2025/2026

الرياضيات

الفصل الدراسي الثاني

الصف الثاني عشر علمي

اعداد:

أ/ حسام بيومي

الوحدة الخامسة

التكامل

- التكامل غير المحدد
- التكامل بالتعويض
- تكامل الدوال المثلثية
- الدوال الأسية واللوغاريتمية
- التكامل بالتجزيء
- التكامل باستخدام الكسور الجزئية
- التكامل المحدد

التكامل غير المحدد

دالة واحدة

$$\int k\,dx = k\,x + c$$

حيث k عدد ثابت

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

ضرب دالتين

- ايجاد حاصل ضرب الدالتين
- التكامل بالتعويض
- التكامل بالتجزيء

قسمة دالتين

- التحليل والاختصار
- قسمة الحدود على المقام اذا كان المقام حد
- تكامل دوال لوغاريتمية
- تكامل باستخدام الكسور الجزئية

بند 1 - 5

المشتقة العكسية

تعريف : المشتقة العكسية

تسمى الدالة F مشتقة عكسية (دالة مقابلة) للدالة f المعرفة على مجالها I

إذا كان $F'(x) = f(x) \quad , \forall x \in I$

نظرية (1)

إذا كانت F مشتقة عكسية للدالة f على الفترة I، G مشتقة عكسية أيضاً للدالة f على الفترة I فإن :

$G(x) = F(x) + C \quad , \forall x \in I$ حيث C ثابت

نظرية (2)

إذا كانت F مشتقة عكسية للدالة f على الفترة I، فإن الصورة العامة للمشتقة العكسية للدالة f على الفترة I هي :

$F(x) + C$ حيث C ثابت اختياري

كتاب الطالب مثال صـ 14 رقم 1 :

أثبت أن: $F(x) = x^3 + 5x + 3$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 3x^2 + 5$

ثم اكتب الصورة العامة للمشتقة العكسية.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 14 رقم 1 :

أثبت أن: $F(x) = 5 - \frac{1}{3}x^3$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = -x^2$

ثم اكتب مشتقة عكسية أخرى لها.

المشتقة العكسية

كتاب الطالب مثال صـ 14 رقم 2 :

أثبت أن: $F(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 14 رقم 2 :

أثبت أن: $F(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$

كراسة التمارين صـ 9 رقم 1

أثبت أن : $F(x) = (3x + 2)^5 + 7$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = 15(3x + 2)^4$

تعريف التكامل غير المحدد :

التكامل غير المحدد

التكامل غير المحدد للدالة f بالنسبة إلى x هو مجموعة كل المشتقات العكسية F ويكتب على الصورة : $\int f(x)dx$

قواعد التكامل غير المحدد :

الرقم	التكامل	ملاحظات	أمثلة
1	$\int kdx = kx + C$	k عدد ثابت	$\int 5dx = 5x + C$
2	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	(قاعدة القوى) $n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$	$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$

خواص التكامل غير المحدد :

الرقم	الخاصية	ملاحظات
1	$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$	الضرب بعدد ثابت $k \neq 0$
2	$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$	الجمع و الطرح

الرقم	ملاحظـــــات
1	$\int -f(x)dx = -\int f(x)dx$
2	$\int [f(x) + k]dx = \int f(x)dx + \int kdx$

بند 1 - 5

كتاب الطالب مثال و حاول أن تحل صـ 15 رقم 3

أوجد :

a $\int 5 \quad dx =$ ....

b $\int 4x^3\, dx =$ ....

a $\int 15\, dx =$ ....

b $\int 5x^4\, dx =$ ....

كتاب الطالب مثال وحاول أن تحل صـ 16 رقم 4

احسب :

$$\int (x^2 - 2x - 5)\, dx$$

$$\int (3x^2 - 4x - 1)\, dx$$

كتاب الطالب مثال صـ 16 رقم 5

أوجد التكاملات غير المحددة التالية :

b $\int \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}\, dx$

a $\int \frac{1}{x^2}\, dx$

c $\int \left(\frac{x^2 - 2}{x^2}\right)^2 dx$

بند 1 - 5 كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 17 رقم 5

أوجد التكاملات غير المحددة التالية :

a $\int (2x-3)(x+4)dx$

b $\int \frac{x^2+5x+4}{x+1}dx$

c $\int \left(\frac{3x^2-x}{x}\right)^2 dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 17 رقم 6 أوجد :

a $\int x\sqrt{x}\,dx$

b $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

بند 1 - 5

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 17 رقم 6 أوجد :

c $\int \frac{x^2 - 3x}{\sqrt[3]{x}} dx$

كتاب الطالب مثال وحاول أن تحل صـ 18 رقم 7

إن كان: $F(x) = \int (2x - 3)dx$ ، $F(3) = 2$ فأوجد $F(x)$

إذا كان: $F(x) = \int (2x + 5)dx$ ، $F(-1) = 0$ فأوجد $F(x)$

التكامل غير المحدد: التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. $F(x)=x^{-3}$ هي مشتقة عكسية للدالة : $f(x)=-3x^{-4}$ — (a) (b)

2. $\int(-x^{-3}+x-1)dx=\frac{1}{2}x^{-2}+\frac{1}{2}x^{2}-x+C$ — (a) (b)

3. $\int\frac{1}{x^{2}}dx=\frac{1}{x}+C$ — (a) (b)

4. إذا كانت: $f'(x)=\frac{1}{x^{2}}+x$ ، $f(2)=1$ ، فإن $f(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}x^{2}+\frac{1}{2}$ — (a) (b)

5. إذا كانت: $F(x)=\int(3x^{2}-12x+15)dx,\ F(0)=400$ فإن: $F(x)=x^{3}+6x^{2}+15x+400$ — (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة :

6. $\int\frac{4}{3}\sqrt[3]{t^{2}}\,dt=$

(a) $\frac{3t^{\frac{5}{3}}}{5}+C$ (b) $\frac{4t^{\frac{5}{3}}}{5}+C$ (c) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{t5}+C$ (d) $4\sqrt[3]{t5}+C$

---

7. $\int(\sqrt[3]{x^{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}})\,dx=$

(a) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x}\left(x^{\frac{4}{3}}+5\right)+C$ (b) $\frac{3}{5}x^{\frac{2}{3}}\left(x^{-\frac{2}{3}}+5\right)+C$

(c) $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x}\left(x^{\frac{4}{3}}+5\right)+C$ (d) $\frac{5}{3}x^{\frac{4}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+5\right)+C$

---

8. إذا كان: $x=-1$, $y=-5$, $\frac{dy}{dx}=x^{-\frac{2}{3}}$ فإن y تساوي :

(a) $-\frac{x^{2}}{3}-\frac{14}{3}$ (b) $3x^{\frac{1}{3}}+2$ (c) $3x^{\frac{1}{3}}-2$ (d) $3x^{\frac{1}{3}}$

---

9. $\int\frac{2x+3}{\sqrt{x}}\,dx=$

(a) $\frac{3}{4}x^{\frac{2}{3}}+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+C$ (b) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}+C$

(c) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}+C$ (d) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{6}x^{\frac{1}{2}}+C$

10. $\int (\sqrt{x}\,(2 + x^2)\,dx =$

ⓐ $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$

ⓑ $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

ⓒ $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

ⓓ $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

---

11. $\int \frac{2+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}\,dx =$

ⓐ $x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$

ⓑ $4x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$

ⓒ $x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$

ⓓ $4x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$

---

12. $\int (\frac{x^2-4x+4}{x-2} + 2)^2\,dx =$

ⓐ $x^2 + C$

ⓑ $2x + C$

ⓒ $\frac{x^2}{2} + 2x + C$

ⓓ $\frac{1}{3}x^3 + C$

التكامل بالتعويض

قاعدة التكامل بالتعويض

إذا كانت F هي مشتقة عكسية للدالة f فإن :

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F\,(g(x)) + C$$

إذا كان $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ فإن :

$$\int f(u)du = F\,(u) + C$$

التكامل بالتعويض

- **المشتقة كاملة**: $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
- **المشتقة ناقصة أو زايدة عدد**: نضرب بالعدد داخل التكامل ومعكوسة الضربي خارج التكامل
- **المشتقة ناقصة او زايدة متغير**: توجد قيمة x من u وقيمة dx من du

التكامل بالتعويض

قاعدة التكامل بالتعويض

إذا كانت F هي مشتقة عكسية للدالة f فإن : $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$

إذا كان $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ فإن : $\int f(u)du = F(u) + C$

تعميم قاعدة القوى :

$$\int [g(x)]^n \, g'(x)dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad , n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$$

في هذا التكامل

نتعامل مع متغير جديد .نستبدل المتغير x بالمتغير u بهدف استخدام القواعد الأساسية للتكامل غير المحدد .

كتاب الطالب صـ 21 مثال رقم 1 :

أوجد :

a) $\int (x^2+2x+5)^3 \, (2x+2)\,dx$

....

....

....

....

....

....

---

b) $\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2}\,dx$

....

....

....

....

....

....

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 21 رقم 1 :

أوجد :

a $\int (x^3 + 4x^2 + x)^7 (3x^2 + 8x + 1)\, dx$

b $\int \sqrt[3]{x^2 - 5x + 2}\quad (2x - 5) dx$

كتاب الطالب صـ 21 مثال رقم 2 : b

أوجد :

b $\int \frac{5}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x} + 2)^3} dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 22 رقم 2 :

أوجد :

a $\int \sqrt[5]{3x+7}\ dx$

b $\int \frac{3(\sqrt[3]{x}-5)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

بند 2 - 5 كراسة التمارين صـ 12 رقم 3 :

أوجد :

$$\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx$$

كراسة التمارين صـ 12 رقم 6 : أوجد :

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{4+x^3}}\,dx$$

بند 2 - 5

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 23 رقم 3

أوجد: $\int x(2x-1)^3 dx$

كراسة التمارين صـ 12 رقم 9 : أوجد : $\int \frac{x}{\sqrt{1+3x}} dx$

كتاب الطالب مثال و حاول أن تحل صـ 23 رقم 4

أوجد :

$$\int x^5 \sqrt{3+x^2}\,dx$$

$$\int x^5 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

كراسة التمارين صـ 12 رقم 12 :

أوجد :

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1}\,dx$$

التكامل بالتعويض: التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. $\int x(x^2-1)^{10}\,dx = \frac{1}{18}(x^2-1)^9 + C$ ⓐ ⓑ

2. $\int (x+1)\sqrt[3]{x^2+2x+3}\,dx = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^4} + C$ ⓐ ⓑ

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = 2\sqrt{3x-2} + C$ ⓐ ⓑ

4. $\int (2x^2-1)(2x^3-3x+4)^5\,dx = \frac{1}{18}(2x^3-3x+4)^6 + C$ ⓐ ⓑ

5. $\int x\sqrt[3]{x+2}\,dx = \frac{3}{7}(x+2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{2}(x+2)^{\frac{4}{3}} + C$ ⓐ ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة :

6. $\int x(x^2+2)^7\,dx =$

ⓐ $\frac{1}{16}(x^2+2)^8 + C$ ⓑ $\frac{1}{4}(x^2+2)^8 + C$

ⓒ $\frac{1}{12}(x^2+2)^6 + C$ ⓓ $\frac{1}{3}(x^2+2)^6 + C$

---

7. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\,dx =$

ⓐ $\frac{1}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$ ⓑ $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$

ⓒ $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$ ⓓ $\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$

---

8. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}} =$

ⓐ $\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$ ⓑ $\frac{2}{3}(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$

ⓒ $2(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$ ⓓ $\frac{1}{2}(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$

9. $\int \frac{(2+\sqrt{x})^{12}}{\sqrt{x}}\, dx =$

ⓐ $\frac{13}{2}(2+\sqrt{x})^{13} + C$

ⓑ $\frac{2}{13}(2+\sqrt{x})^{13} + C$

ⓒ $\frac{1}{26}(2+\sqrt{x})^{13} + C$

ⓓ $\frac{1}{22}(2+\sqrt{x})^{11} + C$

---

10. $\int \frac{(x+1)}{\sqrt[3]{x^2+2x+3}}\, dx =$

ⓐ $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2} + C$

ⓑ $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2} + C$

ⓒ $3\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2} + C$

ⓓ $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2+2x+3} + C$

---

11. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx =$

ⓐ $\frac{3}{2}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C$

ⓑ $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{1}{2}\sqrt{x+1} + C$

ⓒ $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C$

ⓓ $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + 2\sqrt{x+1} + C$

---

12. إذا كانت : $F(x) = \int (x+1)(2x^2+4x-1)\, dx$ ، $F(-2) = \frac{9}{8}$ ، فإن $F(x)$ تساوي :

ⓐ $\frac{1}{8}(2x^2+4x-1)^2 + \frac{5}{4}$

ⓑ $\frac{1}{8}(2x^2+4x-1)^2 + 1$

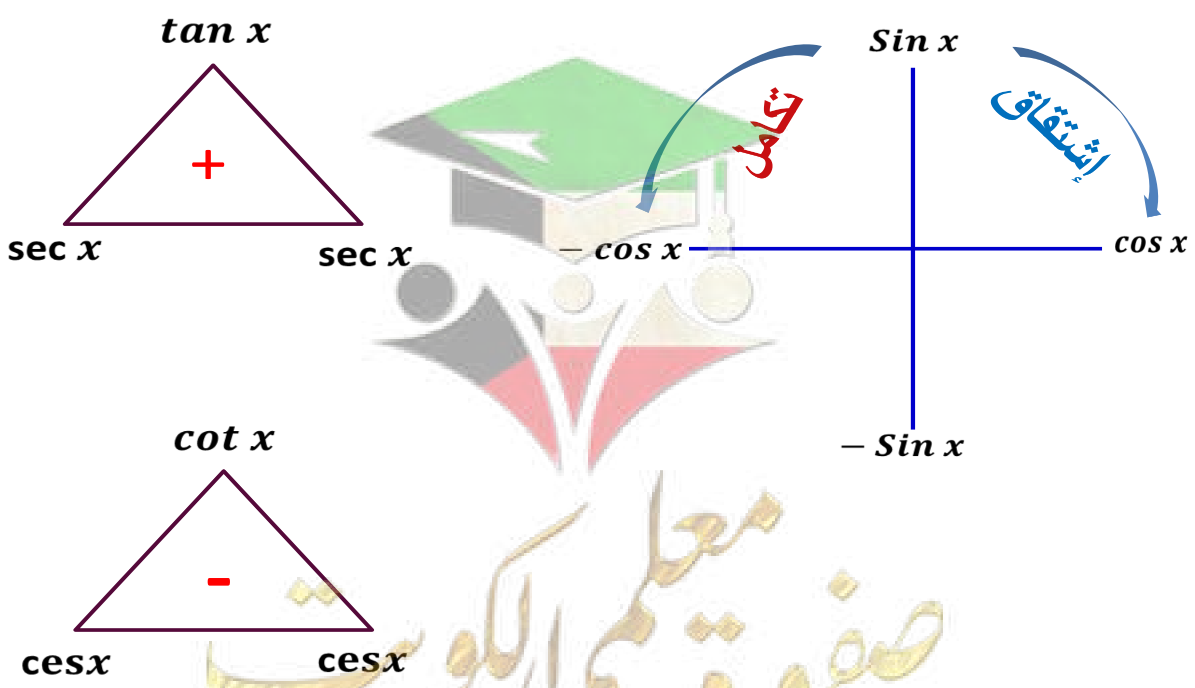
ⓒ $\frac{1}{4}(2x^2+4x-1)^2 + 1$

ⓓ $4(2x^2+4x-1)^2 - 1$

تكامل الدوال المثلثية

الرقم	قواعد التكامل غير المحدد لبعض الدوال المثلثية
1	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
2	$\int \sin kx dx = \frac{-\cos kx}{k} + C$
3	$\int \cos x dx = \sin x + C$
4	$\int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + C$
5	$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
6	$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
7	$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$
8	$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

ملخص إشتقاق و تكامل الدوال المثلثية



تكامل الدوال المثلثية

الجدول أدناه يبيّن قواعد التكامل غير المحدد لبعض الدوال المثلثية جنبًا إلى جنب مع مصادر المشتقة لكل منها

اشتقاق الدوال المثلثية:	تكامل الدوال المثلثية: $k \in \mathbb{R}^*$
$(\sin x)' = \cos x$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\int \sin kx\, dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
$(\cot x)' = -\csc^2 x$	$\int \cos kx\, dx = \frac{\sin kx}{k} + C$
$(\sec x)' = \sec x \tan x$	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$
$(\csc x)' = -\csc x \cot x$	$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$
	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$
	$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$

يمكن تطبيق قواعد التكامل التي تم دراستها عند تكامل الدوال المثلثية.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 25 رقم 1 :

أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

a) $\int (\cos x + \csc^2 x)\ dx$

b) $\int \sec x\,(\tan x + \sec x)\ dx$

c) $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$

بند 3 - 5

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 25 رقم 2 :

أوجد :

a $\int cos5x \ \ dx$

b $\int (\ x^2 + cos2x\ )\ \ dx$

c $\int x\,sec^2(x^2+2)\ \ dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 26 رقم 3 : أوجد :

a $\int sin^3x\ .\ cosx\ \ dx$

b $\int csc^2x\ .\ cotx\ \ dx$

بند 3 - 5

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 27 رقم 4 :

أوجد :

a $\int \cos^3(2x-3)\,.\,\sin(2x-3)\ dx$

b $\int x^2\,.\,\sin(x^3-1)\ dx$

c $\int (3+\sin 2x)^5 \cos 2x\ dx$

بند 3 - 5

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 28 رقم 5 :

أوجد :

$$\int csc^5 x\, cotx \;\; dx$$

كراسة التمارين صـ 14 رقم 7 :

أوجد :

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$$

بند 3 - 5

كراسة التمارين صـ 14 رقم 12 :

أوجد :

$$\int \sqrt{1+\sin x}\,\cos x\,dx$$

كراسة التمارين صـ 14 رقم 13 :

أوجد :

$$\int \frac{dx}{(\sin^2 x)\sqrt{1+\cot x}}$$

تكامل الدوال المثلثية: التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. $\int sec^2x\,dx = \tan x + C$ (a) (b)

2. $\int csc^2x\,dx = \cot x + C$ (a) (b)

3. $\left(F'(x) = sec^2x\,, F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1\right) \Rightarrow F(x) = \tan x + 2$ (a) (b)

4. $(F'(x) = \cos x + \sin x\ ,\ F(\pi) = 1) \Rightarrow F(x) = \sin x - \cos x$ (a) (b)

5. $(F'(x) = \sec x \tan x\,,\ F(0) = 4) \Rightarrow F(x) = \sec x + 3$ (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة :

6. الصورة العاملة للمشتقة العكسية للدالة f حيث $f(x) = 8 + \csc x \cot x$ هي :

(a) $F(x) = 8x + \csc x + C$
(b) $F(x) = 8x - \cot x + C$
(c) $F(x) = 8x - \csc x + C$
(d) $F(x) = 8x + \cot x + C$

---

7. $\int \csc(5x)\cot(5x)\ dx =$

(a) $\frac{1}{5}\csc(5x) + C$
(c) $\frac{1}{5}\cot(5x) + C$
(d) $-\frac{1}{5}\csc(5x) + C$

---

8. $\int \sqrt[3]{\cot x}\, csc^2x\ dx =$

(a) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$
(b) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$
(c) $-\frac{3}{4}\sqrt[4]{(\cot x)^3} + C$
(d) $3\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$

---

9. إذا كانت $y\big|_{\theta=0} = -3$, $\frac{dy}{d\theta} = sin\theta$ فإن y تساوي :

(a) $-\cos\theta$
(b) $2 - \cos\theta$
(c) $-2 - \cos\theta$
(d) $4 - \cos\theta$

10. $\int sec^5 x \tan x \; dx =$

ⓐ $\frac{5}{3}\; sec^5 x \; + C$

ⓑ $\frac{1}{5}\; sec^6 x \; + C$

ⓒ $\frac{1}{5}\; sec^5 x \; + C$

ⓓ $-\; \frac{5}{3}\; sec^5 x \; + C$

11. $\int \frac{csc^2 x}{\sqrt[3]{2+\cot x}}\; dx =$

ⓐ $\frac{3}{2}(2+\cot x)^{\frac{2}{3}} \; +C$

ⓑ $-\; \frac{3}{2}(2+\cot x)^{\frac{2}{3}} \; +C$

ⓒ $-\; 2\sqrt{2+\cot x} + C$

ⓓ $\frac{4}{3}(2+\cot x)^{\frac{4}{3}} \; +C$

12. $\int \frac{\sin(4x)}{cos^5 (4x\,)}\; dx =$

ⓐ $-\; \frac{1}{16}\; cos^{-4}(4x) \; + C$

ⓑ $\frac{1}{16}\; cos^{-4}(4x) \; + C$

ⓒ $-cos^{-4}(4x) \; + C$

ⓓ $cos^{-4}(4x) \; + C$

تكامل الدوال الاسية واللوغاريتمية

قواعد اشتقاق الدالة الأسية			
الرقم	الدالة	المشتقة	ملاحظات
1	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$	$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
2	$f(x) = a^u$	$f'(x) = u'a^u \ln a$	u دالة في x قابلة للاشتقاق
3	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	
4	$f(x) = e^u$	$f'(x) = u'e^u$	$u' = \frac{du}{dx}$

قواعد اشتقاق دالة اللوغاريتم الطبيعي			
الرقم	الدالة	المشتقة	ملاحظات
1	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$x > 0$
2	$f(x) = \ln\|x\|$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$x \neq 0$
3	$f(x) = \ln(g(x))$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$	$g(x) > 0$

قوانين تكامل الدوال الاسية واللوغاريتمية			
الرقم	التكامل غير المحدد	قاعدة المشتقة	ملاحظات
1	$\int e^x dx = e^x + C$	$\frac{d}{dx} e^x = e^x$	
2	$\int u'e^u dx = e^u + C$	$\frac{d}{dx} e^u = u'e^u$	u دالة في x قابلة للاشتقاق $u' = \frac{du}{dx}$
3	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$	$\frac{d}{dx} \ln\|x\| = \frac{1}{x}$	
4	$\int \frac{u'}{u} dx = \ln\|u\| + C$	$\frac{d}{dx} \ln\|u\| = \frac{u'}{u}$	$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln\|g(x)\| + C$

قواعد اشتقاق الدالة الأسية			
الرقم	الدالة	المشتقة	ملاحظات
1	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$	$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
2	$f(x) = a^u$	$f'(x) = u'a^u \ln a$	u دالة في x قابلة للاشتقاق
3	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$u' = \frac{du}{dx}$
4	$f(x) = e^u$	$f'(x) = u'e^u$	

كتاب الطالب مثال ص 30 رقم 1 :

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

a) $f(x) = 3^x$

....

....

....

b) $f(x) = 6^{\sqrt{x}}$

....

....

....

c) $f(x) = 10^{sinx}$

....

....

....

....

بند 4 - 5

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 30 رقم 1 :

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

a $f(x) = 3^x$

b $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$

c $f(x) = 5^{cosx}$

كتاب الطالب مثال صـ 31 رقم 2 :

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

a $f(x) = e^{\frac{2x}{3}}$

b $g(x) = e^{x^2+3x-1}$

c $h(x) = e^{secx}$

بند 4 - 5 كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 31 رقم 2 :

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

a $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

b $g(x) = e^{x^2-4}$

c $h(x) = e^{tanx}$

كراسة التمارين ص 16 رقم 2 :

$\boldsymbol{y = 5^{\sqrt{x+1}}}$

كراسة التمارين ص 16 رقم 3 :

$\boldsymbol{y = 8^{tanx}}$

قواعد اشتقاق دالة اللوغاريتم الطبيعي			
الرقم	الدالة	المشتقة	ملاحظات
1	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$x > 0$
2	$f(x) = \ln\lvert x\rvert$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$x \neq 0$
3	$f(x) = \ln(g(x))$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$	$g(x) > 0$

إذا كانت u دالة في x قابلة للإشتقاق فإن $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

كتاب الطالب حاول أن تحل ص 32 رقم 3 :

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a) $f(x) = \ln(2x + x^3)$

b) $g(x) = \ln\frac{1}{2x+1}$

c) $f(x) = \ln(1 + \sqrt{3}\,x)$

d) $h(x) = \ln(\sin x)$

قواعد تكامل بعض الدوال الأسية

الرقم	التكامل غير المحدد	قاعدة المشتقة	ملاحظات
1	$\int e^x dx = e^x + C$	$\frac{d}{dx}e^x = e^x$	u دالة في x قابلة للاشتقاق $u' = \frac{du}{dx}$
2	$\int u'e^u dx = e^u + C$	$\frac{d}{dx}e^u = u'e^u$	
3	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$	$\frac{d}{dx}\ln\|x\| = \frac{1}{x}$	
4	$\int \frac{u'}{u} dx = \ln\|u\| + C$	$\frac{d}{dx}\ln\|u\| = \frac{u'}{u}$	$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln\|g(x)\| + C$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 33 رقم 4 :

أوجـد :

(a) $\int e^{3x}\, dx$

(b) $\int (2x-1)e^{x^2-x+3} dx$

بند 4 - 5

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 34 رقم 5 :

أوجـد :

a $\int \frac{-5}{3x-2}\,dx$

b $\int \frac{3t^2-6t}{t^3-3t^2+8}\,dt$

c $\int \frac{x^3+4}{x}\,dx$

بند 4 - 5

كراسة التمارين صـ 16 رقم 17 :

أوجـد :

$$\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \, dx$$

كراسة التمارين صـ 16 رقم 21 :

أوجـد :

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 35 رقم 6 : أوجد

أوجـد :

$$\int \cot x \, dx$$

الدوال الأسية واللوغاريتمية: التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. إذا كانت : $y = 4^{x-2}$ فإن : $\frac{dy}{dx} = 4x$ ⓐ ⓑ

2. إذا كانت : $f(x) = e^{x^2}$ فإن $f'(x) = 2xe^{2x}$ ⓐ ⓑ

3. إذا كانت : $g(x) = \ln(2x+2)$ فإن $g'(x) = \frac{1}{2x+2}$ ⓐ ⓑ

4. إذا كانت : $y = x\ln x - x$ فإن : $y' = \ln x$ ⓐ ⓑ

5. $\int \frac{1}{2x}\,dx = \frac{\ln x}{2} + C$ ⓐ ⓑ

6. $\int \frac{1}{3x+1}\,dx = \ln(3x+1) + C$ ⓐ ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة :

7. إذا كانت $y = e^{-5x}$ ، فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

ⓐ e^{-5x} ⓑ $-e^{-5x}$ ⓒ $-5e^{-5x}$ ⓓ $5e^{-5x}$

8. إذا كانت $y = x^2e^x - xe^x$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

ⓐ $e^x(x^2+x-1)$ ⓑ $e^x(x^2-x)$ ⓒ $2xe^x - e^x$ ⓓ $e^x(x^2+2x+1)$

9. إذا كانت $y = (\ln x)^2$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

ⓐ $\frac{\ln x}{x}$ ⓑ $\frac{2\ln x}{x}$ ⓒ $\frac{x\ln x}{2}$ ⓓ $\frac{2\ln^2 x}{x}$

10. إذا كانت : $y = \ln\left(\frac{10}{x}\right)$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

ⓐ $-\frac{10}{x}$ ⓑ $\frac{10}{x}$ ⓒ $\frac{1}{x}$ ⓓ $-\frac{1}{x}$

11. إذا كانت $y = \ln(x^2+1)$ ، فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

ⓐ $\frac{x}{x^2+1}$ ⓑ $\frac{2}{x^2+1}$ ⓒ $\frac{2x}{x^2+1}$ ⓓ $-\frac{2x}{x^2+1}$

---

12. $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$

ⓐ $2\ln(x^2+1)+C$ ⓑ $\ln(x^2+1)+C$

ⓒ $\frac{x^2}{x^2+1}+C$ ⓓ $\frac{x}{\frac{1}{3}x^2+1}+C$

---

13. $\int \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx =$

ⓐ $\frac{e^x-e^{-x}}{2}+C$ ⓑ $\frac{e^x+e^{-x}}{2}+C$ ⓒ $\frac{e^{-x}-e^x}{2}+C$ ⓓ $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}+C$

---

14. $\int \frac{e^x}{e^x-4}\,dx =$

ⓐ $-\frac{1}{2}(e^x-4)+C$ ⓑ $\ln|e^x-4|+C$

ⓒ $-\ln|e^x-4|+C$ ⓓ $\frac{1}{2}\ln|e^x-4|+C$

التكامل بالتجزيء

عند إيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين ليست احداهما مشتقة الأخرى نلجأ الى نوع آخر من التكامل هو التكامل بالتجزيء عندما تكون u, v دالتين في x قابلة للتفاضل

قاعدة التكامل بالتجزيء : $\int u.dv = uv - \int vdu$

التكامل بالتجزيء

تكامل بالتجزيء مرة واحدة

- دالة مثلثية . حدودية من الدرجة الأولي في المتغير x
- دالة آسية , حدودية من الدرجة الأولي في المتغير x
- Ln x . حدودية من الدرجة الأولي في المتغير x

تكامل بالتجزيء مرتين

- دالة مثلثية. حدودية من الدرجة الثانية في المتغير x
- آسية . حدودية من الدرجة الثانية في المتغير x
- $(\ln(x))^2$
- دالة مثلثية . دالة آسية

التكامل بالتجزئ

قاعدة التكامل بالتجزيء :

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

كتاب الطالب مثال صـ 37 رقم 1 :

أوجـد :

$$\int x \sin x\,dx$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 37 رقم 1 :

أوجد :

$$\int x \cos x\,dx$$

بند 5 - 5 كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 38 رقم 2 :

أوجـــد :

a $\int (x-3)e^{x-3}dx$

b $\int 4xe^{-5x}dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 38 رقم 3 :

أوجـــد :

$\int \ln x\, dx$

بند 5 - 5

كتاب الطالب مثال صـ 38 رقم 4 :

أوجـد :

$$\int x \ \ln(x)\ dx$$

كراسة التمارين صـ 18 رقم 5 :

أوجـد :

$$\int \ln \sqrt[4]{x}\, dx$$

بند 5 - 5 كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 39 رقم 5 :

أوجد $\int x^2 \ sinx \ dx$

بند 5 - 5

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 40 رقم 6 :

أوجد

$$\int x^2 \, e^{x+2} \, dx$$

التكامل بالتجزيء: التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. $\int x\cos(2x)dx = \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos 2x + C$ ⓐ ⓑ

2. $\int x\sin(\pi x)dx = -\frac{x}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) + C$ ⓐ ⓑ

3. $\int xe^{6x}\,dx = \frac{1}{6}x\,e^{6x} - \frac{1}{36}e^{6x} + C$ ⓐ ⓑ

4. $\int xe^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} + e^{-x} + C$ ⓐ ⓑ

5. $\int x\sec^2 x\,dx = x\tan x - \ln|\sec x| + C$ ⓐ ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة :

6. $\int (2x+1)\sin x\;dx =$

ⓐ $(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$

ⓑ $-(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$

ⓒ $-(x+1)\cos x - 2\sin x + C$

ⓓ $(2x+1)\cos x - \sin x + C$

7. $\int x^2\ln(x)\,dx =$

ⓐ $\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{3} + C$

ⓑ $\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$

ⓒ $\frac{1}{3}x^3\ln(x) + \frac{x^3}{9} + C$

ⓓ $-\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$

8. إذا كان $\int (2x+1)\ln x\,dx = uv - \int v\,du$ فإن $uv =$

ⓐ $(2x+1)\ln x$

ⓑ $2x\ln x$

ⓒ $\frac{2x+1}{2}\ln x$

ⓓ $x(x+1)\ln x$

9. $\int v\,du =$

ⓐ $\frac{1}{2}x\ln x + C$ ⓑ $\frac{1}{2}x^2 + x + C$ ⓒ $(2x+1)\ln x + C$ ⓓ $\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$

---

10. إذا كان $\int (3x-1)\,e^{3x+2}\,dx = uv - \int v\,du$ فإن $uv =$

ⓐ $(3x-1)e^{3x+2}$ ⓑ $\frac{1}{3}(3x-1)e^{3x+2}$ ⓒ $(3x-1)e^{x+2}$ ⓓ $\frac{1}{3}(x-1)e^{3x+2}$

---

11. $\int v\,du =$

ⓐ $-\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$ ⓑ $-e^{3x+2} + C$ ⓒ $\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$ ⓓ $e^{3x+2} + C$

التكامل بالكسور الجزئية

الكسور الجزئية للدالة $f(x) = \frac{r(x)}{h(x)}$

درجة البسط < درجة المقام

- تحليل المقام وتحديد العوامل الخطية ل$h(x)$ وتحديد فيما اذا كانت العوامل مكررة ام لا .
- تفكيك $f(x) = \frac{r(x)}{h(x)}$ إلى كسور جزئية
- توجد قيم البسط $A_1, A_2, \ldots\ldots$ بالتعويض عن قيم $X \in R$ ويفضل اصفار المقام
- توجد تكامل الكسور الجزئية

درجة البسط ≥ درجة المقام

- قسمة البسط علي المقام قسمة مطولة
- كتابة $f(x) = q(x) + \frac{p(x)}{h(x)}$
- حيث $p(x)$ الباقي
- $q(x)$ ناتج القسمة
- توجد

$$\int f(x) = \int q(x)dx + \int \frac{p(x)}{h(x)}dx$$

- تعاد خطوات (1)

التكامل بالكسور الجزئية

بند 6 - 5

الحالة الأولى : المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية (عوامل من الدرجة الأولى) **غير مكررة :**

لتكن $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ حيث المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية غير مكررة :

$$h(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \dots \dots (a_kx + b_k)$$

حيث لايوجد عوامل مكررة و لايوجد عامل ثابت مضروب بآخر .

في هذه الحالة تكون الدالة f على صورة كسور جزئية كالتالي :

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 43 رقم 1 :

لتكن الدالة f : $\quad f(x) = \frac{2x-1}{x^2-4x+3}$

فأوجد :

(a) الكسور الجزئية

(b) $\int f(x)\,dx$

بند 6 - 5

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 44 رقم 2 :

أوجـد :

$$\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\,dx$$

الحالة الثانية : المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية بعضها متكرر:

لتكن $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ حيث المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية بعضها متكرر.

لكل عامل من عوامل $h(x)$ على الصورة $(mx+n)^k$،

يجب أن يحتوي التفكيك إلى كسور جزئية على مجموع حدود عددها k :

$$\frac{A_1}{mx+n} + \frac{A_2}{(mx+n)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(mx+n)^k}$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 45 رقم 3 :

أوجـد :

$$\int \frac{4x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2\,x^2 + x}\; dx$$

بند 6 - 5 كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 46 رقم 4 :

أوجــد :

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 4x^2}\, dx$$

عندما تكون درجة البسط في الحدودية النسبية $f(x) = \frac{r(x)}{h(x)}$ مساوية أو أكبر من درجة المقام . نوجد أولاً ناتج القسمة $q(x)$ باستخدام القسمة المطولة ثم نكتب الدالة على الصورة : $f(x) = q(x) + \frac{p(x)}{h(x)}$ حيث $p(x)$ هو الباقي .

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 47 رقم 5 :

أوجـــد :

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 - 4}{x^3 - 2\,x^2}\,dx$$

التكامل باستخدام الكسور الجزئية: التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. $\int \frac{4dx}{(x+3)(x+7)} = \ln|x+3| + \ln|x+7| + C$ ⓐ ⓑ

2. $\int \frac{-6dx}{x^2+3x} = -2\ln|x+3| + 2\ln|x| + C$ ⓐ ⓑ

3. الدالة: $f(x) = \frac{4x-11}{2x^2-x-3}$ على صورة كسور جزئية هي : $f(x) = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{2x-3}$ ⓐ ⓑ

4. للحدودية النسبية : $\frac{x^2-x+2}{x^3-2x^2+x}$ ثلاثة كسور جزئية . ⓐ ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة :

5. $\int \frac{6}{x^2-9}dx =$

ⓐ $\ln|x+3| - \ln|x-3| + C$

ⓑ $\ln(x-3) - \ln(x+3) + C$

ⓒ $\ln|x+3| + \ln|x-3| + C$

ⓓ $\ln|x-3| - \ln|x+3| + C$

6. $\int \frac{7x-7}{x^2-3x-10}dx =$

ⓐ $4\ln|x+2| + 3\ln|x-5| + C$

ⓑ $3\ln|x+2| + 2\ln|x-5| + C$

ⓒ $4\ln|x-5| + 3\ln|x+2| + C$

ⓓ $4\ln|x-5| - 3\ln|x+2| + C$

7. الدالة النسبية : $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ على صورة كسور جزئية هي $f(x)$ تساوي :

ⓐ $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}$

ⓑ $\frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)}$

ⓒ $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$

ⓓ $\frac{1}{2(x-2)} - \frac{1}{2(x+2)}$

8. $\int \frac{2x^2-4x+3}{x^2-1}\,dx =$

ⓐ $2 + 2\ln|x-1| - \frac{9}{2}\ln|x+1| + C$

ⓑ $\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{9}{2}\ln|x+1| + C$

ⓒ $2x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{9}{2}\ln|x+1| + C$

ⓓ $x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - 9\ln|x+1| + C$

---

9. $\int \frac{3x^2+2x}{x^2-4}\,dx =$

ⓐ $4\ln|x-2| - 2\ln|x+2| + C$

ⓑ $3x + 2\ln|x-2| - 2\ln|x-2| + C$

ⓒ $3x + 4\ln|x-2| - 2\ln|x+2| + C$

ⓓ $3x + 4\ln|x-2| + 2\ln|x+2| + C$

التكامل المحدد

قانون التكامل المحدد

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x).dx\right]_a^b = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

خطوات التكامل المحدد

- تحديد نوع التكامل
- تكامل الدالة
- التعويض بالحد الأعلى
- التعويض بالحد الأدنى
- ايجاد قيمة التكامل

أذا كانت f,g دالتين متصلتين على [a,b]

1- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b] \rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

2- $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a,b] \rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq 0$

3- $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b] \rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

التكامل المحدد

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)\right]_a^b = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 51 رقم 1 :

أوجـد :

$$\int_2^7 (x^3 - 2x^2 + 2)\, dx$$

كراسة التماريـن صـ 22 رقم 1 :

أوجـد :

$$\int_{-1}^1 3x(x-4)\, dx$$

كراسة التماريـن صـ 22 رقم 1 :

أوجـد :

$$\int_0^2 (x+1)^2\, dx$$

خواص التكامل المحدد		
الرقم	الخاصية	ملاحظات
1	$\int_a^a f(x)dx = 0$	الدالة f متصلة على الفترة I $a, b, c \in I \quad , k \in \mathbb{R}$
2	$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)\,dx$	
3	$\int_a^b k\,dx = k(b-a)$	$k = 1 \Rightarrow \int_a^b dx = b - a$
4	$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)\,dx$	
5	$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$	

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 52 رقم 2

أوجـد :

a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2x - \csc^2 x\right)\,dx$

b) $\int_2^{-3} 5\,dx$

c) $\int_3^3 (-2x^3 + x^2)\,dx$

بند 7 - 5

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 52 رقم 2

أوجـد :

d) $$\int_{2}^{4} \frac{dx}{x-1}$$

كراسة التمارين صـ 22 رقم 5

أوجد :

$$\int_{1}^{4} \frac{8-x^4}{2x^2}\,dx$$

بند 7 - 5 كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 52 رقم 3 :

أوجـــد :

a $\int_{-3}^{4} |2x-4|\,dx$

b $\int_{1}^{2} |x+2|\,dx$

تابع : خواص التكامل المحدد		
ملاحظات	الخاصية	الرقم
الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$	إذا كانت : $f(x) \geq 0 \ , \forall x \in [a,b]$ فإن : $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$	6
	إذا كانت : $f(x) \leq 0 \ , \forall x \in [a,b]$ فإن : $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$	7
الدالتين f, g متصلتين على الفترة $[a,b]$	إذا كانت : $f(x) \leq g(x) \ , \forall x \in [a,b]$ فإن : $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$	8

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 53 رقم 4 :

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن :

$$\int_{-1}^{0} (x^2 + x)\,dx \leq 0$$

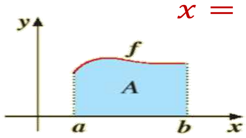
كراسة التمارين صـ 22 رقم 12 :

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن :

$$\int_{-1}^{0} (x^3 - 5x^2 - 6x)\,dx \geq 0$$

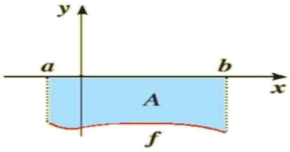
بند 7 - 5

في المستوى الإحداثي لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$ ، A تمثل مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f و محور السينات و المستقيمين $x = a \ , \ x = b$



1 إذا كانت : $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

فإن : $\int_a^b f(x)\,dx = A$



2 إذا كانت : $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

فإن : $\int_a^b f(x)\,dx = -A$

كتاب الطالب مثال صـ 54 رقم 6 :

a) أوجد مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f(x) = -3$ ، محور السينات ، و المستقيمين $x = -2 \ , \ x = 4$

b) تحقق بيانيا

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 55 رقم 6 :

أوجد قيمة $\int_1^5 (2-2x)\ dx$ بيانيا

بند 7 - 5 كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 56 رقم 7 :

أوجـــد :

a $\int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}\, dx$

b $\int_{0}^{4} -\sqrt{16 - x^2}\, dx$

بند 7 - 5

كتاب الطالب مثال صـ 56 رقم 8 :

أوجــد :

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x \ \ \sec^2 x \ \ dx$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 57 رقم 8 :

أوجــد :

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cos 2x \ \ dx$$

بند 7 - 5

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 56 رقم 9 :

أوجــد :

a $\int_{-1}^{1}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5}\ dx$

b $\int_{2}^{5}x\ \sqrt{x-1}\ \ dx$

بند 7 - 5

كتاب الطالب مثال صـ 58 رقم 10 :

أوجـد :

$$\int_{-2}^{0} \frac{x}{e^x} \, dx$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 58 رقم 10 :

أوجـد :

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x \ sec^2 x \ dx$$

بند 7 - 5 كتاب الطالب مثال صـ 59 رقم 11 :

أوجـــد :

$$\int_{1}^{5} \frac{2x+8}{x^2+4x+3}\, dx$$

بند 7 - 5 كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 59 رقم 11 :

أوجـــد :

$$\int_{4}^{7} \frac{3x^2 - 17}{x^2 - x - 6}\, dx$$

التكامل المحدد: التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{2}$ ⓐ ⓑ

2. $\int_{-3}^{-2} (|x| + x + 5)\, dx = -2$ ⓐ ⓑ

3. $\int_{-1}^{1} (|x|)^3\, dx = -\frac{1}{2}$ ⓐ ⓑ

4. $\int_{0}^{1} 12\,(3x - 2)^3\, dx = -15$ ⓐ ⓑ

5. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi}\sqrt{1 - x^2}\, dx = 1$ ⓐ ⓑ

6. $\int_{2}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{5} f(x)dx - \int_{5}^{2} f(x)dx = 0$ ⓐ ⓑ

7. $\int_{2}^{4} f(x)dx + \int_{4}^{2} g(x)dx = 0$ ⓐ ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة :

8. إذا كان $\int_{3}^{-1} g(x)dx = 2$, $\int_{1}^{3} f(x)dx = 4$ فإن $\int_{1}^{3} (2f(x) + 3g(x) + 1)dx$ تساوي :

ⓐ 18 ⓑ -6 ⓒ 6 ⓓ 12

9. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2}\, dx =$

ⓐ 2 ⓑ $2\sqrt{2}$ ⓒ 4 ⓓ 8

10. $\int_{-1}^{1} (1 - |x|)\, dx =$

ⓐ 1 ⓑ -1 ⓒ 0 ⓓ $\frac{1}{2}$

11. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\, dx =$

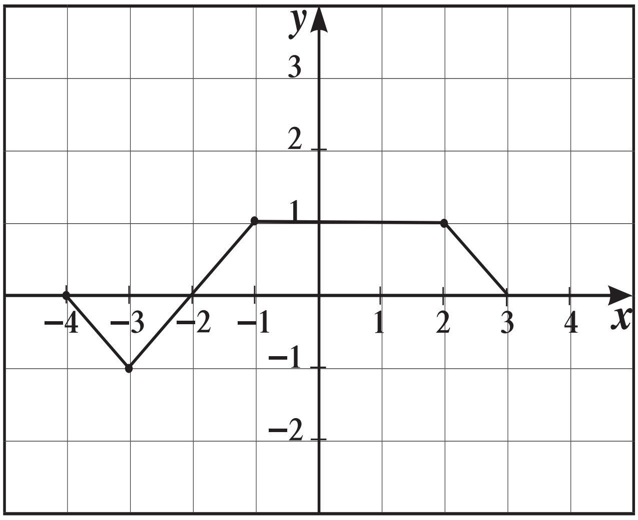
ⓐ 4 ⓑ 2 ⓒ 0 ⓓ π

12. لتكن : $f(x) = x^2 + 5$ فإن : $\int_{-a}^{a} f(x)dx > 0$ لكل قيم a تنتمي إلى :

ⓐ $\mathbb{R} - \mathbb{R}^-$ ⓑ $\mathbb{R} - \mathbb{R}^+$ ⓒ $\mathbb{R}^-$ ⓓ $\mathbb{R}^+$

اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1)

إذا كان بيان الدالة f كما في الشكل المقابل فإن:



(1)	(2)
13. $\int_{-4}^{3} f(x)dx$ يساوي : ⓓ	ⓐ 6
14. مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات هي : ⓑ	ⓑ 5
15. $\int_{-4}^{-1}\left(f(x)+\frac{1}{6}\right)dx$ يساوي : ⓒ	ⓒ 0
	ⓓ 3

الوحدة السادسة

تطبيقات التكامل

المساحات في المستوى

أولًا: مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة $[a,b]$

علمنا من دراستنا السابقة أنه إذا كانت f دالة متصلة على $[a,b]$ فإن مساحة المنطقة A المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x=a\ ,\ x=b$

إذا كانت: $f(x)\geqslant 0 \qquad \forall\, x\in[a,b]$

فإن $A=\int_a^b f(x)\,dx$

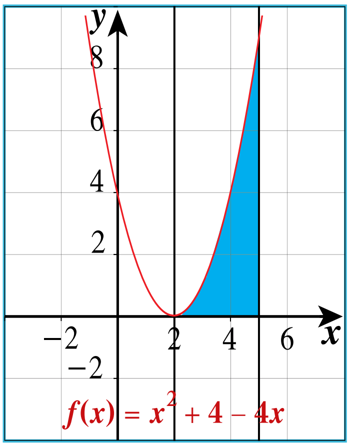
إذا كانت: $f(x)\leqslant 0 \qquad \forall\, x\in[a,b]$

فإن $A=-\int_a^b f(x)\,dx$

كتاب الطالب مثال صـ 66 رقم 1 :

يبيّن الشكل المقابل بيان الدالة: $f(x)=x^2+4-4x$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة ومحور السينات والمستقيمين $x=2\ ,\ x=5$



كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 66 رقم 1 :

يبيّن الشكل المقابل بيان الدالة: $f(x)=x^2+4-4x$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة ومحور السينات والمستقيمين $x=-1\ ,\ x=4$

المساحات في المستوى

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 67 رقم 2 :

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 5x + 4$ ومحور السينات.

المساحات في المستوى

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ ، $c\in(a,b)$ حيث $f(c)=0$

فإن مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة $[a,b]$ هي:

$$A=\left|\int_a^c f(x)\,dx\right|+\left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 69 رقم 3 :

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

(b) $f(x)=\cos x \quad , \quad [0\ ,\ \pi]$

(a) $f(x)=x^3-9x \quad , \quad [-2\ ,\ 1]$

المساحات في المستوى

ثانيًا: مساحة منطقة محددة بمنحنيي دالتين في الفترة $[a , b]$

مساحة منطقة محددة بين منحنيين

إذا كانت كل من g , f متّصلتين على الفترة $[a , b]$، حيث

$$f(x) \geqslant g(x) \quad \forall x \in [a , b]$$

فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين g , f والمستقيمين $x = a$, $x = b$ هي:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 70 رقم 4 :

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 3$

ومنحنى الدالة g : $g(x) = x^2 + 1$ والمستقيمين $x = 1$, $x = -1$

علمًا بأن: $f(x) > g(x) \quad , \quad \forall x \in [-1 , 1]$

....

....

....

....

....

....

....

....

كتاب الطالب مثال صـ 71 رقم 5 :

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = e^x$

ومنحنى الدالة g : $g(x) = -1 - x^2$ والمستقيمين $x = 3$, $x = 0$

علمًا بأن المنحنيين للدالتين f, g غير متقاطعين.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 71 رقم 5 :

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 1$

ومنحنى الدالة g : $g(x) = -x^2 - 3$ والمستقيمين $x = 1$, $x = -1$

علمًا بأن المنحنيين للدالتين f, g غير متقاطعين.

المساحات في المستوى

عندما تنحصر منطقة بين منحنيات متقاطعة،
فإنّ حدود التكامل هي الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 72 رقم 6 :

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $y_2 = -2x + 5$, $y_1 = x^2 + 2$

يمكن إيجاد المساحة A باستخدام القيمة المطلقة دون الحاجة لاستخدام القيمة الاختيارية كالتالي:

$$A = \left| \int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)\,dx \right| = \left| \int_{-1}^{2} (y_2 - y_1)\,dx \right|$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 72 رقم 7 :

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين:

$$f(x) = -2x^2 + 2 \quad , \quad g(x) = x^2 - 1$$

المساحات في المستوى

التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

(1) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = a \ , \ x = b$ هي: $\int_a^b f(x)\,dx$ (a) (b)

(2) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 4 - x^2$ ومحور السينات في $[-2,2]$ هي: $2\int_0^2 f(x)\,dx$ (a) (b)

(3) إذا كانت: $\forall x \in [a,b]$ $\quad f(x) \le 0$ فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في $[a,b]$ هي: $\int_b^a f(x)\,dx$ (a) (b)

(4) إذا كان منحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ يقطع محور السينات عند $x = -1$ ، $x = 3$.
فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات هي: $A = \int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ (a) (b)

(5) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = |x|$ ومحور السينات.
في الفترة $[-2,2]$ هي: 2 وحدة مساحة (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة :

(6) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ ومحور السينات هي:

(a) 9π units^2 (b) 6π units^2
(c) 3π units^2 (d) $\frac{9}{2}\pi$ units^2

(7) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة g : $g(x) = (x-2)^3$ ومحور السينات في الفترة $[0,4]$ بالوحدات المربعة هي:

(a) $2\int_0^2 g(x)\,dx$ (b) $-2\int_0^2 g(x)\,dx$
(c) $\int_0^4 g(x)\,dx$ (d) $-2\int_2^4 g(x)\,dx$

(8) مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f(x) = 2$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = -\sqrt{x}$ والمستقيمين $x = 0$ ، $x = 4$ هي:

(a) 20 units^2 (b) $\frac{8}{3}$ units^2
(c) $\frac{40}{3}$ units^2 (d) 8 units^2

حجوم الأجسام الدورانية

إذا نتج مجسم من دوران منطقة محددة بمنحنى دالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = b$, $x = a$ حيث $a < b$ دورة كاملة حول محور السينات فإن حجم هذا المجسم يساوي: $V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$

كتاب الطالب مثال صـ 77 رقم 1 :

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 2$ ومحور السينات في الفترة $[-1, 1]$.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 77 رقم 1 :

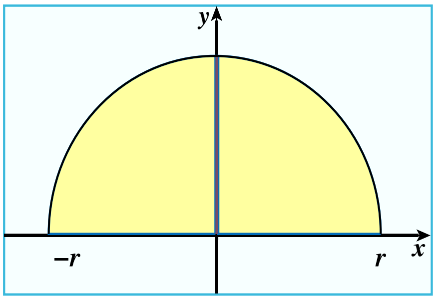
أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f: $f(x) = \sqrt{x-1}$ ومحور السينات في الفترة $[1, 5]$.

حجوم الأجسام الدورانية

المجسم الناتج من دوران منحنى الدالة $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ (نصف دائرة) هو كُرة طول نصف قطرها $r = 2$. ويمكننا استخدام قاعدة إيجاد حجوم الأجسام الدورانية في إثبات قانون حجم الكرة.

كتاب الطالب مثال صـ 77 رقم 2 :

باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بنصف الدائرة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$



كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 78 رقم 2 :

باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $r \neq 0$, $f(x) = r$ في الفترة $[0 , h]$

حجوم الأجسام الدورانية

إذا نتج مجسم عن دوران منطقة محددة بمنحنيي الدالتين f , g والمستقيمين $x = a$, $x = b$ دورة كاملة حول محور السينات، بحيث f, g لهما الإشارة نفسها في الفترة $[a , b]$ ، فإن حجم هذا المجسم يعطى بالقاعدة: $V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx$

حيث: $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ أو $f(x) \leqslant g(x) \leqslant 0$

كتاب الطالب مثال صـ 78 رقم 3 :

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين $g : g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^2$

حجوم الأجسام الدورانية

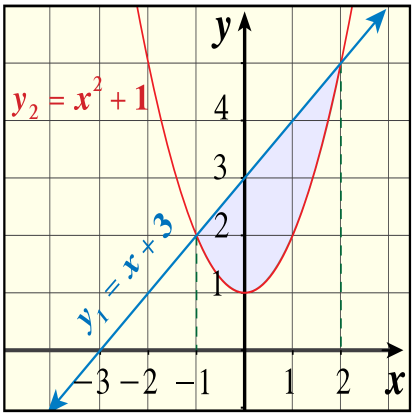
كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 79 رقم 3 :

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات

والمحددة بين منحنيي الدالتين $f(x) = \frac{x^2}{2} + 1 \quad , \quad g(x) = \frac{x}{2} + 2$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 79 رقم 4 :

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحني الدالتين: $y_2 = x^2 + 1$, $y_1 = x + 3$



حجوم الأجسام الدورانية

التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

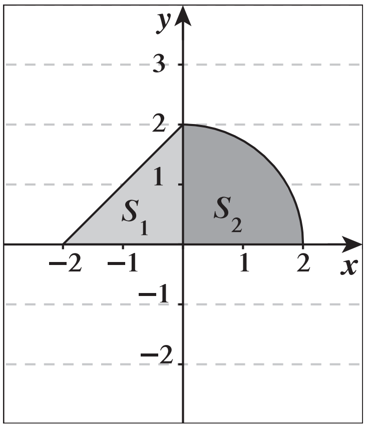
(1) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=\sqrt[3]{x}$ في الفترة $[1,8]$ هو: $V=\pi\int_8^1(\sqrt[3]{x})^2dx$ (a) (b)

(2) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=2\sqrt{x}$ في الفترة $[1,4]$ هو: $V=\pi\int_0^4 4xdx-\pi\int_0^1 4xdx$ (a) (b)

(3) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=x$ ومنحنى الدالة g : $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ هو: $V=\pi\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx$ (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة :

(6) المنطقة المظللة $S=S_1\cup S_2$ حيث S_1 منطقة مثلثة، S_2 منطقة ربع دائرة كما هو موضح بالشكل.



حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة S بالوحدات المكعبة يساوي:

(a) $\frac{40}{3}\pi$ (b) $4+2\pi$ (c) $\frac{16}{3}\pi$ (d) 8π

(7) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة $y=-\sqrt{4-x^2}$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 4π (b) 6π (c) $\frac{16}{3}\pi$ (d) $\frac{32}{3}\pi$

(8) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى الدالة f : $f(x)=\frac{1}{x}$ والمستقيمات $x=1$, $x=2$, $y=0$ هو:

(a) π units^3 (b) $\frac{\pi}{3}$ units^3 (c) $\frac{\pi}{2}$ units^3 (d) $\frac{\pi}{4}$ units^3

(9) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى الدالة f : $f(x)=\sqrt{x+1}$ ومحور السينات والمستقيمين $x=3$, $x=-1$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 8π (b) 7π (c) 8 (d) $\frac{5}{2}\pi$

طول قوس و معادلة منحنى دالة

أولًا: إيجاد طول قوس من منحنى

قاعدة طول القوس

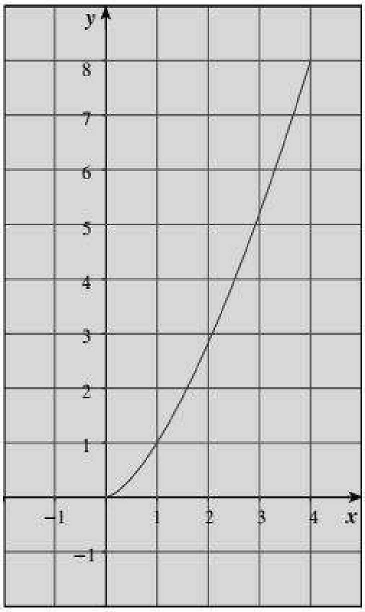
إذا كانت الدالة f' متصلة على $[a, b]$ فإن طول القوس من منحنى $y = f(x)$ في $[a, b]$ هو:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

كتاب الطالب صـ 81 مثال رقم 1 :

في الشكل المقابل ، أوجد طول القوس من منحنى الدالة : $f(x) = \sqrt{x^3}$

في الفترة $[0 , 4]$



طول قوس و معادلة منحنى دالة

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 81 رقم 1 :

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 1$ في الفترة $[3 , 8]$

طول قوس و معادلة منحنى دالة

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 82 رقم 2 :

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{9}(9+3x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[2\,,5]$

طول قوس و معادلة منحنى دالة

ثانيا : إيجاد معادلة منحنى دالة باستخدام التكامل

كتاب الطالب صـ 82 مثال رقم 3 :

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي $3x^2 - 4x + 1$ و يمر بالنقطة $A(1, 2)$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 83 رقم 3 :

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x,y)$ يساوي $3x^2 + x$ و يمر بالنقطة $(2,2)$

طول قوس و معادلة منحنى دالة

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 83 رقم 4 :

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي $-8x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ ويمر بالنقطة $(-1 , -5)$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 84 رقم 5 :

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x , y) يساوي $2x - 1$

فأوجد معادلة المنحنى عندما يمر بالنقطة $B(1 , 0)$

طول قوس و معادلة منحنى دالة

كتاب الطالب صـ 84 مثال رقم 5 :

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه $(x\ ,\ y)$ يساوي $\sqrt{5-4x}$

فأوجد معادلة المنحنى عندما يمر بالنقطة $A(-5\ ,\ 3)$

طول قوس و معادلة منحنى دالة

التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

(1) طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{3}(1+4x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0,1]$ هو $L = \frac{2}{3}$ وحدة طول.

(a) (b)

(2) منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x,y) هو: x^3+2 ويمر بالنقطة $A(2,6)$ معادلته: $f(x) = \frac{x^4}{4}+2x+2$

(a) (b)

(3) منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x,y) هو: $-\sqrt{x}+x$ ويمر بالنقطة $A(1,1)$ معادلته: $f(x) = -\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x^2+\frac{2}{3}$

(a) (b)

(4) لتكن $A(1,3)$ نقطة على منحنى الدالة f : $f'(x) = 3x^2-12x+9$ فإن معادلة الدالة f هي $f(x) = x^3-6x^2+9x-1$

(a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة :

(5) طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{3}$ في الفترة $[-2,3]$ هو:

(a) 7 units (b) 6 units (c) 5 units (d) 1 unit

(6) طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = x-3$ في الفترة $[0,2]$ هو:

(a) $\sqrt{2}$ units (b) $2\sqrt{2}$ units (c) $3\sqrt{2}$ units (d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ units

(7) معادلة منحنى الدالة الذي ميل العمودي عليه عند أي نقطة (x,y) هو: $-x+3$ ويمر بالنقطة $A(2,3)$ هي y تساوي:

(a) $-\frac{x^2}{2}+3x-4$ (b) $\ln|3-x|+3$ (c) $-\frac{x^2}{2}+3x+4$ (d) $3-\ln|3-x|$

(8) معادلة منحنى الدالة الذي ميله عند أي نقطة (x,y) هو: $2x-3\sqrt{x}$ ويمر بالنقطة $A(4,-2)$ هي:

(a) $x^2+2\sqrt{x^3}-2$ (b) $x^2-2\sqrt{x^3}$ (c) $x^2-2\sqrt{x^3}-2$ (d) $\frac{x^2}{2}-2\sqrt{x^3}+2$

المعادلات التفاضلية

تعريف (1)

المعادلات التفاضلية: هي معادلات تحتوي على دالّة مجهولة وبعض مشتقاتها.

نستخدم عادة y بدلًا من $f(x)$.

تعريف (2)

رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة لمشتقة دالة موجودة في هذه المعادلة.

تعريف (3)

درجة المعادلة التفاضلية: هي أكبر أس لأعلى المشتقات رتبة.

فمثلًا:

$y'' + (y')^2 + y = 1$ هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى.

$(y')^2 = \frac{4x}{y}$ هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية.

$(y'')^3 + x^4 y' + e^x y = 0$ هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثالثة.

تدريب:

أكمل الجدول التالي محدّدًا رتبة ودرجة كل معادلة من المعادلات التفاضلية فيه.

المعادلة التفاضلية	الرتبة	الدرجة
$y' = 5y$		
$y'^2 = \frac{4x}{y}$		
$y'' = 5y' + xy$		
$(y'')^2 = 1 + (y')^3$		
$y''' = (y')^2 + x^3$		

كتاب الطالب صـ 87 مثال رقم 1 :

أثبت أن الدالة: $y = e^{x^2}$ هي حل للمعادلة التفاضلية: $y' - 2xy = 0$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 87 رقم 1 :

أثبت أنّ الدالة: $y = 2e^{3x} + 1$ هي حل للمعادلة: $y' + 3 = 3y$

المعادلات التفاضلية

(I) المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى التي على الصورة $y' = f(x)$

حلها يكون على الصورة: $y = \int f(x)\,dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 88 رقم 2 :

حل المعادلة: $y' = 7x^2 + 9x - 1$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 88 رقم 3 :

حل المعادلة: $y' = 8x^3 - 3x^2 + 4$ ، والتي تحقق $y = 5$ عند $x = 1$

Ⅱ بعض المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى تحوي المتغيرين: y , x على الصورة: $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$

يتم حلها بطريقة فصل المتغيرات بالصورة التالية:

$$\boxed{\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx}$$

ونكامل الطرفين وصولًا إلى حل المعادلة التفاضلية وهو إيجاد y.

كتاب الطالب مثال صـ 88 رقم 4 :

حل المعادلات التفاضلية التالية:

ⓑ $y' = 4y$

ⓐ $y' - 2xy = 0$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 89 رقم 4 :

حل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$

كراسة التمارين صـ 34 رقم 5 :

حل المعادلة التفاضلية التالية : $x\ y' = 4y$ التي تحقق $y = 1$ عند $x = 1$

(III) المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay$ حيث $a \neq 0$ حلولها هي $y = k\,e^{ax}$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 90 رقم 5 :

أوجد حلًّا للمعادلة: $y' = -2y$ إذا كان $y = 3$ عند $x = 0$

كراسة التمارين صـ 34 رقم 9 :

حل المعادلة التفاضلية التالية : $\sqrt{2}\; y' + y = 0$ و التي تحقق $y = \sqrt{2}$ عند $x = 0$

IV المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay + b$ حيث $b \neq 0$, $a \neq 0$ تكون حلولها: $y = k\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 90 رقم 6 :

حل المعادلة $3y' - 2y = 4$ ، ثم أوجد الحل الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 0$

كراسة التمارين صـ 34 رقم 12: حل المعادلة التفاضلية التالية :

$2\,y' + y = 4$ و التي تحقق $y = 2$ عند $x = 0$

(V) المعادلات التفاضلية على الصورة: $y'' = f(x)$

يتم حل هذه المعادلات بخطوتين: $y' = \int f(x)dx = F(x) + C_1$

ثم $y = \int (F(x) + C_1)dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 91 رقم 7 :

حل المعادلة: $y'' = -3x^2 + 6x$

كراسة التمارين صـ 34 رقم 13 :

حل المعادلة التفاضلية التالية : $y'' = -4\sin 4x$

المعادلات التفاضلية

التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

(1) المعادلة التفاضلية التالية: $x^2y''' + (y')^2 + y = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الأولى. (a) (b)

(2) المعادلة التفاضلية التالية: $(y')^2 + 2xy = 0$ من الرتبة الثانية والدرجة الأولى. (a) (b)

(3) إذا كان $y = \frac{1}{2}$ عند $x = 0$ و $y' + 2y = 0$ فإن $y = \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4}$ (a) (b)

(4) إذا كان $y = 1$ عند $x = 0$ و $y' + y = 2$ فإن $y = 2e^{-x}$ (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة :

(8) المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{(2y'' + x)}{xy} = 3$ من:

(a) الرتبة الأولى والدرجة الثانية.

(b) الرتبة الثانية والدرجة الأولى.

(c) الرتبة الثانية والدرجة الثانية.

(d) الرتبة الأولى والدرجة الأولى.

(9) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 2x$ الذي يحقق $y = -2$ عندما $x = 1$ هو:

(a) $y = x^2 + 3$

(b) $y = x^2 - 3$

(c) $y = \frac{x^2}{2} - 3$

(d) $y = \frac{x^2}{2} + 3$

(10) إذا كان $y'' = 2x^2 + 3x$ فإنّ:

(a) $y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + c$

(b) $y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}$

(c) $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + c_1x + c_2$

(d) $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + c_1x$

(11) حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 1$ الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 5$ هو:

(a) $y = 2e^{\frac{5}{2}}$

(b) $y = \frac{2}{e^{\frac{5}{2}}}$

(c) $y = 2e^{\left(-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)} + 1$

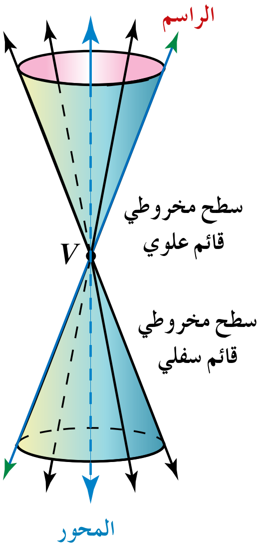
(d) $y = 2e^{\left(-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\right)} + 1$

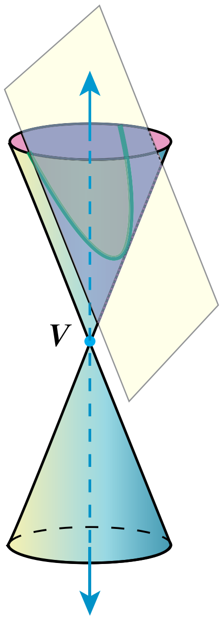
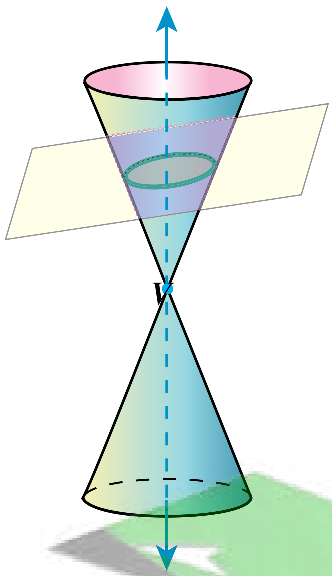
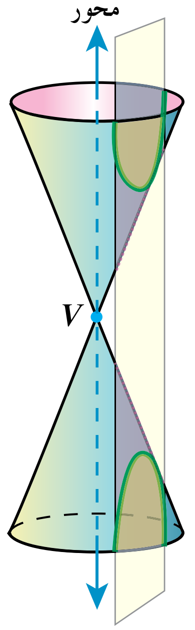
الوحدة السابعة

القطوع المخروطية

القطوع المخروطية

إذا قُطع السطح الذي حصلنا عليه سابقًا بمستويات تأخذ أوضاعًا واتجاهات مختلفة بالنسبة إلى الراسم أو إلى المحور فسوف نحصل على مقاطع (منحنيات) مختلفة تسمى قطوعًا مخروطية.



الشكل			
وضع المستوى	المستوى موازٍ لراسم ولا يحويه	المستوى ليس عموديًّا على المحور وليس موازيًا لأي راسم	المستوى موازٍ للمحور ولا يحويه
القطع الناتج	قطع مكافئ	قطع ناقص	قطع زائد

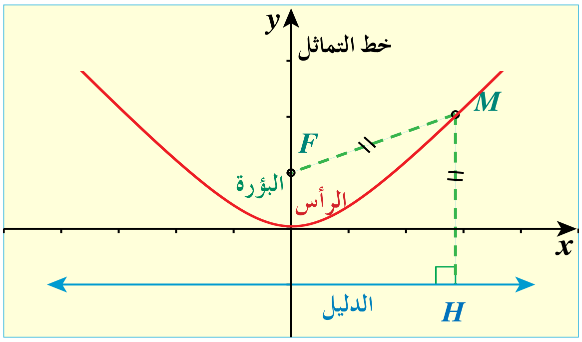
القطوع المخروطية _ الاختلاف المركزي

القطع المكافئ

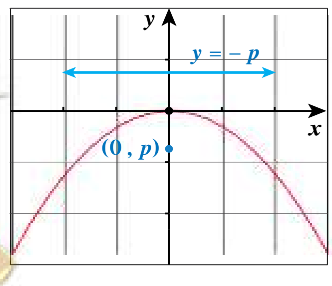
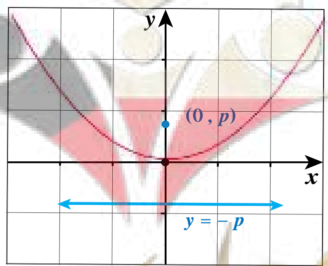
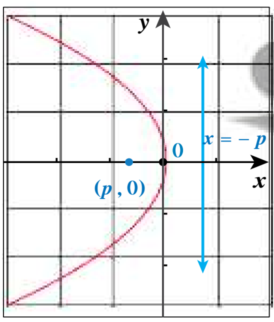
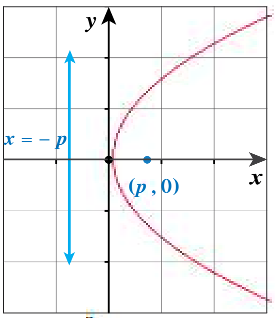
تعلمنا الكثير عن القطوع المكافئة نلخص ما عرفناه في التعريف التالي:

تعريف: القطع المكافئ

القطع المكافئ هو مجموعة كل النقاط في المستوى المتساوية البعدين عن نقطة ثابتة معطاة (البؤرة) وعن مستقيم ثابت معطى (الدليل).



معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(0,p)$ ومعادلة دليله $y=-p$ هي $x^2=4py$

الصورة العامة	$x^2 = 4py$		$y^2 = 4px$	
الفتحة	إلى أعلى أو إلى أسفل		إلى اليمين أو إلى اليسار	
البؤرة	$(0, p)$		$(p, 0)$	
الدليل	$y = -p$		$x = -p$	
محور التناظر	محور الصادات $(y-axis)$		محور السينات $(x-axis)$	
المسافة من الرأس إلى البؤرة المسافة من الرأس إلى الدليل	$\|p\|$			
إشارة p	$p < 0$	$p > 0$	$p < 0$	$p > 0$
الشكل				

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 104 رقم 1 :

(a) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(-4,0)$

(b) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(0,2)$ ودليله المستقيم $y=-2$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 105رقم 2 : a

أوجد البؤرة والدليل لقطع مكافئ، ثم ارسم شكلا تقريبيًّا لهذا القطع في كل مما يلي:

(a) المعادلة: $y=\frac{x^2}{4}$

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 105 رقم 2 : b

أوجد البؤرة والدليل لقطع مكافئ، ثم ارسم شكلا تقريبيًّا لهذا القطع في كل مما يلي:

(b) المعادلة: $x = -\frac{1}{5}y^2$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 105 رقم 3 :

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $A(1,1)$ وخط تماثله $y-axis$.

تابع كتاب الطالب مثال صـ 106 رقم 4

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $A\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$, $B(2,3)$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 106 رقم 4 :

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ ويمر بالنقطتين $A(-1,4)$, $B(1,4)$

كتاب الطالب صـ 106 مثال رقم 5 :

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $x = -3$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 107 رقم 6 :

تصنع إحدى الشركات الكشافات المكافئة لنوعيات عديدة من السيارات.

إذا كان لأحد هذه الكشافات سطح مكافئ متولد من تدوير القطع المكافئ الذي معادلته $x^2 = 12y$، فأين سيكون موضع المصباح الكهربائي؟

القطوع المخروطية – القطع المكافئ

التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

(1) معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ وبؤرته $(0,2)$ هي: $x^2=8y$ ⓐ ⓑ

(2) معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ ودليله $x=-2$ هي: $x^2=8y$ ⓐ ⓑ

(3) معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(-4,0)$ ودليله $x=4$ هي: $y^2=-16x$ ⓐ ⓑ

(4) $y^2=\frac{1}{2}x$ هي معادلة قطع مكافئ، بؤرته $\left(0,\frac{-3}{2}\right)$ ⓐ ⓑ

في التمارين (5–7)، معادلة القطع المكافئ هي: $y^2=-\frac{1}{6}x$

(5) بؤرة القطع المكافئ هي: $\left(-\frac{1}{24},0\right)$ ⓐ ⓑ

(6) معادلة الدليل هي: $y=\frac{1}{24}$ ⓐ ⓑ

(7) خط التماثل هو محور السينات. ⓐ ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة :

(8) المعادلة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0,0)$ وبؤرته $(-5,0)$ هي:

ⓐ $x^2=20y$ ⓑ $y^2=20x$ ⓒ $x^2=-20y$ ⓓ $y^2=-20x$

(9) المعادلة التي تمثل قطع مكافئ مفتوح إلى الأسفل هي:

ⓐ $y^2=\frac{-1}{2}x$ ⓑ $y^2=\frac{1}{2}x$ ⓒ $x^2=\frac{-1}{2}y$ ⓓ $x^2=\frac{1}{2}y$

(10) النقطة المشتركة بين كل القطوع المكافئة التي هي على الصورة $x^2=4py$ هي:

ⓐ $(1,1)$ ⓑ $(1,0)$ ⓒ $(0,1)$ ⓓ $(0,0)$

(11) المعادلة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0,0)$ ويمر بالنقطتين $A(-5,-2),B(-5,2)$ هي:

ⓐ $y^2=-\frac{4}{5}x$ ⓑ $x^2=-\frac{4}{5}y$ ⓒ $y^2=\frac{4}{5}x$ ⓓ $x^2=\frac{4}{5}y$

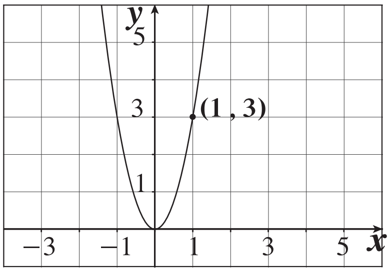
(12) المعادلة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0,0)$ ويمر بالنقطة $C(-5,-6)$ وخط تماثله $y-axis$ هي:

ⓐ $y^2=-\frac{25}{6}x$ ⓑ $x^2=-\frac{25}{6}y$ ⓒ $y^2=-\frac{6}{25}x$ ⓓ $x^2=-\frac{6}{25}y$

التمارين الموضوعية

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة :

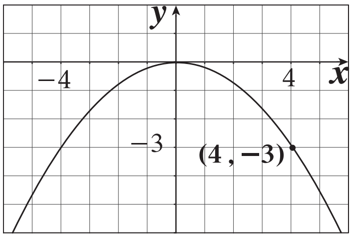
(13) بؤرة القطع المكافئ في الشكل المقابل هي:



ⓐ $\left(0,\frac{-4}{3}\right)$ ⓑ $\left(\frac{9}{20},0\right)$

ⓒ $\left(0,\frac{1}{12}\right)$ ⓓ $\left(\frac{1}{12},0\right)$

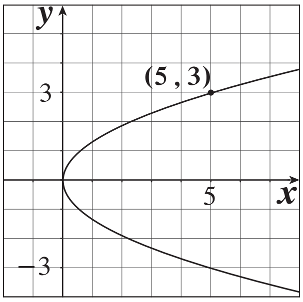
(14) معادلة دليل القطع المكافئ في الشكل المقابل هي:



ⓐ $y=\frac{4}{3}$ ⓑ $y=\frac{9}{20}$

ⓒ $y=-\frac{1}{12}$ ⓓ $y=-\frac{4}{3}$

(15) معادلة القطع المكافئ للبيان التالي هي:



ⓐ $x^2=-\frac{25}{3}y$ ⓑ $y^2=\frac{9}{5}x$

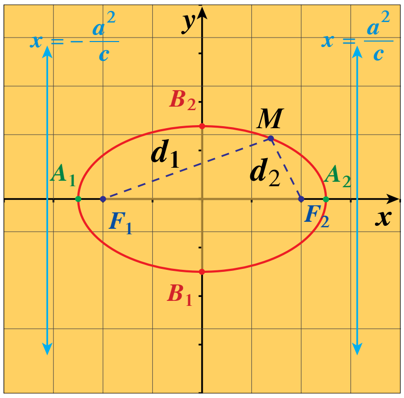
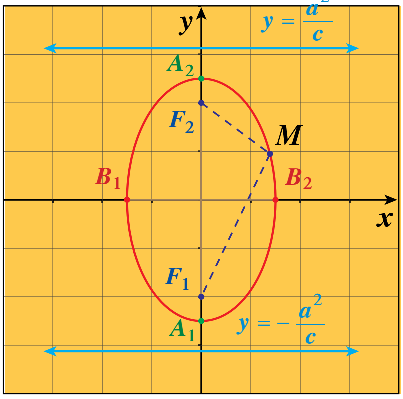
ⓒ $x^2=\frac{25}{3}y$ ⓓ $y^2=\frac{5}{9}x$

القطوع المخروطية ـ القطع الناقص

تعريف: القطع الناقص

القطع الناقص هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوى ثابتًا.

معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل $(0,0)$ كالتالي:

	$a > b > 0$	$a > b > 0$
المعادلة	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$
بيان القطع		
المحور الأكبر	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
الرأسان طرفا المحور الأكبر	$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$
طول المحور الأكبر	$2a$	
طرفا المحور الأصغر	$B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$
طول المحور الأصغر	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0), F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$a^2=b^2+c^2$	
معادلتا الدليلين	$x=-\frac{a^2}{c}$, $x=\frac{a^2}{c}$	$y=-\frac{a^2}{c}$, $y=\frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع الناقص متناظر حول كل من محوريه ومركزه	

القطوع المخروطية ــ القطع الناقص

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 112 رقم 1 :

إذا كانت: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ معادلة قطع ناقص فأوجد:

(a) رأسي القطع وطرفي المحور الأصغر.

(b) البؤرتين.

(c) معادلة دليلي القطع.

(d) طول كل من المحورين، ثم ارسم شكلًا تقريبيًا للقطع.

القطوع المخروطية ــ القطع الناقص

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 113رقم 2 :

أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه: $F_2(2,0)$, $F_1(-2,0)$ وطول محوره الأكبر 6،

وارسم شكلًا تقريبيًا لهذا القطع.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 113 رقم 3 :

أوجد البؤرتين والرأسين وطول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته: $x^2 + 4y^2 = 16$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 114 رقم 4 :

أوجد معادلة قطع ناقص مركزه $(0, 0)$ إذا كان محوره الأكبر ينطبق على المحور الصادي وطوله $16\ \mathrm{cm}$ والمسافة بين البؤرتين $10\ \mathrm{cm}$.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 115 رقم 5 : b

أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه $(0, 0)$ ومحوره الأصغر أفقي طوله $10\ \mathrm{cm}$ ويمر بالنقطة $A(2, 2\sqrt{6})$.

كتاب الطالب مثال صـ 115 رقم 6 :

للقطع الناقص الذي يولد السطح الناقص لجهاز تفتيت الحصوات، محور أكبر نقطتاه الطرفيتان $A_2(6\,,0)$, $A_1(-6\,,0)$، ومحور الأصغر إحدى نقطتيه الطرفيتين $B_1(0\,,-2.5)$ ، أوجد إحداثيات البؤرتين.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 116 رقم 6 :

يتولد المجسم الناقص لأحد أجهزة تفتيت الحصوات، من دوران قطع ناقص نقطتا طرفي محوره الأكبر $A_2(8\,,0)$, $A_1(-8\,,0)$. إذا كانت إحدى نقطتي طرفي محوره الأصغر $B_1(0\,,3.5)$؛ فأوجد إحداثيات البؤرتين.

القطوع المخروطية ـ القطع الناقص

التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

(1) رأسي القطع للقطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{9^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ هما: $(-9,0)$، $(9,0)$ — (a) (b)

(2) النقطة $(\sqrt{33},0)$ هي إحدى بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{7^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ — (a) (b)

(3) طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته $25x^2+9y^2=225$ يساوي 10 units — (a) (b)

(4) بؤرتا القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$، هما $(\pm 3,0)$ — (a) (b)

(5) في القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$، طول المحور الأصغر يساوي 8 — (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة :

(6) النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر للقطع الناقص الذي معادلته $4x^2+9y^2=36$ هما:

(a) $(\pm 2,0)$ (b) $(\pm 3,0)$

(c) $(0,\pm 2)$ (d) $(0,\pm 3)$

(7) معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(\pm 7,0)$ والنقطتان الطرفيتان لمحوره الأصغر $(0,\pm 6)$ هي:

(a) $\frac{x^2}{85}+\frac{y^2}{36}=1$ (b) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{85}=1$

(c) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$ (d) $\frac{x^2}{85}+\frac{y^2}{49}=1$

(8) معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل وطول محوره الأكبر 9 units وطول محوره الأصغر 4 units هي:

(a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ (b) $\frac{x^2}{20.25}+\frac{y^2}{4}=1$

(c) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ (d) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{20.25}=1$

(9) النقطة $A(-10,0)$ تنتمي إلى القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$. مجموع المسافتين AF_1+AF_2 حيث F_1 , F_2 هما البؤرتان يساوي:

(a) 10 units (b) 12 units

(c) 14 units (d) 20 units

(10) طول المحور الأكبر للقطع الناقص $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ يساوي:

(a) 12 units (b) $2\sqrt{41}$ units

(c) 16 units (d) 20 units

القطوع المخروطية ـ القطع الناقص

التمارين الموضوعية

(11) المسافة بين البؤرتين للقطع الناقص $15x^2 + 25y^2 - 75 = 0$ هي:

ⓐ $\sqrt{2}$ ⓑ $2\sqrt{2}$

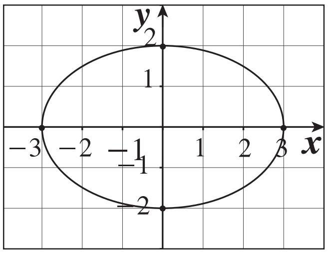
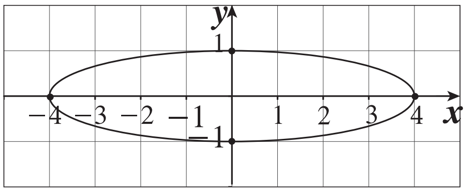
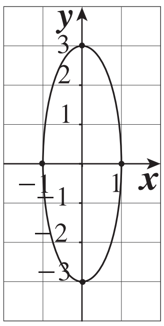
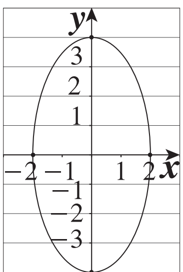
ⓒ 10 ⓓ $2\sqrt{3}$

(12) المسافة بين نقطة الأصل وأحد رأسي القطع الناقص على المحور الأكبر الذي معادلته $\frac{x^2}{20.25} + \frac{y^2}{4} = 1$ هي:

ⓐ 9 ⓑ 2

ⓒ 4.5 ⓓ 16.25

في التمارين (13–15)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتصل بيان كل قطع ناقص بمعادلته.

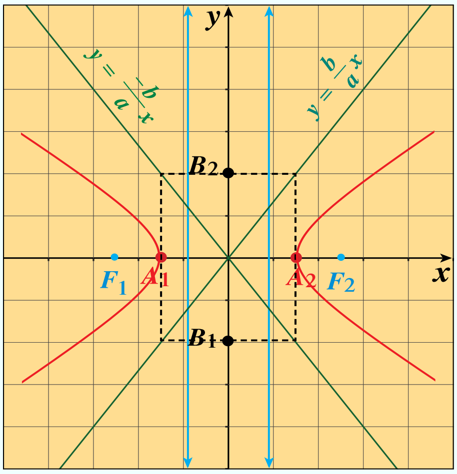
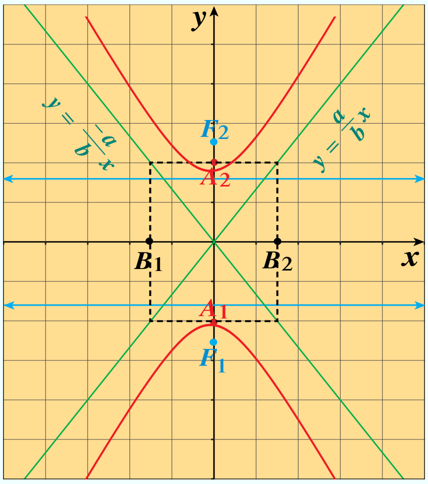
القائمة (1)	القائمة (2)
(13) $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$	ⓐ 
(14) $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$	ⓑ 
(15) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$	ⓒ 
	ⓓ 

القطوع المخروطية – القطع الزائد

تعريف: القطع الزائد

القطع الزائد هو مجموعة كل النقاط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة للفرق بين بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوي ثابتًا.

معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل كالتالي:

المعادلة	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
بيان القطع		
طرفا المحور القاطع الرأسان	$A_1(-a,0)\ ,\ A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)\ ,\ A_2(0,a)$
المحور القاطع (الأساسي)	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
طول المحور القاطع	$2a$	
طرفا المحور المرافق	$B_1(0,-b)\ ,\ B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)\ ,\ B_2(b,0)$
طول المحور المرافق	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0)\ ,\ F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)\ ,\ F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$c^2=a^2+b^2$	
معادلة الخطين المقاربين	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
معادلة الدليلين	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$y=\pm\frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع متناظر حول محوريه ومركزه	

القطوع المخروطية ـ القطع الزائد

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 122 رقم 1 :

لتكن: $9y^2 - 25x^2 = 225$ معادلة قطع زائد، أوجد:

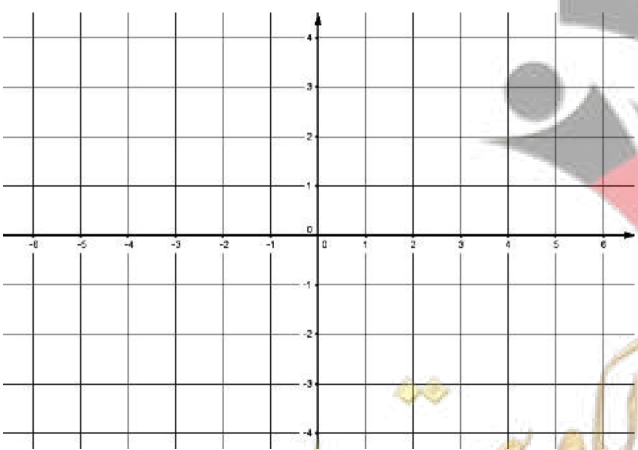
ⓐ رأسي القطع الزائد.

ⓑ البؤرتين.

ⓒ معادلتي دليلي القطع.

ⓓ طول كل من المحورين.

ⓔ معادلة كل من الخطين المقاربين ثم ارسم شكلًا تخطيطيًّا للقطع.



القطوع المخروطية ـ القطع الزائد

كتاب الطالب مثال صـ 121 رقم 1 :

لتكن: $9x^2 - 16y^2 = 144$ معادلة قطع زائد، أوجد:

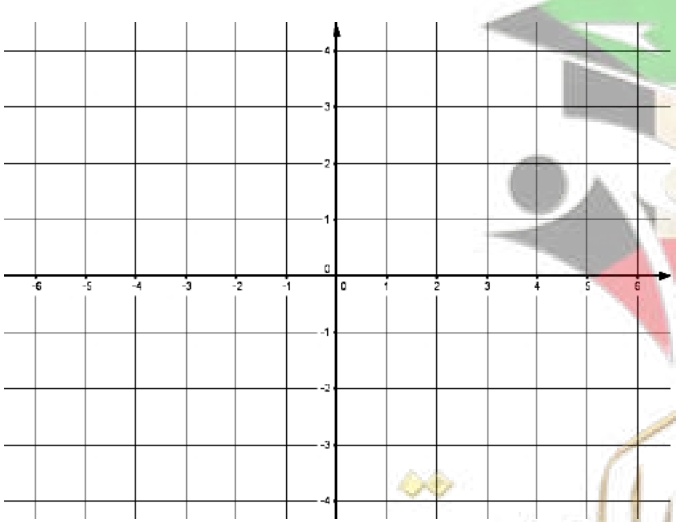
(a) رأسي القطع الزائد.

(b) البؤرتين.

(c) معادلتي دليلي القطع.

(d) طول كل من المحورين.

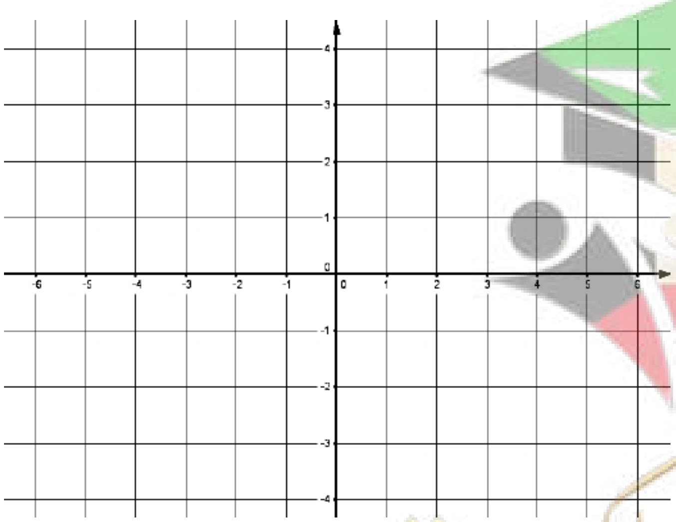
(e) معادلة كل من الخطين المقاربين ثم ارسم شكلًا تخطيطيًّا للقطع.



كتاب الطالب مثال صـ 122 رقم 2 :

أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_2(0,3)$, $F_1(0,-3)$ ورأساه $A_2(0,2)$, $A_1(0,-2)$

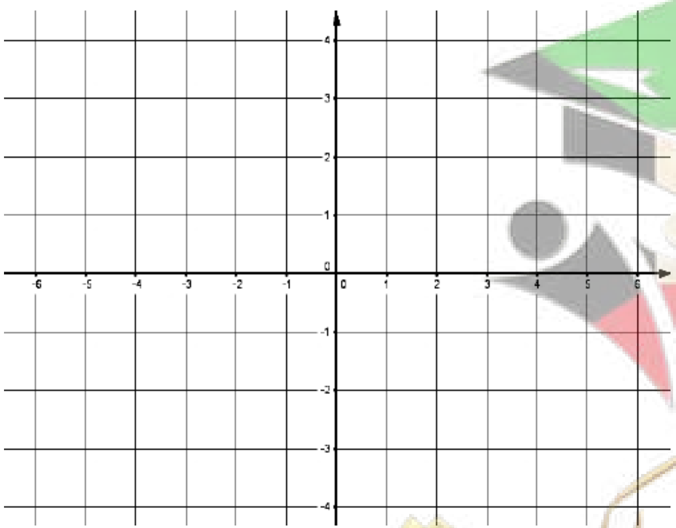
ثم أوجد معادلة كلّ من خطيه المقاربين وارسم شكلًا تقريبيًا للقطع.



كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 122رقم 2 :

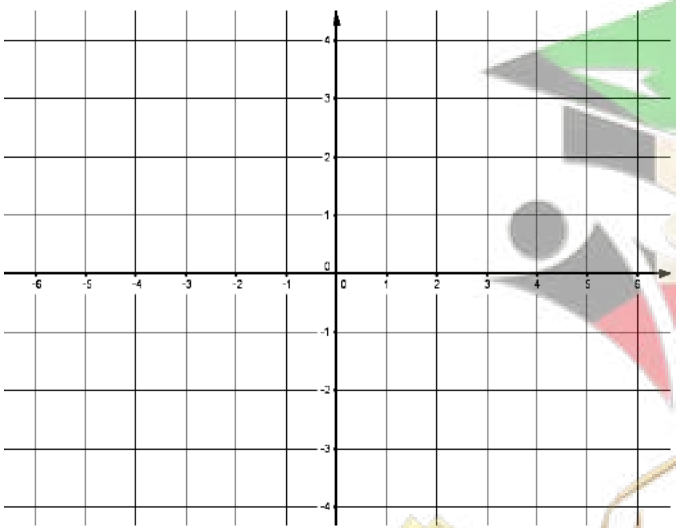
أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_1(-4\,,0)\,,F_2(4\,,0)$ ورأساه $A_1(-2\,,0)\,,A_2(2\,,0)$،

ثم أوجد معادلة كلّ من خطيه المقاربين، وارسم شكلا تقريبيًّا للقطع.



أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وإحدى بؤرتيه $F(0,\sqrt{34})$

ومعادلة أحد خطيه المقاربين هي: $y=\frac{3}{5}x$



كتاب الطالب مثال صـ 123 رقم 4 :

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وأحد رأسيه $(-4,0)$ ويمر بالنقطة $(2,-5)$.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 124 رقم 4 :

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وأحد رأسيه $\left(0,\frac{5}{4}\right)$ ويمر بالنقطة $\left(-\sqrt{3},-\frac{5}{2}\right)$

القطوع المخروطية ـ القطع الزائد

التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

(1) $x^2 - y^2 = 4$ هي معادلة قطع زائد. (a) (b)

(2) الخطّان المقاربان للقطع الزائد الذي معادلته $x^2 - y^2 = 12$ هما متعامدان. (a) (b)

(3) إحداثيات بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{18} = 1$ هما: $(0,3)$, $(0,-3)$. (a) (b)

(4) نقطتا طرفي المحور المرافق للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{25} - y^2 = 1$
هما: $B_1(1,0)$, $B_2(-1,0)$. (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة :

(5) معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(0,\pm 3)$ وطول محوره القاطع 4 هي:

(a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ (b) $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 1$

(c) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$ (d) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

(7) معادلة القطع الزائد الذي نقطتي تقاطعه مع المحور السيني هما $(\pm 6,0)$ هي:

(a) $y^2 - x^2 = 36$ (b) $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{49} = 1$

(c) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36} = 1$ (d) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$

(8) البعد بين بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته: $50y^2 - 25x^2 - 100 = 0$ بوحدة الطول يساوي:

(a) $\sqrt{6}$ (b) $2\sqrt{6}$

(c) 6 (d) $2\sqrt{2}$

(9) منحنى أي معادلة مما يلي **لا يقطع** المحور الصادي في $(0,\pm 4)$:

(a) $y^2 - x^2 = 16$ (b) $4y^2 - 16x^2 = 64$

(c) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ (d) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

(10) نقطتا تقاطع القطع الزائد الذي معادلته: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{49} = 1$ مع محور السينات هما:

(a) $(\pm 7,0)$ (b) $(\pm 5,0)$

(c) $(0,\pm 5)$ (d) ليس أيًّا مما سبق

(11) معادلتا الخطين المقاربين للقطع الزائد: $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{32} = 2$ هما:

(a) $y = \pm 2x$ (b) $y = \pm \frac{1}{2}x$

(c) $y = \pm 4x$ (d) $y = \pm \frac{1}{4}x$

القطوع المخروطية ـ الاختلاف المركزي

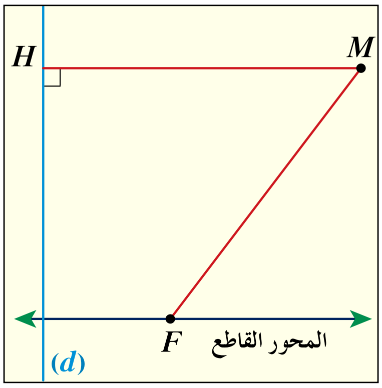
تعريف:

القطع المخروطي هو مجموعة كل النقاط في المستوى الإحداثي حيث تكون نسبة بعد كل منها من نقطة ثابتة (البؤرة) إلى بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل) في نفس المستوى تساوي مقدارًا ثابتًا.

- هذا المقدار الثابت يسمى **الاختلاف المركزي** للقطع المخروطي ويرمز إليه بالرمز e

$$\frac{MF}{MH} = e$$

وحيث إن M نقطة على قطع مخروطي، F نقطة ثابتة (بؤرة القطع) ولا تقع على المستقيم الثابت d (دليل القطع). MF المسافة بين النقطتين، MH البعد بين M والدليل.



فيكون لدينا الحالات التالية:

ⓐ إذا $e = 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا مكافئًا**

ⓑ إذا $e < 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا ناقصًا**

ⓒ إذا $e > 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا زائدًا**

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 129 رقم 1 :

حدد نوع القطع في كل مما يلي ثم أوجد معادلته

ⓐ اختلافه المركزي $(e = 1)$ وبؤرته $F(-1,0)$

ⓑ اختلافه المركزي $\left(e = \frac{4}{5}\right)$ وإحدى بؤرتيه $F\left(-4\sqrt{2}\,,0\right)$

ⓒ اختلافه المركزي $\left(e = \sqrt{3}\right)$ ومعادلة أحد دليليه $x = \frac{1}{3}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 131 رقم 2 :

أوجد الاختلاف المركزي لكل قطع مما يلي حيث معادلته:

(b) $24y^2 = 600 + 25x^2$

(a) $x^2 + \frac{y^2}{25} = 1$

كتاب الطالب مثال صـ 131 رقم 3 :

أوجد طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي اختلافه المركزي $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ وطول محوره الأصغر 4 وحدات.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 131 رقم 3 :

أوجد طول المحور القاطع للقطع الزائد الذي اختلافه المركزي $(e = 2)$ وطول محوره المرافق 6 وحدات.

القطوع المخروطية ـ الاختلاف المركزي

التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

(1) إذا كانت $e < 1$، فإن القطع هو قطع ناقص. (a) (b)

(2) إذا $a = 6$ ، $b = 9$ في القطع الزائد فإنّ $c = 3\sqrt{13}$ (a) (b)

(3) معادلتا المقاربين للقطع الزائد $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$ هما: $y = \frac{-1}{2}x$ ، $y = \frac{1}{2}x$ (a) (b)

(4) إذا كانت معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$، فإن طول محوره الأكبر هو 6
وطول محوره الأصغر هو 14. (a) (b)

(5) لأيّ معادلة قطع مكافئ فإنّ $e = 1$ (a) (b)

(6) المحور القاطع للقطع الزائد $\frac{y^2}{15} - \frac{x^2}{10} = 1$ ينطبق على محور الصادات. (a) (b)

(7) رأسا القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$ هما: $(0,-6)$, $(0,6)$ (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة :

(8) إذا كانت $a = 7$ ، $c = 2\sqrt{10}$ ، فإن معادلة القطع المخروطي الناتج هي:

(a) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{9} = 1$ (b) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$

(c) $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$ (d) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{49} = 1$

(9) أيّ معادلة مما يلي تمثل قطعًا زائدًا معادلة أحد دليليه $y = \frac{25}{7}$؟

(a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{24} = 1$ (b) $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{25} = 1$

(c) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{24} = 1$ (d) $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{24} = 1$

(10) إذا كانت معادلة أحد المقاربين $y = \frac{-7}{5}x$ والاختلاف المركزي $e = \frac{\sqrt{74}}{5}$
فمعادلة القطع الزائد هي:

(a) $\frac{y^2}{7} - \frac{x^2}{5} = 1$ (b) $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{5} = 1$

(c) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$ (d) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{49} = 1$

(11) الاختلاف المركزي للمعادلة $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$ هو:

(a) $\frac{\sqrt{11}}{6}$ (b) $\frac{\sqrt{11}}{5}$

(c) $\frac{36}{25}$ (d) $\frac{25}{36}$

القطوع المخروطية ـ الاختلاف المركزي

التمارين الموضوعية

(12) معادلة قطع ناقص إحدى بؤرتيه $(0,4)$ وأحد رأسيه $(0,-5)$ هي:

ⓐ $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{25}=1$

ⓑ $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{5}=1$

ⓒ $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$

ⓓ $\frac{y^2}{5}+\frac{x^2}{3}=1$

(13) لأيّ قطع ناقص يكون:

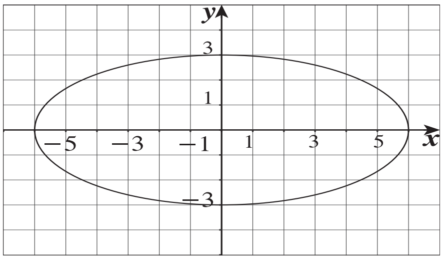
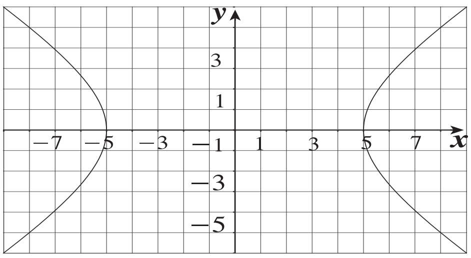
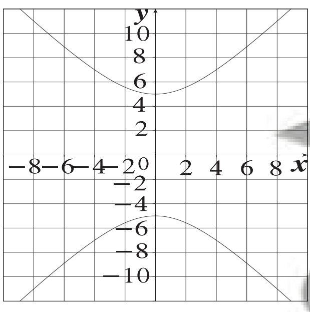
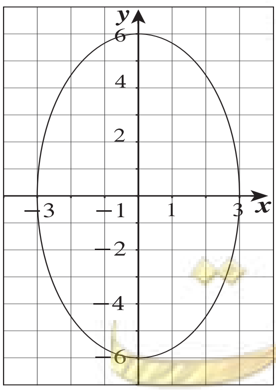
ⓐ $a>c$

ⓑ $a<c$

ⓒ $a=ec$

ⓓ $a=c$

في التمارين (14–16)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتصل بيان كل قطع مخروطي بمعادلته.

القائمة (1)	القائمة (2)
(14) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$	ⓐ 
(15) $\frac{y^2}{36}+\frac{x^2}{9}=1$	ⓑ 
(16) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$	ⓒ 
	ⓓ 

الوحدة الثامنة

الاحتمال

المتغيرات العشوائية المتقطعة

المتغيّر العشوائي

تعريف: المتغير العشوائي

هو دالة مجالها فضاء العينة لتجربة عشوائية S ومجالها المقابل هو $\mathbb{R}$ ومداها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$

حيث $X : S \longrightarrow \mathbb{R}$

(X هو المتغير العشوائي لتجربة عشوائية، S فضاء العينة، $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية).

يوجد عدة أنواع من المتغيرات العشوائية، سوف تدرس نوعين فقط منها وهما:

1. المتغيرات العشوائية **المتقطعة** (المنفصلة).
2. المتغيرات العشوائية **المتصلة** (المستمرة).

وسوف نستخدم X ، Y ، ... كرمز للمتغيرات العشوائية و x ، y ... لقيم هذه المتغيرات.

المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة)

تعريف: المتغير العشوائي المتقطع

يكون المتغير العشوائي X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا إذا كانت مجموعة القيم الممكنة له (المدى) $X(S)$ هي مجموعة متقطعة أي قابلة للعد، من الأعداد الحقيقية سواء أكانت منتهية أم غير منتهية.

المتغيرات العشوائية المتقطعة

كتاب الطالب مثال رقم 1 صـ 143 :

في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية،

ثم حدّد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا.

(a) المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الصور.

(b) المتغير العشوائي Y الذي يمثل مربع عدد الصور.

(c) المتغير العشوائي Z الذي يمثل عدد الصور مطروحًا منه عدد الكتابات.

عناصر مدى المتغير العشوائي X	عناصر فضاء العينة S

عناصر مدى المتغير العشوائي Y	عناصر فضاء العينة S

عناصر مدى المتغير العشوائي Y	عناصر فضاء العينة S

المتغيرات العشوائية المتقطعة

كتاب الطالب حاول أن تحل رقم 1 صـ 143 :

في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية،

ثم حدّد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا.

(a) المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الكتابات.

(b) المتغير العشوائي Y الذي يمثل مكعب عدد الكتابات.

(c) المتغير العشوائي Z الذي يمثل عدد الكتابات مطروحًا منه 2.

عناصر مدى المتغير العشوائي X	عناصر فضاء العينة S

عناصر مدى المتغير العشوائي Y	عناصر فضاء العينة S

عناصر مدى المتغير العشوائي Y	عناصر فضاء العينة S

المتغيرات العشوائية المتقطعة

كتاب الطالب حاول أن تحل رقم 2 صـ 144 :

عند رمي حجر نرد مرة واحدة، إذا كان المتغير العشوائي X يعبّر عن:

«مربع العدد الظاهر مطروحًا منه 1 عندما يكون العدد الظاهر أصغر من 4، و 1 – لغير ذلك».

فأوجد: (a) فضاء العينة S وعدد عناصر فضاء العينة $n(S)$.

(b) مدى المتغير العشوائي X.

(c) احتمال وقوع كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X .

(d) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

عناصر فضاء العينة S	عناصر مدى المتغير العشوائي X

x			
$f(x)$			

المتغيرات العشوائية المتقطعة

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 146 رقم 3 :

عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن «عدد الصور»، فأوجد ما يلي:

(a) فضاء العينة (S) وعدد عناصره $n(S)$.

(b) مدى المتغير العشوائي X.

(c) احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

(d) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

عناصر مدى المتغير العشوائي X	عناصر فضاء العينة S

x			
$f(x)$			

المتغيرات العشوائية المتقطعة

ملاحظة هامة:

دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X تحقق الشرطين:

① $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$

② $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots = 1$ مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي f تساوي الواحد الصحيح.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 147 رقم 4 :

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.35	0.15	0.1	0.2	k

فأوجد قيمة k.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 148 رقم 5 :

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو: $\{0,1,2,3\}$ وكان: $f(0) = 0.1\ ,\ f(1) = 0.6\ ,\ f(2) = 0.15$

فأوجد $f(3)$، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

x					
$f(x)$					

المتغيرات العشوائية المتقطعة

التوقع (الوسط) والتباين للمتغيرات العشوائية المتقطعة

أولًا: التوقع (الوسط) للمتغير العشوائي المتقطع

تعريف:

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي f،

مدى X: $X(S) = \{x_1 \;,\; x_2 \;,\; x_3 \;, \dots\}$

فإن التوقع (μ) للمتغير العشوائي X يعطى بالصيغة التالية: $\mu = \Sigma\, x_i\, f(x_i)$

أي أن: $\mu = x_1\, f(x_1) + x_2\, f(x_2) + x_3\, f(x_3) + \dots$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 150 رقم 7 :

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X هي:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

فأوجد التوقع μ للمتغير العشوائي X.

المتغيرات العشوائية المتقطعة

بند 1- 8

التباين للمتغير العشوائي المتقطع

تعريف:

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي f فإن التباين للمتغير العشوائي يعطى بالصيغة:

التباين: $\sigma^2 = \Sigma\left(x_i^2 f(x_i)\right) - \mu^2$ حيث μ هو التوقع

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ (الجذر التربيعي الموجب للتباين)

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 151 رقم 8 :

يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي متقطع X.

فأوجد:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.2	0.1	0.3	0.1	0.3

(a) التوقع (μ).

(b) التباين (σ^2).

(c) الانحراف المعياري (σ).

المتغيرات العشوائية المتقطعة

دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي متقطع

تعريف:

دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة a هي احتمال وقوع المتغير العشوائي X بحيث يكون X أصغر من أو يساوي a

أي أن: $F(a) = P(X \leqslant a)$

لاحظ أن مجال دالة التوزيع التراكمي F هو $\mathbb{R}$ وأن المجال المقابل يساوي المدى $[0,1]$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 153 رقم 9 :

الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.43	0.29	0.17	0.09	0.02

إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X.

فأوجد: $F(0)$, $F(1)$, $F(3.5)$, $F(4)$, $F(5)$, $F(8)$

بعض خواص دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X:

1. $P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a) = 1 - F(a)$
2. $P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 154 رقم 10 :

يبيّن الجدول التالي بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	1	2	3	4
$F(x)$	0.25	0.40	0.65	1

أوجد:

a) $P(2 < X \leqslant 4)$

b) $P(X > 3)$

المتغيرات العشوائية المتقطعة

التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

(1) التوقع هو القيمة التي تقيس تشتت قيم المتغير العشوائي المتقطع عن قيمته المتوسطة. (a) (b)

(2) التباين هو القيمة التي تتجمع حولها القيم الممكنة للمتغير العشوائي المتقطع. (a) (b)

(3) دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة a هي احتمال وقوع المتغير العشوائي X بحيث يكون X أصغر من أو يساوي a. (a) (b)

(4) التوزيع التالي يمثل دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير X. (a) (b)

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.1	0.05	0.4	0.4

(5) قيمة K التي تجعل التوقع μ للمتغير العشوائي X يساوي 1 لدالة التوزيع الاحتمالي f هي صفر. (a) (b)

x	2	1	0
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	K

(6) لدالة توزيع تراكمي F للمتغير العشوائي X يكون: (a) (b)

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

(7) لدالة توزيع تراكمي F للمتغير العشوائي X يكون: (a) (b)

$$P(X < a) = 1 - F(a)$$

(9) عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية فإن $n(S) = 6$. (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة :

(10) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	0.2	0.2	K	0.2

فإن قيمة K هي:

(a) 0.2 (b) 0 (c) 0.4 (d) 0.3

المتغيرات العشوائية المتقطعة

التمارين الموضوعية

(11) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	1	2	3
$f(x)$	K	$2K$	$2K$

فإن قيمة K تساوي:

(a) 0.5 (b) 0.2 (c) 1 (d) 0.4

في التمارين (12–14)، استخدم الجدول التالي:

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.2	0.4	0.1	0.3

حيث f هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع X.

(12) $F(-1)$

(a) 0 (b) 0.2 (c) 0.4 (d) 0.6

(13) $F(1.5)$

(a) 0.4 (b) 0.2 (c) 0 (d) 0.6

(14) $F(4)$

(a) 0.2 (b) 0.1 (c) 0.4 (d) 1

(15) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا دالة توزيع الاحتمالي f هي:

x	0	1	2
$f(x)$	0.25	0.50	0.25

فإن التوقع له يساوي:

(a) 1 (b) 1.25 (c) 1.5 (d) 0.5

(16) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا لدالة التوزيع الاحتمالي f وكان التوقع $= 0.5$ ، $\sum x^2 f(x) = 4.25$،
فإن الانحراف المعياري هو:

(a) 4 (b) 2 (c) 3.75 (d) 1

المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

تعريف: المتغير العشوائي المتصل

هو المتغير التي تكون مجموعة القيم الممكنة له عبارة عن فترة من الأعداد الحقيقية أي أن مدى المتغير العشوائي المتصل $X = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$ وهي مجموعة غير قابلة للعد.

أمثلة عن المتغيرات العشوائية المتصلة:

- كتلة مجموعة طلاب بالكيلوجرام أعمارهم من $(15-20)$ سنة.
- درجة حرارة جسم الإنسان خلال يوم كامل.
- المسافة المقطوعة لسيارة خلال وحدة الزمن.
- كمية الحليب التي تنتجها البقرة في اليوم باللتر.

خواص دالة كثافة الاحتمال $f(x)$

1. $f(x)$ هي دالة متصلة على مجالها.
2. $f(x) \geqslant 0$ لكل قيم x التي تنتمي لمجال الدالة.
3. قيمة المساحة المحددة بمنحنى الدالة $f(x)$ ومحور السينات تساوي الواحد الصحيح.
4. يمكن إيجاد الاحتمال $P(a \leq X \leq b)$ بحساب المساحة تحت المنحنى f بين القيمة a, b من الشكل السابق.
5. تنعدم المساحة المظللة في الشكل السابق إذا كان $a = b$

أي أنه لأي متغير عشوائي متصل فإن: $P(X = a) = 0$

المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 161 رقم 1 :

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا، فدالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & : -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

a $P(X < 2)$

b $P(-1 < X < 1)$

c $P(-1.5 < X < 2.5)$

d $P(X = 0)$

المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 162 رقم 2 :

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا، ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & : \quad 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P(X < 1)$

(b) $P(X \geqslant 1)$

(c) $P(X = 1)$

المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 163 رقم 3 :

لتكن الدالة f:

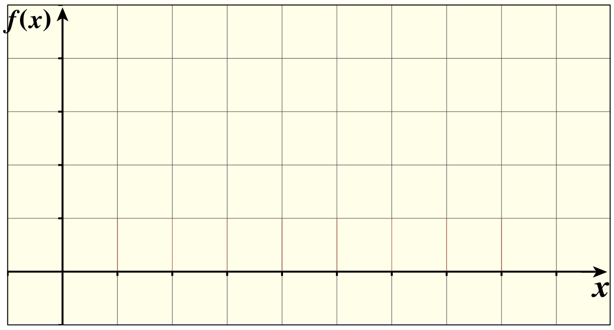
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & : 1 \leqslant x \leqslant 3\\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

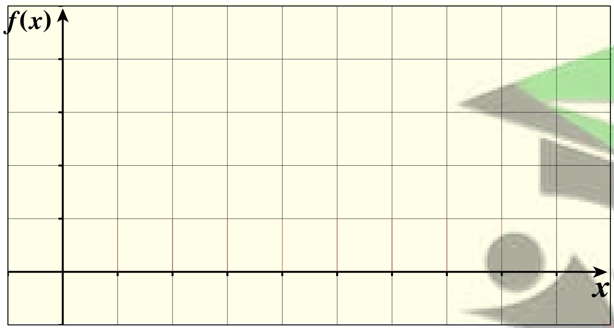
(a) أثبت أن الدالة f هي دالة كثافة احتمال.

(b) أثبت أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

(c) أوجد: $P(2 < X \leqslant 3)$

(d) أوجد التوقع والتباين للدالة f .





التوزيع الطبيعي المعياري

نعلم أن منحنى التوزيع الطبيعي يتحدد بكل من التوقع μ والتباين لها σ^2 ونظرًا لاختلاف قيم σ^2، μ من توزيع لآخر فإننا نقوم بتحويل أي توزيع طبيعي إلى توزيع طبيعي معياري وفق التحويل $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

حساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي $N(\mu\ ,\ \sigma^2)$

1. نوجد القيمة المعيارية المناظرة للقيمة a بالتعويض في العلاقة: $z_1 = \dfrac{a-\mu}{\sigma}$

   والقيمة المعيارية المناظرة للقيمة b بالتعويض في العلاقة: $z_2 = \dfrac{b-\mu}{\sigma}$

2. نستخدم العلاقة: $P(a < X \leqslant b) = P(z_1 < z < z_2)$

3. نستخدم أحد جدولي المساحة تحت المنحنى الطبيعي $(4), (5)$ لحساب الطرف الأيسر من العلاقة السابقة.

حساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري $P(z)$

- إذا كانت $z \geqslant a$ أو $z \leqslant a$، حيث $a \geqslant 0$ نستخدم جدول z رقم (4).
- إذا كانت $z \geqslant a$ أو $z \leqslant a$، حيث $a < 0$ نستخدم جدول z رقم (5).

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 165 رقم 4 :

إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

a) $P(z \leq 0.95)$

b) $P(z > 0.71)$

c) $P(1.45 \leqslant z \leqslant 3.26)$

المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 166 رقم 5 :

إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

(a) $P(z \le -0.12)$ (b) $P(-3.2 \le z \le -0.1)$ (c) $P(-5.26 \le z \le 0.69)$

المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

(1) نسبة الرطوبة خلال شهر هو متغير عشوائي متصل. (a) (b)

(2) عدد أحرف كلمات كتاب هو متغير عشوائي متصل. (a) (b)

(3) إذا كانت الدالة f معرفة كالتالي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & : \quad 0\le x\le 1\\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

فإن الدالة f هي دالة كثافة احتمال. (a) (b)

(4) إذا كانت X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x)=\begin{cases}2 & : \quad 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

فإن $P(X\ge 2)=1$ (a) (b)

(5) إذا كانت الدالة f هي دالة كثافة احتمال تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم معرّفة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & : \quad 0\le x\le 3\\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

فإن التباين للدالة f هو $\sigma^2=\frac{3}{4}$. (a) (b)

(6) من خواص التوزيع الطبيعي أنه متماثل حول $x=\mu$. (a) (b)

(7) المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي الواحد. (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة :

(8) إذا كان X متغيّرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & : \quad 0\le x\le 2\\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

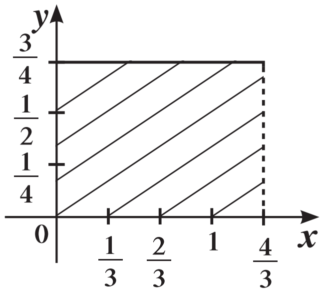
فإن $P(X=1)$ يساوي:

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 0 (c) 1 (d) ليس أيًّا مما سبق

المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

التمارين الموضوعية

في التمارين (10–16)، أجب عن الأسئلة من خلال الرسم البياني في الشكل المقابل:



(10) الدالة التي تعبّر عن الرسم البياني التالي هي:

(a) $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4} & : \quad 0<x<\frac{3}{4}\\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$

(b) $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4} & : \quad 0<x<\frac{4}{3}\\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$

(c) $f(x)=\begin{cases}\frac{4}{3} & : \quad 0<x<\frac{4}{3}\\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$

(d) $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4} & : \quad 0<x<4\\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$

(11) الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي:

(a) الطبيعي
(b) ذات الحدين
(c) الطبيعي المعياري
(d) المنتظم

(12) التوقّع هو:

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{4}{3}$ (d) $\frac{3}{4}$

(14) $P\left(X<\frac{4}{6}\right)=$

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{2}$

(15) $P\left(X>\frac{4}{12}\right)=$

(a) $\frac{2}{6}$ (b) $\frac{6}{2}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) 1

(16) $P(0<X<1)=$

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) 1 (d) $\frac{3}{4}$

(17) إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي فإن: $P(0\le z\le 2.35)$ يساوي:

(a) 0.9906 (b) 0.5 (c) 0.4906 (d) 0.218