع مستوٍ – البنود الموضوعية

في التمارين (1–7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.



أسئلة التمرينين (1–2)، على الشكل المقابل حيث $ABCDEHGF$ مكعّب،
النقطة M منتصف $\overline{AB}$ ، I منتصف $\overline{EH}$.

(1) $\overleftrightarrow{MI} \perp (EFGH)$ (a) (b)

(2) $\overleftrightarrow{MD} \perp (BCGH)$ (a) (b)

(3) إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة جميع أحرفه متطابقة فإن: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (a) (b)

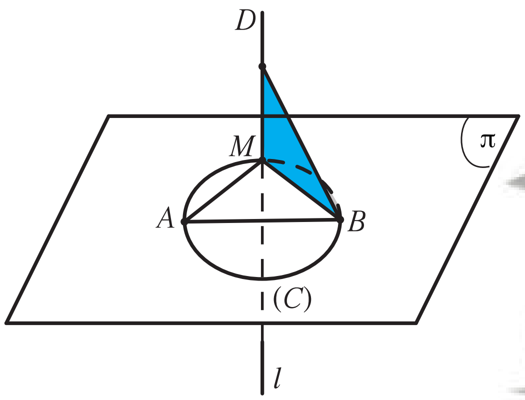
(4) إذا كان $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{l} \subset \pi$ (a) (b)

(5) إذا كان المستقيمان m , l متخالفان و كان $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{n}$ (a) (b)

(6) إذا كان المستقيمان m , l متخالفان و كان $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{n}$ متخالفان. (a) (b)

في التمارين (8–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) في الشكل المقابل :

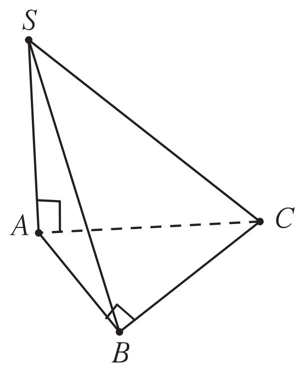


إذا كان $\overleftrightarrow{l} \perp (AMB)$ ، $\overline{AB}$ قطر في الدائرة (C) فإن:

(a) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BD}$ (b) $\overleftrightarrow{l} \perp (BMD)$

(c) $\overleftrightarrow{AM} \perp (BMD)$ (d) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BM}$

(8) في الشكل المقابل إذا كان $m(\widehat{B}) = 90^{o}$ ، $\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$ فإن:



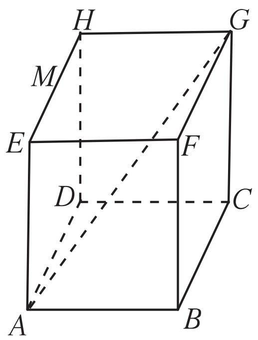
a المثلث SAB قائم في $\widehat{B}$

b $\overleftrightarrow{CB} \perp (SAB)$

c المثلث SAB متطابق الضلعين.

d المثلث SCB قائم في $\widehat{C}$

(9) يمثل الشكل المقابل مكعبًا، إذا كان طول حرفه 3 cm فإن طول قطره $\overline{AG}$ يساوي:



a $\sqrt{3}\text{ cm}$

b $3\sqrt{3}\text{ cm}$

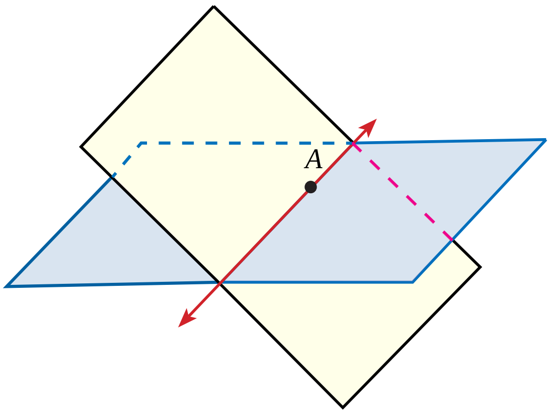
c 9 cm

d 18 cm

الزاوية الزوجية

الزاوية بين مستويين (الزاوية الزوجية)

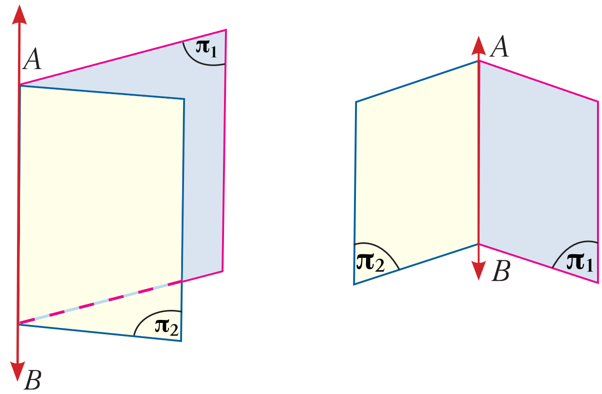
تعلمت أنه إذا تقاطع مستويان مختلفان في الفضاء فإنهما يتقاطعان في مستقيم وينتج من هذا التقاطع أربع زوايا تسمى كل منها زاوية زوجية.



يقسم المستقيم المشترك كل مستوى إلى نصفين ويسمى المستقيم المشترك **حافة الزاوية الزوجية أو الفاصل المشترك**.

ويسمى كل من نصفي المستويين **وجه الزاوية الزوجية**.

يبيّن الشكلان أدناه زاويتين زوجيتين حافة كل منهما $\overleftrightarrow{AB}$

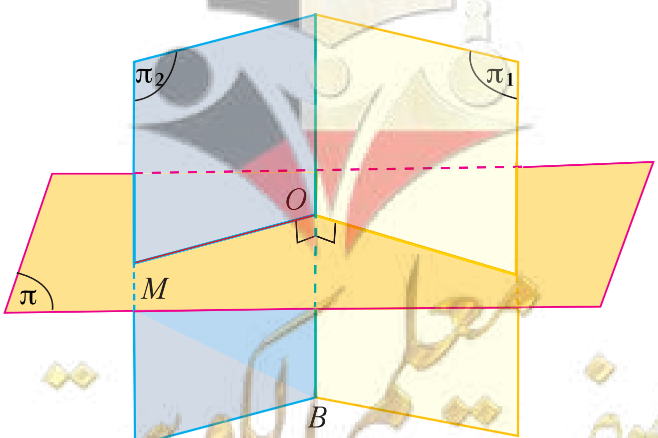


نقرأ الزاوية الزوجية بحافتها فنقول الزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$، أو في حال وجود أكثر من زاوية زوجية: $(\pi_1 , \overleftrightarrow{AB} , \pi_2)$

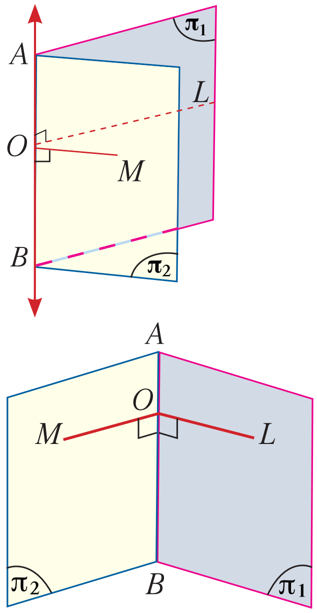
تعريف: الزاوية المستوية لزاوية زوجية

هي الزاوية التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع مستوٍ عمودي على حافتها.

ويكون قياس الزاوية الزوجية هو قياس إحدى زواياها المستوية ودائمًا نأخذ قياس **الزاوية الحادة**.



الزاوية الزوجية



لإيجاد قياس الزاوية الزوجية نتبع التالي:

- نحدّد حافة الزاوية الزوجية ولتكن $\overleftrightarrow{AB}$
- نأخذ نقطة O على حافة الزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$
- نرسم من O شعاعًا $\overrightarrow{OL}$ عموديًّا على $\overleftrightarrow{AB}$ يكون واقعًا بتمامه في المستوي π_1
- نرسم من O شعاعًا $\overrightarrow{OM}$ عموديًّا على $\overleftrightarrow{AB}$ يكون واقعًا بتمامه في المستوي π_2

فتكون الزاوية LOM تسمى **الزاوية المستوية** للزاوية الزوجية.

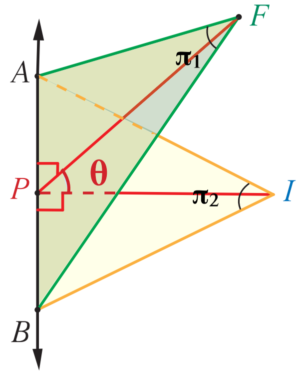
قياس الزاوية الزوجية يرمز له بالرمز $m(L\hat{O}M)$

ونحصل على الزاوية المستوية بقطع الزاوية الزوجية بمستوٍ عمودي على حافتها.

تدريب (1)

في كل من الأشكال التالية عيّن الزاوية المستوية للزاوية الزوجيّة بين المستويين π_1 , π_2.

1



$\overline{FP} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overline{IP} \perp \overleftrightarrow{AB}$

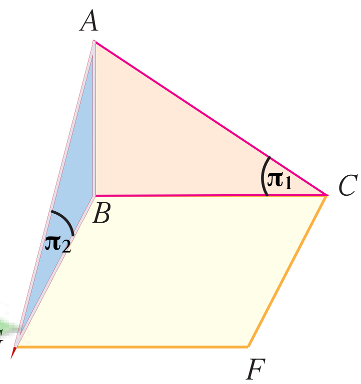
حافة الزاوية الزوجية ....

...... $\subset \pi_1$, ... $\perp \overleftrightarrow{AB}$

وكذلك .... $\subset \pi_2$, ... $\perp \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore$ .... هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين π_1 , π_2

2



$\overline{AB} \perp (CBGF)$

حافة الزاوية الزوجية ....

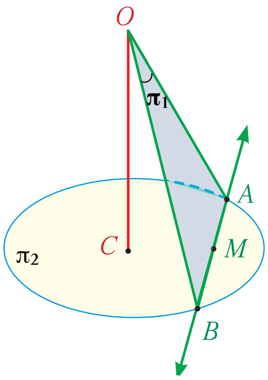
$\overline{BC} \subset \pi_1$, ... $\perp \overleftrightarrow{AB}$

وكذلك .... $\subset \pi_2$, ... $\perp \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore$ .... هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين π_1 , π_2

الزاوية الزوجية

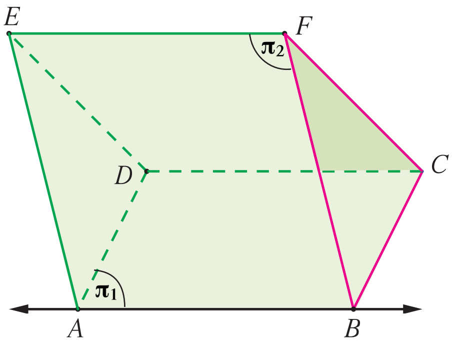
3



M منتصف $\overline{AB}$ ، $\overline{OC} \perp \pi_2$

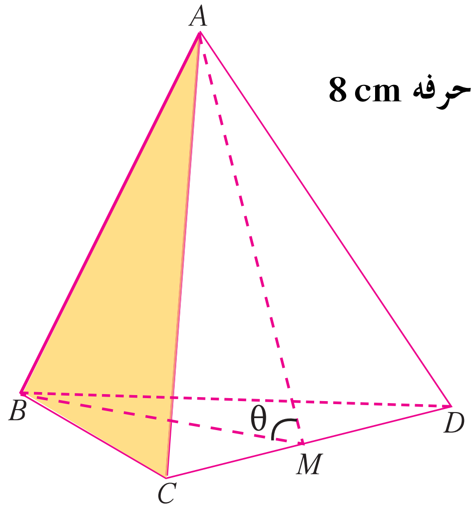
....
....
....
....

4



$ABCD$ مستطيل، $\overleftrightarrow{FC} \perp (ABCD)$

....
....
....
....



كتاب الطالب مثال صـ 139 رقم 1 :

يبيّن الشكل المقابل هرمًا ثلاثي القاعدة أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع طول حرفه 8 cm

M منتصف $\overline{DC}$

a حدد الزاوية المستوية بين المستويين ADC , BDC

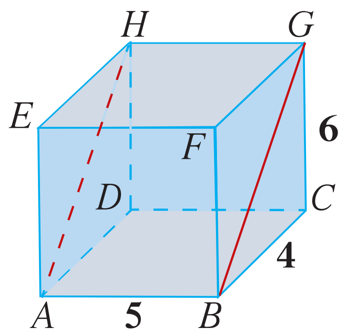
b أوجد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

الزاوية الزوجية

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 140 رقم 1 :

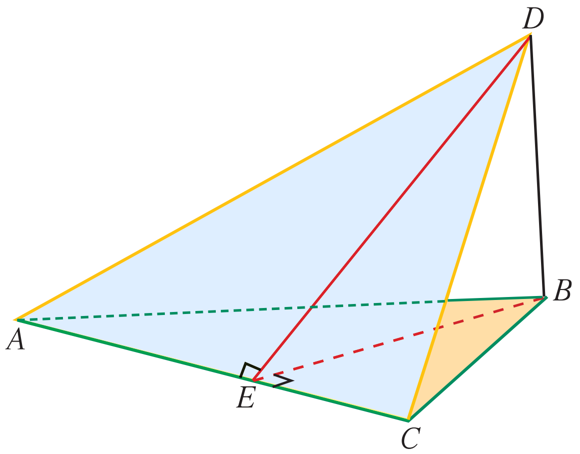
في شبه المكعب المقابل، أثبت أن الزاوية GBC هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية للمستويين

$(ABCD)$, $(ABGH)$، ثم أوجد قياسها.



الزاوية الزوجية

كتاب الطالب مثال صـ 140 رقم 2 :



في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC ،

$DB = 5\text{ cm}$ ، $AB = 10\text{ cm}$ ، $m(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{6}$

$\overline{DB} \perp (ABC)$

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{DE} \perp \overline{AC}$

أوجد:

a $BE\ , DE$

b قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $BAC\ , DAC$

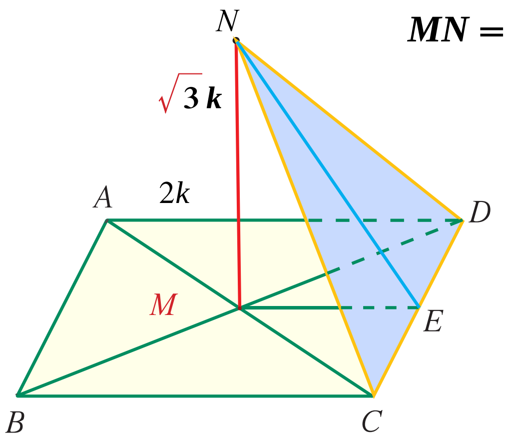
الزاوية الزوجية

كتاب الطالب مثال صـ 142 رقم 3 :

$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M، وفيه $AD = 2k$

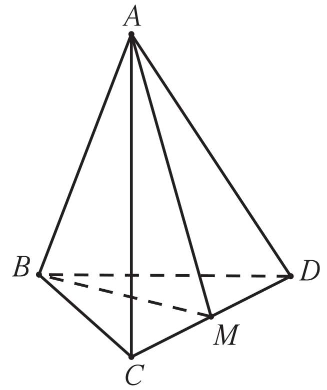
أقيم $\overline{NM}$ عمودًا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}\,k$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NCD , $ABCD$



الزاوية الزوجية – البنود الموضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.



أسئلة التمرينين (1–2)، على الشكل المقابل.

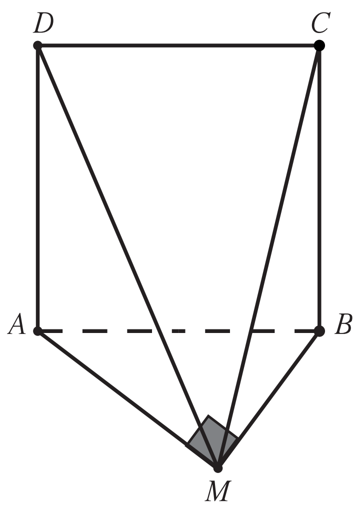
إذا كان $ABCD$ هرم جميع حروفه متساوية الطول، M منتصف $\overline{CD}$

فإن:

(1) $\overline{CD}$ عمودي على $\overline{AB}$ (a) (b)

(2) الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(BDC\,,\overleftrightarrow{DC}\,,ADC)$ هي $A\widehat{M}D$ (a) (b)

أسئلة التمرينين (3–4)، على الشكل المقابل.



المثلث AMB قائم الزاوية في M، $\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي AMB

إذا أخذنا النقطة C بحيث يكون $ABCD$ مربعًا.

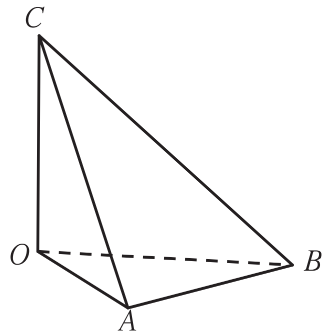
فإن:

(3) $\overleftrightarrow{BM}$ متعامد مع (MAD) (a) (b)

(4) $\overleftrightarrow{CB}$ متعامد مع (AMB) (a) (b)

الزاوية الزوجية – البنود الموضوعية

أسئلة التمرينين (8–9) على الشكل المقابل.



إذا كان OAB مثلث فيه:

$OA = x$ ، $OB = 2x$ ، $m(A\widehat{O}B) = 60^o$

$\overleftrightarrow{OC}$ متعامد مع المستوي OAB

(8) طول $\overline{AB}$ يساوي:

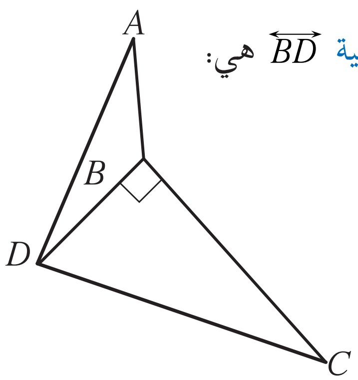
ⓐ x ⓑ $x\sqrt{2}$ ⓒ $x\sqrt{3}$ ⓓ $\frac{x}{2}$

(9) قياس الزاوية الزوجية $(AOC, \overleftrightarrow{OC}, BOC)$ هو:

ⓐ 30^o ⓑ 45^o ⓒ 60^o ⓓ 90^o

(10) في الشكل المقابل، المثلث DBC قائم الزاوية في B،

فإذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على (DBC) فإن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{BD}$ هي:



ⓐ $D\widehat{B}C$ ⓑ $A\widehat{B}C$

ⓒ $A\widehat{B}D$ ⓓ $A\widehat{D}C$

الوحدة الحادية عشرة

الجبر المتقطع

مبدأ العد و التباديل و التوافيق

مبدأ العد

لإجراء عملية على عدد من المراحل المتتابعة، كما يلي:

المرحلة الأولى بـ r_1 طريقة مختلفة،

المرحلة الثانية بـ r_2 طريقة مختلفة،

المرحلة الثالثة بـ r_3 طريقة مختلفة،

.....وهكذا حتى المرحلة n بـ r_n طريقة مختلفة

فإن عدد طرائق إجراء هذه العملية هو: $r_1 \times r_2 \times r_3 \times ... \times r_n$

كتاب الطالب مثال + حاول أن تحل 1 صـ 153 :

لتكن: $A = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ يراد تكوين أعداد ذات ثلاثة منازل باستخدام عناصر A

أوجد:

a) عدد الأعداد الممكن تكوينها.

b) عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

c) عدد الأعداد الفردية مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

d) عدد الأعداد الفردية الممكن تكوينها.

e) عدد الأعداد الزوجية الممكن تكوينها.

f) عدد الأعداد الزوجية المختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

مبدأ العد و التباديل و التوافيق

كتاب الطالب مثال + حاول أن تحل 2 صـ 154 :

لتكن: $B = \{0, 3, 4, 5, 7, 9\}$ تم تكوين أعداد ذات أربعة منازل باستخدام عناصر المجموعة B

أوجد: (a) عدد الأعداد الممكن تكوينها.

(b) عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 5 الممكن تكوينها.

(c) عدد الأعداد مختلفة الأرقام والمحصورة بين 7 000، 4 000 الممكن تكوينها.

(d) عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

(e) عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 10 الممكن تكوينها.

(f) عدد الأعداد مختلفة الأرقام والأكبر من 5 000 الممكن تكوينها.

التباديل

التبديل هو توزيع العناصر **وفق ترتيب معيّن.**

وقد سبق لك دراسة عدد تباديل n من العناصر فيما بينها ويسمّى «مضروب n» ويرمز له بالرمز $n!$

ويكون $n! = n(n-1)(n-2)\dots 3\times 2\times 1 \ , \ n\in \mathbb{Z}^+$

قانون التباديل

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث: $n, r \in \mathbb{Z}^+ \ , \ n \geq r$

ملاحظة: $\boxed{{}_nP_0 = 1 \ , \ {}_nP_n = n! \ , \ {}_nP_1 = n}$

كتاب الطالب مثال 4 صـ 156 :

اشتركت 7 يخوت في سباق. بكم طريقة مختلفة يمكن توقع وصول اليخوت الثلاثة الأوائل بالترتيب؟

كتاب الطالب مثال 5 صـ 156 :

حل المعادلات التالية:

ⓐ ${}_nP_5 = 6\times {}_nP_4 \ , \ n \geqslant 5$

تابع كتاب الطالب مثال 5 ص 156 :

حل المعادلات التالية:

ⓒ $\dfrac{{}_{2n}P_{n+2}}{{}_{2n}P_{n-1}} = 60$

ⓑ ${}_6P_r = 4 \times {}_6P_{r-1}$

كتاب الطالب حاول أن تحل 5 ص 157 :

حل المعادلات التالية:

ⓐ ${}_nP_7 = 12 \times {}_nP_5$

ⓑ ${}_8P_r = 4 \times {}_8P_{r-1}$

التوافيق

عندما نتكلم عن **مجموعة** فهذا يعني أن **ترتيب العناصر غير مهم**. لذلك نحسب عدد **التوافيق**. نرمز لعدد توافيق r عنصرًا مأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n بالرمز ${}_nC_r$ ويكون:

قانون التوافيق

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

حيث: $n, \ r \in \mathbb{Z}^+ \ , \ n \geq r$

ملاحظة: $\boxed{{}_nC_0 = 1 \ , \ {}_nC_1 = n \ , \ {}_nC_n = 1}$

كتاب الطالب حاول أن تحل 6 صـ 158 :

في مكتبة المدرسة 15 كتابًا مختلفًا من مجموعة روايات التاريخ الإسلامي.

a) بكم طريقة مختلفة يمكنك اختيار 7 كتب؟

b) بكم طريقة مختلفة يمكنك اختيار 8 كتب؟

c) ماذا تلاحظ؟

التوافيق

كتاب الطالب مثال وحاول أن تحل 10 صـ160 , 161

أوجد قيمة n في كل مما يلي:

(a) ${}_nC_3 = {}_nC_4$

(b) $\frac{{}_nC_7}{{}_{(n-1)}C_6} = \frac{8}{7}$

(a) ${}_nC_2 = 105$

(b) ${}_nC_4 = {}_nC_5$

مبدأ العد و التباديل و التوافيق – البنود الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

(1) قيمة المقدار $10!$ هي $3\,628\,800$ (a) (b)

(2) قيمة المقدار $4! \times 5!$ هي 360 (a) (b)

(3) عدد طرق جلوس 4 أشخاص على 4 مقاعد في صفّ هو $4!$ (a) (b)

(4) قيمة المقدار ${}_5C_4 \times 3$ هي 15 (a) (b)

(5) $(n-r)! = n! - r!$ (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة :

(6) قيمة المقدار $\frac{10!}{7!3!}$ هي:

(a) $\frac{10}{21}$ (b) $\frac{1}{120}$ (c) 120 (d) 1

(7) قيمة المقدار ${}_{10}C_6 \times {}_6P_4$ هي:

(a) $75\,600$ (b) $7\,560$ (c) 2.5 (d) 210

(8) قيمة المقدار $\frac{{}_7C_4}{{}_9C_4} \times {}_9C_2$ هي:

(a) 18 (b) 5.184 (c) 10 (d) 735

(9) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 5 لاعبين لفريق السلة من بين 12 لاعبًا إذا كان ترتيب المراكز في الفريق مهمًّا؟

(a) $95\,040$ (b) $475\,200$ (c) 392 (d) $11\,404\,800$

(10) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 3 أعلام من مجموعة من 7 أعلام مختلفة؟

(a) 210 (b) 35 (c) 840 (d) 24

(14) إذا كان: ${}_nP_3 = 60$ فإن n تساوي

(a) 6 (b) 5 (c) 4 (d) 2

(15) مجموعة حلّ المعادلة: ${}_6C_r = 15$ هي:

(a) $\{2\}$ (b) $\{4\}$ (c) $\{2, 4\}$ (d) $\{3\}$

نظرية ذات الحدين

مثلث باسكال

$(x+y)^0$	row 1	1
$(x+y)^1$	row 2	1 1
$(x+y)^2$	row 3	1 2 1
$(x+y)^3$	row 4	1 3 3 1
$(x+y)^4$	row 5	1 4 6 4 1
$(x+y)^5$	row 6	1 5 10 10 5 1

لاحظ النمط في مثلث بسكال:

- **الحافات الخارجية تساوي 1.**
- **أي عدد غير الواحد في كل صف يساوي مجموع العددين الواقعين فوقه.**

نظرية ذات الحدين

لأي عدد صحيح موجب n،

$$(x+y)^n = {}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1}y + {}_nC_2x^{n-2}y^2 + \ldots\ldots + {}_nC_rx^{n-r}y^r + \ldots\ldots + {}_nC_{n-1}xy^{n-1} + {}_nC_ny^n$$

خواص نظرية ذات الحدين

1. مفكوك $(x+y)^n$ يتضمن $n+1$ حدًّا يرمز لها بـ: $T_1, T_2, \ldots, T_{r+1}, \ldots, T_n, T_{n+1}$
2. الحد الأول في المفكوك هو x^n، ثم ينقص أس x في الحدود التالية بمقدار الواحد على التوالي.
3. يبدأ ظهور العدد y في الحد الثاني، ثم يزيد أس العدد y بمقدار الواحد على التوالي حتى نصل إلى الحد الأخير في المفكوك ويكون y^n.
4. مجموع أسي x و y في أي حد من حدود المفكوك **ثابت** ويساوي الأس n.
5. معامل الحد T_1 يساوي معامل الحد T_{n+1}، ومعامل الحد T_2 يساوي معامل الحد T_n، وهكذا ...
6. الحد العام الذي رتبته $r+1$ يرمز له بالرمز: T_{r+1}

$$\boxed{T_{r+1} = {}_nC_r \cdot x^{n-r} \cdot y^r}$$

نظرية ذات الحدين

كتاب الطالب حاول أن تحل 1 صـ 165 :

استخدم نظرية ذات الحدين لفك كل من:

ⓐ $(a-b)^4$ ⓑ $(d+2)^7$ ⓒ $(2x-y^2)^5$

نظرية ذات الحدين

كتاب الطالب مثال 2 صـ 164 :

في مفكوك: $(2x-3y^2)^{10}$ أوجد الحدّ السابع.

كتاب الطالب حاول أن تحل 2 صـ 165 :

في مفكوك: $(3x^2-y)^{15}$ أوجد معامل T_{12}

كتاب الطالب حاول أن تحل 3 صـ 166 :

أوجد الحد الذي يحتوي على x^2y^3 في مفكوك $(3x-y)^5$

نظرية ذات الحدين – البنود الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

(1) مفكوك $(c+1)^5$ هو: $c^5+5c^4+10c^3+10c^2+5c+1$ — (a) (b)

(2) إذا كان الحد $126c^4d^5$ أحد حدود مفكوك $(c+d)^n$، فإنّ قيمة n هي 5 — (a) (b)

(3) إذا كان معامل الحد الثاني في مفكوك $(r+x)^n$ هو 7 فإنّ قيمة n هي 7 — (a) (b)

(4) الحدّ الثاني من $(x+3)^9$ هو $54x^8$ — (a) (b)

(5) معامل الحد السابع في مفكوك $(x-y)^7$ هو عدد سالب. — (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة :

(6) مفكوك $(a-b)^3$ هو:

(a) $a^3+a^2b+ab^2+b^3$
(b) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
(c) $a^3-a^2b+ab^2-b^3$
(d) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(7) الحد الثالث من مفكوك $(a-b)^7$ هو:

(a) $-21a^5b^2$
(b) $-7a^6b$
(c) $7a^6b$
(d) $21a^5b^2$

(8) في مفكوك $(2a-3b)^6$ الحد الذي معامله 160 2 هو:

(a) الحدّ الثاني
(b) الحد الثالث
(c) الحد الرابع
(d) الحد الخامس

(9) معامل الحد الثالث في مفكوك $(3c-4b)^5$ هو:

(a) 5 170
(b) 3 312
(c) 4 320
(d) 2 316

(10) في مفكوك $(x+y)^9$ تكون رتبة الحد: $126x^5y^4$ هي:

(a) الرابعة (b) الخامسة (c) السادسة (d) التاسعة

(11) في مفكوك $(3x+2y)^8$ الحد الذي يحوي x^3y^5 هو:

(a) T_3 (b) T_6 (c) T_5 (d) T_8

الاحتمال

التجربة العشوائية

هي تجربة لها عدة نواتج مختلفة ممكنة ولكن لا يمكن التأكد مسبقًا من أن أي ناتج منها سوف يتحقق عند إجراء التجربة.

أنواع الأحداث

حدث بسيط

مجموعة جزئية من فضاء العينة (S) تحوي ناتجًا واحدًا من نواتج التجربة العشوائية (مجموعة تحوي عنصرًا واحدًا) فإذا كان A حدثًا بسيطًا فإن $n(A) = 1$

حدث مركب

مجموعة جزئية تحوي أكثر من ناتج واحد من نواتج التجربة العشوائية.

فإذا كان B حدثًا مركبًا فإن $n(B) > 1$

حدث مستحيل

مجموعة جزئية خالية $\varnothing$ من فضاء العينة (S). فإذا كان D حدثًا مستحيلًا فإن $n(D) = 0$

حدث مؤكد

مجموعة جزئية تساوي فضاء العينة (S). فإذا كان F حدثًا مؤكدًا فإن $n(F) = n(S)$

حدثان متنافيان

يقال للحدثين A, B أنهما متنافيان إذا كان وقوع أحدهما ينفي (يمنع) وقوع الآخر أثناء التجربة.

أي أن: $A \cap B = \phi$ ويكون $n(A \cap B) = n(\phi) = 0$

حدث متمم

الحدث المتمم للحدث A هو الحدث الذي يحوي جميع عناصر فضاء العينة (S) التي لا تنتمي إلى الحدث A

نرمز إلى الحدث المتمم بالرمز $\overline{A}$

A، $\overline{A}$ هما حدثان متنافيان. ويكون: $A \cap \overline{A} = \phi$ ، $A \cup \overline{A} = S$

حدثان مستقلان

يقال للحدثين A, B أنهما مستقلان إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الآخر أثناء التجربة العشوائية.

الاحتمال

كتاب الطالب مثال 1 صـ 169 :

في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة وملاحظة الوجه العلوي.

(1) اكتب وحدد نوع كل من الأحداث التالية:

(a) A: ظهور عدد أكبر من 5

(b) B: ظهور عدد فردي

(c) C: ظهور عدد زوجي

(d) D: ظهور عدد أصغر من 7

(2) (a) أثبت أن B, C حدثان متتامان.

(b) بيّن فيما إذا كان الحدثان C, D متنافيان أم لا.

الاحتمال

الاحتمال

إذا كانت جميع نواتج التجربة العشوائية لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث هو:

$$P(E) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث } E}{\text{عدد نواتج فضاء العينة } S} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

خواص الاحتمال لحدث ما

E حدث في فضاء عينة S حيث S منته وغير خالٍ

(a) $0 \leq P(E) \leq 1$

(b) إذا كان E حدثًا مستحيلًا، فإن $P(E) = 0$

(c) إذا كان E حدثًا مؤكدًا، فإن $P(E) = 1$

(d) مجموع احتمالات كل الأحداث البسيطة في فضاء العينة $= 1$

كتاب الطالب مثال وحاول أن تحل 2 صـ 171 :

يبيّن الجدول المقابل وسيلة النقل التي يستخدمها طلاب الصف الحادي عشر بشعبتيه للمجيء إلى المدرسة.

اختير طالب عشوائيًا من بين طلاب شعبتي الصف الحادي عشر.

ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يستقلون الحافلة المدرسية للمجيء إلى المدرسة؟

وسيلة النقل	الشعبة A	الشعبة B	المجموع
الحافلة المدرسية	16	15	31
مع الأهل	6	8	14
سيارة نقل عام	2	5	7
المجموع	24	28	52

(a) ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يقلونهم أهلهم إلى المدرسة؟

(b) ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الشعبة B؟

الاحتمال

A، B حدثان فإن	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
A، B حدثان متنافيان $\Longleftrightarrow$	$P(A \cap B) = 0$
A، B حدثان مستقلان $\Longleftrightarrow$	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$\overline{A}$ هو الحدث المتمم للحدث A $\Longleftrightarrow$	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

كتاب الطالب حاول أن تحل 6 صـ 174 :

رُمي حجر نرد منتظم. فما احتمال الحصول على أحد مضاعفات العدد 3 أو عدد زوجي؟

كتاب الطالب حاول أن تحل 6 صـ 174 :

رُمي حجر نرد منتظم. ما احتمال الحصول على عدد زوجي أو عدد أولي؟

الاحتمال

احتمال ذات الحدين

إقامة تجربة n مرّة وتسجيل نتائجها علمًا أن هناك فقط لكل تجربة نتيجتين H أو T

إذا كان $P(H) = m$، الحدث E، H تحقق فقط k مرّة، فبالتالي:

$$P(E) = {}_nC_k \cdot P(H)^k \cdot P(T)^{n-k}$$
$$= {}_nC_k \cdot m^k (1-m)^{n-k}$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k)} \cdot m^k (1-m)^{n-k}$$

يستخدم احتمال ذات الحدين:

- في حالة تكرار حدث عدة مرات.
- إذا كان للحدث ناتجان فقط:

ربح – خسارة، نجاح – فشل، كتابة – صورة، ...

كتاب الطالب مثال وحاول أن تحل 7 ص 175 :

خلال شهر التسوق يقدم أحد المحلات العرض التالي: عند شراء كل صنف تحصل على بطاقة. تفوز 40% من البطاقات بجوائز ويتم اختيار هذه البطاقات الرابحة بشكل عشوائي. مع راشد 3 بطاقات.

ما احتمال أن يفوز راشد بجائزتين؟

ما احتمال أن يفوز راشد بجائزة واحدة فقط؟

الاحتمال

كتاب الطالب مثال وحاول أن تحل 8 صـ 175 :

في إحدى الآلات الحاسبة 4 بطاريات. احتمال أن تخدم كل بطارية مدة عام كامل يساوي 90%

ما احتمال أن تخدم كل من البطاريات الأربع مدة عام؟

ما احتمال أن تخدم 3 بطاريات فقط مدة عام كامل؟

الاحتمال - البنود الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

(2) الحدثان m، n مستقلان، $P(m)=\frac{12}{17}$, $P(n)=\frac{3}{8}$ إذاً $P(m\cap n)=\frac{9}{17}$ (a) (b)

(3) عند رمي حجر نرد، فإن احتمال ظهور العدد 4 أو ظهور عدد زوجي يساوي $\frac{1}{2}$ (a) (b)

(4) في اختبار صح – خطأ، أجبت عن 5 أسئلة عشوائيًّا. احتمال أن تكون 3 من إجاباتك صحيحة هو $\frac{5}{16}$ (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة :

(5) الحدثان m، n مستقلان، $P(m)=\frac{1}{3}$، $P(n)=\frac{9}{10}$ إذاً $P(m\cap n)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{25}{30}$

(c) $\frac{3}{10}$ (d) $\frac{11}{30}$

(6) الحدثان t، r متنافيان $P(t)=\frac{3}{5}$، $P(r)=\frac{1}{3}$ إذاً $P(t\cup r)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{14}{15}$

(c) $\frac{4}{15}$ (d) 0

(7) الحدثان t، r متنافيان $P(t)=\frac{1}{7}$، $P(r)=60\%$ إذاً $P(t\cup r)$ تساوي:

(a) 28% (b) 42%

(c) $\frac{16}{35}$ (d) $\frac{26}{35}$

(8) عند رمي حجر نرد فإن احتمال ظهور عدد زوجي أو عدد أولي يساوي:

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{5}{6}$

(c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

(9) يحتوي كيس على 5 كرات من اللون الأزرق، 3 كرات من اللون الأحمر. أخذت عشوائيًّا كرتان معًا من الكيس. احتمال الحدث: «أن تكون كرة حمراء والأخرى كرة زرقاء» هو:

(a) $\frac{1}{14}$ (b) $\frac{28}{15}$

(c) $\frac{2}{7}$ (d) $\frac{15}{28}$