2025/2026

الرياضيات

الفصل الدراسي الثاني

الصف الحادي عشر أدبي

اعداد:
أ/ حسام بيومي

صفوة معلمي الكويت

الوحدة الرابعة

وصف البيانات

٤ - ١ الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى ومخطط الصندوق ذو العارضتين

(٤-١-أ) الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى من جدول تكراري

(٤-١-ب) الوسيط، الربيع الأدنى والربيع الأعلى لمجموعة من البيانات موزعة على فئات

٤ - ٢ الالتواء

(٤-٢-أ) الالتواء وعلاقته بمقاييس النزعة المركزية

(٤-٢-ب) العلاقة بين الالتواء ومخطط الصندوق ذي العارضتين

٤ - ٣ مقاييس التشتت وتطبيقاتها

(٤-٣-أ) مقاييس

(٤-٣-ب) التوزيع الطبيعي

(٤-٣-جـ) القيمة المعيارية

٤ - ٤ تطبيقات إحصائية

(٤-٤-أ) مقاييس النزعة المركزية

(٤-٤-ب) الوسيط

صفوة معلمي الكويت

٤-١ الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى ومخطط الصندوق ذو العارضتين

(٤-١-أ) الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى من جدول تكراري

• الوسيط

الوسيط لعدد ن من قيم البيانات المرتبة تصاعديًا هو القيمة التي ترتيبها $\frac{ن + ١}{٢}$ من هذه القيم إذا كان العدد ن فرديًّا.

والمتوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{ن}{٢}$، $\frac{ن}{٢} + ١$ من هذه القيم إذا كان العدد ن زوجيًّا.

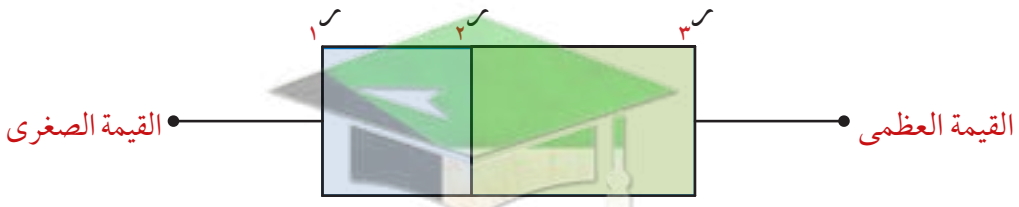
يقسم الوسيط مجموعة القيم في البيانات إلى مجموعتين متساويتين من حيث عدد القيم ويرمز له بالرمز $ر_٢$.

• الربيع الأدنى والربيع الأعلى لمجموعة من قيم البيانات مرتبة تصاعديًّا.

- الربيع الأدنى هو وسيط النصف الأدنى من قيم البيانات ويرمز له بالرمز $ر_١$.
- الربيع الأعلى هو وسيط النصف الأعلى من قيم البيانات ويرمز له بالرمز $ر_٣$.

• مخطط الصندوق ذي العارضتين

يبين الشكل التالي مخطط الصندوق ذي العارضتين، ممثل عليه مجمل الأعداد الخمسة وهي:
القيمة الصغرى، الربيع الأدنى، الوسيط، الربيع الأعلى، القيمة العظمى



صفوة معلمي الكويت

يبيّن الجدول التكراري التالي عدد البطاقات المباعة خلال الأسبوع الأول من عرض أحد الأفلام في إحدى عشر صالة عرض.

عدد البطاقات	٢٠٠	٣٠٠	٣٥٠	٤٠٠	٥٠٠	المجموع
التكرار (عدد الصالات)	٢	٢	٣	٢	٢	١١

أ) رتِّب هذه البيانات بحسب القيم تصاعديًا.

ب) أوجد الوسيط ($س_٢$).

جـ) أوجد الربيع الأدنى ($س_١$)، والربيع الأعلى ($س_٣$).

د) مثل هذه القيم بمخطط الصندوق ذي العارضتين.

صفوة معلمي الكويت

يمثّل الجدول التكراري التالي معدل أجر الموظفين بالدينار الكويتي مقابل كل ساعة عمل في بعض الشركات.

معدل الأجر	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	المجموع
التكرار	٢	٢	٢	٣	٢	٢	١٣

أ) رتِّب هذه البيانات بحسب القيم تصاعديًا.

ب) أوجد الوسيط ($ر_٢$).

جـ) أوجد الربيع الأدنى ($ر_١$)، والربيع الأعلى ($ر_٣$).

د) مثل هذه القيم بمخطط الصندوق ذي العارضتين.

صفوة معلمي الكويت

يمثل الجدول التكراري التالي الارتفاع بالأمتار لبعض ألعاب القطار في عدة مدن من العالم

الارتفاع بالمتر	١٠	١٢	١٣	١٨	٢١	٢٣	٢٤	٢٥	٣٠	المجموع
التكرار	١	٣	١	٢	٢	٣	٢	٢	٢	١٨

أ) رتّب هذه البيانات بحسب القيم تصاعديًّا.

ب) أوجد الوسيط لهذه البيانات ($ر_٢$).

جـ) أوجد الربيع الأدنى ($ر_١$) والربيع الأعلى ($ر_٣$).

د) مثّل هذه البيانات بمخطط الصندوق ذي العارضتين.

صفوة معلمي الكويت

حساب الوسيط للفئات:

$$\text{الوسيط } (م_{٢}) = \text{الحد الأدنى لفئة الوسيط} + \frac{\frac{ن}{٢} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الوسيط}}{\text{التكرار الأصلي لفئة الوسيط}} \times \text{طول الفئة}$$

$$\text{الربيع الأدنى } (م_{١}) = \text{الحد الأدنى لفئة الربيع الأدنى} + \frac{\frac{ن}{٤} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الربيع الأدنى}}{\text{التكرار الأصلي لفئة الربيع الأدنى}} \times \text{طول الفئة}$$

$$\text{الربيع الأعلى } (م_{٣}) = \text{الحد الأدنى لفئة الربيع الأعلى} + \frac{\frac{٣ن}{٤} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الربيع الأعلى}}{\text{التكرار الأصلي لفئة الربيع الأعلى}} \times \text{طول الفئة}$$

حيث ن مجموع التكرارات

كتاب الطالب مثال صـ ١٧ رقم ٣ :

يمثل الجدول التالي أعمار سكان أحد الأبنية بالسنوات:

الفئة	٠ -	١٠ -	٢٠ -	٣٠ -	٤٠ -	٥٠ -	المجموع
التكرار	٣	٣	٥	٢	٥	٢	٢٠

أ) كوّن جدول التكرار المتجمع الصاعد.

ب) أوجد الوسيط حسابيًّا.

الفئة	التكرار	أقل من الحد الأعلى للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
٠ -	٣	أقل من	
١٠ -	٣	أقل من	
٢٠ -	٥	أقل من	
٣٠ -	٢	أقل من	
٤٠ -	٥	أقل من	
٥٠ -	٢	أقل من	
المجموع	٢٠		

صفوة معلمي الكويت

يمثل الجدول التالي أعمار سكان أحد الأبنية بالسنوات

الفئة	٠ –	١٥ –	٣٠ –	٤٥ –	المجموع
التكرار	٤	٧	٦	٣	٢٠

أ كوّن جدول التكرار المتجمع الصاعد.

ب أوجد الوسيط حسابيًّا.

الفئة	التكرار	أقل من الحد الأعلى للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
		أقل من	
		أقل من	
		أقل من	
		أقل من	
		أقل من	
		أقل من	
المجموع			

صفوة معلمي الكويت

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ١٨ رقم ٤ :

يمثل الجدول التكراري التالي درجات ٣٢ طالب في مادة الرياضيات في أحد فصول الصف الحادي عشر حيث النهاية العظمى ٣٠ درجة.

الفئة	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	المجموع
التكرار	٩	٦	٨	٥	٤	٣٢

المطلوب إيجاد كلًّا من:

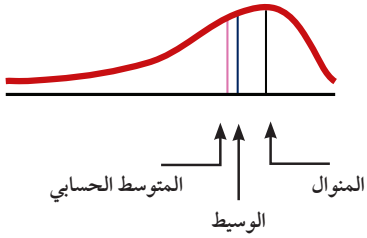
أ) جدول التكرار المتجمع الصاعد.

ب) الربيع الأدنى والربيع الأعلى.

الالتواء وعلاقته بمقاييس النزعة المركزية

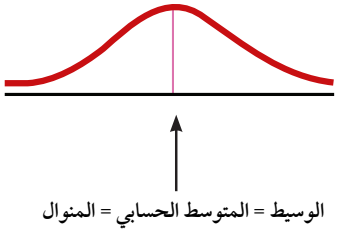
الربط بين مقاييس النزعة المركزية والالتواء

- المنوال < الوسيط < المتوسط الحسابي



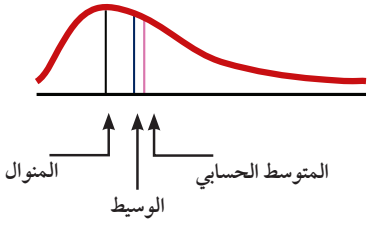
الالتواء إلى اليسار (الالتواء السالب)

- المنوال = الوسيط = المتوسط الحسابي



التماثل (لا وجود للالتواء)

- المنوال > الوسيط > المتوسط الحسابي



الالتواء إلى اليمين (الالتواء الموجب)

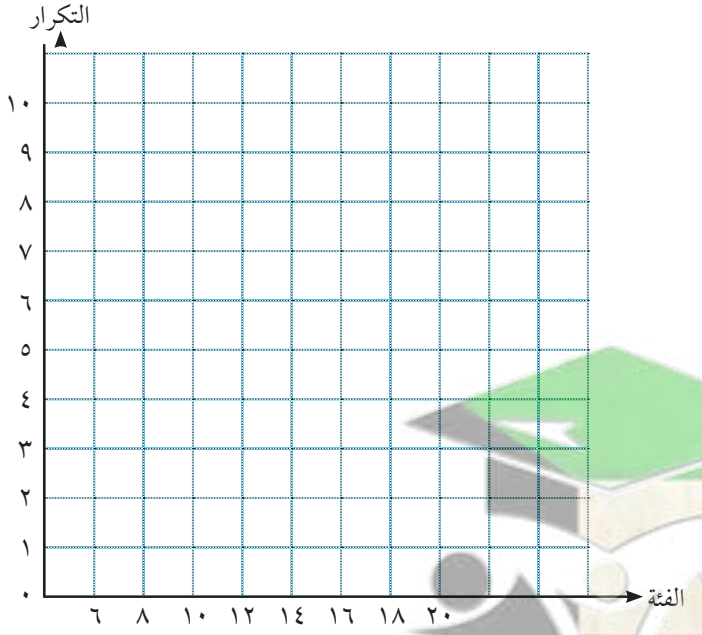
كتاب الطالب مثال صـ ٢٠ رقم ١ :

يبيّن الجدول أدناه التوزيع التكراري لدرجات ٣٠ طالبًا في أحد الاختبارات حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة.

الفئة	-٦	-٨	-١٠	-١٢	-١٤	-١٦	-١٨	المجموع
التكرار	٢	٤	٩	٧	٥	٢	١	٣٠

أ) مثّل هذه البيانات بالمدرج التكراري ومنه ارسم المنحنى التكراري.

ب) هل يوجد التواء؟ حدّد نوعه إن وجد.



صفوة معلمي الكويت

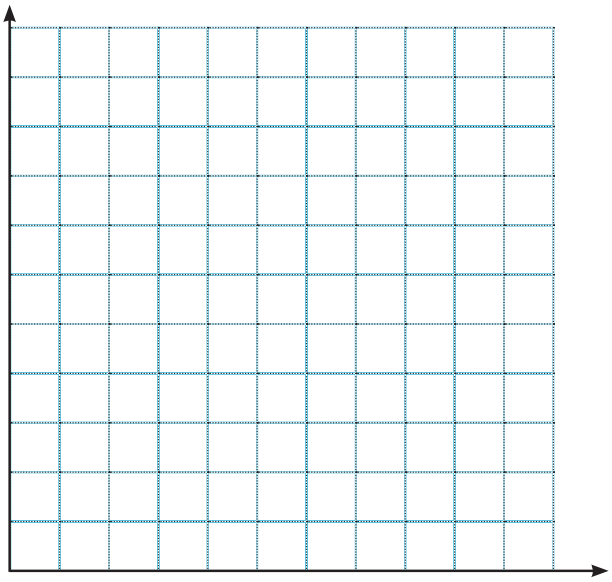
كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٢٠ رقم ١ :

يبيّن الجدول أدناه أوزان ٣٠ طالبًا بالكيلوجرام.

الفئة	٥٥-	٦٠-	٦٥-	٧٠-	٧٥-	٨٠-	المجموع
التكرار	٢	٥	٧	١٠	٥	١	٣٠

أ) مثّل هذه البيانات بالمدرج التكراري ومنه ارسم المنحنى التكراري.

ب) هل يوجد التواء؟ حدّد نوعه إن وجد.



كراسة التمارين صـ ١٣ رقم ٤ :

٢٥ شخص يتابعون حدثا معينا ، أعمارهم موزعة كالتالي :

٣ ، ٣ ، ٤ ، ٤ ، ٤ ، ٤ ، ٦ ، ٦ ، ٦ ، ٦ ، ٦ ، ٦ ، ٦ ، ٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧ ، ٨ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٢ ، ٢٢ ، ٢٥

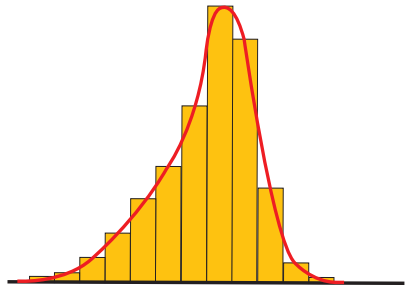
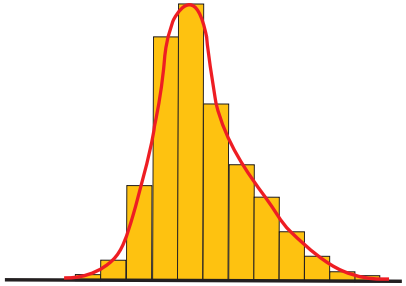
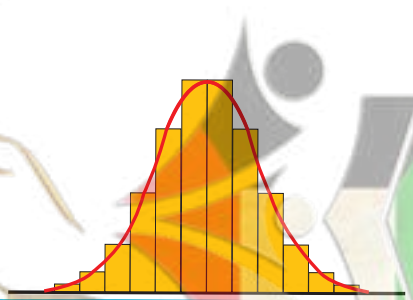
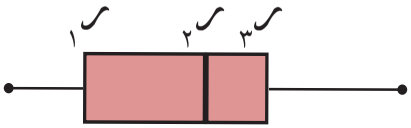
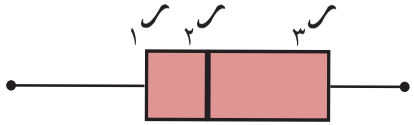
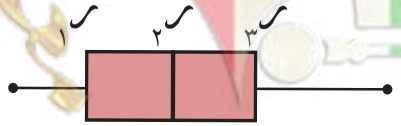
أ) **أوجد كل من المنوال ، المتوسط الحسابي والوسيط ؟**

ب) **هل يوجد التواء ؟ حدد نوعه إن وجد .**

صفوة معلمي الكويت

العلاقة بين الالتواء ومخطط الصندوق ذي العارضتين

(٤ - ٢ - ب)

الالتواء إلى اليسار (الالتواء السالب)	الالتواء إلى اليمين (الالتواء موجب)	متماثل
		
		
يوضّح مخطط الصندوق ذي العارضتين أن الوسيط أقرب إلى الربيع الأعلى منه إلى الربيع الأدنى.	يوضّح مخطط الصندوق ذي العارضتين أن الوسيط أقرب إلى الربيع الأدنى منه إلى الربيع الأعلى.	يوضّح مخطط الصندوق ذي العارضتين أن الوسيط يقع في المنتصف بين الربيع الأدنى والربيع الأعلى.

كتاب الطالب مثال صـ ٢٢ رقم ٣ :

تمثّل البيانات التالية المصروف اليومي لعدة عائلات في الكويت بالدينار الكويتي (مرتبة تصاعديًّا):

٢٧ ، ٢٨ ، ٣٠ ، ٣٢ ، ٣٤ ، ٣٨ ، ٤١ ، ٤٢ ، ٤٣ ، ٤٤ ، ٤٦ ، ٥٣ ، ٥٦ ، ٦٠

أ) احسب الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى.

ب) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين.

ج) هل البيانات تبيّن تماثلًا أم التواء إلى اليمين أو التواء إلى اليسار؟

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٢٢ رقم ٣ :

في البيانات التالية: ٤٥ ، ٤٨ ، ٥٢ ، ٥٩ ، ٦٤ ، ٦٦ ، ٧٢ ، ٧٦ ، ٧٩ ، ٨٠ ، ٨٦ ، ٩٠ ، ٩٦ ، ٩٨ ، ١٠٥ ، ١٠٩ ، ١١٣ ، ١١٧ ، ١٢٢

أ) احسب الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى.

ب) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين.

ج) هل البيانات تبيّن تماثلًا أم التواء إلى اليمين أو التواء إلى اليسار؟

صفوة معلمي الكويت

مقاييس التشتت

المدى = القيمة العظمى - القيمة الصغرى

$$\text{نصف المدى الربيعي} = \frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{٢}$$

$$\text{التباين } ع^{٢} = \frac{\sum (س - \overline{س})^{٢}}{ن}$$

$$\text{الانحراف المعياري } ع = \sqrt{\frac{\sum (س - \overline{س})^{٢}}{ن}}$$

حيث س = المتغير، $\overline{س}$ = المتوسط الحسابي، ن = عدد القيم.
إذا كان يوجد تكرار للقيم في البيانات يكون لدينا:

$$ع^{٢} = \frac{\sum_{ر=١}^{م} (س_ر - \overline{س})^{٢} ت_ر}{\sum_{ر=١}^{م} ت_ر} \quad ، \quad ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{م} (س_ر - \overline{س})^{٢} ت_ر}{\sum_{ر=١}^{م} ت_ر}}$$

حيث $ت_ر$ = عدد تكرار المتغيّر س

صفوة معلمي الكويت

كتاب الطالب مثال صـ ٢٥ رقم ١ :

لنأخذ البيانات: ٢، ٤، ٥، ٦، ٦، ٧، ٧، ٧، ٨، ٨.

أ) أوجد المدى، الوسيط، الربيع الأدنى، الربيع الأعلى لهذه البيانات.

ب) أوجد نصف المدى الربيعي.

جـ) أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٢٥ رقم ١ :

لنأخذ البيانات: ١٧، ١٦، ٨، ١٥، ٩، ١١، ١٢، ١٣، ٧.

أ) أوجد المدى، الوسيط، الربيع الأدنى، الربيع الأعلى، نصف المدى الربيعي لهذه البيانات.

ب) أوجد المتوسط الحسابي، التباين، الانحراف المعياري.

صفوة معلمي الكويت

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٢٦ رقم ٢ :

لاحظ صاحب صيدلية أن مبيع الأدوية بحسب أسعارها بالدينار الكويتي كما يلي:

الفئة (بالدينار)	٠ –	٥ –	١٠ –	١٥ –	٢٠ –	٢٥ –	المجموع
التكرار	١٩	٣٠	٤٧	٢٨	٢٠	١٦	١٦٠

أ) أكمل الجدول بإيجاد مركز كل فئة، ثم أوجد المتوسط الحسابي.

ب) أوجد التباين والانحراف المعياري لأسعار الأدوية.

أ)

الوقت المستغرق بالدقائق										المجموع
عدد المرضى										
مركز الفئة										

ب) لإيجاد التباين والانحراف المعياري نكوّن الجدول التالي:

مركز الفئة $س_ر$	التكرار $(ت_ر)$	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^2$	$ت_ر(س_ر - \overline{س})^2$
			المجموع =	

صفوة معلمي الكويت

كراسة التمارين صـ ١٦ رقم ١ :

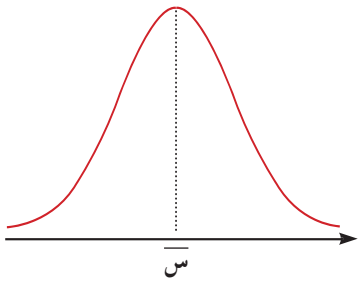
في البيانات التالية : ٨ ، ٧ ، ١٠ ، ١٥ ، ١٣ ، ٩ ، ١١ ، ١٢ ، ١٤

أ **أوجد المدى ، الوسيط ، الربيع الأدنى ، الربيع الأعلى ، نصف المدى الربيعي .**

ب **أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم هذه البيانات .**

صفوة معلمي الكويت

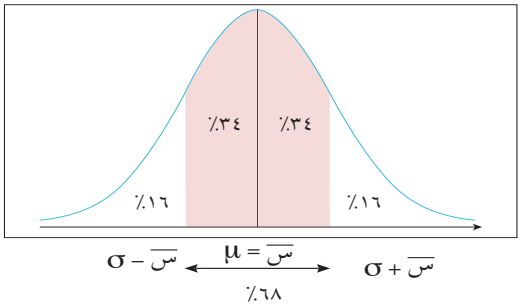
من خواص منحنى التوزيع الطبيعي:



- أن يكون على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول المتوسط الحسابي.
- أن تتساوى فيه قيم المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.
- أن ينحدر طرفاه تدريجيًّا ويمتدان إلى ما لانهاية ولا يلتقيان مع المحور الأفقي أبدًا.

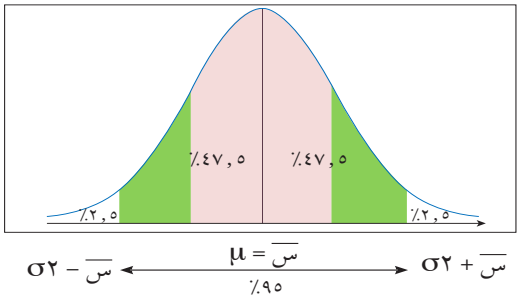
القاعدة التجريبية

■ حوالى ٦٨٪ من قيم هذه البيانات تقع على الفترة [س̄ − σ ، س̄ + σ].



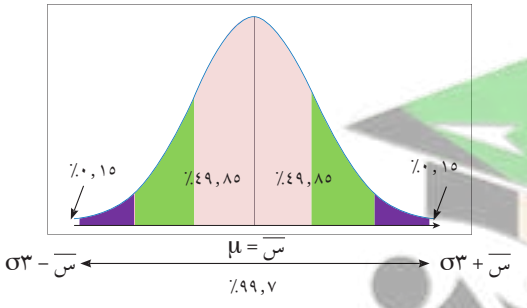
٦٨٪ من البيانات تقع على الفترة [س̄ − σ ، س̄ + σ]

■ حوالى ٩٥٪ من قيم هذه البيانات تقع على الفترة [س̄ − ٢σ ، س̄ + ٢σ]



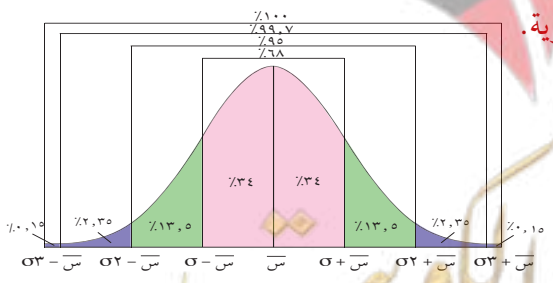
٩٥٪ من البيانات تقع على الفترة [س̄ − ٢σ ، س̄ + ٢σ]

■ حوالى ٩٩,٧٪ من قيم هذه البيانات تقع على الفترة [س̄ − ٣σ ، س̄ + ٣σ]



٩٩,٧٪ من البيانات تقع على الفترة [س̄ − ٣σ ، س̄ + ٣σ]

يبيّن الشكل أدناه التوزيعات للفترات الثلاث ونسبها المئوية.



كتاب الطالب مثال صـ ٢٩ رقم ٣ :

إذا كان المتوسط الحسابي لأرباح إحدى الشركات الصغيرة ٣٥٠ دينارًا والانحراف المعياري ١١٥ والمنحنى التكراري لأرباح هذه الشركة هو على شكل الجرس (توزيع طبيعي).

أ) طبّق القاعدة التجريبية.

ب) هل وصلت أرباح الشركة إلى ٦٩٠ دينارًا؟ فسّر ذلك.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٢٩ رقم ٣ :

لاحظت شركة تجارية أن المتوسط الحسابي لأرباحها ٤٧٥ دينارًا بانحراف معياري ١١٥ دينارًا.

أ) طبّق القاعدة التجريبية.

ب) هل وصلت أرباح هذه الشركة إلى ٧٥٠ دينارًا؟ فسّر ذلك.

صفوة معلمي الكويت

يعلن مصنع لإنتاج البطاريات المستخدمة في السيارات أن متوسط عمر البطارية من النوع (أ) هو ٦٠ شهرًا بانحراف معياري ١٠ أشهر.

على افتراض أن المنحنى الممثل لتوزيع عمر البطاريات يقترب كثيرًا من التوزيع الطبيعي.

أ طبّق القاعدة التجريبية.

ب أوجد النسبة المئوية للبطاريات من النوع (أ) التي يزيد عمرها عن ٥٠ شهرًا بفرض أن ما يعلنه المصنع صحيحًا.

جـ أوجد النسبة المئوية للبطاريات من النوع (أ) التي يقل عمرها عن ٤٠ شهرًا بفرض أن ما يعلنه المصنع صحيحًا.

صفوة معلمي الكويت

$$\text{القيمة المعيارية } (ن) = \frac{\text{قيمة المفردة - المتوسط الحسابي}}{\text{الانحراف المعياري}} = \frac{س - \overline{س}}{\sigma}$$

كتاب الطالب مثال صـ ٣١ رقم ٥ :

في أحد الاختبارات نال أحد الطلاب درجة ١٦ من ٢٠ في مادة الرياضيات حيث المتوسط الحسابي ١٣ والانحراف المعياري ٥ ونال أيضًا ١٦ من ٢٠ في مادة الكيمياء حيث المتوسط الحسابي ١٤ والانحراف المعياري ٤ .

ما القيمة المعيارية للدرجة ١٦ مقارنة مع درجات كل مادة؟ أيهما أفضل؟

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٣١ رقم ٥ :

جاءت إحدى درجات طالب في مادة الفيزياء ١٥ حيث المتوسط الحسابي ١٤ والانحراف المعياري ٣,٨ وفي مادة الكيمياء ١٥ حيث المتوسط الحسابي ١٣ والانحراف المعياري ٧,٨

ما القيمة المعيارية للدرجة ١٥ مقارنة مع درجات كل مادة؟ أيهما أفضل؟

صفوة معلمي الكويت

كتاب الطالب مثال صـ ٣٢ رقم ٦ :

في نتيجة نهاية العام الدراسي حصلت الطالبة موضي على ٦٤ درجة في مادة اللغة العربية حيث المتوسط الحسابي ٦٩ والانحراف المعياري ٨. وحصلت على ٤٨ درجة في مادة الجغرافيا حيث المتوسط الحسابي ٥٦ والانحراف المعياري ١٠ .

في أي من المادتين كانت موضي أفضل؟

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٣٢ رقم ٦ :

يسكن خالد في المدينة (أ) حيث إن طول قامته ١٨٠ سم والمتوسط الحسابي لأطوال قامات الرجال في هذه المدينة ١٧٤ سم مع انحراف معياري ١٢ سم. أما صالح فيسكن في المدينة ب حيث إن طول قامته ١٧٢ سم والمتوسط الحسابي لأطوال قامات الرجال في هذه المدينة ١٦٥ سم مع انحراف معياري ١٥ .

أي منهما طول قامته أفضل من الآخر مقارنة مع أطوال الرجال في كل مدينة؟

صفوة معلمي الكويت

البنود الموضوعية

في البنود (١-٧) عبارات، ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة، (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

(١) في البيانات التالية: ٣، ٨، ١٢، ١٥، ٢٠ نصف المدى الربيعي هو ١٧ (أ) (ب)

(٢) في البيانات التالية: ٣٠٨، ٣١٤، ٣١٦، ٣١٧، ٣٢١، ٣٢١، ٣٢١، ٣٢٤، ٣٢٥، ٣٢٦، ٣٢٦، ٣٢٧، ٣٣٢ الربيع الأدنى هو ٣١٦,٥ (أ) (ب)

(٣) إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من القيم هو ٤ فإن التباين هو ٢ (أ) (ب)

(٤) إذا كان المتوسط الحسابي لِعَيّنة ما يساوي ٢٠ والانحراف المعياري يساوي ٢ والمنحنى على شكل جرس فإن ٩٥٪ من القيم تقع في [١٦، ٢٤] (أ) (ب)

(٥) في مجموعة بيانات إذا كان المتوسط الحسابي $\overline{س}$ = ١٤، والانحراف المعياري σ = ٤ فإن القيمة المعيارية لِ س = ١٦ هي ن = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(٦) في التوزيع الطبيعي الفترة [$\overline{س}$ − σ، $\overline{س}$ + σ] تحتوي على ٩٥٪ من قيم البيانات. (أ) (ب)

(٧) في مجموعة بيانات إذا كان المتوسط الحسابي $\overline{س}$ = ١٢ القيمة المعيارية لِ س = ١٥ هي ن = ٠,٤ فإن الانحراف المعياري σ = ٧,٥ (أ) (ب)

الاختيار من متعدد: في البنود (٨-١٣)، لكل بند أربعة خيارات واحد فقط منها صحيح، ظلّل رمز الدائرة الدال على الاختيار الصحيح.

(٨) إذا كانت القيمة المعيارية لِ س = ١٨ من مجموعة بيانات هي ن = ٠,٧٥ والانحراف المعياري σ = ٨ فإن المتوسط الحسابي $\overline{س}$ يساوي:

(أ) ٢٤ (ب) ١٢ (جـ) -١٢ (د) -٢٤

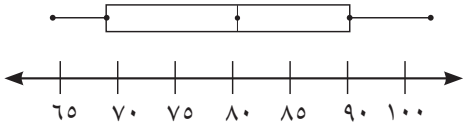
(٩) وسيط البيانات التالية: ٥٠، ١، ١٠، ١٥، ٥، ١٠، ١٠، ٢٠، ٢٥، ١٥، هو:

(أ) ١٠ (ب) ١٢,٥ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

صفوة معلمي الكويت

البنود الموضوعية

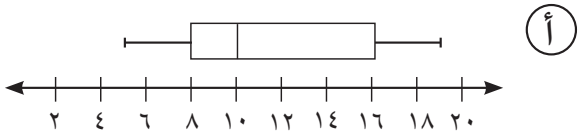
(١٠) من خلال مخطط الصندوق ذي العارضتين التالي، قيمة الربيع الأعلى هي:

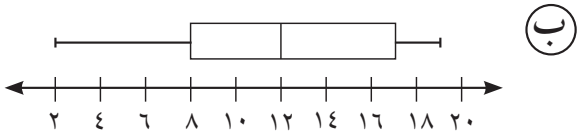


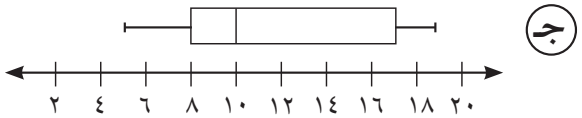
أ) ٧٠ ب) ٨٠ ج) ٩٠ د) ١٠٠

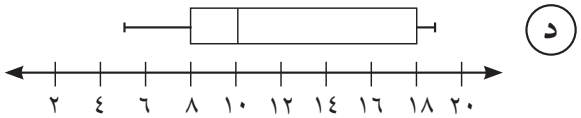
(١١) البيانات: ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ٩، ٩، ١٠، ١٢، ١٤، ١٧، ١٨، ١٨، ١٩، ١٩ تمثّل عدد ساعات استخدام شبكة الإنترنت من قبل طلاب صف الرياضيات.

أي مخطط صندوق ذو العارضتين أدناه يمثل هذه البيانات؟

أ)


ب)


ج)


د)


(١٢) أي مما يلي لا يمثل مقاييس النزعة المركزية.

أ) المتوسط الحسابي ب) الوسيط

ج) التباين د) المنوال

(١٣) في المنحنى التكراري حيث الالتواء لجهة اليمين يكون المتوسط الحسابي:

أ) أكبر من الوسيط ب) أصغر من الوسيط

ج) يساوي الوسيط د) ليس أي مما سبق صحيحًا

صفوة معلمي الكويت

الوحدة الخامسة

الاحتمال

٥ – ١ مبدأ العد والتباديل والتوافيق

(٥–١–ب) المبدأ الأساسي للعد

(٥–١–جـ) مضروب العدد

(٥–١–د) التباديل

(٥–١–هـ) التوافيق

٥ – ٢ نظرية ذات الحدين

(٥–٢–ب) نظرية ذات الحدين

٥ – ٣ الاحتمال

(٥–٣–أ) التجربة العشوائية وفضاء العينة

(٥–٣–ب) تعيين احتمالات الأحداث

(٥–٣–جـ) الأحداث المتنافية

(٥–٣–د) متمم الحدث

(٥–٣–هـ) الحدثان المستقلان

صفوة معلمي الكويت

المبدأ الأساسي للعد

لإجراء عملية على م مرحلة متتابعة، وقد أجريت المرحلة الأولى بـ $ن_{١}$ طريقة مختلفة، والمرحلة الثانية بـ $ن_{٢}$ طريقة مختلفة، وهكذا حتى المرحلة الأخيرة م بـ $ن_{م}$ طريقة مختلفة، فإن عدد طرائق إجراء هذه العملية هو: $ن_{١} \times ن_{٢} \times \ldots \times ن_{م}$.

كتاب الطالب مثال صـ ٥٤ رقم ٢ :

لوحات السيارات في احدى القرى السياحية تبدأ من اليمين بحرف من حروف الأبجدية يتبعه رقمان يتم اختيارها من المجموعة {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } .

كم عدد لوحات السيارات الممكنة بحيث أنه لا يوجد تكرار لأي من الحروف أو الأرقام في أي من لوحات السيارات ؟

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٥٤ رقم ٢ :

لوحات السيارات في احدى القرى السياحية تبدأ من اليمين بحرف من حروف الأبجدية يتبعه ثلاثة ارقام يتم اختيارها من المجموعة { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } .

كم عدد لوحات السيارات الممكنة بحيث أنه لا يوجد تكرار لأي من الحروف أو الأرقام في أي من لوحات السيارات ؟

صفوة معلمي الكويت

كتاب الطالب مثال صـ ٥٥ رقم ٣ :

كم عدد الأعداد المكون رمز كل منها من أربعة أرقام مأخوذة من عناصر المجموعة {٢، ٥، ٦، ٨} في كل مما يلي:

أ) إذا سمح بالتكرار.

ب) إذا لم يسمح بالتكرار.

جـ) إذا كان رقم الآحاد ٢ (لا يسمح بالتكرار)

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٥٥ رقم ٣ :

كم عدد الأعداد المكون رمز كل منها من ثلاث أرقام مأخوذة من عناصر المجموعة {١ ، ٣ ، ٦ ، ٩ } في كل مما يلي:

أ) إذا سمح بالتكرار.

ب) إذا لم يسمح بالتكرار.

جـ) إذا كان العدد فردي ويسمح بالتكرار .

صفوة معلمي الكويت

يسمى ناتج الضرب ٤ × ٣ × ٢ × ١ مضروب ٤ ويرمز إليه بالرمز ٤!

وعمومًا، ن! = ن × (ن − ١) × (ن − ٢) × (ن − ٣) × ... × ٣ × ٢ × ١ حيث ن عدد صحيح موجب.

لاحظ أن: ن! = ن × (ن − ١)! ٠! = ١

كتاب الطالب مثال + حاول أن تحل صـ ٥٦ رقم ٤ :

احسب (موضحا خطوات الحل) :

أ) ٥!

أ) ٧!

ب) $\frac{١٢!}{٩!}$

ب) $\frac{١٠!}{٨!}$

جـ) $\frac{١٦!}{١٢!\ ٤!}$

جـ) $\frac{١٤!}{٨!\ ٧!}$

صفوة معلمي الكويت

- التبديل هو وضع العناصر وفق ترتيب معين.
- عدد تباديل ن من الأشياء هو ن!.

عدد تباديل ن من العناصر المختلفة مأخوذة منها ر في كل مرة هو:

$ل^{ن}_{ر} = ن \times (ن - ١) \times (ن - ٢) \times \ldots \times (ن - ر + ١)$ حيث ر ، ن $\in$ صـ$_{+}$ ، ر $\geq$ ن

عندما ر = ٠ يعرّف $ل^{ن}_{٠} = ١$

قانون التباديل

$$ل^{ن}_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$: ر $\geq$ ن ، ر ، ن $\in$ صـ$_{+}$

كتاب الطالب مثال + حاول أن تحل صـ ٥٧ رقم ٥ :

فصل فيه ٢٠ طالبًا. يراد اختيار ثلاثة منهم على أن يكون الأول رئيسًا والثاني نائبًا للرئيس والثالث أمينًا للسر.
بكم طريقة يمكن اختيار الطلاب الثلاثة؟

ما عدد الكلمات المكونة من ٣ أحرف مختلفة التي يمكن تكوينها باستخدام أحرف كلمة «سعود»؟

صفوة معلمي الكويت

كتاب الطالب مثال صـ ٥٨ رقم ٦ :

أوجد قيمة كل مما يلي (موضحًا خطوات الحل):

أ) $أ^{٨}ل_{٣}$ ب) $ب^{٧}ل_{٣} + ب^{٧}ل_{٥}$ ج) $\frac{ج^{٩}ل_{٥}}{ج^{٨}ل_{٤}}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٥٨ رقم ٦ :

أوجد قيمة كل مما يلي (موضحًا خطوات الحل):

أ) $أ^{٧}ل_{٤}$ ب) $ب^{٥}ل_{٤} + ب^{٥}ل_{٥}$ ج) $\frac{ج^{١٠}ل_{٧}}{ج^{٩}ل_{٦}}$

صفوة معلمي الكويت

بعد انتهاء مباراة كرة القدم بالتعادل، أراد المدرب اختيار ٥ لاعبين بالترتيب لركلات الترجيح.

أ) بكم طريقة يمكن اختيار اللاعبين الخمسة من بين اللاعبين الأحد عشر؟

ب) ما عدد الخيارات إذا استثني حارس المرمى؟

عندما نريد إيجاد المجموعات الجزئية المكوّنة كل منها من ر عنصر، والتي يمكن اختيارها من مجموعة مكوّنة من ن عنصر بصرف النظر عن الترتيب فنحن نحسب **التوافيق** ويرمز له بالرمز $\binom{ن}{ر}$ ، $ن ق_ر$.

قانون التوافيق

إذا كان ن، ر عددان صحيحان موجبين حيث ن ≥ ر ، فإن:

عدد التوافيق المكوّنة كل منها من ر من العناصر والمختارة من بين ن من العناصر في الوقت نفسه هو:

$$ن ق_ر = \frac{ن ل_ر}{ر!} \qquad ن ق_ر = \frac{ن!}{(ن - ر)! ر!}$$

ملاحظات:

- عندما ر = ٠ يعرّف $ن ق_٠ = ١$
- $ن ق_١ = ن$
- $ن ق_ن = ١$
- $ن ق_ر = ن ق_{ن-ر}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٦٠ رقم ٨ :

في إحدى محافظات دولة الكويت ١٢ صيدلية . يريد المسؤولون اختيار ٤ صيدليات منها لتأمين دوام ليلي بكم طريقة ممكنة يمكن اختيار الصيدليات الأربع ؟

كراسة التمارين صـ ٣٣ رقم ٣٠ :

بكم طريقة يمكن اختيار أربع طلاب من بين ١٢ طالبا للذهاب للمركز العلمي .

صفوة معلمي الكويت

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٦١ رقم ٩ :

في الصف الحادي عشر ٢٠ طالبا ، وفي الصف العاشر ٢٤ طالبا . أراد معلم الرياضة اختيار ٦ طلاب من الصف الحادي عشر، ٥ طلاب من الصف العاشر لتشكيل فريق كرة القدم . كم عدد الفرق التي بإمكانه تشكيلها ؟

كراسة التمارين صـ ٣٣ رقم ٢٨ :

من بين ٥ معلمين يراد اختيار معلم لتدريب طلبة الأولمبياد في مادة الرياضيات ثم معلم اخر لإعداد الاختبار .

أوجد عدد طرق الاختيارات .

صفوة معلمي الكويت

حلّ كل معادلة مما يلي حيث ن عدد صحيح موجب أكبر من ٢.

أ $ن ق_{٢} = ١٠$ ب $ن ل_{٢} = ١٢ ن$ ج $ن ق_{٢} = ن$

صفوة معلمي الكويت

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٦٢ رقم ١٠ :

حل كل معادلة مما يلي حيث ن عدد صحيح موجب أكبر من ٢ .

أ $ق_{٢}^{ن+١} = ٢ ن$

ب $ل_{٣}^{ن} = ٢٤$

ج $ق_{٣}^{ن} = ل_{٢}^{ن}$

نظرية ذات الحدين

لأي عدد صحيح موجب ن،

$(أ + ب)^{ن} = {}_{ن}ق_{٠} أ^{ن} + {}_{ن}ق_{١} أ^{ن-١} ب + {}_{ن}ق_{٢} أ^{ن-٢} ب^{٢} + \ldots + {}_{ن}ق_{ن-١} أ ب^{ن-١} + {}_{ن}ق_{ن} ب^{ن}$

خواص نظرية ذات الحدين

١. مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ يتضمن ن + ١ حدًّا.

٢. الحد الأول في المفكوك هو $أ^{ن}$، ثم ينقص أس العدد أ في الحدود التالية بمقدار الوحدة على التوالي.

٣. يبدأ ظهور العدد ب في الحد الثاني، ثم يزيد أس العدد ب بمقدار الوحدة على التوالي حتى نصل إلى الحد الأخير في المفكوك ويكون $ب^{ن}$.

٤. مجموع أسي العدد أ، والعدد ب في أي حد من حدود المفكوك **ثابت** ويساوي الأس ن.

٥. يتساوى معاملا كل حدين لهما البعد نفسه عن الحد الأول والحد الأخير:

معامل الحد الأول يساوي معامل الحد الأخير ومعامل الحد الثاني يساوي معامل الحد ما قبل الأخير وهكذا...

٦. الحد الذي ترتيبه ر + ١ يرمز له بالرمز $ح_{ر+١} = {}_{ن}ق_{ر} أ^{ن-ر} ب^{ر}$

كتاب الطالب مثال صـ ٦٦ رقم ٣ :

استخدم نظرية ذات الحدين لإيجاد مفكوك $(س + ٢)^{٦}$

صفوة معلمي الكويت

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٦٦ رقم ٣ :

استخدم نظرية ذات الحدين لإيجاد مفكوك $(س + ٣)^{٥}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٦٦ رقم ٤ :

أوجد مفكوك $(٣س - ٤ ص)^{٣}$

صفوة معلمي الكويت

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٦٦ رقم ٥ :

أوجد الحد السادس في مفكوك $(س + ٢ ص)^{٧}$

كتاب الطالب مثال صـ ٦٧ رقم ٦ :

في مفكوك $(٣ س - ٢)^{٨}$ أوجد معامل $س^{٥}$

تستخدم كلمة «احتمال» كثيرًا في حياتنا اليومية وهي تستخدم للتعبير عن قياس فرصة وقوع حدث معين غير مؤكد.

(٥-٣-١) التجربة العشوائية و فضاء العينة

التجربة العشوائية هي تجربة أو عملية تحقق الشروط التالية:

١. جميع النتائج الممكنة للتجربة تكون معلومة مسبقًا قبل إجراءها.
٢. لا يمكن توقع نتيجة التجربة بشكل مؤكد قبل إجراءها.
٣. يمكن حساب فرصة ظهور كل نتيجة من نتائج التجربة قبل إجراء التجربة.

فضاء العينة لتجربة عشوائية هو المجموعة المكونة من جميع النواتج الممكنة للتجربة.
نرمز لفضاء العينة بالرمز (ف) ونرمز لعدد عناصر فضاء العينة بالرمز ن(ف)
الناتج هو أي نتيجة من نتائج التجربة العشوائية أي أنه عنصر واحد من عناصر فضاء العينة.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٦٩ رقم ١ :

في الكيس الأول ٥ كرات متماثلة مرقمة من ١ إلى ٥ وفي الكيس الثاني ٥ كرات متماثلة مرقمة من ٦ إلى ١٠ سحبت عشوائيا كرة من الكيس الأول ثم سحبت كرة من الكيس الثاني .

اكتب كل عناصر فضاء العينة .

كم عدد النواتج الممكنة ؟

صفوة معلمي الكويت

الحدث

الحدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة وقد يساويه.

أنواع الحدث

(١) **الحدث البسيط** هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ف تحتوي على عنصر واحد.

(٢) **الحدث المركب** هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ف تحتوي على أكثر من عنصر.

(٣) **الحدث المستحيل** هو مجموعة جزئية خالية من فضاء العينة ف ويرمز له بالرمز ϕ أو $\{\}$.

(٤) **الحدث المؤكد** هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ف ويساويه.

كتاب الطالب مثال وحاول أن تحل صـ ٧٠ رقم ٢ :

في تجربة إلقاء قطعة نقود معدنية منتظمة ثلاث مرّات متتالية، أوجد:

أ) فضاء العيّنة (ف).

ب) الحدث أ: «ظهور صورتين وكتابة».

جـ) الحدث ب: «ظهور ثلاث صور».

د) الحدث جـ: «ظهور صورة واحدة على الأقل».

هـ) الحدث د: «ظهور صورة واحدة على الأكثر».

أ) الحدث أ: «ظهور كتابتين وصورة».

ب) الحدث ب: «ظهور كتابة واحدة على الأقل».

صفوة معلمي الكويت

احتمال وقوع الحدث

إذا كان أ حدثًا في فضاء عيّنة ف (منته وغير خال) لتجربة عشوائية نتائجها لها فرص الظهور نفسها، فإنّ احتمال وقوع الحدث أ هو:

$$ل(أ) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث (أ)}}{\text{عدد نواتج فضاء العينة (ف)}} = \frac{ن(أ)}{ن(ف)}$$

ن(أ): عدد عناصر الحدث أ ، ن(ف): عدد عناصر الحدث ف.

خواص الاحتمال لحدث ما

ليكن أ حدث في فضاء عينة ف (منته وغير خال) فإن:

١ $٠ \leq ل(أ) \leq ١$.

٢ إذا كان أ = { }، فإن ل(أ) = ٠ ويسمى أ **بالحدث المستحيل**.

٣ إذا كان أ = ف، فإن ل(أ) = ١ ويسمى ف **بالحدث المؤكد**.

كتاب الطالب مثال وحاول أن تحل صـ ٧٢ رقم ٤ :

ما احتمال اختيار رقم هاتف عشوائيًّا مكوّن من ٥ أرقام مختلفة من عناصر المجموعة {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}؟

ما احتمال اختيار رقم هاتف عشوائيًّا مكون من ٧ أرقام مختلفة؟

صفوة معلمي الكويت

عندما تكون الأحداث من فضاء العينة نفسه، ولا توجد بينها نواتج مشتركة حينها تسمى بـ «أحداث منفصلة» أو «أحداث متنافية»

قاعدة الإضافة للأحداث المتنافية

- إذا كان أ، ب حدثين في فضاء العينة فإن: ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل (ب) – ل(أ ∩ ب)
- إذا كان أ، ب حدثين متنافيين، فإنّ: ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل (ب) حيث ل(أ ∩ ب) = ٠ والعكس صحيح

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٧٣ رقم ٥ :

في تجربة إلقاء حجر نرد ، ما احتمال الحدث " الحصول على عدد أصغر من ٢

أو من مضاعفات العدد ٣ " ؟

صفوة معلمي الكويت

إذا كان الحدثان م ، ن متنافيين . أوجد ل (م ∪ ن)

حيث ل (م) = ٠,٣ ، ل (ن) = ٠,١٤

(٥-٣-د)

متمم الحدث

متمم الحدث $أ$ ويرمز له بالرمز $\overline{أ}$، هو مجموعة كل نواتج فضاء العينة وغير الموجودة في الحدث $أ$

قاعدة الحدث المتمم

إذا كانت $أ$ حدثًا، فاحتمال عدم حدوث $أ$ هو: $ل(\overline{أ}) = ١ - ل(أ)$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٧٤ رقم ٦ :

في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين أوجد احتمال الحصول على عددين مختلفين .

صفوة معلمي الكويت

(٥-٣-هـ)

الحدثان المستقلان

يكون الحدثان مستقلين إذا كان وقوع أحدهما ليس له أي تأثير على وقوع الآخر.

قاعدة الأحداث المستقلة

إذا كان أ، ب حدثين مستقلين، فإن احتمال وقوع الحدثين معًا هو:

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) • ل(ب)، والعكس صحيح.

احتمال اتحاد حدثين مستقلين

لإيجاد احتمال اتحاد حدثين نستخدم القاعدة:

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

وفي حالة حدثين مستقلين تصبح هذه القاعدة:

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ) • ل(ب)

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ ٧٦ رقم ٧ :

يلعب ابراهيم ويوسف لعبة رمي السهم . احتمال أن يصيب ابراهيم الهدف $\frac{٢}{٥}$ واحتمال أن يصيب يوسف الهدف $\frac{١}{٣}$ رمي كل منها سهما على الهدف . ما احتمال :

أ) أن يصيب كل من ابراهيم ويوسف الهدف ؟

ب) إصابة الهدف ؟

جـ) عدم اصابة الهدف ؟

صفوة معلمي الكويت

البنود الموضوعية

في البنود (١-١٢) عبارات، ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة، (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

(١) قيمة المقدار ١٠! هي ٣ ٦٢٨ ٨٠٠ (أ) (ب)

(٢) قيمة المقدار ٤! × ٥! هي ٣٦٠ (أ) (ب)

(٣) قيمة المقدار ${}^{8}ل_{2}$ هي ٣٦٠ (أ) (ب)

(٤) قيمة المقدار ${}^{5}ق_{4} \times 3$ هي ١٥ (أ) (ب)

(٥) ${}^{5}ل_{2} = 2 \times {}^{5}ق_{2}$ (أ) (ب)

(٦) مفكوك $(جـ + 1)^{5}$ هو: $جـ^{5} + 5جـ^{4} + 10جـ^{3} + 10جـ^{2} + 5جـ + 1$ (أ) (ب)

(٧) إذا كان الحد $126 جـ^{4} د^{5}$ أحد حدود مفكوك $(جـ + د)^{ن}$، فإن قيمة ن هي ٥ (أ) (ب)

(٨) إذا كان معامل الحد الثاني في مفكوك $(س + ر)^{ن}$ هو ٧ فإنّ قيمة ن هي ٦ (أ) (ب)

(٩) الحد الثاني من $(س + 3)^{9}$ هو $54 س^{8}$ (أ) (ب)

(١٠) (اختيار لون السيارة عشوائيًّا واختيار نوع الإطارات عشوائيًّا) هما حدثان مستقلان. (أ) (ب)

(١١) بفرض أن الحدثين م، ن مستقلان، $ل(م) = \frac{12}{17}$ ، $ل(ن) = \frac{3}{8}$ إذًا $ل(م \cap ن) = \frac{9}{17}$ (أ) (ب)

(١٢) في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال الحصول على العدد ٤ أو عدد زوجي يساوي $\frac{1}{2}$ (أ) (ب)

في التمارين (١٣-٢٤)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(١٣) قيمة المقدار $\frac{10!}{3!\ 7!}$ هي:

(أ) $\frac{10}{21}$ (ب) $\frac{1}{120}$ (جـ) ١٢٠ (د) ١

(١٤) قيمة المقدار ${}^{6}ل_{4} \times {}^{10}ق_{6}$ هي:

(أ) ٧٥ ٦٠٠ (ب) ٧ ٥٦٠ (جـ) ٢,٥ (د) ٢١٠

(١٥) قيمة المقدار $\frac{{}^{7}ق_{4}}{{}^{9}ق_{4}} \times {}^{9}ق_{2}$ هي:

(أ) ١٨ (ب) ٥,١٨٤ (جـ) ١٠ (د) ٧٣٥

(١٦) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار ٥ لاعبين لفريق كرة السلة من بين ١٢ لاعبًا إذا كان ترتيب المراكز في الفريق مهمًّا؟

(أ) ٩٥ ٠٤٠ (ب) ٤٧٥ ٢٠٠ (جـ) ٣٩٢ (د) ١١ ٤٠٤ ٨٠٠

(١٧) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار ٣ أعلام من مجموعة من ٧ أعلام مختلفة؟

(أ) ٢١٠ (ب) ٣٥ (جـ) ٨٤٠ (د) ٢٤

البنود الموضوعية

(١٨) مفكوك $(أ - ب)^{٣}$ هو:

(أ) $أ^{٣} + أ^{٢}ب + أب^{٢} + ب^{٣}$ (ب) $أ^{٣} + ٣أ^{٢}ب + ٣أب^{٢} + ب^{٣}$

(جـ) $أ^{٣} - أ^{٢}ب + أب^{٢} - ب^{٣}$ (د) $أ^{٣} - ٣أ^{٢}ب + ٣أب^{٢} - ب^{٣}$

(١٩) الحد الثالث في مفكوك $(أ - ب)^{٧}$ هو:

(أ) $-٢١أ^{٥}ب^{٢}$ (ب) $-٧أ^{٥}ب$

(جـ) $٧أ^{٦}ب$ (د) $٢١أ^{٥}ب^{٢}$

(٢٠) معامل $جـ^{٤}$ في مفكوك $(٢جـ - ٤ب)^{٥}$ هو:

(أ) ١٢٨٠ (ب) -٢٥٦٠ (جـ) -٣٢٠ (د) ٥١٢٠

(٢١) إذا كان الحدثان م، ن مستقلين، حيث $ل(م) = \frac{١}{٣}$ ، $ل(ن) = \frac{٩}{١٠}$ ، فإن $ل(م \cap ن)$ تساوي:

(أ) $\frac{٣}{٢٤}$ (ب) $\frac{٢٥}{٤٨}$ (جـ) $\frac{٣}{١٠}$ (د) $\frac{١١}{٤٨}$

(٢٢) إذا كان الحدثان ع، ط متنافيين حيث $ل(ع) = \frac{٣}{٥}$ ، $ل(ط) = \frac{١}{٣}$، فإن $ل(ع \cup ط)$ تساوي:

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{١٤}{١٥}$ (جـ) $\frac{٤}{١٥}$ (د) صفر

(٢٣) إذا كان الحدثان ع، ط متنافيين حيث $ل(ع) = \frac{١}{٧}$ ، $ل(ط) = ٦٠٪$، فإن $ل(ع \cup ط)$ تساوي:

(أ) $\frac{٦}{٧٠}$ (ب) ٤٢٪ (جـ) $\frac{١٦}{٣٥}$ (د) $\frac{٢٦}{٣٥}$

(٢٤) في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال الحصول على عدد زوجي أو عدد أولي يساوي:

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٥}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

صفوة معلمي الكويت