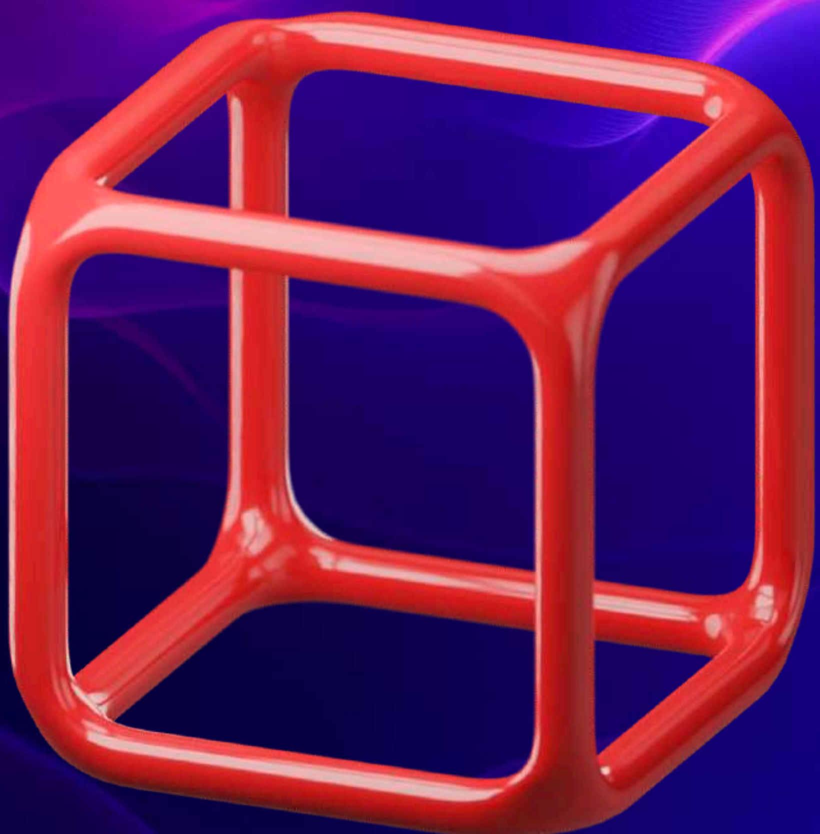
UULA



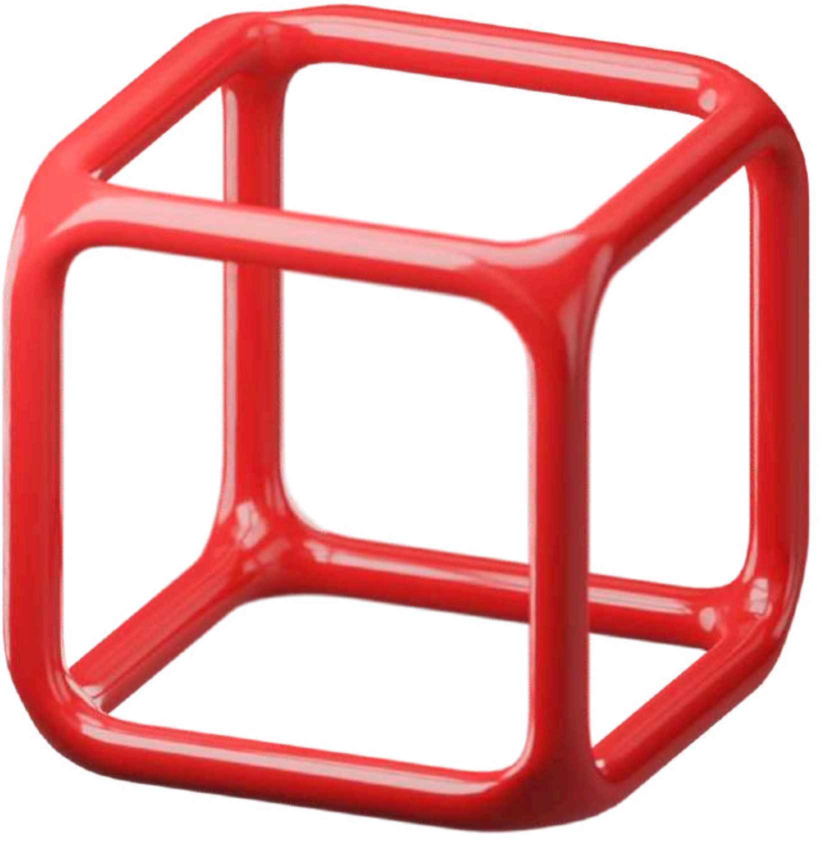
الرياضيات

الكورس الثاني ✦ 2025 – 2026

10

UULA.COM

UULA



الرياضيات

الكورس الثاني ✦ 2025 – 2026

10

UULA.COM

حقق هدفك الدراسي

ريح بالك وارفع مستوى دراستك مع المذكرة الشاملة والفيديوهات اللي تشرحها والاختبارات اللي تدربك في منصة علا

دروس يشرحها أقوى معلمي الكويت

فيديوهات مبسطة قصيرة تشرح لك كل شيء خطوة بخطوة

تفوق في القصير والفاينل مع نماذج اختبارات سابقة

نماذج اختبارات سابقة مشروحة بالكامل تجهزك لاختباراتك

نخبة المعلمين يجاوبونك بأسرع وقت

ما فهمت؟ تواصل مع أقوى المعلمين واحصل على شرح لسؤالك

اكتشف عالم التفوق مع منصة علا

لتشترك بالمادة وتستمتع بالشرح المميز صور أو اضغط على رمز الQR

المعلق

هذه المذكرة تغطي المادة كاملة.

في حال وجود أي تغيير للمنهج أو تعليق جزء منه يمكنكم مسح رمز QR للتأكد من المقرر.

المنقذ

أول ما تحتاج مساعدة بالمادة ، المنقذ موجود!

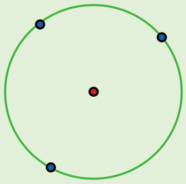
صور الQR بكاميرا التلفون أو اضغط عليه إذا كنت تستخدم المذكرة من جهازك و يطلع لك فيديو يشرح لك.

قائمة المحتوى

الدائرة - مماس الدائرة

نظرية (١) :

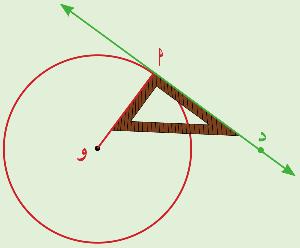
كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.



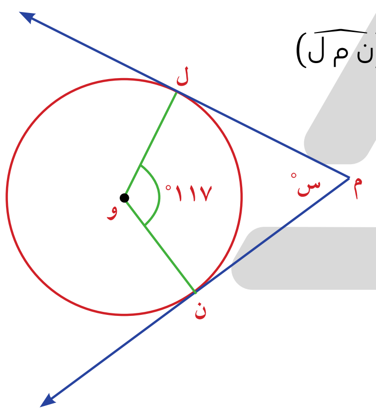
نظرية (٢) :

المماس عمودي على نصف قطر التماس إذا كان مستقيم مماس لدائرة فإنه يكون متعامدا مع نصف القطر المار بنقطة التماس أي أن

أو ⊥ أد



Q في الشكل المقابل م ن، م ل مماسان للدائرة التي مركزها و ، أوجد ق (ن م ل)



∵ م ل مماس، و ل نصف قطر التماس، ∴ و ل ⊥ م ل ← (نظرية)

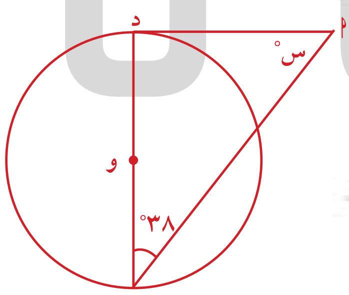
∵ م ن مماس، و ن نصف قطر التماس، ∴ و ن ⊥ م ن ← (نظرية)

مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي ٣٦٠° بالتالي:

س=٣٦٠° - (٩٠° + ٩٠° + ١١٧°) = ٦٣°

إذاً ق (ن م ل) = ٦٣°

Q في الشكل المقابل أد مماس للدائرة التي مركزها و ، أوجد قيمة س



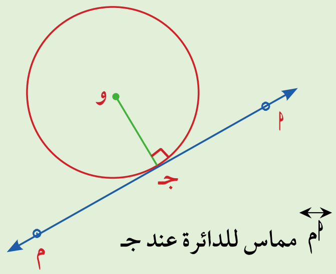
∵ أد مماس، و د نصف قطر التماس، ∴ أد ⊥ و د ← (نظرية)

مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠° بالتالي:

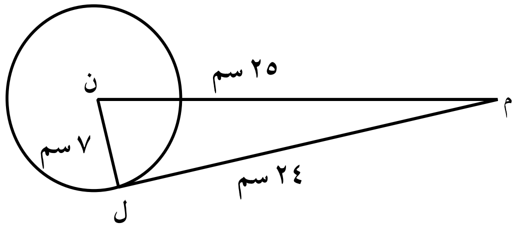
س=١٨٠° - (٩٠° + ٣٨°) = ٥٢°

نظرية (٣) :

المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماسا لهذه الدائرة عند هذه النقطة.



Q أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{لم}}$ مماس للدائرة التي مركزها ن



في المثلث م ل ن :

(م ن)^{٢} = ٢٥^{٢} = ٦٢٥

(م ل)^{٢} + (ل ن)^{٢} = ٢٤^{٢} + ٧^{٢} = ٦٢٥

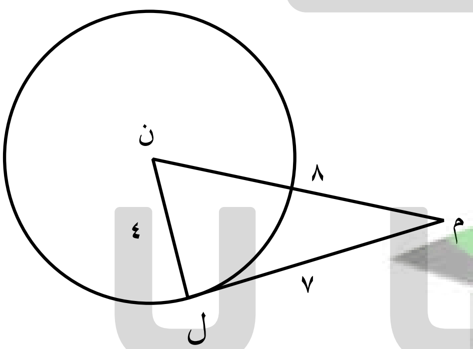
∴ △ م ل ن مثلث قائم في ل̂ (عكس فيثاغورث)

∴ $\overline{\text{مل}} \perp \overline{\text{لن}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{مل}}$ مماس للدائرة (نظرية)

Q في الشكل المقابل:

هل $\overleftrightarrow{\text{لم}}$ مماس للدائرة؟ فسر إجابتك



في المثلث م ل ن :

(م ن)^{٢} = ٨^{٢} = ٦٤

(م ل)^{٢} + (ل ن)^{٢} = ٧^{٢} + ٤^{٢} = ٦٥

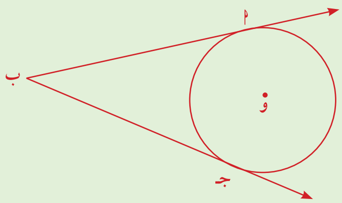
∴ △ م ل ن مثلث غير قائم (عكس فيثاغورث)

ن(ل̂) ≠ ٩٠°

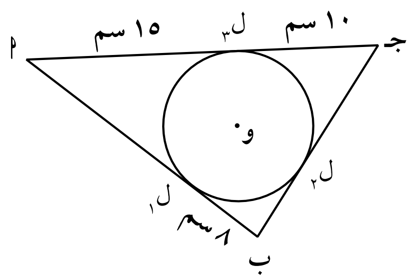
∴ $\overleftrightarrow{\text{مل}}$ ليس مماسا للدائرة (نظرية)

نظرية (٤) :

القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.



Q في الشكل المجاور أوجد محيط المثلث ابجـ



∵ $\overline{\text{با}}$ مماس للدائرة في ل$_{١}$، $\overline{\text{بجـ}}$ مماس للدائرة في ل$_{٢}$، $\overline{\text{جـا}}$ مماس للدائرة في ل$_{٣}$

∴ ال$_{١}$ = ال$_{٣}$ = ١٥ سم (نظرية)

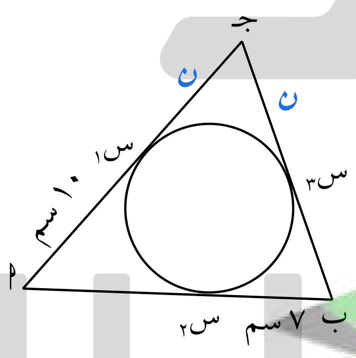
بل$_{١}$ = بل$_{٢}$ = ٨ سم (نظرية)

جـل$_{٢}$ = جـل$_{٣}$ = ١٠ سم (نظرية)

محيط المثلث ابجـ = اب + بجـ + اجـ

= ١٥ + ١٥ + ٨ + ٨ + ١٠ + ١٠ = ٦٦ سم

Q في الشكل المجاور إذا كان محيط المثلث ابجـ يساوي (٥٠) سم فاحسب جـ ب .



∵ $\overline{\text{اب}}$ مماس للدائرة في س$_{٢}$، $\overline{\text{بجـ}}$ مماس للدائرة في س$_{٣}$، $\overline{\text{جـا}}$ مماس للدائرة في س$_{١}$

∴ اس$_{١}$ = اس$_{٢}$ = ١٠ سم (نظرية)

بس$_{٢}$ = بس$_{٣}$ = ٧ سم (نظرية)

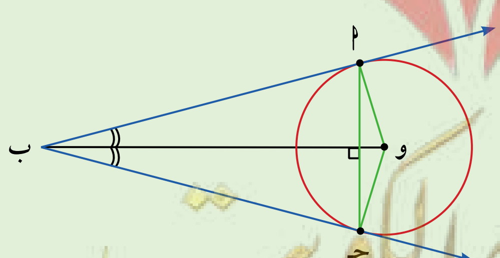
جـس$_{١}$ = جـس$_{٣}$ = ن (نظرية)

محيط المثلث أ ب جـ = ٥٠ سم ⇐ ن + ن + ١٠ + ١٠ + ٧ + ٧ = ٥٠

٢ن + ٣٤ = ٥٠ ⇐ ٢ن = ٥٠ - ٣٤ = ١٦ ⇐ ن = $\frac{١٦}{٢}$ = ٨

∴ طول $\overline{\text{بجـ}}$ = ٧ + ٨ = ١٥ سم

نتائج على نظرية (٤) :

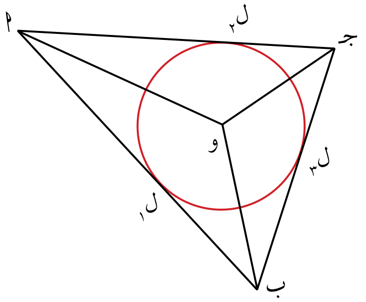


$\overline{\text{با}}$ ≅ $\overline{\text{بجـ}}$

$\overline{\text{بو}}$ منصف للزاوية (ا ب جـ)

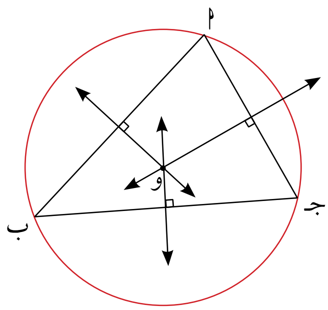
$\overline{\text{بو}}$ منصف للزاوية (ا و جـ)

$\overline{\text{بو}}$ ⊥ $\overline{\text{اجـ}}$



الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة)

هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل.
مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث.



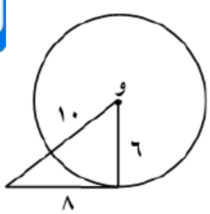
الدائرة المحيطة بمثلث (الخارجة)

هي دائرة تمر برؤوس المثلث الثلاثة.
مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث
(نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع المثلث).

التمارين الموضوعية - مماس الدائرة

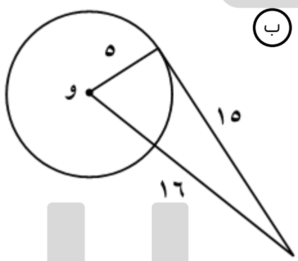
١. في الشكل المجاور ، المستقيم مماس للدائرة

أ ب



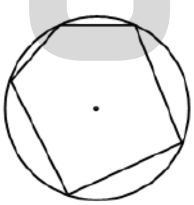
٢. في الشكل المجاور ، المستقيم مماس للدائرة

أ ب



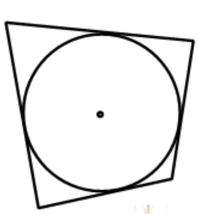
٣. في الشكل المجاور ، الدائرة محاطة بالمضلع

أ ب

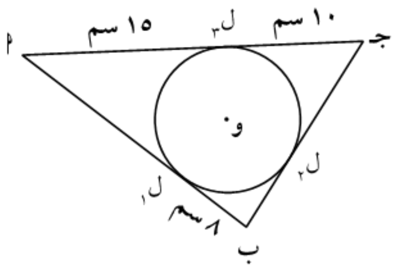


٤. في الشكل المجاور ، الدائرة محاطة بالمضلع

أ ب

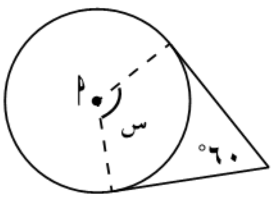


٥. في الشكل المقابل، أوجد محيط المثلث أ ب جـ



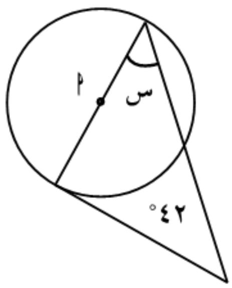
(أ) ٣٣ سم
(ب) ٤٤ سم
(ج) ٥٥ سم
(د) ٦٦ سم

٦. في الشكل المقابل، قيمة س تساوي:



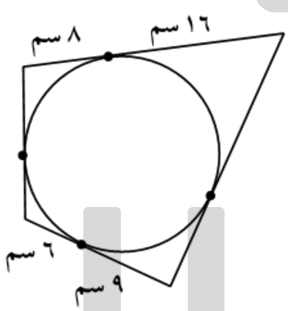
(أ) ٦٠
(ب) ٩٠
(ج) ١٢٠
(د) ١٨٠

٧. في الشكل المجاور قيمة س تساوي:



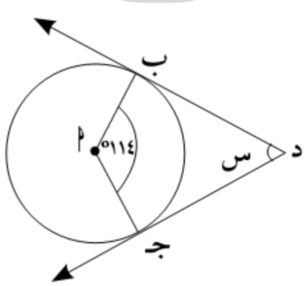
(أ) ٣٠
(ب) ٤٢
(ج) ٤٨
(د) ٩٠

٨. يحيط المضلع بدائرة. فإن محيط المضلع يساوي:



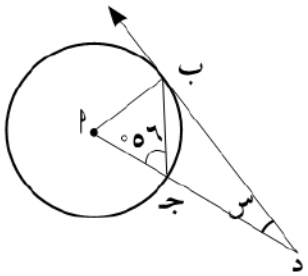
(أ) ٧٧ سم
(ب) ٨٨ سم
(ج) ٧٨ سم
(د) ٧٠ سم

٩. إذا كان $\overleftrightarrow{دب}$، $\overleftrightarrow{دجـ}$ مماسين للدائرة. فإن س =



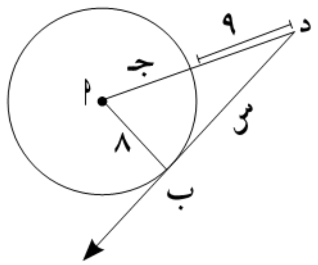
(أ) ٢٦°
(ب) ٥٧°
(ج) ٦٦°
(د) ١١٤°

١٠- إذا كان $\overleftrightarrow{دب}$ ماسا للدائرة. فإن س =



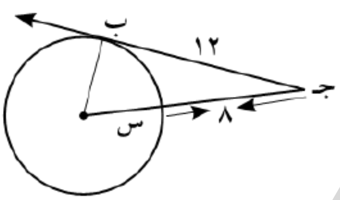
أ ٢٢°
ب ٢٨°
ج ٣٤°
د ٤٠°

١١- إذا كان $\overrightarrow{دب}$ ماسا للدائرة. فإن س =



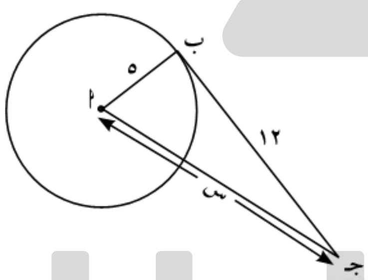
أ ٨
ب ٩
ج ١٥
د ١٧

١٢- إذا كان $\overline{جب}$ مماسا للدائرة. فإن س =



أ ٢
ب ٣
ج ٤
د ٥

١٣- إذا كان $\overline{جب}$ مماسا للدائرة. فإن س =



أ ٥
ب ١٢
ج ١٣
د ١٥

السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣
الإجابة	أ	ب	ب	أ	د	ج	ج	ج	ج	أ	ج	د	ج

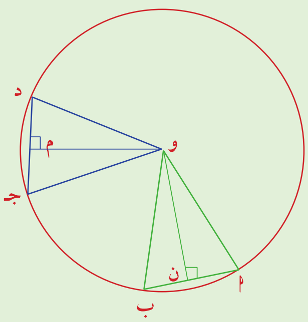
تــدرب وتــفـوق
جاوب على أهم أسئلة الدرس واثبت لنا قوتك في هذا الدرس!

الأوتار والأقواس

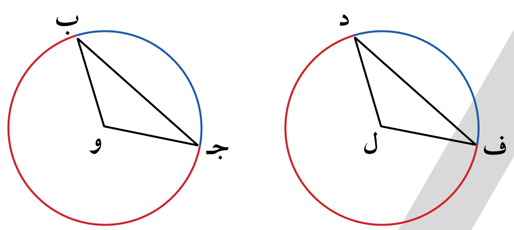
نظرية (١) :

في دائرة أو دوائر متطابقة

- للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة
- الأوتار المتطابقة تقابل أقواسا" متطابقة
- للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة



في الشكل المقابل الدائرتان متطابقتان، ⌒بجـ ≅ ⌒دف . ماذا تستنتج؟



∵ ⌒بجـ ≅ ⌒دف

∴ ‾بجـ ≅ ‾دف

∴ ∠ف لْ د ≅ ∠جـ وْ ب (نظرية)

في الرسم أعلاه، إذا كان ‾بجـ ≅ ‾دف ، فماذا تستنتج؟

∵ ‾بجـ ≅ ‾دف

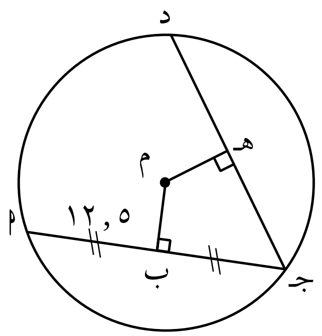
∴ ⌒بجـ ≅ ⌒دف

∴ ∠ف لْ د ≅ ∠جـ وْ ب (نظرية)

نظرية (٢) :

- الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.
- الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.

في الشكل المقابل ليكن م مركز الدائرة.
م ب = م هـ أوجد طول جـ د



∵ م ب = م هـ ، م هـ ⊥ ‾دجـ ، م ب ⊥ ‾ﺃجـ

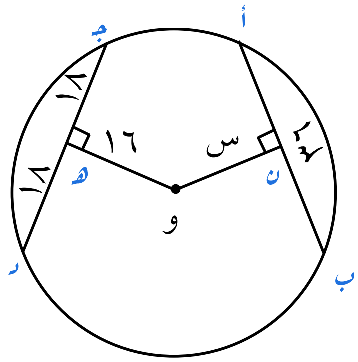
∴ جـ د = جـ ﺃ (نظرية)

= جـ ب + ب ﺃ

= ١٢,٥ + ١٢,٥ (بجـ = بﺃ)

= ٢٥

دائرة مركزها (و) أوجد قيمة س في الشكل المقابل، وفسر إجابتك.



$\overline{ون} \perp \overline{أب}$ ، $\overline{وهـ} \perp \overline{جد}$ (معطى)

أب = ٣٦

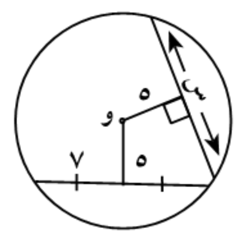
جد = ١٨ + ١٨ = ٣٦

∵ أب = جد

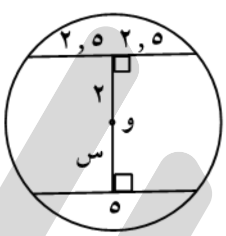
∴ ون = وهـ (نظرية)

س = ١٦

أوجد قيمة (س) في الأشكال التالية:



س = ٧ + ٧ = ١٤



س = ٢

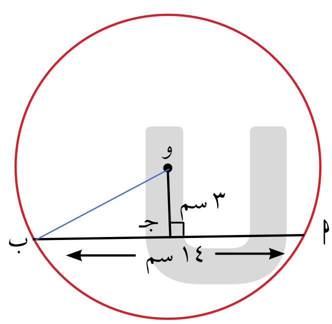
س = ٧

نظرية (٣):

- القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلا من قوسيه
- القطر الذي ينصف وترا (ليس قطرا) في دائرة يكون عموديا على هذا الوتر
- العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة

UULA

في الشكل المقابل، أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و .



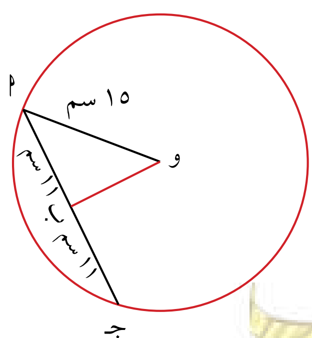
∵ $\overline{وجـ} \perp \overline{أب}$ (معطى)

∴ أجـ = جـب = $\frac{١٤}{٢}$ = ٧ سم (نظرية)

وب = $\sqrt{٧^{٢} + ٣^{٢}}$

= $\sqrt{٥٨}$ ≃ ٧,٦ سم (فيثاغورث)

في الشكل المقابل أوجد البعد بين مركز الدائرة والوتر.



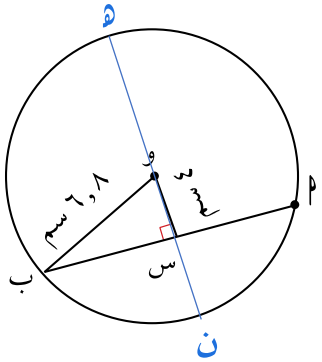
∵ أب = جـب = ١١ (معطى)

∴ $\overline{وب} \perp \overline{أجـ}$ (نظرية)

وب = $\sqrt{١٥^{٢} - ١١^{٢}}$ = ٢ $\sqrt{٢٦}$ (فيثاغورث)

≃ ١٠,٢ سم

Q في الشكل المجاور أوجد:



طول الوتر ب ا

∵ وس ⊥ اب ∴ اس = سب (نظرية)

سب = $\sqrt{(٦,٨)^{٢}-٤^{٢}}$ ≃ ٥,٤٩ سم (فيثاغورث)

اب = سب + سا

= ٥,٤٩ + ٥,٤٩ = ١٠,٩٨ سم

المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر اب.

سن = ون − وس

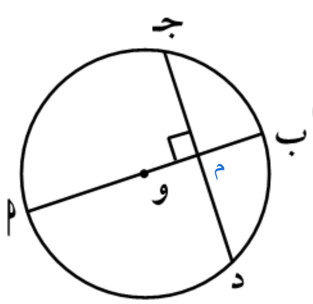
= ٦,٨ − ٤ = ٢,٨ سم

المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأكبر اب.

سهـ = س و + وهـ

= ٤ + ٦,٨ = ١٠,٨ سم

Q في الشكل المقابل إذا كان: اب قطر الدائرة، اب ⊥ جـد. ماذا تستنتج؟



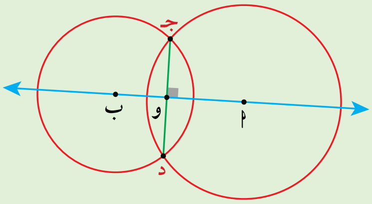
جـم ≅ دم

جـب ≅ دب

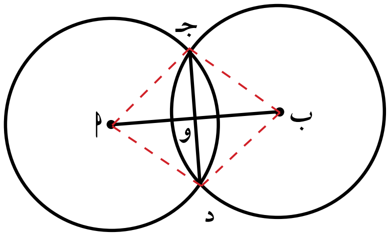
جـا ≅ دا

نتيجة:

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديا على الوتر المشترك بينهما وينصفه.



يمثل الشكل المجاور دائرتين متطابقتين $\overline{\text{دجـ}}$ وتر مشترك إذا كان:
أب = ٢٤ سم ، نق = ١٣ سم ، احسب جـ د .



∵ الدائرتان متطابقتان

∴ أجـ = أد = بجـ = بد = نق = ١٣ سم

∴ بدأجـ معين

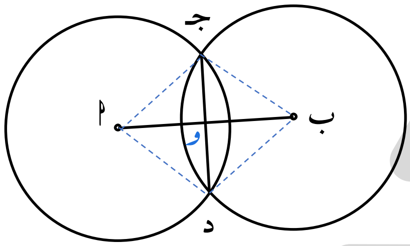
$\overline{\text{أب}} \perp \overline{\text{جـد}}$

∴ بو = وأ = ١٢ سم ، جـو = ود

وجـ = $\sqrt{١٣^٢ - ١٢^٢}$ = ٥ سم (فيثاغورث)

∴ جـد = ٥ + ٥ = ١٠ سم

أ ، ب مركزا دائرتين متطابقتين. $\overline{\text{جـد}}$ وتر مشترك للدائرتين.
إذا كان أب = ٨ سم، جـ د = ٦ سم. فما طول نصف القطر؟



∵ الدائرتان متطابقتان

∴ أجـ = أد = بجـ = بد = نق

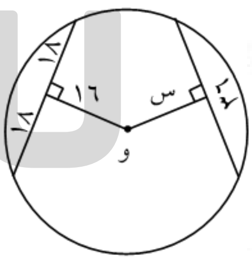
بدأجـ معين $\overline{\text{أب}} \perp \overline{\text{جـد}}$

بو = وأ = ٤ سم ، جـو = ود = ٣ سم

نق = $\sqrt{٤^٢ + ٣^٢}$ = ٥ سم (فيثاغورث)

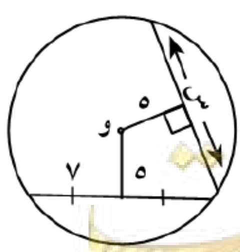
موضوعي - الأوتار والأقواس

١. في الشكل المجاور:



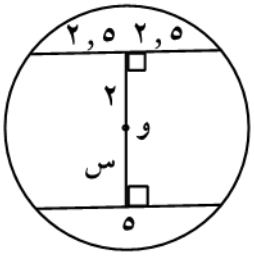
(أ) س = ٨
(ب) س = ٩
(ج) س = ١٦
(د) س = ١٨

٢. في الشكل المجاور:



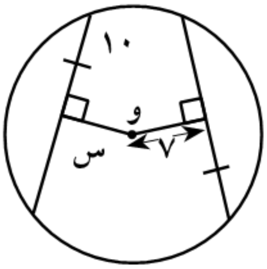
(أ) س = ٥
(ب) س = ٧
(ج) س = ١٠
(د) س = ١٤

٣. في الشكل المجاور:



(أ) س = ٢
(ب) س = ٤
(ج) س = ٥
(د) س = ١٠

٤. في الشكل المجاور:

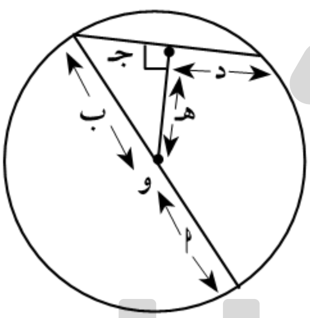


(أ) س = ٢
(ب) س = ٧
(ج) س = ١٠
(د) س = ١٤

٥. إذا كان طول قطر دائرة يساوي ٢٥ سم وطول أحد أوتارها ١٦ سم فإن البعد بين مركز الدائرة والوتر هو تقريباً:

(أ) ٨ سم
(ب) ٩,٦ سم
(ج) ١٨سم
(د) ١٩,٢ سم

٦. في الشكل المقابل العبارة الخاطئة فيما يلي هي:



(أ) $جـ^2 + هـ^2 = ب^2$
(ب) أ = ب
(ج) جـ = د
(د) هـ = د

السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	
الإجابة	ج	د	أ	ب	ب	د	

تــدرب وتـفـوق
جاوب على أهم أسئلة الدرس واثبت لنا قوتك في هذا الدرس!

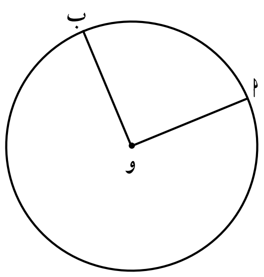
الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

تعريف

- الزاوية التي رأسها مركز الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى بالزاوية المركزية.
- الزاوية التي رأسها إحدى نقاط الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى بالزاوية المحيطة.

نظرية (١) :

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة



في الشكل المقابل دائرة مركزها و . إذا كان ن(⌒اب) = ٩٠° فأوجد ن(∠اوب)

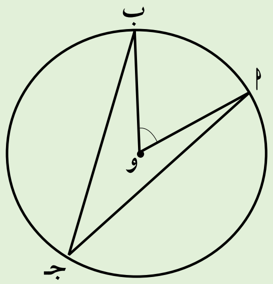
ن(∠اوب) = ن(⌒اب) = ٩٠°

(∠اوب) زاوية مركزية تقابل (⌒اب) (نظرية)

إذا كان قياس زاوية مركزية ٣٥° فأوجد قياس القوس على الدائرة المحصور بين ضلعيها

قياس القوس = قياس الزاوية المركزية = ٣٥° (نظرية)

نظرية (٢) :

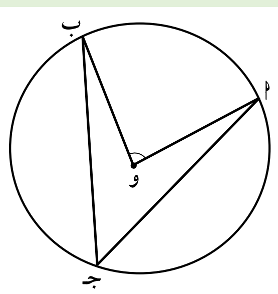


في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها

ن(∠اجب) = $\frac{1}{2}$ ن(⌒اب)

ن(∠اجب) = $\frac{1}{2}$ ن(∠ا و ب)

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه.



في الشكل المجاور: إذا كان ن(⌒اب) = ٨٠° فأوجد ن(∠بجا)

ن(∠اجب) = $\frac{1}{2}$ ن(⌒اب) (نظرية) (∠اجب) زاوية محيطية

= $\frac{1}{2}$ × ٨٠°

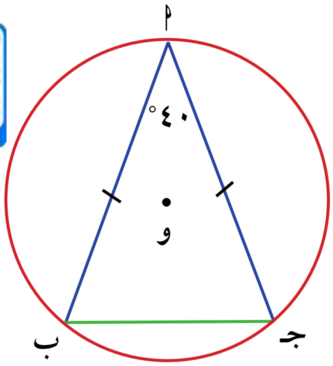
= ٤٠°

إذا كان قياس زاوية محيطية في دائرة يساوي ٥٤° فأوجد قياس القوس المحصور بين ضلعيها

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها (نظرية)

قياس القوس = ٢ × ٥٤° = ١٠٨°

Q في الشكل المقابل: جـ ب ا مثلث متطابق الضلعين حيث:
ا، ب، جـ نقاط على الدائرة التي مركزها و ، ق(ب̂اجـ) = ٤٠°
المطلوب: أوجد قياس كل من الأقواس: ⌢اب ، ⌢ب جـ ، ⌢اجـ



زوايا المثلث أ ب جـ هي زوايا محيطية في دائرة بالتالي:

ق(ا̂) = ½ ق(⌢ب جـ) ⇐ ق(⌢ب جـ) = ٤٠° × ٢ = ٨٠° (نظرية)

⇐ ق(⌢ب ا جـ) = ٣٦٠° − ٨٠° = ٢٨٠°

∵ اب = اجـ (معطى)

∴ ق(⌢اب) = ق(⌢اجـ) = ٢٨٠° ÷ ٢ = ١٤٠°

Q إذا كان ⟷هـ جـ منصف الزاوية الداخلية ا جـ̂ ب ويقطع الدائرة في النقطة هـ . ما قياس القوس الأصغر ⌢هـ ا ؟

ق(ب̂) = ق(جـ̂) = (١٨٠° − ٤٠°) ÷ ٢ = ٧٠°

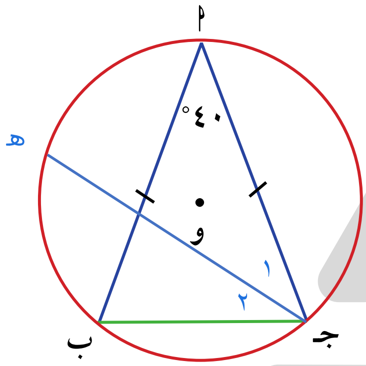
(△ا ب جـ متطابق الضلعين ، مجموع قياسات زواياه ١٨٠°)

لدينا ⟷هـ جـ منصف الزاوية ا جـ̂ ب بالتالي:

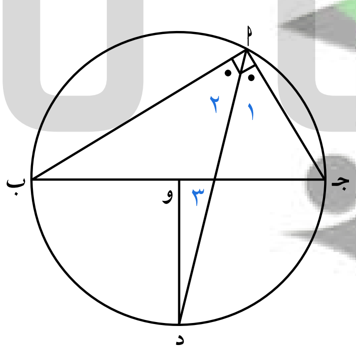
ق(١) = ق(٢) = ٧٠° ÷ ٢ = ٣٥°

ق(١) = ½ ق(⌢ا هـ) (نظرية)

ق(⌢ا هـ) = ٣٥° × ٢ = ٧٠°



Q في الشكل المقابل دائرة مركزها و أثبت أن: ‾و د ⊥ ‾جـ ب



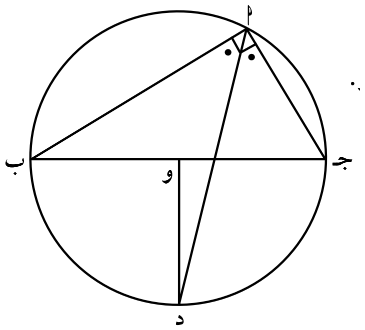
∵ ق(جـ ا̂ ب) = ٩٠° (معطى)

∴ ق(١) = ق(٢) = ٩٠° ÷ ٢ = ٤٥°

ق(١) = ½ ق(⌢جـ د) (نظرية) ⇐ ق(⌢جـ د) = ٩٠°

ق(٣) = ق(⌢جـ د) = ٩٠° (نظرية)

∴ ‾د و ⊥ ‾ب جـ



Q إذا كان ق(أبَ̂ج) = ٣٠°، أوجد ق(أدَ̂ب)

في △ابج

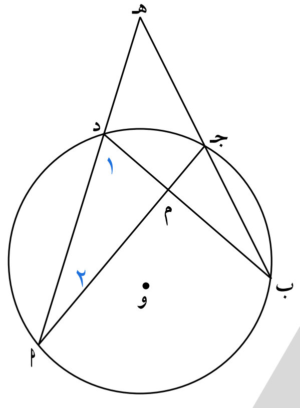
ق(ج^) = ١٨٠° − (٣٠° + ٩٠°) = ٦٠°

ق(ج^) = ½ ق(أب⌒) (نظرية)

∴ ق(أب⌒) = ٦٠° × ٢ = ١٢٠°

ق(أدَ̂ب) = ½ ق(أب⌒) (نظرية)

½ × ١٢٠ = ٦٠°

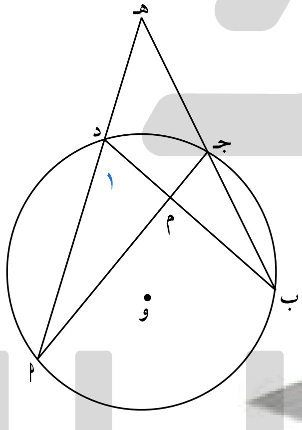


Q أثبت أن ق(أمَ̂ب) = (ق(أب⌒) + ق(جد⌒)) / ٢

ق(بمَ̂أ) = ق(١^) + ق(٢^) زاوية خارجة من مثلث

= ق(أب⌒) / ٢ + ق(جد⌒) / ٢ (نظرية)

= (ق(أب⌒) + ق(جد⌒)) / ٢



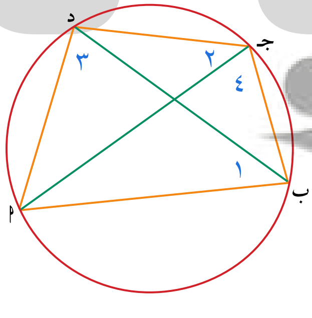
Q أثبت أن ق(بهَ̂أ) = (ق(أب⌒) − ق(جد⌒)) / ٢

ق(١^) = ق(ب^) + ق(هـ^) زاوية خارجة

ق(هـ^) = ق(١^) − ق(ب^)

ق(بهَ̂أ) = ق(أب⌒) / ٢ − ق(جد⌒) / ٢ (نظرية)

= (ق(أب⌒) − ق(جد⌒)) / ٢



Q ابجد شكل رباعي دائري. أثبت أن ق(أبَ̂د) = ق(أجَ̂د)

ق(١^) = ق(أبَ̂د) = ½ ق(أد⌒) (نظرية)

ق(٢^) = ق(أجَ̂د) = ½ ق(أد⌒) (نظرية)

∴ ق(أبَ̂د) = ق(أجَ̂د)

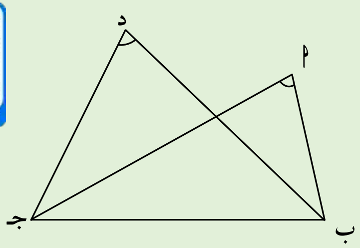
▪ أثبت أن ق(أدَ̂ب) = ق(أجَ̂ب)

ق(٣^) = ق(أدَ̂ب) = ½ ق(أب⌒) (نظرية)

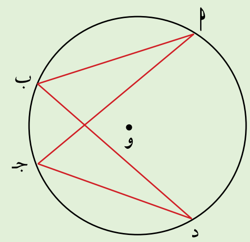
ق(٤^) = ق(أجَ̂ب) = ½ ق(أب⌒) (نظرية)

∴ ق(أدَ̂ب) = ق(أجَ̂ب)

نتائج:

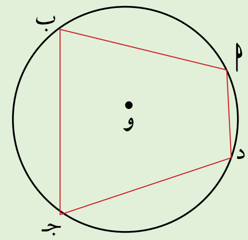


- كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.
- كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.
- كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة)، تكون زواياه المتقابلة متكاملة.
- في الشكل إذا تطابقت الزاويتان أ̂ ، د̂ المرسومات على القاعدة بجـ وفي جهة واحدة منها. كان الشكل أبجد رباعيا دائريا.



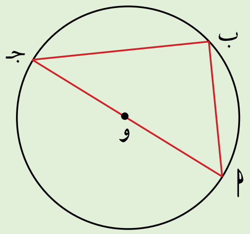
أب̂د ، أجـ̂د تحصران أد⌒

∴ ق (أب̂د) = ق (أجـ̂د)



ق (أ̂) + ق (جـ̂) = ١٨٠°

ق (ب̂) + ق (د̂) = ١٨٠°



أب̂جـ تحصر أجـ⌒

(نصف دائرة)

∴ ق (أب̂جـ) = ٩٠

(أب̂جـ) زاوية محيطية

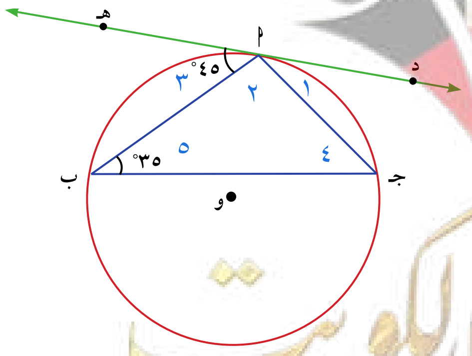
مرسومة على قطر الدائرة

وهي زاوية قائمة

نظرية (٣) :

- قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.
- قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

Q إذا كان هـد مماسا للدائرة عند النقطة أ فأوجد: ق (بأ̂جـ)



ق (١̂) = ق (٥̂) = ٣٥° (نظرية)

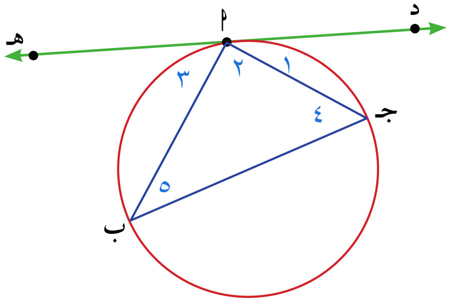
ق (٣̂) = ق (٤̂) = ٤٥° (نظرية)

ق (٢̂) = ١٨٠° − (٤٥° + ٣٥°)

= ١٠٠° مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ ق (جـأ̂ب) = ١٠٠°

في الشكل المقابل: ق(دأجـ) = ٤٠°، ق(هـأب) = ٥٠°
أوجد قياسات زوايا المثلث ∆أبجـ



ق(١) = ق(٥) = ٤٠° محيطية ومماسية تقابلان نفس القوس

ق(٣) = ق(٤) = ٥٠° محيطية ومماسية تقابلان نفس القوس

ق(٢) = ١٨٠° − (٤٠° + ٥٠°) = ٩٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

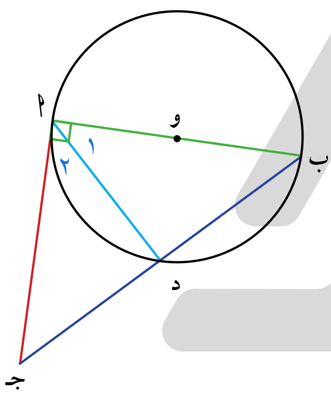
- أثبت أن بجـ قطر للدائرة.

∵ جـأب زاوية محيطيه قياسها ٩٠°

∴ جـأب مرسومة على قطر الدائرة

∴ جـب قطر للدائرة.

أب قطر في دائرة مركزها و. نرسم أجـ مماساً للدائرة بحيث يكون أجـ = ٢نق ، بجـ تقطع الدائرة في د.
أثبت أن أد = جـد



∆أبجـ فيه

(أ) = ٩٠°

أب = أجـ = ٢نق

∴ ∆أبجـ قائم متطابق الضلعين

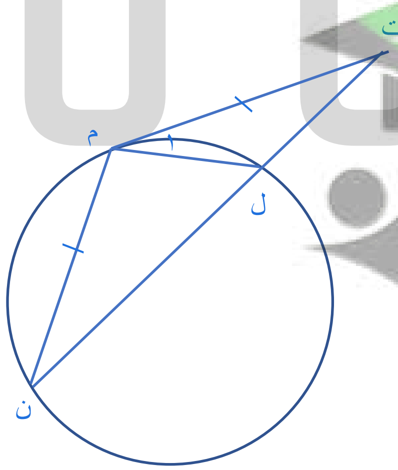
ق(ب) = ق(جـ) = ٤٥° (نظرية)

ق(٢) = ق(ب) = ٤٥°

∴ ∆أدجـ متطابق الضلعين

∴ أد = جـد

مت مماس لدائرة مركزها و. من وتر في الدائرة بحيث يكون من = مت. (م نقطة التماس) تن تقطع الدائرة في ل.
أثبت أن ∆تلم متطابق الضلعين (لت = مل)



∵ من = مت

∆متن متطابق الضلعين

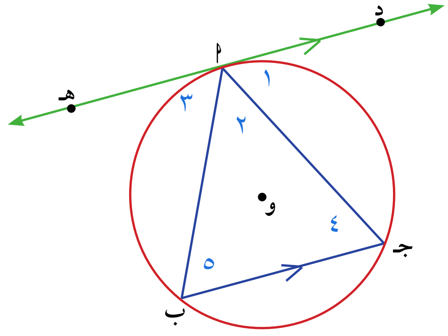
ق(ت) = ق(ن)

ق(ن) = ق(١) (نظرية)

ق(ت) = ق(١)

∴ ∆تلم متطابق الضلعين (ل ت = ل م)

في الشكل المجاور ↔هـد مماس للدائرة عند أ ، ‾جب وتر في الدائرة ويوازي المماس ↔ده أثبت أن المثلث أبج متطابق الضلعين.



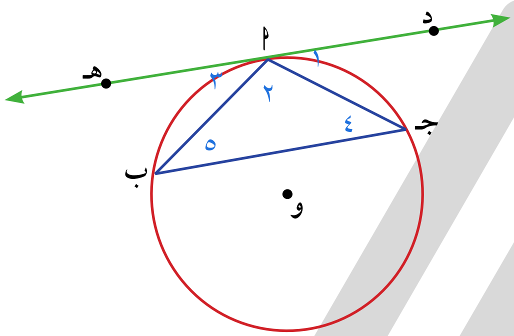
ق(١) = ق(٥) (نظرية)

ق(١) = ق(٤) (تبادل وتوازي)

∴ ق(٤) = ق(٥)

∴ المثلث أبج متطابق الضلعين

إذا كان لدينا ↔هـد مماس للدائرة عند النقطة أ ، المثلث أبج متطابق الضلعين (أب = أج)
أثبت أن ‾جب // ↔هـد



ق(١) = ق(٥) (نظرية)

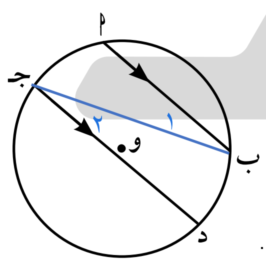
ق(٤) = ق(٥) (△أبج متطابق الضلعين)

∴ ق(١) = ق(٤) وهما في وضع التبادل

∴ ↔ده // ‾جب

من كراسة التمارين:

في الشكل المقابل أثبت أن: ⌒أج ≅ ⌒بد



نرسم ‾بج

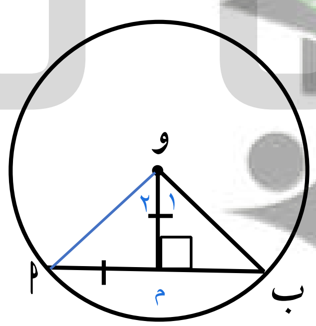
ق(١) = ق(٢) (بالتبادل والتوازي)

$\frac{1}{2}$ ق(⌒أج) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒بد)

ق(⌒أج) = ق(⌒بد)

∴ ⌒أج ≅ ⌒بد

أوجد قياس القوس الأصغر ⌒أب



‾وم ⊥ ‾أب

∴ بم = مأ (نظرية)

∴ وم = مأ = مب

∴ △ومب قائم متطابق الضلعين

∴ ق(١) = ٤٥°

و △وم أ قائم متطابق الضلعين

∴ ق(٢) = ٤٥°

ق(ب و أ) = ٤٥° + ٤٥° = ٩٠°

∴ ق(⌒أب) = ق(ب و أ) = ٩٠° (نظرية)

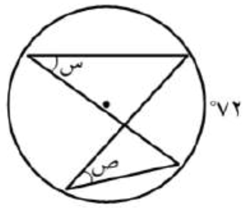
موضوعي - الزوايا المركزية والزوايا المحيطة

إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

١. قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطة المشتركة معها في القوس نفسه. (أ) (ب)

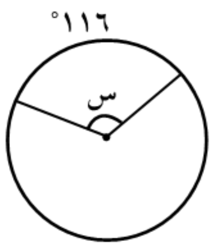
٢. قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر. (أ) (ب)

٣. في الشكل المجاور: س = ص = ٧٢° (أ) (ب)



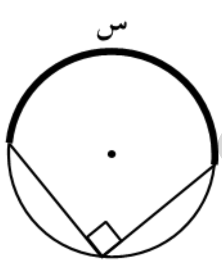
ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

٤. في الشكل المجاور قياس س =



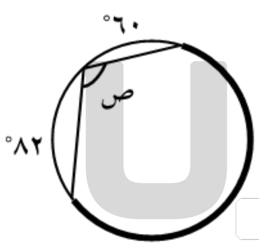
(أ) س = ٥٨ °
(ب) س = ٩٠ °
(ج) س = ١١٦ °
(د) س = ٢٣٢ °

٥. في الشكل المجاور قياس س =



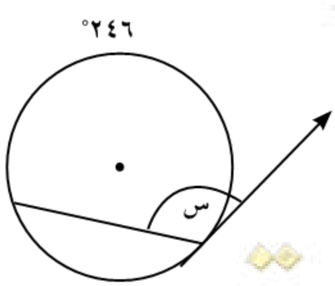
(أ) س = ٤٥ °
(ب) س =٩٠ °
(ج) س = ١٨٠ °
(د) س = ٣٦٠ °

٦. في الشكل المجاور قياس ص =



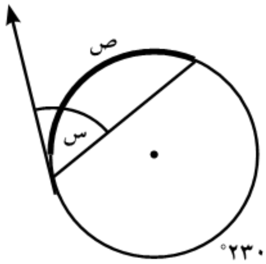
(أ) ص = ٦٠ °
(ب) ص = ٨٢ °
(ج) ص = ١٠٩ °
(د) ص =٢١٨ °

٧. في الشكل المجاور قياس ص =



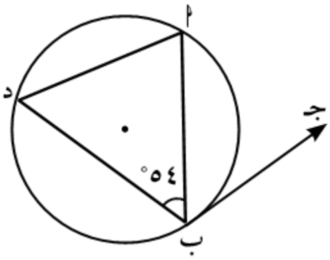
(أ) س = ١٢٣ °
(ب) س = ٢٤٦ °
(ج) س = ٢٧٠ °
(د) س = ١٨٠ °

٨. في الشكل المجاور قياس س =



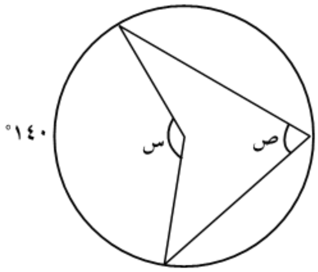
(أ) س = ٦٥ °
(ب) س = ١٣٠ °
(ج) س = ٢٣٠ °
(د) س = ١١٥ °

٩. في الشكل المقابل، إذا كانت ق (ب⌒د) = ١٤٠° فإن ق (أب⌒جـ) =



(أ) ٥٠ °
(ب) ٥٦ °
(ج) ٧٠ °
(د) ١٢٤°

١٠- في الشكل المقابل، قيمة كل من س، ص على الترتيب هما:



(أ) ٧٠ ° , ١٤٠°
(ب) ١٤٠° , ٧٠ °
(ج) ٧٠ ° , ٣٥ °
(د) ٣٥ ° , ٧٠ °

السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	8	9	10	
الإجابة	أ	أ	ب	ج	ج	ج	أ	أ	ب	ب	

تـدرب وتـفـوق

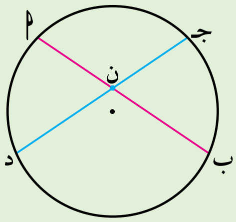
جاوب على أهم أسئلة الدرس واثبت لنا قوتك في هذا الدرس!

الدائرة :الأوتار المتقاطعة ، المماس

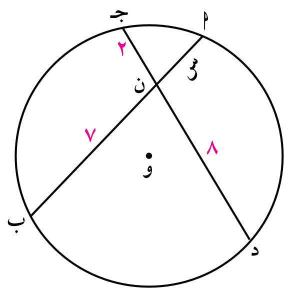
نظرية (١) :

إذا تقاطع وترين داخل دائرة فإن ناتج ضرب طولي جزأي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزأي الوتر الآخر.

ن‌ا × ن‌ب = ن‌د × ن‌ج



في الشكل المجاور أوجد قيمة س



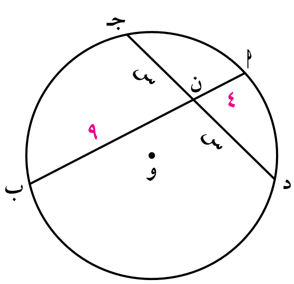
ن‌ا × ن‌ب = ن‌ج × ن‌د

س × ٧ = ٢ × ٨

٧س = ١٦

س = $\frac{١٦}{٧}$

في الشكل المجاور أوجد قيمة س



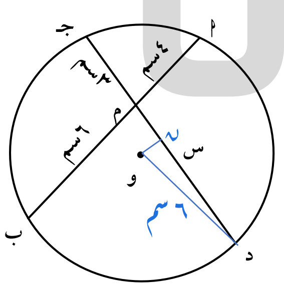
ن‌ج × ن‌د = ن‌ا × ن‌ب

س × س = ٤ × ٩

س^٢ = ٣٦

س = $\sqrt{٣٦}$ = ٦

في الشكل المجاور أوجد قيمة س وأوجد البعد بين المركز والوتر $\overline{\text{جد}}$ إذا علمت أن طول نصف قطر الدائرة يساوي ٦ سم



م‌ج × م‌د = م‌ا × م‌ب (نظرية)

٣س = ٤ × ٦

٣س = ٢٤ ⇐ س = $\frac{٢٤}{٣}$ = ٨ سم

∵ $\overline{\text{ون}}$ ⊥ $\overline{\text{جد}}$ (ن منتصف $\overline{\text{جـ د}}$)

جد = ٣ + ٨ = ١١ سم

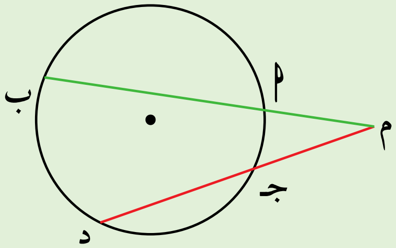
∴ ج‌ن = ن‌د = $\frac{١١}{٢}$ = ٥,٥ (نظرية)

∴ ون = $\sqrt{٦^٢ - (٥,٥)^٢}$ ≃ ٢,٤ (فيثاغورث)

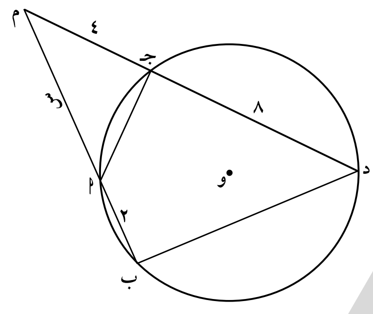
نتيجة:

إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.

م أ × م ب = م جـ × م د



في الشكل المجاور أوجد قيمة س



م أ × م ب = م جـ × م د (نظرية)

س × (س + ٢) = ٤ × (٤ + ٨)

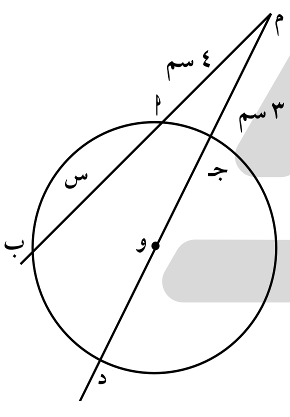
$س^{٢} + ٢س = ٤٨$

$س^{٢} + ٢س - ٤٨ = ٠$

س = ٦

س = −٨ مرفوض

في الشكل المجاور دائرة مركزها و . طول نصف قطرها ٤ سم أوجد قيمة س



م أ × م ب = م جـ × م د (نظرية)

٤ × (٤ + س) = ٣ × (٣ + ٤ + ٤)

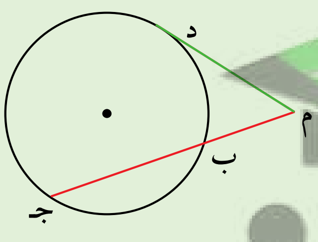
١٦ + ٤س = ٣٣

٤س = ٣٣ − ١٦

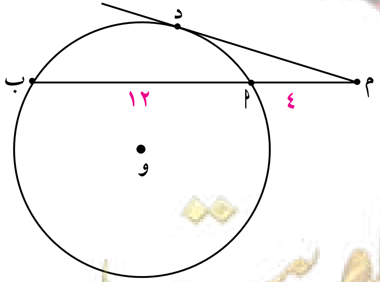
س = $\frac{١٧}{٤}$ = ٤,٢٥ سم

نتيجة:

إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.



في الشكل المجاور احسب طول القطعة المماسية $\overline{م د}$



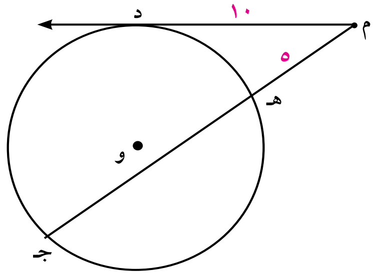
$(م د)^{٢}$ = م أ × م ب (نظرية)

= ٤ × (٤ + ١٢)

= ٦٤

∴ م د = $\sqrt{٦٤}$ = ٨ سم

Q أوجد طول $\overline{\text{هـجـ}}$



(مد)^2 = مهـ × مجـ (نظرية)

١٠^2 = ٥ × (٥ + س)

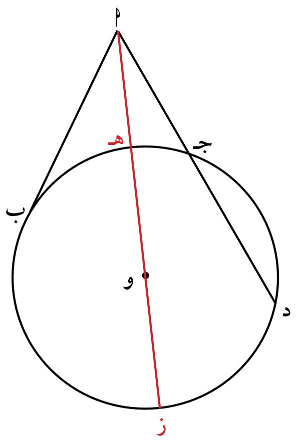
١٠٠ = ٢٥ + ٥س

١٠٠ − ٢٥ = ٥س

٧٥ = ٥س

∴ س = $\frac{٧٥}{٥}$ = ١٥

Q اجـ = ٤ سم، اد = ٩سم ما طول القطعة المماسية $\overline{\text{اب}}$



(اب)^2 = اجـ × اد (نظرية)

= ٤ × ٩

= ٣٦

∴ اب = $\sqrt{٣٦}$ = ٦ سم

Q أوجد طول نصف قطر الدائرة إذا كانت: اهـ = ٢ سم

اجـ × اد = اهـ × از (نظرية)

٩ × ٤ = ٢ × (٢ + س)

٣٦ = ٤ + ٢س

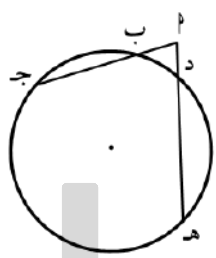
٣٦ − ٤ = ٢س

٣٢ = ٢س ⟸ س = $\frac{٣٢}{٢}$ = ١٦

∴ نق = $\frac{١٦}{٢}$ = ٨ سم

من كراسة التمارين:

Q في الشكل المقابل: اجـ = ٢٠ ، بجـ = ١٥ ، اهـ = ٢٥ . أوجد: هـد



اب × اجـ = اد × اهـ (نظرية)

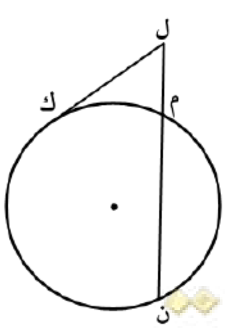
٥ × ٢٠ = اد × ٢٥

١٠٠ = ٢٥(اد)

⟸ اد = $\frac{١٠٠}{٢٥}$ = ٤

⟸ دهـ = ٢٥ − ٤ = ٢١ سم

Q في الشكل المجاور: $\overline{\text{لك}}$ مماس للدائرة لك = ٨ ، لم = ٤ أوجد: من



(لك)^2 = لم × لن (نظرية)

٨^2 = ٤ × (٤ + س)

٦٤ = ١٦ + ٤س

٦٤ − ١٦ = ٤س

٤٨ = ٤س

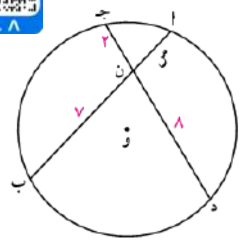
س = $\frac{٤٨}{٤}$ = ١٢

∴ من = ١٢ سم

موضوعي - الأوتار المتقاطعة والمماس

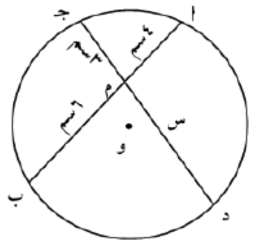
ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة

١. في الشكل المقابل قيمة س تساوي:



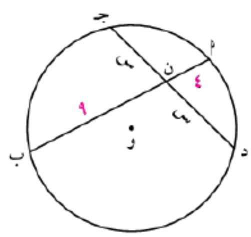
(أ) ٢   (ب) ٧   (ج) ٨   (د) $\frac{١٦}{٧}$

٢. في الشكل المقابل قيمة س تساوي:



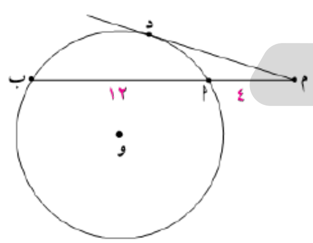
(أ) ٤   (ب) ٥   (ج) ٦   (د) ٨

٣. في الشكل المقابل قيمة س تساوي:



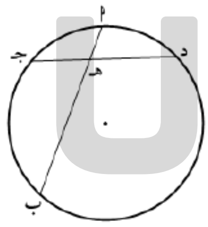
(أ) ٤   (ب) ٦   (ج) ٩   (د) ٣٦

٤. أوجد طول القطعة المماسية $\overline{\text{مر}}$



(أ) ٨   (ب) ١٢   (ج) ١٦   (د) ١٠

٥. في الشكل المقابل، أهـ = ١٩ ، هـر= ٤٠ ، هـجـ = ٣٨ . أوجد هـب



(أ) ٤٠   (ب) ٨٠   (ج) ١٠٠   (د) ١٢٠

السؤال	١	٢	٣	٤	٥
الإجابة	د	د	ب	أ	ب

تــدرب وتـفـوق

جاوب على أهم أسئلة الدرس واثبت لنا قوتك في هذا الدرس!

تنظيم البيانات في مصفوفات

اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

Q $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٥ \\ ٢ & -٣ & -٧ \\ ١ & ٠ & ٩ \end{bmatrix}$ ٣ × ٣

Q $ب = \begin{bmatrix} -٤ & \frac{٢}{٣} & -٣ \end{bmatrix}$ ٣ × ١

Q $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ٠ \\ -٢ & ٠,٥ & ٧ \end{bmatrix}$ ٣ × ٢

Q $جـ = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ١ & -٥ \\ ٠,٦ & ٩ \end{bmatrix}$ ٢ × ٣

Q $جـ = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \\ ٠,٥ \end{bmatrix}$ ١ × ٤

Q $ب = \begin{bmatrix} -٨ & ٣ & ١٠ \end{bmatrix}$ ٣ × ١

Q إذا كانت المصفوفة $ب = \begin{bmatrix} ١٢ & ١ & ٥ & ٤ \\ ٢ & ٦ & ٢ & ٣,٥ \\ ١ & ٠ & ١ & -٤ \end{bmatrix}$ أوجد:

- $ب_{٢٢} = ٦$
- $ب_{١٣} = ١$
- $ب_{١١} = ١٢$
- $ب_{٣١} = ٥$
- $ب_{٤٣} = -٤$
- $ب_{٣٣} = ١$

المصفوفات: المربعة ، الأفقية ، العمودية

- المصفوفة المربعة: هي مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة. وفيما عدا ذلك، تسمى المصفوفة: مصفوفة مستطيلة.
- المصفوفة الأفقية: هي مصفوفة مكونة من صف واحد.
- المصفوفة العمودية: هي مصفوفة مكونة من عمود واحد.

صنّف كلا من المصفوفات التالية:

Q $أ = \begin{bmatrix} ١ & -٥ & ٠ \\ ٠ & ٤ & ٧ \\ ٣ & ٢ & ٨ \end{bmatrix}$ مربعة

Q $ب = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٠,٢ \end{bmatrix}$ عمودية

Q $جـ = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ & -٥ \end{bmatrix}$ أفقية

Q $د = \begin{bmatrix} -٢ & ٣ & ١,٤ \\ ١٢ & ٨ & ٥ \end{bmatrix}$ مستطيلة

المصفوفات المتساوية:

تكون مصفوفتان متساويتين إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها، وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية والعكس صحيح.

Q إذاكانت: $\begin{bmatrix} ٢س-٥ & ٤ \\ ٣ & ٣ص+١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٤ \\ ٣ & ص+١٨ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س ، ص

٢س − ٥ = ٢٥ ⟸ ٢س = ٢٥ + ٥ ⟸ $\frac{٢س}{٢} = \frac{٣٠}{٢}$ ⟸ س = ١٥

٣ص + ١٢ = ص + ١٨ ⟸ ٣ص − ص = −١٢ + ١٨ ⟸ $\frac{٢ص}{٢} = \frac{٦}{٢}$ ⟸ ص = ٣

Q إذا كانت: $\begin{bmatrix} ٣٨ & ٥ \\ ٣ & ٤ص-١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س+٨ & ٥ \\ ٣ & -ص \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س ، ص

س + ٨ = ٣٨ ⟸ س = ٣٨ − ٨ ⟸ س = ٣٠

٤ص − ١٠ = −ص ⟸ ٤ص + ص = ١٠ ⟸ $\frac{٥ص}{٥} = \frac{١٠}{٥}$ ⟸ ص = ٢

Q إذا كانت: $\begin{bmatrix} ٣س & س+ص & س-ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٩ & ٤ & -١٠ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س ، ص

٣س = −٩ ⟸ س = $\frac{-٩}{٣}$ ⟸ س = −٣

س + ص = ٤ ⟸ −٣ + ص = ٤ ⟸ ص = ٤ + ٣ = ٧

موضوعي - تنظيم البيانات في المصفوفات

إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

١. المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ٦ & ٧ & ٠ \end{bmatrix}$ من الرتبة ٢×٣ (أ) (ب)

٢. في المصفوفة ب= $\begin{bmatrix} ١٢ & ٥١ & ٤ \\ ١٢ & ٢٦ & ٣,٥ \\ ١ & ١٠ & -٤ \end{bmatrix}$ فإن قيمة العنصر $ب_{٢١}$ = ١٢ (أ) (ب)

٣. المصفوفة الأفقية: هي مصفوفة مكونة من عمود واحد فقط (أ) (ب)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

٤. إذا كانت $\begin{bmatrix} ٢س - ٥ & ٤ \\ ٣ & ٣ص + ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٤ \\ ٣ & ص + ١٨ \end{bmatrix}$ فإن قيمتي س ، ص هما:

(أ) س = ١٥ ، ص = ٣
(ب) س = -١٥ ، ص = ٣
(ج) س = ١٥ ، ص = -٣
(د) س = -١٥ ، ص = -٣

٥. إذا كانت $\begin{bmatrix} ٣س & س + ص & س - ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٩ & ٤ & -١٠ \end{bmatrix}$ فإن قيمتي س ، ص هما:

(أ) س = -٣ ، ص =- ٧
(ب) س = -٣ ، ص = ٧
(ج) س = ٣ ، ص = ٧
(د) س = ٣ ، ص = -٧

السؤال	١	٢	٣	٤	٥
الإجابة	أ	ب	ب	أ	ب

تــدرب وتــفــوق

جاوب على أهم أسئلة الدرس واثبت لنا قوتك في هذا الدرس!

جمع وطرح المصفوفات

Q أوجد ناتج ما يلي:

$$\begin{bmatrix} -١٢ & ٢٤ \\ -٣ & ٥ \\ -١ & ١٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & -١ \\ -٥ & ٤ \\ ١ & -٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٥ & ٢٣ \\ -٨ & ٩ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$$

Q إذا كانت: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ج} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix}$ أوجد:

- $\underline{ج} + \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ -٣ & ٧ \end{bmatrix}$
- $(\underline{ج} + \underline{ب}) + \underline{أ} = \left(\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ -٣ & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٥ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$

خواص جمع المصفوفات:

إذا كان $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ ، $\underline{ج}$ مصفوفات من الرتبة م×ن فإن:

- $\underline{أ} + \underline{ب}$ هي من الرتبة م×ن — خاصية الإقفال (الانغلاق)
- $\underline{أ} + \underline{ب} = \underline{ب} + \underline{أ}$ — خاصية الإبدال
- $(\underline{أ} + \underline{ب}) + \underline{ج} = \underline{أ} + (\underline{ب} + \underline{ج})$ — خاصية التجميع
- $\underline{٠}_{م\times ن} + \underline{أ} = \underline{أ} + \underline{٠}_{م\times ن} = \underline{أ}$ — المصفوفة الصفرية هي العنصر المحايد الجمعي من الرتبة م×ن
- $\underline{أ} + (-\underline{أ}) = \underline{٠}_{م\times ن}$ — خاصية المعكوس الجمعي (النظير الجمعي)

أوجد ناتج كل مما يلي:

Q $\begin{bmatrix} ٦ & -٩ & ٧ \\ -٢ & ١ & ٨ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٤ & ٣ & ٠ \\ ٦ & ٥ & ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & -١٢ & ٧ \\ -٨ & -٤ & -٢ \end{bmatrix}$

Q $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ -١ & ١٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ -٣ & ١٤ \end{bmatrix}$

Q $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \\ ٦ & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ -٣ & ٦ \\ -٥ & ٧ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ ٣ & -٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ -١ & ١٠ \\ ١ & ١٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ ٣ & -٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ & ٠ \\ -٤ & ١٢ \\ -٢ & ١٠ \end{bmatrix}$

أوجد قيمة $\underline{\text{س}}$ حيث:

1. $\underline{\text{س}} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 11 \\ -8 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\underline{\text{س}} - \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 75 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 50 \\ 50 & -10 \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} 5 & 50 \\ 50 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 75 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 62 \\ 125 & -11 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -24 \end{bmatrix} = \underline{\text{س}} - \begin{bmatrix} 13 & 24 & 5 \\ -6 & -17 & 1 \end{bmatrix}$

$\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & 24 & 5 \\ -6 & -17 & 1 \end{bmatrix} \Leftarrow \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} 13 & 24 & 5 \\ -4 & -13 & -23 \end{bmatrix}$

5. $-\underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 9 \\ 12 & 8 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

$-\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 9 \\ 12 & 8 & -3 \end{bmatrix} \Leftarrow -\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} -8 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & -7 \\ -12 & -3 & 0 \end{bmatrix} \Leftarrow \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 7 \\ 12 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

موضوعي - جمع وطرح المصفوفات

إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

١. لجمع مصفوفتين يجب أن يكونا من الرتبة نفسها (أ) (ب)

٢. جمع المصفوفات هو عملية غير إبدالية (أ) (ب)

٣. جمع المصفوفات هو عملية تجميعية (أ) (ب)

٤. طرح المصفوفات هو عملية إبدالية (أ) (ب)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة

٥. $\begin{bmatrix} ٢- & ٥ \\ ٠ & ١- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٧ & ٢- \end{bmatrix} =$

(أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٧ & ٣ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٣- & ٨ \\ ٧- & ٣- \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٧ & ٣- \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ ٧ & ٣- \end{bmatrix}$

٦. $\begin{bmatrix} ١ & ٣- \\ ٤- & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٥ & ٣- \\ ١٠ & ١- \end{bmatrix} =$

(أ) $\begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ١٤ & ٣ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٤- & ٠ \\ ١٤- & ٣- \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ٤- & ٠ \\ ١٤ & ٣- \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ١٤ & ٣- \end{bmatrix}$

٧. $\begin{bmatrix} ٥ & ٧ \\ ٢- & ٣ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٦ & ٣- \\ ٧ & ٥- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ \\ ٧ & ٦ \end{bmatrix} =$

(أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٦- \\ ١٢ & ٤- \\ ١٠ & ٢ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ٦- \\ ١٢ & ٤- \\ ١٠ & ٢- \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ٠ & ٦- \\ ١٢ & ٤ \\ ١٠ & ٢- \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ٠ & ٦- \\ ١٢- & ٤- \\ ١٠- & ٢- \end{bmatrix}$

السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
الإجابة	أ	ب	أ	ب	د	د	ب

تــدرب وتـفـوق

جاوب على أهم أسئلة الدرس واثبت لنا قوتك في هذا الدرس!

ضرب المصفوفات

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} -٤ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & -١ & -٢ \end{bmatrix}$ **فأوجد:**

Q ٥ب − ٤أ

$$= ٥\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & -١ & -٢ \end{bmatrix} - ٤\begin{bmatrix} -٤ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١٠ & ٥ & ٠ \\ ١٥ & -٥ & -١٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -١٦ & ١٢ & ٨ \\ ١٢ & ١٦ & ٢٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٦ & -٧ & -٨ \\ ٣ & -٢١ & -٣٠ \end{bmatrix}$$

Q أ + ٦ب

$$= \begin{bmatrix} -٤ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{bmatrix} + ٦\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & -١ & -٢ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -٤ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١٢ & ٦ & ٠ \\ ١٨ & -٦ & -١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٩ & ٢ \\ ٢١ & -٢ & -٧ \end{bmatrix}$$

حل كل معادلة مما يلي:

Q $٢\underline{س} = \begin{bmatrix} ١٢ & ٤ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & -٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$

$$٢\underline{س} = \begin{bmatrix} ١٢ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \underline{س} = \begin{bmatrix} \frac{١٢}{٢} & \frac{٢}{٢} \\ \frac{٠}{٢} & \frac{٤}{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$$

Q $-٣\underline{س} + \begin{bmatrix} -١ & ٠ & ٧ \\ ٤ & -٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٠ & ١٠ \\ ١٠ & -١٨ & -١٩ \end{bmatrix}$

$$-٣\underline{س} = \begin{bmatrix} ٨ & ٠ & ١٠ \\ ١٠ & -١٨ & -١٩ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -١ & ٠ & ٧ \\ ٤ & -٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٠ & ٣ \\ ٦ & -١٥ & -٢١ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \underline{س} = \begin{bmatrix} \frac{٩}{-٣} & \frac{٠}{-٣} & \frac{٣}{-٣} \\ \frac{٦}{-٣} & \frac{-١٥}{-٣} & \frac{-٢١}{-٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & ٠ & -١ \\ -٢ & ٥ & ٧ \end{bmatrix}$$

Q أوجد ناتج $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}$: $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ -١ & -٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$

$$\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٠\times٤+٣\times(-٢) & ٠\times٠+٣\times١ \\ (-١)\times٤+(-٤)\times(-٢) & (-١)\times٠+(-٤)\times١ \\ ١\times٤+٢\times(-٢) & ١\times٠+٢\times١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ & ٣ \\ ٤ & -٤ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$$

Q أوجد ناتج الضرب: $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٣ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٣ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-١)\times(-٣)+٠\times٥ & (-١)\times٣+٠\times٠ \\ ٣\times(-٣)+(-٤)\times٥ & ٣\times٣+(-٤)\times٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ -٢٩ & ٩ \end{bmatrix}$$

Q بفرض $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٨ & ٠ & -١ & ٠ \\ ٢ & -٥ & ١ & ٨ \end{bmatrix}$

حدد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}$ ، $\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}}$ معرفة أو غير معرفة وأوجد ناتج الضرب المعرف

$\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}$ معرفة لأن عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية

$$\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٤\times٨+(-٢)\times٢ & ٤\times٠+(-٢)\times(-٥) & ٤\times(-١)+(-٢)\times١ & ٤\times٠+(-٢)\times٨ \\ ٥\times٨+(-٤)\times٢ & ٥\times٠+(-٤)\times(-٥) & ٥\times(-١)+(-٤)\times١ & ٥\times٠+(-٤)\times٨ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢٨ & ١٠ & -٦ & -١٦ \\ ٣٢ & ٢٠ & -٩ & -٣٢ \end{bmatrix}_{٢\times٤}$$

$\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}}$ غير معرفة لأن عدد أعمدة المصفوفة الأولى لا يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية

مربع المصفوفة

Q إذا كانت $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$ فأوجد: $\underline{\text{ب}}^{٢}$، $\underline{\text{ب}}^{٣}$

$$\underline{\text{ب}}^{٢} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢\times٢+١\times(-١) & ٢\times١+١\times٤ \\ (-١)\times٢+٤\times(-١) & (-١)\times١+٤\times٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ -٦ & ١٥ \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{ب}}^{٣} = \underline{\text{ب}}^{٢} \times \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ -٦ & ١٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (٣)(٢)+(٦)(-١) & (٣)(١)+(٦)(٤) \\ (-٦)(٢)+(١٥)(-١) & (-٦)(١)+(١٥)(٤) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٢٧ \\ -٢٧ & ٥٤ \end{bmatrix}$$

Q إذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ فأوجد: $\underline{\text{أ}}^{٢}$، $\underline{\text{أ}}^{٣}$

$$\underline{\text{أ}}^{٢} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢\times٢+(-١)\times١ & ٢\times(-١)+(-١)\times٠ \\ ١\times٢+٠\times١ & ١\times(-١)+٠\times٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{أ}}^{٣} = \underline{\text{أ}}^{٢} \times \underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣\times٢+(-٢)\times١ & ٣\times(-١)+(-٢)\times٠ \\ ٢\times٢+(-١)\times١ & ٢\times(-١)+(-١)\times٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$$

موضوعي - ضرب المصفوفات

إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

١. $٣\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٤ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ١٥ \\ ١٢ & -٩ \end{bmatrix}$ — (أ) (ب)

٢. ضرب المصفوفات المربعة هو عملية إبدالية — (أ) (ب)

٣. ضرب المصفوفات المربعة هو عملية تجميعية — (أ) (ب)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

٤. حل المعادلة المصفوفية: ٢س = $\begin{bmatrix} ٤ & ١٢ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ هو:

(أ) س = $\begin{bmatrix} ١ & -٦ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ (ب) س = $\begin{bmatrix} ١ & -٦ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix}$ (ج) س = $\begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ (د) س = $\begin{bmatrix} -١ & -٦ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix}$

٥. إذا كانت المصفوفة بـ= $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$ فإن بـ٢=

(أ) $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ -٦ & ١٥ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ -٦ & -١٥ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ٣ & -٦ \\ -٦ & ١٥ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٦ & ١٥ \end{bmatrix}$

٦. أي ضرب مما يلي غير معرف؟

(أ) $\begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -١ & ٢ \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -١ & ٢ \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$

٧. بفرض المصفوفة بـ من الرتبة ٢×٣ والمصفوفة جـ من الرتبة ٣×٢ فإن رتبة المصفوفة بـ × جـ هي من الرتبة:

(أ) ٢×٢ (ب) ٢×٣ (ج) ٣×٣ (د) ٢×٣

السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	
الإجابة	أ	ب	أ	ج	أ	ب	أ	

تـــدرب وتـفـوق

جاوب على أهم أسئلة الدرس واثبت لنا قوتك في هذا الدرس!

مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات)

مصفوفة الوحدة المصفوفة المربعة التي عناصر قطرها الرئيسي (١) وبقية العناصر (صفرا)

$$\underline{و}_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \text{ ، } \underline{و}_{٣\times٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

النظير الضربي

$$\underline{أ} \times \underline{أ}^{-١} = \underline{أ}^{-١} \times \underline{أ} = \underline{و}$$

أثبت أن المصفوفة: $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢٫٥ & ١ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢٫٥ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢\times(-٢)+١\times٥ & ٢\times٢+١\times(-٤) \\ ٢٫٥\times(-٢)+١\times٥ & ٢٫٥\times٢+١\times(-٤) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \underline{و}_{٢\times٢}$$

∴المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢٫٥ & ١ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي لـ $\begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$

أثبت أن : $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

$$\underline{أ} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢\times٢+٣\times(-١) & ٢\times(-٣)+٣\times٢ \\ ١\times٢+٢\times(-١) & ١\times(-٣)+٢\times٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \underline{و}_{٢\times٢}$$

∴المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي لـ $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية

محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{bmatrix}$ هو $|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{vmatrix} = أد - ب جـ$

المصفوفة التي محددها الصفر ليس لها نظير ضربي وتسمى (مصفوفة منفردة).

تمرن: أوجد محدد كل من المصفوفات التالية:

Q $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} = ٤ \times ٢ - ٤ \times ٢ = \text{صفرا}$

$\therefore$ أ منفردة

Q $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٨ & ٧ \\ ٢ & ١٠ \end{bmatrix}$

$|\text{ب}| = \begin{vmatrix} ٨ & ٧ \\ ٢ & ١٠ \end{vmatrix} = ٨ \times ١٠ - ٢ \times ٧ = ٦٦$

Q $\text{جـ} = \begin{bmatrix} \text{ك} & ٣ \\ ٣-\text{ك} & -٣ \end{bmatrix}$

$|\text{جـ}| = \begin{vmatrix} \text{ك} & ٣ \\ (٣-\text{ك}) & -٣ \end{vmatrix} = -٣\text{ك} - ٣(٣-\text{ك})$

$= -\cancel{٣\text{ك}} - ٩ + \cancel{٣\text{ك}}$

$= -٩$

Q إذا كانت المصفوفة $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ -٤ & ٢\text{س} \end{bmatrix}$ منفردة فأوجد قيمة س

$\because$ ب منفردة $\therefore |\text{ب}| = \text{صفرا}$

$\begin{vmatrix} ٥ & ١٠ \\ -٤ & ٢\text{س} \end{vmatrix} = \text{صفرا}$

$٥ \times ٢\text{س} - (-٤) \times ١٠ = ٠$

$١٠\text{س} + ٤٠ = ٠$

$١٠\text{س} = -٤٠$

$\Leftarrow \text{س} = -٤$

Q $\text{أ} = \begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{bmatrix}$

$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{vmatrix} = (-٣) \times (-٥) - ٤ \times ٢ = ٧$

Q $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$

$|\text{ب}| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix} = (٢) \times (-٢) - (-٣) \times (٣) = ٥$

Q $\text{جـ} = \begin{bmatrix} \text{س} & ٠ \\ ٠ & \text{س} \end{bmatrix}$

$|\text{جـ}| = \begin{vmatrix} \text{س} & ٠ \\ ٠ & \text{س} \end{vmatrix} = \text{س}^٢ - ٠ = \text{س}^٢$

Q إذا كانت المصفوفة $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{س} & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{bmatrix}$ منفردة فأوجد قيمة س

$\because$ أ منفردة $\therefore |\text{أ}| = ٠$

$\begin{vmatrix} \text{س} & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{vmatrix} = ٠$

$\text{س} \times ٦ - ١٢ \times ٤ = ٠$

$٦\text{س} - ٤٨ = ٠$

$٦\text{س} = ٤٨$

$\Leftarrow \text{س} = \frac{٤٨}{٦} = ٨$

خاصية:

بفرض أن: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$ إذا كان $أد - ب جـ \neq ٠$، فإن لها نظيرا ضربيا $\underline{أ}^{-١}$

حيث: $\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{|\underline{أ}|} \begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{bmatrix}$

Q هل $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسر.

$|\underline{ب}| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} = ١ \times ٤ - ٢ \times ٣ = -٢$ $\because -٢ \neq ٠$ $\therefore$ يوجد نظير ضربي

Q هل $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ -٣ & -٤ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسر.

$|\underline{ب}| = \begin{vmatrix} ٦ & ٨ \\ -٣ & -٤ \end{vmatrix} = ٦ \times (-٤) - ٨ \times (-٣) =$ صفرا $\therefore \underline{ب}$ منفردة ليس لها نظير ضربي

Q هل للمصفوفة: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٨ & -٢ \end{bmatrix}$ نظير (معكوس) ضربي؟ في حالة الإيجاب أوجده.

$|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} -١ & ٠ \\ ٨ & -٢ \end{vmatrix} = (-١) \times (-٢) - ٠ \times ٨ = \frac{٢}{١} = ٢$ ، $٢ \neq ٠$

$\therefore$ يوجد نظير ضربي هو: $\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ -٨ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ -٤ & -\frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

حدد أي من المصفوفات التالية لها نظير ضربي (معكوس) ، ثم أوجده.

Q $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ $|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = ٢ \times ٣ - ٤ \times ١ = ٢$

$\because ٢ \neq ٠$ $\therefore \underline{أ}^{-١}$ موجود

$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٣}{٢} & -٢ \\ \frac{-١}{٢} & ١ \end{bmatrix}$

Q $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠,٥ & ٢,٣ \\ ٣ & ٧,٢ \end{bmatrix}$ $|\underline{ب}| = \begin{vmatrix} ٠,٥ & ٢,٣ \\ ٣ & ٧,٢ \end{vmatrix} = ٠,٥ \times ٧,٢ - ٢,٣ \times ٣ = \frac{-٣٣}{١٠}$

$\because |\underline{ب}| \neq$ صفرا $\therefore \underline{ب}^{-١}$ موجودة

$\underline{ب}^{-١} = -\frac{١٠}{٣٣} \begin{bmatrix} ٧,٢ & -٢,٣ \\ -٣ & ٠,٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-٢٤}{١١} & \frac{٢٣}{٣٣} \\ \frac{١٠}{١١} & \frac{-٥}{٣٣} \end{bmatrix}$

من كراسة التمارين: حل كل معادلة مما يلي:

Q $\begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \times \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \Leftarrow |\underline{\text{أ}}| = \begin{vmatrix} 12 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 12 \times 3 - 5 \times 7 = 1 ،\ 1 \neq 0$

$\underline{\text{أ}}^{-1} = \frac{1}{1} \times \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -5 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -5 & 12 \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -5 & 12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 + (-21) & (-3) + (-14) \\ (-10) + 36 & 5 + 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & -17 \\ 26 & 29 \end{bmatrix}$

Q $\underline{\text{س}} \times \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 16 \\ 27 & 12 \end{bmatrix}$

$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \Leftarrow |\underline{\text{أ}}| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 5 \times 4 - 2 \times 7 = 6 ،\ 6 \neq 0$

$\underline{\text{أ}}^{-1} = \frac{1}{6} \times \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{7}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} 31 & 16 \\ 27 & 12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{7}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{62}{3} + \left(-\frac{56}{3}\right) & \left(-\frac{31}{3}\right) + \frac{40}{3} \\ 18 + (-14) & (-9) + 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

Q $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \times \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Leftarrow |\underline{\text{أ}}| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \times (-1) - 4 \times (-1) = 1 ،\ 1 \neq 0$

$\underline{\text{أ}}^{-1} = \frac{1}{1} \times \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3) + (-8) \\ 3 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 9 \end{bmatrix}$

موضوعي - مصفوفة الوحدة والنظير الضربي

إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

١. المصفوفة $\begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ⓐ أ   ⓑ ب

٢. للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ نظير ضربي   ⓐ أ   ⓑ ب

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

٣. قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix}$ =

(أ) ٠   (ب) -٨   (ج) ٨   (د) ٤

٤. إذا كانت المصفوفية $\begin{bmatrix} ١٠ & ٥ \\ ٢\text{س} & -٤ \end{bmatrix}$ منفردة، فإن قيمة س تساوي.

(أ) -٤   (ب) ٤   (ج) ١   (د) ٠

٥. النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ هو:

(أ) $\begin{bmatrix} -٤ & -٢ \\ -٣ & -١ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٤} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٣} & ١ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} -٢ & \frac{٣}{٢} \\ ١ & \frac{-١}{٢} \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} \frac{-١}{٤} & \frac{-١}{٢} \\ \frac{-١}{٣} & -١ \end{bmatrix}$

٦. أي مصفوفة مما يلي ليس لها نظير ضربي؟

(أ) $\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ -٨ & ٢ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٨ & -٢ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٤} & \frac{١}{٢} \\ ٤ & ٨ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٤} & \frac{١}{٢} \\ -٤ & ٨ \end{bmatrix}$

السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦
الإجابة	أ	أ	د	أ	ج	ج

تـدرب وتـفـوق

جاوب على أهم أسئلة الدرس واثبت لنا قوتك في هذا الدرس!

حل نظام من معادلتين خطيتين

أولاً: باستخدام النظير الضربي:

Q حل النظام: $\begin{cases} ٥س + ٣ص = ٧ \\ ٣س + ٢ص = ٥ \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات $\quad |\underline{أ}| = ٥ \times ٢ - ٣ \times ٣ = ١ \neq ٠$

$$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{١} \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢\times٧+(-٣)\times٥ \\ (-٣)\times٧+٥\times٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٤ \end{bmatrix}$$

$\therefore$ الحل $س = -١$ ، $ص = ٤$

Q حل النظام: $\begin{cases} س + ص = ٣ \\ س - ص = ٧ \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

$$\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٧ \end{bmatrix} \quad (أ)$$

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات $\quad |\underline{أ}| = ١ \times (-١) - ١ \times ١ = -٢ \neq ٠$

$$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} -١ & -١ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠{,}٥ & ٠{,}٥ \\ ٠{,}٥ & -٠{,}٥ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠{,}٥ & ٠{,}٥ \\ ٠{,}٥ & -٠{,}٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ \\ ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠{,}٥\times٣+٠{,}٥\times٧ \\ ٠{,}٥\times٣+(-٠{,}٥)\times٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ -٢ \end{bmatrix}$$

$\therefore$ الحل $س = ٥$ ، $ص = -٢$

ثانياً: باستخدام المحددات (طريقة كرامر)

Q استخدم قاعدة كرامر لحل النظام:
$$\begin{cases} ٣\text{س} + ٢\text{ص} = -٦ \\ -٤\text{س} - ٣\text{ص} - ٧ = ٠ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ٣\text{س} + ٢\text{ص} = -٦ \\ -٤\text{س} - ٣\text{ص} = ٧ \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ -٤ & -٣ \end{vmatrix} = ٣ \times (-٣) - ٢ \times (-٤)$$
$$= -١\square - ١ \neq ٠$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} -٦ & ٢ \\ ٧ & -٣ \end{vmatrix}$$
$$= (-٦) \times (-٣) - ٢ \times ٧ = ٤$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٣ & -٦ \\ -٤ & ٧ \end{vmatrix}$$
$$= ٣ \times ٧ - (-٦) \times (-٤) = -٣$$

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{٤}{-١} = -٤$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-٣}{-١} = ٣$$

Q استخدم قاعدة كرامر لحل النظام:
$$\begin{cases} ٤\text{س} - ٥\text{ص} + ٧ = ٠ \\ ٣\text{ص} - ٦\text{س} + ٣ = ٠ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ٤\text{س} - ٥\text{ص} = -٧ \\ -٦\text{س} + ٣\text{ص} = -٣ \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٤ & -٥ \\ -٦ & ٣ \end{vmatrix} = ٤ \times ٣ - (-٥) \times (-٦)$$
$$= -١٨\square - ١٨ \neq ٠$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} -٧ & -٥ \\ -٣ & ٣ \end{vmatrix}$$
$$= (-٧) \times ٣ - (-٥) \times (-٣) = -٣٦$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٤ & -٧ \\ -٦ & -٣ \end{vmatrix}$$
$$= ٤ \times (-٣) - (-٦) \times (-٧) = -٥٤$$

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-٣٦}{-١٨} = ٢$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-٥٤}{-١٨} = ٣$$

موضوعي - حل نظام معادلتين

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

١. حل النظام $\begin{cases} ٣س + ٣ص = -٣ \\ -٤س - ٣ص - ٧ = ٠ \end{cases}$ هو :

(أ) س=٤ ، ص=٣

(ب) س=-٤ ، ص=٣

(ج) س=-٤ ، ص=-٣

(د) س=٤ ص=-٣

٢. حل النظام $\begin{cases} ٤س - ٥ص + ٧ = ٠ \\ -٤س - ٣ص + ١٧ = ٠ \end{cases}$ هو :

(أ) س=-٢ ، ص=-٣

(ب) س=٢ ، ص=-٣

(ج) س=-٢ ، ص=-٣

(د) س=٢ ، ص=٣

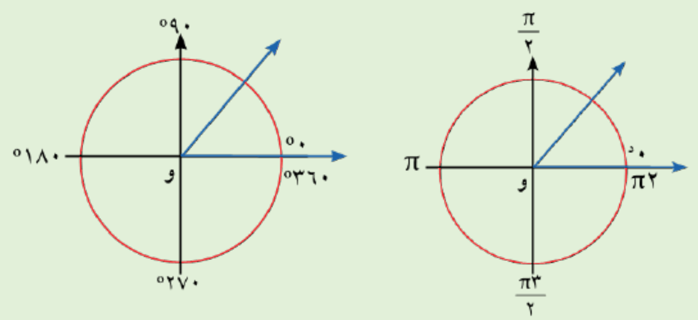
السؤال	١	٢	
الإجابة	ب	د	

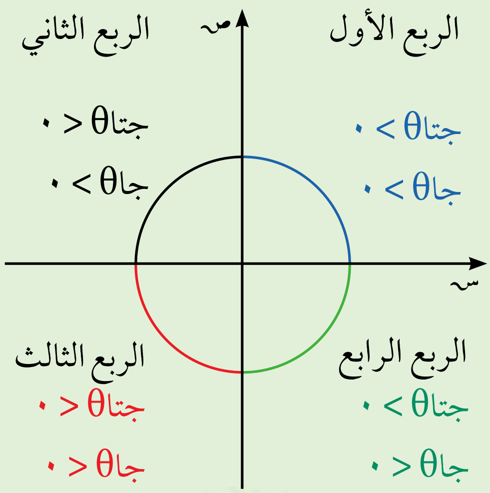
تـدرب وتـفـوق

جاوب على أهم أسئلة الدرس واثبت لنا قوتك في هذا الدرس!

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)

دائرة الوحدة هي دائرة مركزها نقطة الأصل (و) وطول نصف قطرها واحد وحدة





تمرين: حدّد إشارة جا θ، جتا θ في كل مما يلي:

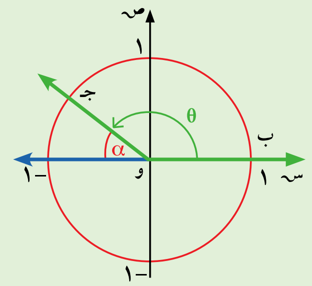
- $\theta = ١٣٥^\circ$ θ في الربع ٢   جا θ > ٠   جتا θ < ٠
- $\theta = \frac{٧\pi}{٦}$ $\theta = \frac{٧ \times ١٨٠}{٦} = ٢١٠^\circ$ θ في الربع ٣   جا θ < ٠   جتا θ < ٠
- $\theta = ٣٠٥^\circ$ θ في الربع ٤   جا θ < ٠   جتا θ > ٠

- إذا كانت $٩٠^\circ < \theta < ٢٧٠^\circ$ فما هي إشارة **جتا** θ ؟
  θ في الربع ٢ أو في الربع ٣
  جتا θ < ٠

- إذا كانت $٠ < \theta < \pi$ فما هي إشارة **جا** θ ؟
  θ في الربع ١ أو في الربع ٢
  جا θ > ٠

زاوية الإسناد

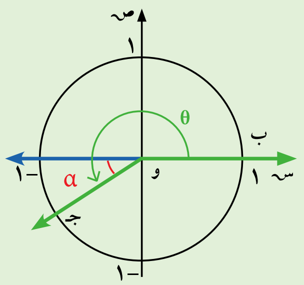
هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات



عندما θ تقع في الربع الثاني

$$\alpha^\circ = ١٨٠^\circ - \theta^\circ$$

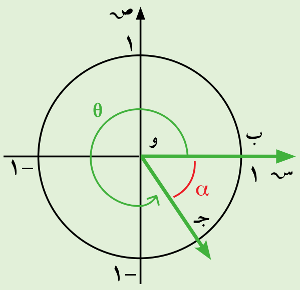
$$\alpha' = \pi - \theta'$$



عندما θ تقع في الربع الثالث

$$\alpha^\circ = \theta^\circ - ١٨٠^\circ$$

$$\alpha' = \theta' - \pi$$



عندما θ تقع في الربع الرابع

$$\alpha^\circ = ٣٦٠^\circ - \theta^\circ$$

$$\alpha' = ٢\pi - \theta'$$

تمرين: أوجد زاوية الإسناد لكل من الزوايا التالية:

Q $\theta = ١٢٠^\circ$ تقع في الربع ٢

$$\alpha = ١٨٠^\circ - \theta$$

$$\alpha = ١٨٠^\circ - ١٢٠^\circ = ٦٠^\circ$$

Q $\theta = ٢٠٠^\circ$ تقع في الربع ٣

$$\alpha = \theta - ١٨٠^\circ$$

$$\alpha = ٢٠٠^\circ - ١٨٠^\circ = ٢٠^\circ$$

Q $\theta = ٣٢٠^\circ$ تقع في الربع ٤

$$\alpha = ٣٦٠^\circ - \theta$$

$$\alpha = ٣٦٠^\circ - ٣٢٠^\circ = ٤٠^\circ$$

Q $\theta = \frac{٥\pi}{٦}$ تقع في الربع ٢

$$\alpha = \pi - \theta$$

$$\alpha = \pi - \frac{٥\pi}{٦} = \frac{\pi}{٦}$$

Q $\theta = \frac{٥\pi}{٤}$ تقع في الربع ٣

$$\alpha = \theta - \pi$$

$$\alpha = \frac{٥\pi}{٤} - \pi = \frac{\pi}{٤}$$

Q $\theta = \frac{٥\pi}{٣}$ تقع في الربع ٤

$$\alpha = ٢\pi - \theta$$

$$\alpha = ٢\pi - \frac{٥\pi}{٣} = \frac{\pi}{٣}$$

موضوعي - دائرة الوحدة والنسب المثلثية

إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

١. جتا$(-٣٠٠^\circ) = \frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

٢. جا$(١٢٠^\circ) = \frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

٣. ظا$(-١٥٠^\circ) = \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$ (أ) (ب)

٤. قا$(٣١٥^\circ) = \sqrt{٢}$ (أ) (ب)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

٥. أفترض أن جتاθ سالبة جاθ موجبة. يقع الضلع النهائي للزاوية θ في:

(أ) الربع الأول (ب) الربع الثاني (ج) الربع الثالث (د) الربع الرابع

٦. الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها تختلف عن الزوايا الأخرى هي:

(أ) ١٩٠° (ب) ١٧٠° (ج) ٣٥٠° (د) ١١٠°

٧. الزاوية التي في الوضع القياسي وضلعها النهائي يمر بالنقطة م$\left(-\frac{\sqrt{٢}}{٢}، \frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$ التي تقع على دائرة الوحدة هي:

(أ) ٤٥° (ب) ٢٢٥° (ج) ١٣٥° (د) ٣٣٥°

٨. الزاوية التي يقع ضلعها النهائي في الربع الرابع فيما يلي هي:

(أ) -٣٢٠° (ب) -٢٧٠° (ج) $\frac{٥\pi}{٣}$ (د) $\frac{١٣\pi}{٩}$

٩. الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها يختلف عن الزوايا الأخرى هي:

(أ) $\frac{٧\pi}{٤}$ (ب) ١٣٥° (ج) $\frac{٣\pi}{٤}$ (د) ٢١٥°

١٠. الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها $\frac{\pi}{٣}$ هي:

(أ) $\frac{١١\pi}{٦}$ (ب) ٢٥٥° (ج) $\frac{٧\pi}{٨}$ (د) $\frac{٥\pi}{٣}$

11. زاوية في الوضع القياسي قياسها يساوي -٢٢٥°. فإن النقطة المثلثية التي يمكن أن تقع على الضلع النهائي لهذه الزاوية هي:

أ) $\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢} ، -\frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$

ب) $\left(-\frac{\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$

ج) $\left(-\frac{\sqrt{٢}}{٢} ، -\frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$

د) (-١ ، ١)

12. $[\text{جا}(-١٣٥°)]^{٢} + [\text{جتا}(-١٣٥°)]^{٢} =$

أ) ١

ب) $\frac{١}{٢}$

ج) $\frac{١}{٤}$

د) صفرا

السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
الإجابة	أ	ب	أ	أ	ب	د	ج	ج	د	د	ب	أ

العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

النسب المثلثية

النسب المثلثية الأساسية: جا θ ، جتا θ ، ظا θ علماً أن:

$-1 \le$ جا $\theta \le 1$ ، $-1 \le$ جتا $\theta \le 1$ ، ظا $\theta \in$ ع

جتا $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) =$ جا θ

جا $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) =$ جتا θ

ظا $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) =$ ظتا θ

جتا $(\pi - \theta) = -$ جتا θ

جا $(\pi - \theta) =$ جا θ

ظا $(\pi - \theta) = -$ ظا θ

جتا $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -$ جا θ

جا $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) =$ جتا θ

ظا $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -$ ظتا θ

جتا $(-\theta) =$ جتا θ

جا $(-\theta) = -$ جا θ

ظا $(-\theta) = -$ ظا θ

جتا $(\pi + \theta) = -$ جتا θ

جا $(\pi + \theta) = -$ جا θ

ظا $(\pi + \theta) =$ ظا θ

بسط التعبيرات التالية لأبسط شكل:

- جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٩٠° − س) =

  جا س + جتا س − جا س + جتا س = ٢ جتا س

- جتا $(\pi - \theta)$ − جتا $(-\theta)$ + جا $(\pi + \theta)$ + جتا $\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ =

  − جتا θ − جتا θ − جا θ + جا θ = −٢ جتا θ

- جا $(\pi + \theta)$ − جتا $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ + جتا $(\theta - \pi)$ + جا $\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ =

  جا $(\pi + \theta)$ − جتا $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ + جتا $(\theta - \pi)$ + جا $\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ = − جا θ + جا θ − جتا θ + جتا θ = صفر

الدوال المثلثية (الدائرية) على ع (حيث ك عدد صحيح)

جتا $(\theta + 360°$ ك$) =$ جتا θ

جا $(\theta + 360°$ ك$) =$ جا θ

ظا $(\theta + 180°$ ك$) =$ ظا θ

جتا $(\theta + 2\pi$ ك$) =$ جتا θ

جا $(\theta + 2\pi$ ك$) =$ جا θ

ظا $(\theta + \pi$ ك$) =$ ظا θ

- جتا $(\theta + 9\pi)$ = جتا $(\theta + \pi + 8\pi)$ = جتا $(\theta + \pi)$ = جتا $(\pi + \theta)$ = − جتا θ

حل المعادلات المثلثية

بفرض الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن:

حل المعادلة: جتاس = جتاθ هو:

س = θ + ٢كπ ، س = −θ + ٢كπ :ك ∈ ص

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجباً عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع

حل كلا من المعادلات التالية:

Q جتا(س) = $\frac{١}{٢}$

جتاس = جتا$\frac{\pi}{٣}$

∵ جتاس > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو الرابع

س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢كπ | س = $\frac{-\pi}{٣}$ + ٢كπ

ك ∈ ص

Q ٢جتاس − $\sqrt{٣}$ = ٠

٢جتاس = $\sqrt{٣}$

جتاس = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتاس = جتا$\frac{\pi}{٦}$

∵ جتاس > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو الرابع

س = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢كπ | س = $\frac{-\pi}{٦}$ + ٢كπ

ك ∈ ص

Q $\sqrt{٢}$جتاس = ١

جتاس = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

جتاس = جتا$\frac{\pi}{٤}$

∵ جتاس > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو الرابع

س = $\frac{\pi}{٤}$ + ٢كπ | س = $\frac{-\pi}{٤}$ + ٢كπ

ك ∈ ص

بفرض الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن:

حل المعادلة: جاس = جاθ هو:

س = θ + ٢كπ ، س = $\pi - \theta$ + ٢كπ :ك ∋ ص

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجباً عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني

حل كلا من المعادلات التالية:

Q جاس = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جاس = جا$\frac{\pi}{٣}$

∴ جاس > ٠

∴ س̂ تقع في الربع الأول أو الثاني

الأول	الثاني
س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢كπ	س = $\pi - \frac{\pi}{٣}$ + ٢كπ
	= $\frac{٢\pi}{٣}$ + ٢كπ
	ك ∋ ص

Q ٢جاس = $\sqrt{٢}$

جاس = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

جاس = جا$\frac{\pi}{٤}$

∴ جاس > ٠

∴ س̂ تقع في الربع الأول أو الثاني

الأول	الثاني
س = $\frac{\pi}{٤}$ + ٢كπ	س = $\pi - \frac{\pi}{٤}$ + ٢كπ
	س = $\frac{٣\pi}{٤}$ + ٢كπ
	ك ∋ ص

Q ٢جا(س) − ١ = ٠

٢جاس = ١ ، جاس = $\frac{١}{٢}$

جاس = جا$\frac{\pi}{٦}$

∴ جاس > ٠

∴ س̂ تقع في الربع الأول أو الثاني

الأول	الثاني
س = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢كπ	س = $\pi - \frac{\pi}{٦}$ + ٢كπ
	= $\frac{٥\pi}{٦}$ + ٢كπ
	ك ∋ ص

بفرض الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن:

حل المعادلة: ظاس = ظاθ هو:

$س = \theta + ٢ك\pi$ ، $س = \pi + \theta + ٢ك\pi$: ك $\in$ ص   أو يمكن الحل بهذه الطريقة: $س = \theta + ك\pi$: ك $\in$ ص

لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجباً عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث

حل كلا من المعادلات التالية:

Q ظا(س) = $\sqrt{٣}$

ظاس = ظا$\frac{\pi}{٣}$

$\because$ ظاس > ٠ $\therefore$ $\hat{س}$ تقع في الربع الأول   أو   الثالث

$س = \frac{\pi}{٣} + ٢ك\pi$

ك $\in$ ص

$س = \pi + \frac{\pi}{٣} + ٢ك\pi$

$= \frac{٤\pi}{٣} + ٢ك\pi$

ك $\in$ ص

حل آخر:

ظاس = ظا$\frac{\pi}{٣}$

$\because$ ظاس > ٠

$\therefore$ $\hat{س}$ تقع في الربع الأول أو الثالث

$س = \frac{\pi}{٣} + ك\pi$

ك $\in$ ص

Q ظا(س) − ١ = ٠

ظاس = ١

ظاس = ظا$\frac{\pi}{٤}$

$\because$ ظاس > ٠ $\therefore$ $\hat{س}$ تقع في الربع الأول   أو   الثالث

$س = \frac{\pi}{٤} + ٢ك\pi$

ك $\in$ ص

$س = \pi + \frac{\pi}{٤} + ٢ك\pi$

$= \frac{٥\pi}{٤} + ٢ك\pi$

ك $\in$ ص

حل آخر:

ظاس = ١

ظاس = ظا$\frac{\pi}{٤}$

$\because$ ظاس > ٠

$\therefore$ $\hat{س}$ تقع في الربع الأول أو الثالث

$س = \frac{\pi}{٤} + ك\pi$

ك $\in$ ص

Q حل المعادلة $\sqrt{٣}$ظا(س) = ١

ظاس = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

ظاس = ظا$\frac{\pi}{٦}$

$\because$ ظاس > ٠ $\therefore$ $\hat{س}$ تقع في الربع الأول   أو   الثالث

$س = \frac{\pi}{٦} + ٢ك\pi$

ك $\in$ ص

$س = \pi + \frac{\pi}{٦} + ٢ك\pi$

$= \frac{٧\pi}{٦} + ٢ك\pi$

ك $\in$ ص

حل آخر:

ظاس = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

ظاس = ظا$\frac{\pi}{٦}$

$\because$ ظاس > ٠

$\therefore$ $\hat{س}$ تقع في الربع الأول أو الثالث

$س = \frac{\pi}{٦} + ك\pi$

ك $\in$ ص

موضوعي - العلاقات بين الدوال المثلثية ١

إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

١. إذا كانت جا θ = ٠,٢ فإن جا$(\pi + \theta)$ = ٠,٢   (أ) (ب)

٢. إذا كانت جتا $\theta = \frac{٣}{٢}$ فإن قا $\theta = \frac{٢}{٣}$ (أ) (ب)

٣. إذا كانت ظا θ = ٣ فإن ظتا$(\pi + \theta)$ = ٣   (أ) (ب)

٤. إذا كانت جا $\theta = \frac{١}{٥}$ فإن قتا$(\pi + \theta)$ = −٥   (أ) (ب)

٥. إذا كان جا س = $\sqrt{٣}$ فإن مجموعة الحل = $\varnothing$ (أ) (ب)

٦. إذا كان جا س = $\frac{١}{٢}$ فإن س = $\frac{\pi}{٣}$ (أ) (ب)

٧. إذا كان س = $\frac{\pi}{٦}$ فإن جا س = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

٨. مجموعة حل قا س = ٠,٣ هي $\varnothing$ (أ) (ب)

٩. ظا(١٥π) = صفرا   (أ) (ب)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

١٠. اختر الإجابة الصحيحة: النسبة المثلثية فيما يلي التي قيمتها $\frac{١}{٢}$ هي:

(أ) جا(−٣٣٠°)   (ب) جتا(−٢٤٠°)   (ج) ظتا(−١٥٠٠°)   (د) ظا ٧٦٥°

١١. النسبة المثلثية فيما يلي التي قيمتها $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هي:

(أ) جتا $\frac{٣١\pi}{٦}$ (ب) جا$\left(-\frac{٣٥\pi}{٣}\right)$ (ج) ظا $\frac{١٧\pi}{٦}$ (د) قا $\frac{١٣\pi}{٣}$

السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
الإجابة	ب	أ	ب	أ	أ	ب	أ	أ	أ	أ	أ

تـدرب وتـفـوق

جاوب على أهم أسئلة الدرس واثبت لنا قوتك في هذا الدرس!

العلاقات بين الدوال المثلثية (2)

قوانين مهمة

ظا$\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ ظتا$\theta = \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$ قا$\theta = \frac{١}{\text{جتا}\theta}$ قتا$\theta = \frac{١}{\text{جا}\theta}$

جا$^٢\theta$+جتا$^٢\theta = ١$ ١+ظا$^٢\theta$= قا$^٢\theta$ ١+ظتا$^٢\theta$= قتا$^٢\theta$

Q بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان جا$\theta = \frac{٣}{٥}$

$٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$ فأوجد جتاθ ، ظاθ

جا$^٢\theta$+جتا$^٢\theta = ١$

$\left(\frac{٣}{٥}\right)^٢$+جتا$^٢\theta = ١$

جتا$^٢\theta = ١ - \left(\frac{٣}{٥}\right)^٢$

جتا$\theta = \mp\sqrt{١ - \left(\frac{٣}{٥}\right)^٢} = \pm\frac{٤}{٥}$

θ في الربع الأول : جتا$\theta = \frac{٤}{٥}$

ظا$\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} = \frac{\left(\frac{٣}{٥}\right)}{\left(\frac{٤}{٥}\right)} = \frac{٣}{٥} \times \frac{٥}{٤} = \frac{٣}{٤}$

Q بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان

جتا$\theta = ٠{,}٤$ ، $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$ فأوجد جاθ ، ظاθ

جا$^٢\theta$+جتا$^٢\theta = ١$

جا$^٢\theta + (٠{,}٤)^٢ = ١$

جا$^٢\theta = ١ - (٠{,}٤)^٢$

جا$\theta = \mp\sqrt{١ - (٠{,}٤)^٢} = \mp\frac{\sqrt{٢١}}{٥}$

θ في الربع الأول : جا$\theta = \frac{\sqrt{٢١}}{٥}$

ظا$\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} = \frac{\left(\frac{\sqrt{٢١}}{٥}\right)}{٠{,}٤} = \frac{\sqrt{٢١}}{٢}$

Q بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان

ظا$\theta = \frac{٣}{٤}$ ، جا$\theta <$ ٠ فأوجد جاθ ، جتاθ

θ في الربع الثالث

١+ظا$^{٢}\theta$=قا$^{٢}\theta$

$١ + \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٢} =$ قا$^{٢}\theta$

قا$^{٢}\theta = \frac{٢٥}{١٦}$

جتا$^{٢}\theta = \frac{١٦}{٢٥}$ ⇐ جتا$\theta = \mp\sqrt{\frac{١٦}{٢٥}} = \mp\frac{٤}{٥}$

θ في الربع الثالث ⇐ جتا$\theta = -\frac{٤}{٥}$

ظا$\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

$\frac{٣}{٤} = \frac{\text{جا}\theta}{\left(-\frac{٤}{٥}\right)}$ ⇐ جا$\theta = \frac{٣ \times \left(-\frac{٤}{٥}\right)}{٤} = \frac{-٣}{٥}$

Q بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان

ظا$\theta = ٢\sqrt{٢}$ ، جتا$\theta <$ ٠

فأوجد جاθ ، جتاθ

θ في الربع الثالث

١+ظا$^{٢}\theta$=قا$^{٢}\theta$

$١ + (٢\sqrt{٢})^{٢} =$قا$^{٢}\theta$

قا$^{٢}\theta = ٩$

جتا$^{٢}\theta = \frac{١}{٩}$ ⇐ جتا$\theta = \mp\sqrt{\frac{١}{٩}} = \mp\frac{١}{٣}$

θ في الربع الثالث ⇐ جتا$\theta = -\frac{١}{٣}$

ظا$\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

$\frac{٢\sqrt{٢}}{١} = \frac{\text{جا}\theta}{\left(-\frac{١}{٣}\right)}$ ⇐ جا$\theta = \frac{٢\sqrt{٢} \times \left(\frac{-١}{٣}\right)}{١} = \frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}$

Q بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان

$\text{ظا}\,\theta = \frac{٥}{٨}$ ، $\text{جتا}\,\theta > ٠$ فأوجد $\text{جا}\,\theta$

θ في الربع الأول

$١ + \text{ظا}^{٢}\,\theta = \text{قتا}^{٢}\,\theta$

$١ + \left(\frac{٥}{٨}\right)^{٢} = \text{قتا}^{٢}\,\theta$

$\text{قتا}^{٢}\,\theta = \frac{٨٩}{٦٤}$

$\text{جا}^{٢}\,\theta = \frac{٦٤}{٨٩}$

$\text{جا}\,\theta = \mp\sqrt{\frac{٦٤}{٨٩}}$ θ في الربع الأول

$\Leftarrow \text{جا}\,\theta = + \frac{٨\sqrt{٨٩}}{٨٩} \simeq ٠{,}٨٤٨$

Q بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان

$\text{جا}\,\theta = \frac{٣}{٧}$ ، $\text{جتا}\,\theta > ٠$ فأوجد $\text{ظتا}\,\theta$ ، $\text{ظا}\,\theta$

θ في الربع الأول

$\text{جا}^{٢}\,\theta + \text{جتا}^{٢}\,\theta = ١$

$\left(\frac{٣}{٧}\right)^{٢} + \text{جتا}^{٢}\,\theta = ١$

$\text{جتا}^{٢}\,\theta = ١ - \left(\frac{٣}{٧}\right)^{٢}$

$\text{جتا}\,\theta = \mp\sqrt{١ - \left(\frac{٣}{٧}\right)^{٢}} = \pm\frac{٢\sqrt{١٠}}{٧}$

$\text{جتا}\,\theta > ٠ \Leftarrow \text{جتا}\,\theta = \frac{٢\sqrt{١٠}}{٧}$

$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} = \frac{\frac{٣}{٧}}{\frac{٢\sqrt{١٠}}{٧}} = \frac{٣\sqrt{١٠}}{٢٠}$

$\text{ظتا}\,\theta = \frac{١}{\text{ظا}\,\theta} = \frac{٢٠}{٣\sqrt{١٠}} = \frac{٢\sqrt{١٠}}{٣}$

Q بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان

ظا$\theta = \frac{٢٤}{٧}$ ، جتاθ > ٠ فأوجد جاθ ، جتاθ

θ في الربع الأول

١+ظا$^٢\theta$=قا$^٢\theta$

١+$\left(\frac{٢٤}{٧}\right)^٢$=قا$^٢\theta$

قا$^٢\theta = \frac{٦٢٥}{٤٩}$

جتا$^٢\theta = \frac{٤٩}{٦٢٥}$ ⇐ جتا$\theta = \mp\sqrt{\frac{٤٩}{٦٢٥}}$

جتا$\theta = +\frac{٧}{٢٥}$ θ في الربع الأول

ظا$\theta = \frac{جا\theta}{جتا\theta}$

$\frac{٢٤}{٧} = \frac{جا\theta}{\left(\frac{٧}{٢٥}\right)}$ ⇐ جا$\theta = \frac{٢٤\times\left(\frac{٧}{٢٥}\right)}{٧} = \frac{٢٤}{٢٥}$

قوانين مهمة يلزم حفظها:

ظا$\theta = \frac{جا\theta}{جتا\theta}$ ظتا$\theta = \frac{جتا\theta}{جا\theta}$ قا$\theta = \frac{١}{جتا\theta}$ قتا$\theta = \frac{١}{جا\theta}$

جا$^٢\theta$+جتا$^٢\theta$ = ١ ١+ظا$^٢\theta$= قا$^٢\theta$ ١+ظتا$^٢\theta$ =قتا$^٢\theta$

أثبت صحة المتطابقة التالية:

Q جا^{٣}س+جاس×جتا^{٢}س =جاس

الطرف الأيمن =جا^{٣}س+جاس×جتا^{٢}س

=جاس (جا^{٢}س+جتا^{٢}س)

=جاس × (١)

=جاس

= الطرف الأيسر

Q جتا٤س+جا٢س×جتا٢س =جتا٢س

الطرف الأيمن =جتا٤س+جا٢س×جتا٢س

=جتا٢س (جتا٢س+جا٢س)

=جتا٢س × (١)

=جتا٢س

= الطرف الأيسر

Q $\frac{(\text{قا}\theta+1)(\text{قا}\theta-1)}{\text{جا}^2\theta}=\text{قا}^2\theta$

الطرف الأيمن $=\frac{(\text{قا}\theta+1)(\text{قا}\theta-1)}{\text{جا}^2\theta}$

$=\frac{\text{قا}^2\theta-1}{\text{جا}^2\theta}=\frac{\text{ظا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta}$

$=\frac{\left(\frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta}\right)}{\left(\frac{\text{جا}^2\theta}{1}\right)}=\frac{\cancel{\text{جا}^2\theta}}{\text{جتا}^2\theta}\times\frac{1}{\cancel{\text{جا}^2\theta}}$

$=\frac{1}{\text{جتا}^2\theta}=\text{قا}^2\theta$

= الطرف الأيسر

Q $(\text{قا}^2\theta+\text{قتا}^2\theta)-(\text{ظا}^2\theta+\text{ظتا}^2\theta)=2$

الطرف الأيمن=

$=(\text{قا}^2\theta+\text{قتا}^2\theta)-(\text{ظا}^2\theta+\text{ظتا}^2\theta)$

$=\text{قا}^2\theta+\text{قتا}^2\theta-\text{ظا}^2\theta-\text{ظتا}^2\theta$

$=1+\cancel{\text{ظا}^2\theta}+1+\cancel{\text{ظتا}^2\theta}-\cancel{\text{ظا}^2\theta}-\cancel{\text{ظتا}^2\theta}$

=٢

= الطرف الأيسر

موضوعي - العلاقات بين الدول المثلثية ٢

إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

١. قتاθ×جتاθ−ظتاθ = ٠ (أ) (ب)

٢. ظتا$^2(-\theta)$−قتا$^2\theta$ = −١ (أ) (ب)

٣. (قاθ+ظاθ)(قاθ−ظاθ) = ١ (أ) (ب)

٤. جاθقتاθ−جتا$^2\theta$-جا$^2\theta$ = ٠ (أ) (ب)

٥. $\dfrac{\text{جا}^2\theta}{١-\text{جتا}\,\theta}$−جتا$\theta$ = −١ (أ) (ب)

٦. ظاθ+ظتاθ−قاθ قتاθ = ٠ (أ) (ب)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

٧. جا$^2\theta$+جتا$^2\theta$ =

(أ) ١ (ب) -١ (ج) صفرا (د) θ

٨. ١+ظا$^2\theta$ =

(أ) ظتا$^2\theta$ (ب) قتا$^2\theta$ (ج) قا$^2\theta$ (د) جا$^2\theta$

٩. ١+ظتا$^2\theta$ =

(أ) ظتا$^2\theta$ (ب) قتا$^2\theta$ (ج) قا$^2\theta$ (د) جا$^2\theta$

١٠. إذا كانت جتاθ = $-\frac{٥}{٧}$، θ تقع في الربع الثالث فإن جاθ =

(أ) $\frac{-٧}{٢\sqrt{٦}}$ (ب) $\frac{٢\sqrt{٦}}{٧}$ (ج) $\frac{-٢\sqrt{٦}}{٧}$ (د) $\frac{٧}{٢\sqrt{٦}}$

١١. إذا كانت قاθ = $\frac{٣}{٢}$، θ تقع في الربع الرابع فإن ظاθ =

(أ) $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ (ج) $\frac{-٢}{\sqrt{٥}}$ (د) $\frac{-\sqrt{٥}}{٢}$

السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
الإجابة	أ	أ	أ	أ	ب	أ	أ	ج	ب	ج	د

تدرب وتفوق

جاوب على أهم أسئلة الدرس واثبت لنا قوتك في هذا الدرس!

المستوى الاحداثي

قانون المسافة بين نقطتين

المسافة بين أي نقطتين أ(س١، ص١)، ب(س٢، ص٢) $= \sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$

Q أوجد المسافة بين ك(١، −٥) ، ل(٣، −٢)

ك ل $= \sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢} = \sqrt{(٣ - ١)^٢ + (-٢ - -٥)^٢} = \sqrt{١٣} \simeq ٣,٦$ وحدة طول

Q أوجد المسافة بين م(−٢ ، ١) ، ن(−٧ ، ٤)

م ن $= \sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢} = \sqrt{(-٧ - -٢)^٢ + (٤ - ١)^٢} = \sqrt{٣٤} \simeq ٥,٨$ وحدة طول

قانون نقطة المنتصف

إذا كانت أ(س١، ص١) ، ب(س٢، ص٢) ، فإن إحداثيات نقطة المنتصف هي م $\left(\frac{\text{س}_١ + \text{س}_٢}{٢} ، \frac{\text{ص}_١ + \text{ص}_٢}{٢}\right)$

Q أوجد نقطة منتصف $\overline{\text{جـ د}}$ حيث: جـ(−١ ، ٥) ، د(٣ ، ٠)،

م $\left(\frac{\text{س}_١ + \text{س}_٢}{٢} ، \frac{\text{ص}_١ + \text{ص}_٢}{٢}\right)$

م $\left(\frac{-١ + ٣}{٢} ، \frac{٥ + ٠}{٢}\right)$

م $\left(١ ، \frac{٥}{٢}\right)$

Q أوجد نقطة منتصف $\overline{\text{ك ل}}$ حيث: ك(−٣ ، −١) ، ل(٥، ٢)

م $\left(\frac{\text{س}_١ + \text{س}_٢}{٢} ، \frac{\text{ص}_١ + \text{ص}_٢}{٢}\right)$

م $\left(\frac{-٣ + ٥}{٢} ، \frac{-١ + ٢}{٢}\right)$

م $\left(١ ، \frac{١}{٢}\right)$

موضوعي- المستوى الإحداثي

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

١. المسافة بين النقطة (١،-٥) والنقطة (٣،-٢) هي:

أ √١٣ وحدة طول   ب √١١ وحدة طول   ج √١٥ وحدة طول   د √١٠ وحدة طول

٢. المسافة بين النقطة م(-٢ ، ١) والنقطة ن(-٧ ، ٤) هي:

أ √١٣ وحدة طول   ب √٣٤ وحدة طول   ج √٤٣ وحدة طول   د √٣١ وحدة طول

٣. منتصف القطعة المستقيمة جـ د حيث جـ(-١ ، ٥) ، د(٣ ، ٠) هي النقطة:

أ (١ ، ٢,٥)   ب (٢ ، ١,٥)   ج (١ ، ٣)   د (٤ ، ١)

٤. نقطة منتصف القطعة المستقيمة ل ك حيث ك(-٣ ، -١) ، ل(٥ ، ٢) هي:

أ $\left(١ ، -\frac{١}{٢}\right)$ ب $\left(-١ ، \frac{١}{٢}\right)$ ج $\left(١ ، \frac{١}{٢}\right)$ د $\left(-١ ، -\frac{١}{٢}\right)$

السؤال	١	٢	٣	٤
الإجابة	أ	ب	أ	ج

تــدرب وتـفـوق

جاوب على أهم أسئلة الدرس واثبت لنا قوتك في هذا الدرس!

تقسيم قطعة مستقيمة

التقسيم من الداخل

إذا كانت $\overline{\text{أب}}$ قطعة مستقيمة بحيث أ$(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، ب$(\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$ ويراد تقسيمها من جهة أ بنسبة م:ن من الداخل
وكانت نقطة التقسيم جـ(س، ص) فإن:

$$\text{جـ}\left(\frac{\text{س}_2 . \text{م} + \text{ن} . \text{س}_1}{\text{م} + \text{ن}} ، \frac{\text{ص}_2 . \text{م} + \text{ن} . \text{ص}_1}{\text{م} + \text{ن}}\right)$$

Q إذا كان أ(−٥ ، ٣) ، ب(٧ ، −٤) فأوجد نقطة تقسيم $\overline{\text{بأ}}$ من جهة أ بنسبة ١:٣ من الداخل.

س١ ص١ أ(−٥ ، ٣)   س٢ ص٢ ب(٧ ، −٤)

م ١ + ٣ ن

نقطة التقسيم

$$\text{جـ}\left(\frac{\text{س}_2 . \text{م} + \text{ن} . \text{س}_1}{\text{م} + \text{ن}} ، \frac{\text{ص}_2 . \text{م} + \text{ن} . \text{ص}_1}{\text{م} + \text{ن}}\right)$$

$$\left(\frac{7\times 1+3\times(-5)}{1+3} ، \frac{(-4)\times 1+3\times 3}{1+3}\right)$$

$$\left(-2 ، \frac{5}{4}\right)$$

Q إذا كان أ(٣ ، −٤) ، ب(−٢ ، ٣) فأوجد جـ حيث ٢أجـ = جـب ، جـ ∈ $\overline{\text{أب}}$ من الداخل (أجـ:جـب = ١:٢)

٢أجـ = جـب ⇐ أجـ = $\frac{1}{2}$ جـب

⇐ $\frac{\text{أجـ}}{\text{جـب}} = \frac{1}{2}$

س١ ص١ أ(٣ ، −٤)   س٢ ص٢ ب(−٢ ، ٣)

م ١ + ٢ ن

نقطة التقسيم

$$\text{جـ}\left(\frac{\text{س}_2 . \text{م} + \text{ن} . \text{س}_1}{\text{م} + \text{ن}} ، \frac{\text{ص}_2 . \text{م} + \text{ن} . \text{ص}_1}{\text{م} + \text{ن}}\right)$$

$$\text{جـ}\left(\frac{(-2)\times 1+2\times 3}{1+2} ، \frac{3\times 1+2\times(-4)}{1+2}\right)$$

$$\text{جـ}\left(\frac{4}{3} ، \frac{-5}{3}\right)$$

Q إذا كان أ(٢ ، ٤) ، ب(٥ ، ٩) ويراد تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل من جهة ب في نقطة جـ بنسبة ٣:٥ أوجد إحداثيات النقطة.

س١ ص١ أ(٢ ، ٤)   س٢ ص٢ ب(٥ ، ٩)

م ٥ + ٣ ن

نقطة التقسيم

$$\text{جـ}\left(\frac{\text{س}_2 . \text{م} + \text{ن} . \text{س}_1}{\text{م} + \text{ن}} ، \frac{\text{ص}_2 . \text{م} + \text{ن} . \text{ص}_1}{\text{م} + \text{ن}}\right)$$

$$\text{جـ}\left(\frac{5\times 5+3\times 2}{5+3} ، \frac{9\times 5+3\times 4}{5+3}\right)$$

$$\text{جـ}\left(\frac{31}{8} ، \frac{57}{8}\right)$$

Q لتكن أ(٢ ، −٣) ، ب(−٤ ، ٧) أوجد إحداثيات النقطة جـ على $\overline{\text{أب}}$ بحيث: ٧جب = ٢جأ

٧جب = ٢جأ

جب = $\frac{٢}{٧}$ جأ

$\frac{\text{جب}}{\text{جأ}} = \frac{٢}{٧}$

س١ ص١   س٢ ص٢

أ(٢ ، −٣)   ب(−٤ ، ٧)

م ٧   ن ٢

+

نقطة التقسيم

جـ $\left(\frac{\text{م.س}_٢ + \text{ن.س}_١}{\text{م} + \text{ن}} ، \frac{\text{م.ص}_٢ + \text{ن.ص}_١}{\text{م} + \text{ن}}\right)$

جـ $\left(\frac{(−٤) \times ٧ + ٢ \times ٢}{٧ + ٢} ، \frac{٧ \times ٧ + ٢ \times (−٣)}{٧ + ٢}\right)$

جـ $\left(\frac{−٨}{٣} ، \frac{٤٣}{٩}\right)$

موضوعي- تقسيم قطعة مستقيمة

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

١. إذا كان أ(−٥ ، ٣) ، ب(٧ ، −٤) فإن نقطة تقسيم القطعة المستقيمة أب من جهة أ بنسبة ١:٣ من الداخل هي النقطة:

أ) $\left(٢ ، \frac{٥}{٤}\right)$ ب) $\left(−٢ ، −\frac{٥}{٤}\right)$ ج) $\left(−٢ ، \frac{٥}{٤}\right)$ د) $\left(٢ ، −\frac{٥}{٤}\right)$

٢. إذا كان أ(٢ ، ٤) ، ب(٥ ، ٩) ويراد تقسيم القطعة المستقيمة أب من الداخل من جهة ب بنسبة ٣:٥ فإن إحداثيات نقطة التقسيم هي:

أ) $\left(\frac{٣١}{٨} ، \frac{٥٧}{٨}\right)$ ب) $\left(\frac{−٣١}{٨} ، \frac{٥٧}{٨}\right)$ ج) $\left(\frac{٣١}{٨} ، \frac{−٥٧}{٨}\right)$ د) $\left(\frac{−٣١}{٨} ، \frac{−٥٧}{٨}\right)$

٣. لتكن أ(٢ ، −٣) ، ب(−٤ ، ٧) فإن إحداثيات النقطة جـ على القطعة المستقيمة أب بحيث: ٧جب = ٢جأ هي:

أ) $\left(\frac{٨}{٣} ، \frac{٤٣}{٩}\right)$ ب) $\left(\frac{٨}{٣} ، \frac{٤٣−}{٩}\right)$ ج) $\left(\frac{٨−}{٣} ، \frac{٤٣−}{٩}\right)$ د) $\left(\frac{٨−}{٣} ، \frac{٤٣}{٩}\right)$

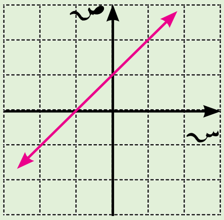
السؤال	١	٢	٣
الإجابة	ج	أ	د

تــدرب وتـفـوق

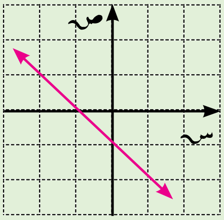
جاوب على أهم أسئلة الدرس واثبت لنا قوتك في هذا الدرس!

ميل الخط المستقيم

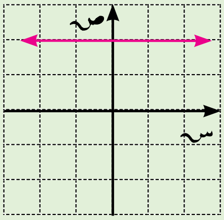
ميل المستقيم موجب



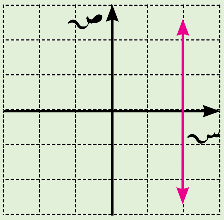
ميل المستقيم سالب



ميل المستقيم الأفقي يساوي صفرًا



المستقيم الرأسي ليس له ميل



$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$

أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بكل زوج من النقاط:

أ(−٢ ، ١) ، ب(٥ ، ٧)

$$\text{الميل} = \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} = \frac{(٧) - (١)}{(٥) - (-٢)} = \frac{٦}{٧}$$

جـ(٢ ، ٥) ، د(٤ ، ٧)

$$\text{الميل} = \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} = \frac{(٧) - (٥)}{(٤) - (٢)} = ١$$

ق(−١ ، ٤) ، ك(٣ ، −٢)

$$\text{الميل} = \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} = \frac{(-٢) - (٤)}{(٣) - (-١)} = \frac{-٣}{٢}$$

م(٤ ، ٣) ، ن(−٧ ، ٣)

$$\text{الميل} = \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} = \frac{(٣) - (٣)}{(-٧) - (٤)} = ٠$$ (مستقيم أفقي)

Q أثبت أن النقاط أ(٢ ، −١) ، ب(−١ ، ٥) ، جـ(٣ ، −٣) على استقامة واحدة.

$$م_١ = \text{ميل } \overleftrightarrow{\text{أب}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{(٥) - (-١)}{(-١) - (٢)} = -٢$$

$$م_٢ = \text{ميل } \overleftrightarrow{\text{أجـ}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{(-٣) - (-١)}{(٣) - (٢)} = -٢$$

$\because$ $م_١ = م_٢$ $\Leftarrow$ $\overleftrightarrow{\text{أب}} // \overleftrightarrow{\text{أجـ}}$

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ مشتركان في النقطة أ

$\therefore$ أ،ب،جـ على استقامة واحدة.

Q أ(١ ، −١) ، ب(٢ ، ٢) ، جـ(−١ ، −٧) أثبت أن النقاط أ،ب،جـ تقع على استقامة واحدة.

$$م_١ = \text{ميل } \overleftrightarrow{\text{أب}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٢ - (-١)}{٢ - ١} = ٣$$

$$م_٢ = \text{ميل } \overleftrightarrow{\text{أجـ}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-٧ - (-١)}{-١ - ١} = \frac{-٦}{-٢} = ٣$$

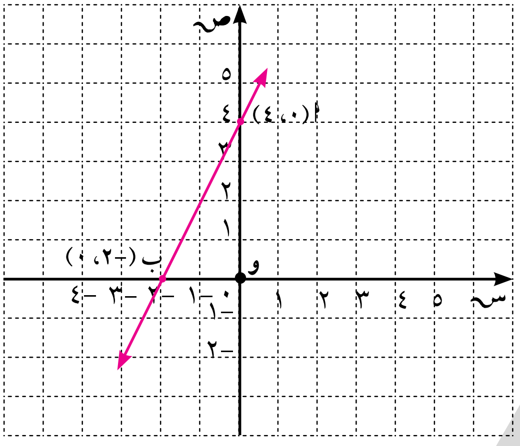
$م_١ = م_٢$ $\Leftarrow$ $\overleftrightarrow{\text{أب}} // \overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ ، ولكنهما يشتركان في النقطة أ

$\therefore$ تكون النقاط أ،ب،جـ على استقامة واحدة.

تذكر أن

العلاقة بين ظل الزاوية θ التي يصنعها مستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وميل هذا المستقيم م هي:
م $=$ ظاθ

أوجد ميل $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ(٠ ، ٤)، ب(−٢ ، ٠) وقارنه بظل الزاوية $\hat{ب}$ في المثلث قائم الزاوية ب و أ

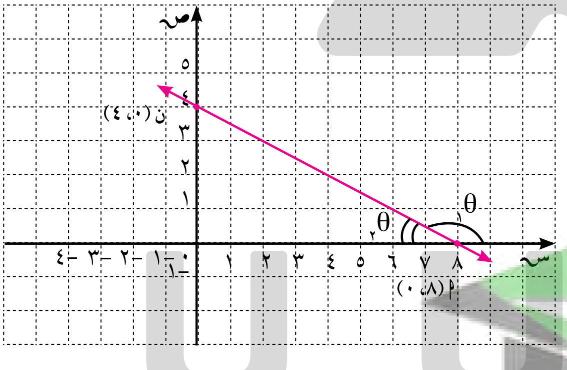


م$_{أب}$ $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{(٠) - (٤)}{(-٢) - (٠)} = ٢$

ظا ب $= \frac{المقابل}{المجاور} = \frac{٤}{٢} = ٢$

ظا ب $=$ الميل $=٢$

أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أن}$ وقارنه بظل الزاوية الحادة التي قياسها $\theta_٢$ وظل الزاوية المنفرجة التي قياسها $\theta_١$



م$_{أن}$ $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{(٤) - (٠)}{(٠) - (٨)} = \frac{-١}{٢}$

ظا$\theta_٢$ $= \frac{المقابل}{المجاور} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

$\theta_١ + \theta_٢ = ١٨٠$

$\theta_١ = ١٨٠ - \theta_٢$

ظا$\theta_١ =$ ظا$(١٨٠ - \theta_٢) = -$ظا$\theta_٢ = -\frac{١}{٢}$

موضوعي- ميل خط مستقيم

إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

١. من الممكن أن يكون لمستقيمين مختلفين الميل نفسه. ⓐ ⓑ

٢. إن ميل المستقيم الذي يمر بالربع الثالث ونقطة الأصل هو دائماً سالب. ⓐ ⓑ

٣. لا يمر المستقيم الذي ميله يساوي صفراً بنقطة الأصل. ⓐ ⓑ

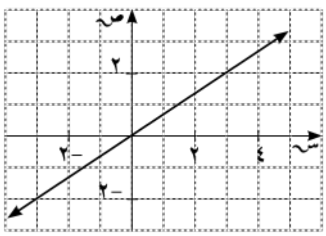
٤. نقطتان لديهما الإحداثي السيني نفسه، فإنهما ينتميان إلى المستقيم الرأسي نفسه. ⓐ ⓑ

٥. كل المستقيمات الأفقية لها الميل نفسه. ⓐ ⓑ

٦. المستقيم الذي ميله يساوي ١ دائماً يمر بنقطة الأصل. ⓐ ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

٧. ميل المستقيم في الشكل المجاور يساوي:



(أ) $-\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$

(ج) $-\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

٨. ميل المستقيم المار بالنقطتين (-٤ ، ٤) ، (٢ ، -٥) هو:

(أ) $-\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (ج) $\frac{٢}{٣}$ (د) $-\frac{٢}{٣}$

٩. المستقيم الرأسي يكون ميله:

(أ) موجب (ب) سالب (ج) صفر (د) ليس له ميل

١٠. المستقيم الأفقي يكون ميله:

(أ) موجب (ب) سالب (ج) صفر (د) ليس له ميل

السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الإجابة	أ	ب	ب	أ	أ	ب	ب	أ	د	ج

تــدرب وتـفـوق

جاوب على أهم أسئلة الدرس واثبت لنا قوتك في هذا الدرس!

معادلة الخط المستقيم

معادلة الخط المستقيم

معادلة الخط المستقيم الذي ميله (م) ويمر بالنقطة (س_1، ص_1)

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م}(\text{س} - \text{س}_1)$$

Q اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{٣}{٢}$ ويمر بالنقطة (٤ ، −١)

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م}\,(\text{س} - \text{س}_1)$$

$$\text{ص} - (-١) = \frac{٣}{٢}(\text{س} - ٤)$$

$$\text{ص} + ١ = \frac{٣}{٢}\text{س} - ٦$$

$$\text{ص} = \frac{٣}{٢}\text{س} - ٦ - ١$$

$$\text{ص} = \frac{٣}{٢}\text{س} - ٧$$

Q اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{-٢}{٣}$ ويمر بالنقطة (−٦ ، ٥)

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م}\,(\text{س} - \text{س}_1)$$

$$\text{ص} - ٥ = \frac{-٢}{٣}(\text{س} - (-٦))$$

$$\text{ص} - ٥ = \frac{-٢}{٣}\text{س} - ٤$$

$$\text{ص} = \frac{-٢}{٣}\text{س} - ٤ + ٥$$

$$\text{ص} = \frac{-٢}{٣}\text{س} + ١$$

Q اكتب معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين: أ(١ ، ٣)، ب(−٢ ، ٠)

$$\text{م} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{(٠) - (٣)}{(-٢) - (١)} = ١$$

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م}\,(\text{س} - \text{س}_1)$$

$$\text{ص} - ٣ = \text{س} - ١$$

$$\text{ص} = \text{س} - ١ + ٣$$

$$\text{ص} = \text{س} + ٢$$

Q اكتب معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين: جـ(٣ ، −١)، د(٢ ، −٢)

$$\text{م} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{(-٢) - (-١)}{(٢) - (٣)} = ١$$

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م}\,(\text{س} - \text{س}_1)$$

$$\text{ص} + ١ = \text{س} - ٣$$

$$\text{ص} = \text{س} - ٣ - ١$$

$$\text{ص} = \text{س} - ٤$$

إذا كان المستقيم ل: ص = ٢س + ١ فأوجد:
معادلة المستقيم هـ الموازي للمستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٢ ، -٣)

ميل المستقيم ل = م١ = ٢

∵ المستقيمان متوازيان ∴ م٢ = م١ = ٢

بالتالي معادلة المستقيم هـ المطلوبة هي:

ص − ص١ = م٢ (س − س١)

ص − −٣ = ٢(س − ٢)

ص + $\cancel{٣}$ = ٢س − ٤ − ٣

ص = ٢س − ٧

إذا كان المستقيم ل: ص=٢س +١ فأوجد: معادلة المستقيم ف العمودي على المستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٤ ، − ٣)

ميل المستقيم ل = م١ = ٢

∵ المستقيمان متعامدان ∴ م٢ × م١ = −١

⟸ م٢ = $\frac{-١}{\text{م}_١} = \frac{-١}{٢}$

بالتالي معادلة المستقيم ف المطلوبة هي:

ص − ص١ = م٢ (س − س١)

ص − −٣ = $\frac{-١}{٢}$(س − ٤)

ص = $-\frac{١}{٢}$س + ٢ − ٣

ص = $-\frac{١}{٢}$س − ١

إذا كان المستقيم ك: ٣ص + س + ٣ = ٠ فأوجد:
معادلة المستقيم أ الموازي للمستقيم ك والذي يمر بالنقطة: (−٣ ، ٢)

ميل المستقيم ك = م١ = $\frac{-١}{٣}$

∵ المستقيمان متوازيان م٢ = م١ = $\frac{-١}{٣}$

معادلة المستقيم أ ص − ص١ = م٢ (س − س١)

ص − ٢ = $\frac{-١}{٣}$(س − −٣)

ص = $\frac{-١}{٣}$(س + ٣) + ٢

ص = $-\frac{١}{٣}$س − ١ + ٢

ص = $\frac{-١}{٣}$س + ١

إذا كان المستقيم ك: ٣ص + س + ٣ = ٠ فأوجد:
معادلة المستقيم ز العمودي على المستقيم ك والذي يمر بالنقطة: (١ ، ٤)

ميل المستقيم ك = م١ = $\frac{-١}{٣}$

∵ المستقيمان متعامدان ∴ م١ × م٢ = −١

م٢ = $\frac{-١}{\text{م}_١} = \frac{-١}{\left(-\frac{١}{٣}\right)}$ = ٣

معادلة المستقيم ز ص − ص١ = م٢ (س − س١)

ص − ٤ = ٣(س − ١)

ص = ٣(س − ١) + ٤

ص = ٣س − ٣ + ٤

ص = ٣س + ١

موضوعي- معادلة الخط المستقيم

إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

١. المستقيم الذي معادلته ص = ٤س يمر من نقطة الأصل (أ) (ب)

٢. المستقيم الذي معادلته ص = ٧ هو مستقيم رأسي (أ) (ب)

٣. لأي مستقيمين غير رأسيين ومتوازيين الميل نفسه (أ) (ب)

٤. المستقيمان المتعامدان وليس أحدهما رأسياً، يكون حاصل ضرب ميليهما -١ (أ) (ب)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

٥. معادلة المستقيم الذي ميله ٣ ويمر بالنقطة (٤ ، -١) هو:

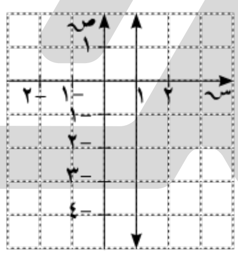
(أ) ص = ٣س + ٧ (ب) ص = ٣س + ١٣ (ج) ص = ٣س - ١٣ (د) ص =٣ س

٦. معادلة المستقيم المار بالنقطتين جـ (١ ، ٣) ، ب (-٢ ، ٠) هي:

(أ) ص = س + ٣ (ب) ص = س - ٣ (ج) ص = س - ٢ (د) ص = س + ٢

٧. معادلة المستقيم في الشكل المجاور هي:

(أ) ص = ١
(ب) س = ١
(ج) ص = س
(د) ص = ٠



٨. معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وميله = ٤ هي:

(أ) ص = -٤ س
(ب) ص = ٤ س
(ج) س = ٤ ص
(د) س = -٤ ص

السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
الإجابة	أ	ب	أ	أ	ج	د	ب	ب

تــدرب وتــفــوق

جاوب على أهم أسئلة الدرس واثبت لنا قوتك في هذا الدرس!

البعد بين نقطة ومستقيم

إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة ل: $أس + بص + جـ = ٠$
فإن البعد ف بين النقطة $(س_1 ، ص_1)$ والمستقيم ل

$$ف = \frac{|أس_1 + بص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$$

Q أوجد البعد بين المستقيم ل: $ص = ٣س - ٤$
والنقطة هـ $(٢ ، ١)$

نكتب معادلة المستقيم على الصورة

$أس + بص + جـ = ٠$

$ص = ٣س - ٤$

$٣س - ص - ٤ = ٠$

$\Leftarrow أ = ٣ \quad ب = -١ \quad جـ = -٤$

$س_1 = ٢ \quad ص_1 = ١$

$$ف = \frac{|أس_1 + بص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}} \Leftarrow$$

$$ف = \frac{|٣(٢) - (١) - ٤|}{\sqrt{(٣)^2 + (-١)^2}}$$

$= \frac{\sqrt{١٠}}{١٠} \simeq ٠,٣١٦$ وحدة طول

Q أوجد البعد بين المستقيم ل : $٢ص = ٣س - ٧$
والنقطة د $(-٤ ، -٣)$

نكتب معادلة المستقيم على الصورة

$أس + بص + جـ = ٠$

$٢ص = ٣س - ٧$

$٣س - ٢ص - ٧ = ٠$

$\Leftarrow أ = ٣ \quad ب = -٢ \quad جـ = -٧$

$س_1 = -٤ \quad ص_1 = -٣$

$$ف = \frac{|أس_1 + بص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}} \Leftarrow$$

$ف = \frac{|٣(-٤) - ٢(-٣) - ٧|}{\sqrt{(٣)^2 + (-٢)^2}} = \sqrt{١٣}$ وحدة طول

Q أوجد البعد بين المستقيم ل: $ص = -س + ٣$
والنقطة د $(٢ ، ٥)$

نكتب معادلة المستقيم على الصورة

$أس + بص + جـ = ٠$

$ص = -س + ٣$

$-س - ص + ٣ = ٠$

$\Leftarrow أ = -١ \quad ب = -١ \quad جـ = ٣$

$س_1 = ٢ \quad ص_1 = ٥$

$$ف = \frac{|أس_1 + بص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}} \Leftarrow$$

$ف = \frac{|-(٢) - (٥) + ٣|}{\sqrt{(-١)^2 + (-١)^2}} = ٢\sqrt{٢}$ وحدة طول

Q أوجد البعد بين المستقيم ل: $ص = -\frac{٤}{٣} + \frac{س}{٦}$
والنقطة ط $(٣ ، -٤)$

نكتب معادلة المستقيم على الصورة

$أس + بص + جـ = ٠$

$ص = -\frac{٤}{٣} + \frac{س}{٦} \quad (\times ٦)$

$٦ص = -٨ + س$

$س - ٦ص - ٨ = ٠$

$\Leftarrow أ = ١ \quad ب = -٦ \quad جـ = -٨$

$س_1 = ٣ \quad ص_1 = -٤$

$$ف = \frac{|أس_1 + بص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}} \Leftarrow$$

$ف = \frac{|(٣) - ٦(-٤) - ٨|}{\sqrt{(١)^2 + (-٦)^2}} \simeq ٣,١٢٤$ وحدة طول

من كراسة التمارين:

أوجد البعد بين نقطة الأصل والمستقيم: ٢ص = ٣س + ٤

نكتب معادلة المستقيم على الصورة

أ س + ب ص + جـ = ٠

٢ص = ٣س + ٤

٣س − ٢ص + ٤ = ٠

⇐ أ = ٣ ب = −٢ جـ = ٤

$\text{س}_1 = \text{٠}$ $\text{ص}_1 = \text{٠}$

$$\text{ف} = \frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}} \Leftarrow$$

$$\text{ف} = \frac{|\text{٣}(\text{٠}) - \text{٢}(\text{٠}) + \text{٤}|}{\sqrt{(\text{٣})^2 + (-\text{٢})^2}} \simeq \text{١,١٠٩ وحدة طول}$$

أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و(٢ ، − ١) إذا كان المستقيم: ٣س − ٤ص + ٧ = ٠ مماسا لها.

طول نصف القطر يساوي بعد المماس عن مركز الدائرة بالتالي:

٣س − ٤ص + ٧ = ٠

أ = ٣، ب = −٤ ، جـ = ٧

$\text{س}_1 = \text{٢}$ $\text{ص}_1 = -\text{١}$

$$\text{ف} = \text{نق} = \frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}} \Leftarrow$$

$$\text{نق} = \frac{|\text{٣}(\text{٢}) - \text{٤}(-\text{١}) + \text{٧}|}{\sqrt{(\text{٣})^2 + (-\text{٤})^2}} = \frac{\text{١٧}}{\text{٥}} \text{ وحدة طول}$$

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، -٣) على المستقيم : -٢س + ص - ٤ =٠

-٢س + ص - ٤ =٠

⇐ أ = −٢ ب = ١ جـ = −٤

$\text{س}_1 = \text{٢}$ $\text{ص}_1 = -\text{٣}$

$$\text{ف} = \frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}} \Leftarrow$$

$$\text{ف} = \frac{|-\text{٢}(\text{٢}) + (-\text{٣}) - \text{٤}|}{\sqrt{(-\text{٢})^2 + (\text{١})^2}} \simeq \text{٤,٩٢ وحدة طول}$$

أوجد طول العمود المرسوم من نقطة (-٤ ، ٧) على المستقيم: ص = -٥س + ١

نكتب معادلة المستقيم على الصورة

أ س + ب ص + جـ = ٠

ص = −٥س + ١

− ٥س − ص + ١ = ٠

⇐ أ = −٥ ب = −١ جـ = ١

$\text{س}_1 = -\text{٤}$ $\text{ص}_1 = \text{٧}$

$$\text{ف} = \frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}} \Leftarrow$$

$$\text{ف} = \frac{|-\text{٥}(-\text{٤}) - (\text{٧}) + \text{١}|}{\sqrt{(-\text{٥})^2 + (-\text{١})^2}} \simeq \text{٢,٧٥ وحدة طول}$$

موضوعي - البعد بين نقطة ومستقيم

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

١. البعد بين المستقيم ل: ص = ٣س – ٤ والنقطة (١،٢) يساوي:

أ) $\frac{\sqrt{١٠}}{١٠}$ وحدة طول

ب) $\sqrt{١٠}$ وحدة طول

ج) ١٠ وحدة طول

د) $\sqrt{٥}$ وحدة طول

٢. البعد بين المستقيم ل: ٢ص = ٣س – ٧ والنقطة (-٤،-٣) يساوي:

أ) $\sqrt{١١}$

ب) $\sqrt{١٣}$

ج) $\sqrt{٧}$

د) $\sqrt{٥}$

٣. البعد بين نقطة الأصل والمستقيم ٢ص = ٣س + ٤ يساوي تقريباً:

أ) ١,١٠٩

ب) ٢,٢١٣

ج) ٤,٠٢١

د) ٦,٠٠١

٤. طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و (٢ ، -١) إذا كان ٣س – ٤ص + ٧ = ٠ مماس لها:

أ) $\frac{١٧}{٥}$

ب) $\frac{١٣}{٥}$

ج) $\frac{١١}{٥}$

د) $\frac{٩}{٥}$

السؤال	١	٢	٣	٤
الإجابة	أ	ب	أ	أ

تـــدرب وتـفـوق

جاوب على أهم أسئلة الدرس واثبت لنا قوتك في هذا الدرس!

معادلة الدائرة

$$(\text{س} - \text{د})^2 + (\text{ص} - \text{هـ})^2 = \text{نق}^2$$

وتسمى هذه الصورة القياسية لمعادلة الدائرة بمعلومية المركز م(د ، هـ) وطول نصف القطر نق

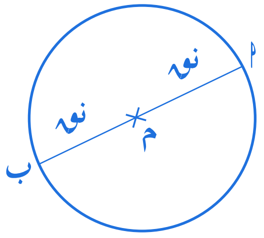
Q أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣ ، −٢) وطول نصف قطرها (٧) وحدات

$$(\text{س} - \text{د})^2 + (\text{ص} - \text{هـ})^2 = \text{نق}^2$$
$$(\text{س} - ٣)^2 + (\text{ص} - -٢)^2 = ٧^2$$
$$(\text{س} - ٣)^2 + (\text{ص} + ٢)^2 = ٤٩$$

Q أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٥ ، −٣) وطول نصف قطرها (٥) وحدات

$$(\text{س} - \text{د})^2 + (\text{ص} - \text{هـ})^2 = \text{نق}^2$$
$$(\text{س} - ٥)^2 + (\text{ص} - -٣)^2 = ٥^2$$
$$(\text{س} - ٥)^2 + (\text{ص} + ٣)^2 = ٢٥$$

Q أوجد معادلة الدائرة التي قطرها $\overline{\text{أب}}$ حيث أ(−٣ ، ٦) ، ب(١ ، −٢)



مركز الدائرة هو منتصف $\overline{\text{أب}}$

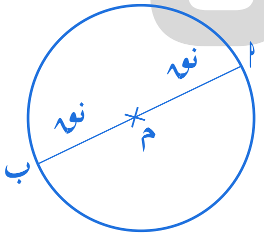
$$\text{م}\left(\frac{(-٣)+١}{٢} ، \frac{٦+(-٢)}{٢}\right) \leftarrow \text{م}(\overset{\text{د}}{-١} ، \overset{\text{هـ}}{٢})$$

$$\text{نق} = \text{مأ} = \sqrt{\left((-١)-(-٣)\right)^2 + \left((٢)-(٦)\right)^2} = ٢\sqrt{٥} \quad \text{وحدة طول}$$

معادلة الدائرة $(\text{س} - \text{د})^2 + (\text{ص} - \text{هـ})^2 = \text{نق}^2$

$$(\text{س} - -١)^2 + (\text{ص} - ٢)^2 = (٢\sqrt{٥})^2$$
$$(\text{س} + ١)^2 + (\text{ص} - ٢)^2 = ٢٠$$

Q أوجد معادلة الدائرة التي قطره $\overline{\text{أب}}$ حيث أ(٤ ، −٢) ، ب(٢ ، ٤)



مركز الدائرة هو منتصف $\overline{\text{أب}}$

$$\text{م}\left(\frac{٤+٢}{٢} ، \frac{(-٢)+٤}{٢}\right) \leftarrow \text{م}(٣ ، ١)$$

$$\text{نق} = \text{مأ} = \sqrt{\left((٣)-(٤)\right)^2 + \left((١)-(-٢)\right)^2} = \sqrt{١٠} \quad \text{وحدة طول}$$

معادلة الدائرة $(\text{س} - \text{د})^2 + (\text{ص} - \text{هـ})^2 = \text{نق}^2$

$$(\text{س} - ٣)^2 + (\text{ص} - ١)^2 = (\sqrt{١٠})^2$$
$$(\text{س} - ٣)^2 + (\text{ص} - ١)^2 = ١٠$$

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٤ وحدات.

$س^٢ + ص^٢ = نق^٢$

$س^٢ + ص^٢ = ١٦$

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول قطرها ٦ سم

القطر = ٦ وبالتالي نق = ٣ سم

$س^٢ + ص^٢ = نق^٢$

$س^٢ + ص^٢ = ٩$

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣ ، ٤) وتمس محور الصادات.

$(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$ نق = |د| = |٣| = ٣

$(س - ٣)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٣^٢$

$(س - ٣)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٩$

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣ ، ٤) وتمس محور السينات.

$(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$ نق = |هـ| = |٤| = ٤

$(س - ٣)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٤^٢$

$(س - ٣)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ١٦$

أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:

$(س + ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٩$

$(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

$\begin{cases} د = -٢ \\ هـ = ٣ \end{cases}$ مركز الدائرة (−٢، ٣)

$نق^٢ = ٩ \Leftarrow نق = \sqrt{٩} = ٣$

$س^٢ + ص^٢ = ٤٩$

$\begin{cases} د = ٠ \\ هـ = ٠ \end{cases}$ مركز الدائرة (٠، ٠)

$نق = \sqrt{٤٩} = ٧$

$(س - ٤)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٣٦$

$(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

د = ٤ هـ = −٥ ⇐ مركز الدائرة (٤ ، −٥)

$نق = \sqrt{٣٦} = ٦$

الصورة العاملة لمعادلة الدائرة:

$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + \text{ل س} + \text{ك ص} + \text{ب} = ٠$

حيث ل ، ك ، ب ثوابت

مركز الدائرة $\left(\frac{-\text{ل}}{٢} ، \frac{-\text{ك}}{٢}\right)$

نصف القطر $\text{نق} = \frac{١}{٢}\sqrt{\text{ل}^{٢}+\text{ك}^{٢}-٤\text{ب}}$ حيث $\text{ل}^{٢}+\text{ك}^{٢}-٤\text{ب} > ٠$

Q عين مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة: $٢\text{س}^{٢} + ٢\text{ص}^{٢} - ١٢\text{س} - ٤\text{ص} - ٣٠ = ٠$

بالقسمة على ٢ : $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٦\text{س} - ٢\text{ص} - ١٥ = ٠$

$\text{ل} = -٦ \quad \text{ك} = -٢ \quad \text{ب} = -١٥$

مركز الدائرة $\left(\frac{-\text{ل}}{٢} ، \frac{-\text{ك}}{٢}\right) = \left(\frac{٦}{٢} ، \frac{٢}{٢}\right) = (٣ ، ١)$

$\text{نق} = \frac{١}{٢}\sqrt{\text{ل}^{٢}+\text{ك}^{٢}-٤\text{ب}} = \frac{١}{٢}\sqrt{(-٦)^{٢}+(-٢)^{٢}-٤(-١٥)} = ٥$

Q عين مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة: $٣\text{س}^{٢}+٣\text{ص}^{٢}-٦\text{س}+٩\text{ص}-١٢ = ٠$

بالقسمة على ٣ : $\text{س}^{٢}+\text{ص}^{٢}-٢\text{س}+٣\text{ص}-٤ = ٠$

$\text{ل} = -٢ \quad \text{ك} = ٣ \quad \text{ب} = -٤$

مركز الدائرة $\left(\frac{-\text{ل}}{٢} ، \frac{-\text{ك}}{٢}\right) = \left(\frac{٢}{٢} ، \frac{-٣}{٢}\right) = \left(١ ، \frac{-٣}{٢}\right)$

$\text{نق} = \frac{١}{٢}\sqrt{\text{ل}^{٢}+\text{ك}^{٢}-٤\text{ب}} = \frac{١}{٢}\sqrt{(-٢)^{٢}+(٣)^{٢}-٤(-٤)} = \frac{\sqrt{٢٩}}{٢}$

- **بفرض لدينا المعادلة التالية:** $س^{٢} + ص^{٢} + لس + كص + ب = ٠$

حيث ل ، ك ، ب ثوابت

- عندما $ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب < ٠$ فإن المعادلة لا تمثل دائرة.
- عندما $ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب = ٠$ فإن المعادلة تمثل نقطة.
- عندما $ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب > ٠$ فإن المعادلة تمثل دائرة.

هل كل معادلة مما يلي تمثل معادلة دائرة؟ فسر.

Q $س^{٢} + ص^{٢} - ٤س + ٧ص + ١٧ = ٠$

$ل = -٤ \quad ك = ٧ \quad ب = ١٧$

$ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب = (-٤)^{٢} + (٧)^{٢} - ٤(١٧) = -٣$

$\because -٣ <$ صفرا $\therefore$ ليست دائرة.

Q $س^{٢} + ص^{٢} + ٤س - ٧ص + ٢٠ = ٠$

$ل = ٤ \quad ك = -٧ \quad ب = ٢٠$

$ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب = ١٦ + ٤٩ - ٤ \times ٢٠ = -١٥ < ٠$

$\therefore$ المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.

Q $س^{٢} + ص^{٢} + ٥س - ٦ص - ٤ = ٠$

$ل = ٥ \quad ك = -٦ \quad ب = -٤$

$ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب = (٥)^{٢} + (-٦)^{٢} - ٤(-٤) = ٧٧$

$\because ٧٧ >$ صفرا $\therefore$ معادلة دائرة.

مركزها $\left(\frac{-ل}{٢} ، \frac{-ك}{٢}\right) = \left(\frac{-٥}{٢} ، \frac{٦}{٢}\right) = \left(\frac{-٥}{٢} ، ٣\right)$

$نق = \frac{١}{٢}\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب} = \frac{١}{٢}\sqrt{٧٧}$

Q $س^{٢} + ص^{٢} - ٣س + ٥ص - \frac{١٥}{٤} = ٠$

$ل = -٣ \quad ك = ٥ \quad ب = -\frac{١٥}{٤}$

$ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب = ٩ + ٢٥ - ٤\left(\frac{-١٥}{٤}\right) = ٤٩ > ٠$

$\because ٤٩ > ٠ \quad \therefore$ المعادلة تمثل معادلة دائرة.

مركزها $\left(\frac{-ل}{٢} ، \frac{-ك}{٢}\right) = \left(\frac{٣}{٢} ، \frac{-٥}{٢}\right)$

$نق = \frac{١}{٢}\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب} = \frac{١}{٢}\sqrt{٤٩} = \frac{٧}{٢}$

Q $س^{٢} + ص^{٢} - ٢س - ٢ص + ٢ = ٠$

$ل = -٢ \quad ك = -٢ \quad ب = ٢$

$ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب = (-٢)^{٢} + (-٢)^{٢} - ٤ \times (٢) =$ صفرا

$\therefore$ تمثل نقطة. $\left(\frac{-ل}{٢} ، \frac{-ك}{٢}\right)$

$= \left(\frac{٢}{٢} ، \frac{٢}{٢}\right) = (١ ، ١)$

Q $س^{٢} + ص^{٢} - ٦س + ٨ص + ٢٥ = ٠$

$ل = -٦ \quad ك = ٨ \quad ب = ٢٥$

$ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب = ٣٦ + ٦٤ - ٤ \times ٢٥ = ٠$

$\therefore$ تمثل نقطة. $\left(\frac{-ل}{٢} ، \frac{-ك}{٢}\right)$

$= \left(\frac{٦}{٢} ، \frac{-٨}{٢}\right) = (٣ ، -٤)$

معادلة مماس لدائرة بالصورة القياسية:

أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها $(س - ٢)^{٢} + (ص - ١)^{٢} = ٢٥$ عند نقطة التماس أ(٦ ، ٤)

المركز (٢ ، ١)

ميل نصف القطر $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١ - ٤}{٢ - ٦} = \frac{٣}{٤}$

∵ المماس ⊥ نصف القطر

∴ ميل المماس × ميل نصف القطر = -١

∴ ميل المماس $= \frac{-١}{\left(\frac{٣}{٤}\right)} = \frac{-٤}{٣}$

معادلة المماس :

$ص - ص_١ = م\left(س - س_١\right)$

$ص - ٤ = \frac{-٤}{٣}(س - ٦)$

$ص = \frac{-٤}{٣}س + ٨ + ٤$

$ص = \frac{-٤}{٣}س + ١٢$

أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها $(س - ١)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٥$ عند نقطة التماس أ(٣ ، ١)

المركز (١ ، ٢)

ميل نصف القطر $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٢ - ١}{١ - ٣} = \frac{-١}{٢}$

∵ المماس ⊥ نصف القطر

∴ ميل المماس × ميل نصف القطر = -١

∴ميل المماس $= \frac{-١}{\left(\frac{-١}{٢}\right)} = ٢$

معادلة المماس:

$ص - ص_١ = م\left(س - س_١\right)$

$ص - ١ = ٢\left(س - ٣\right)$

$ص = ٢س - ٦ + ١$

$ص = ٢س - ٥$

موضوعي- معادلة الدائرة

١. الصورة القياسية لمعادلة دائرة مركزها م $(\text{د}،\text{هـ})$ وطول نصف قطرها نق هي:

(أ) $(\text{س}-\text{د})^{٢}+(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}=\text{نق}^{٢}$

(ب) $(\text{س}-\text{د})^{٢}+(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}=٢\,\text{نق}$

(ج) $(\text{س}+\text{د})^{٢}+(\text{ص}+\text{هـ})^{٢}=\text{نق}^{٢}$

(د) $(\text{س}+\text{د})^{٢}-(\text{ص}+\text{هـ})^{٢}=٢\,\text{نق}$

٢. معادلة الدائرة التي مركزها (٣،-٢) وطول نصف قطرها ٧ وحدات هي:

(أ) $(\text{س}+٣)^{٢}+(\text{ص}-٢)^{٢}=٤٩$

(ب) $(\text{س}-٣)^{٢}+(\text{ص}+٢)^{٢}=١٤$

(ج) $(\text{س}+٣)^{٢}+(\text{ص}-٢)^{٢}=١٤$

(د) $(\text{س}-٣)^{٢}+(\text{ص}+٢)^{٢}=٤٩$

٣. معادلة الدائرة التي قطرها أب حيث أ$(-٣ ، ٦)$، ب$(١ ، -٢)$ هي:

(أ) $(\text{س}-١)^{٢}+(\text{ص}+٢)^{٢}=٢٠$

(ب) $(\text{س}+١)^{٢}+(\text{ص}-٢)^{٢}=٢٠$

(ج) $(\text{س}+١)^{٢}+(\text{ص}-٢)^{٢}=١٠$

(د) $(\text{س}-١)^{٢}+(\text{ص}+٢)^{٢}=١٠$

٤. معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول قطرها ٦سم هي:

(أ) $\text{س}^{٢}+\text{ص}^{٢}=٦$

(ب) $\text{س}^{٢}+\text{ص}^{٢}=١٢$

(ج) $\text{س}^{٢}+\text{ص}^{٢}=٣٦$

(د) $\text{س}^{٢}+\text{ص}^{٢}=٩$

السؤال	١	٢	٣	٤
الإجابة	أ	د	ب	د

تـــدرب وتـفـوق

جاوب على أهم أسئلة الدرس واثبت لنا قوتك في هذا الدرس!

الانحراف المعياري

Q أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم البيانات: ٩، ٧ ، ٨، ٦، ٤، ٢

$\bar{س} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{٣٦}{٦} = ٦$

$س_ر$	$س_ر - \bar{س}$	$(س_ر - \bar{س})^٢$
٩	٣	٩
٧	١	١
٨	٢	٤
٦	٠	٠
٤	٢−	٤
٢	٤−	١٦
		٣٤

التباين $= ع^٢ = \frac{\sum (س_ر - \bar{س})^٢}{ن} = \frac{٣٤}{٦} = \frac{١٧}{٣}$

الانحراف المعياري $= ع = \sqrt{\frac{١٧}{٣}} \simeq ٢,٣٨$

Q أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم البيانات: ٤، ٦، ٨، ٥، ٣، ٧، ٢

$\bar{س} = \frac{٤+٦+٨+٥+٣+٧+٢}{٧} = \frac{٣٥}{٧} = ٥$

القيمة $س_ر$	$س_ر - \bar{س}$	$(س_ر - \bar{س})^٢$
٤	١−	١
٦	١	١
٨	٣	٩
٥	٠	٠
٣	٢−	٤
٧	٢	٤
٢	٣−	٩
		المجموع = ٢٨

التباين $ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^٢}{ن} = \frac{٢٨}{٧} = ٤$

الانحراف المعياري $ع = \sqrt{٤} = ٢$

Q إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من القيم من بيانات هو ع = ٦ وأن مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو (٥٤٠) فما عدد هذه البيانات؟

$$\text{التباين } ع^2_ر = \frac{\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - \bar{س})^2}{ن} \Leftarrow ٦^2 = \frac{٥٤٠}{ن} \Leftarrow ن = \frac{٥٤٠}{٣٦} = ١٥$$

Q إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من القيم من بيانات هو ع = ٤ وأن مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو (٤٨٠) فما عدد هذه البيانات؟

$$\text{التباين } ع^2_ر = \frac{\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - \bar{س})^2}{ن} \Leftarrow ٤^2 = \frac{٤٨٠}{ن} \Leftarrow ن = \frac{٤٨٠}{١٦} = ٣٠$$

Q يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان ١٠٠ طالب ثانوي (الوزن بالكيلو جرام).
أوجد المتوسط الحسابي $\bar{س}$ والانحراف المعياري $ع_ر$ لهذه الأوزان.

الفئة	٦٠-	٦٤-	٦٨-	٧٢-	٧٦
التكرار	٥	١٨	٤٢	٢٧	٨

الفئة	مركز الفئة $س_ر$	التكرار $ت_ر$	$س_ر ت_ر$	$(س_ر - \bar{س})$	$(س_ر - \bar{س})^2$	$(س_ر - \bar{س})^2 \times ت_ر$
٦٠-	٦٢	٥	٣١٠	-٨,٦	٧٣,٩٦	٣٦٩,٨
٦٤-	٦٦	١٨	١١٨٨	-٤,٦	٢١,١٦	٣٨٠,٨٨
٦٨-	٧٠	٤٢	٢٩٤٠	-٠,٦	٠,٣٦	١٥,١٢
٧٢-	٧٤	٢٧	١٩٩٨	٣,٤	١١,٥٦	٣١٢,١٢
٧٦-	٧٨	٨	٦٢٤	٧,٤	٥٤,٧٦	٤٣٨,٠٨
		المجموع ١٠٠	المجموع: ٧٠٦٠	$\bar{س} = \frac{٧٠٦٠}{١٠٠} = ٧٠,٦$		المجموع : ١٥١٦

$$\text{التباين } ع^2_ر = \frac{\sum (س_ر - \bar{س})^2 ت_ر}{\sum ت_ر} = \frac{١٥١٦}{١٠٠} \simeq ١٥,١٦$$

$$\text{الانحراف المعياري } ع_ر = \sqrt{١٥,١٦} \approx ٣,٨٩$$

موضوعي- الانحراف المعياري

إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

١. مجموع انحرافات مجموعة من القيم عن متوسطها الحسابي يساوي صفرا . ⓐ ⓑ

٢. إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم يساوي ٣ وكان مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي يساوي ١٨٠ فإن عدد القيم هو ٦ . ⓐ ⓑ

اختر الإجابة الصحيحة :

٣. في البيانات : ١٠، ١٣، ٩، ٧، ١٢، ١٥ الانحراف المعياري هو:

(أ) ٧
(ب) ٦
(ج) $\sqrt{7}$
(د) ليس أي مما سبق

٤. إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم بيانات يساوي ٤ ومجموع مربعات انحرافات قيم البيانات عن متوسطها الحسابي يساوي ١٩٢ فإن عدد قيم هذه البيانات هو:

(أ) ١٦
(ب) ٦
(ج) ١٢
(د) ليس أي مما سبق

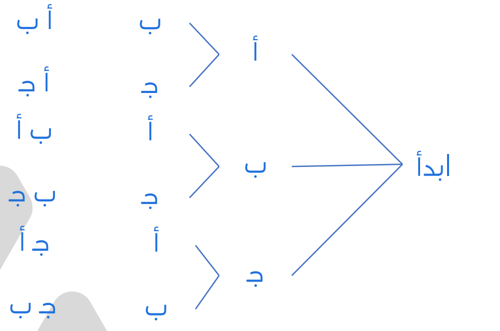
السؤال	١	٢	٣	٤
الإجابة	أ	ب	ج	ج

تـدرب وتـفـوق
جاوب على أهم أسئلة الدرس واثبت لنا قوتك في هذا الدرس!

طرائق العد

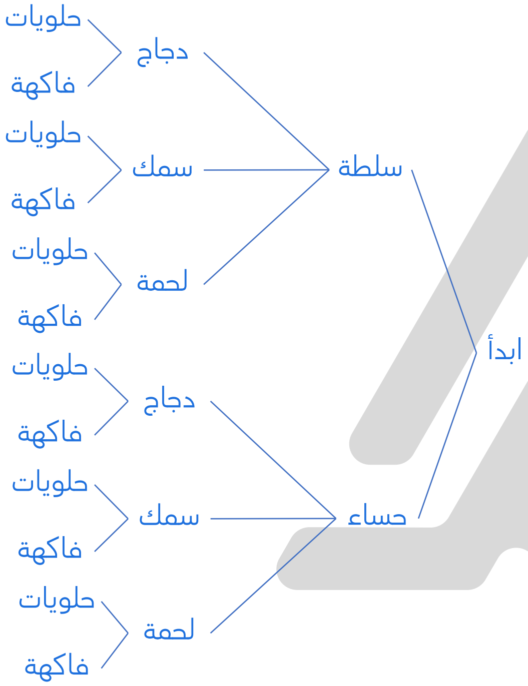
الشجرة البيانية

في تجربة على سلوك الحيوان ، استخدم علماء النفس نوعين من الأطعمة على التوالي كمكافأة عبارة عن واحدة من ثلاثة أنواع ممكنة. كم عدد التشكيلات المختلفة الممكنة في حال كانت أنواع الجوائز غير مكررة؟



عدد التشكيلات المختلفة = ٦

يقدم أحد المطاعم وجبة غداء مؤلفة من: سلطة أو حساء ، دجاج أو سمك أو لحمة ، حلويات أو فاكهة. استخدم الشجرة البيانية لإعطاء عدد الوجبات الممكنة.



عدد النتائج الممكنة = ١٢ وجبة

تذكر:

مضروب ن أو

ن! هو : $ن \times (ن-١) \times ... \times ٣ \times ٢ \times ١$

فمثلا : $٥! = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

$٠! = ١$ تقرأ مضروب صفر = ١

Q يوجد ثمانية متسابقين في سباق ١٠٠ م جري. ما هو عدد النتائج الممكنة لهذا السباق؟ افترض عدم وجود تعادل بين أي متسابقين. علما بأن المتسابقين وصل كل منهم إلى خط النهاية.

عدد النتائج الممكنة $= ٨! = ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٤٠٣٢٠$

Q اشترك (٢٠) جملا في سباق للهجن ووصلت جميعها إلى خط النهاية في أوقات مختلفة (لا يوجد أي تعادل). ما هو عدد النتائج الممكنة لهذا السباق؟

$٢٠! = ٢٠ \times ١٩ \times ١٨ \times ... \times ٣ \times ٢ \times ١$

التباديل:

قانون التباديل هو: $^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$

$ن \in ص^{+}$

$ر \le ن$

$^{ن}ل_{٠} = ١$

أوجد قيمة كل تبديل بدون استخدام الآلة الحاسبة بصورة مباشرة:

Q $^{٥}ل_{٣} = \frac{٥!}{(٥-٣)!} = ٥ \times ٤ \times ٣ = ٦٠$

Q $^{٦}ل_{٤} = \frac{٦!}{(٦-٤)!} = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = ٣٦٠$

Q $^{١٠}ل_{٤} = \frac{١٠!}{(١٠-٤)!} = ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ = ٥٠٤٠$

Q $^{١١}ل_{٣} = \frac{١١!}{(١١-٣)!} = ١١ \times ١٠ \times ٩ = ٩٩٠$

Q $^{ن}ل_{٤} = \frac{ن!}{(ن-٤)!} = ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)$

Q $^{ن}ل_{٣} = \frac{ن!}{(ن-٣)!} = ن(ن-١)(ن-٢)$

افترض أن (٣١) عضوا من جمعية الرياضيات في مدرستك يريدون اختيار أربعة أشخاص لأربعة مناصب (رئيس ، نائب رئيس ، أمين السر ، أمين الصندوق)، حدد كم طريقة يمكن بها الاختيار لهذه المناصب.

$$ل^{٣١}_{٤} = \frac{٣١!}{(٣١-٤)!} = ٣١\times٣٠\times٢٩\times٢٨ = ٧٥٥\ ١٦٠$$

في إحدى الجمعيات الخيرية يوجد (٢٠) عضوا يشكلون مجلس الأمناء يريدون اختيار (رئيس ، أمين سر ، أمين الصندوق). حدد كم طريقة يمكن بها الاختيار.

$$ل^{٢٠}_{٣} = \frac{٢٠!}{(٢٠-٣)!} = ٢٠\times١٩\times١٨ = ٦٨٤٠$$

ما عدد الكلمات التي يمكن أن تتشكل من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية العربية وذلك في حال عدم تكرار أي منها؟

$$ل^{٢٨}_{٥} = \frac{٢٨!}{(٢٨-٥)!} = ٢٨\times٢٧\times٢٦\times٢٥\times٢٤ = ١١\ ٧٩٣\ ٦٠٠$$

ما عدد الأعداد التي يمكن أن تتشكل من ٤ أرقام من أرقام النظام العشري بدون الصفر وذلك في حال عدم تكرار أي رقم؟

$$ل^{٩}_{٤} = \frac{٩!}{(٩-٤)!} = ٩\times٨\times٧\times٦ = ٣٠٢٤$$

التوافيق: قانون التوافيق هو : $ق^{ن}_{ر} = \binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر!\ (ن-ر)!}$

ما عدد اللجان المكونة من ثلاثة أشخاص والتي يمكن تكوينها من مجموعة من أربعة أشخاص؟

$$ق^{٤}_{٣} = \frac{٤!}{٣!\ (٤-٣)!} = ٤ \text{ طرق}$$

ما عدد اللجان المكونة من شخصين والتي يمكن تكوينها من مجموعة من أربعة أشخاص؟

$$ق^{٤}_{٢} = \frac{٤!}{٢!\ (٤-٢)!} = ٦ \text{ طرق}$$

إذا كان فريق كرة سلة يتكون من ١٢ لاعبا. فما عدد الفرق المختلفة التي يمكن تكوينها من خمسة لاعبين من بين لاعبي هذا الفريق (يمكن لأي لاعب اللعب في كل المراكز) ؟

$$ق^{١٢}_{٥} = \frac{١٢!}{٥!\ (١٢-٥)!} = \frac{١٢\times١١\times١٠\times٩\times٨}{٥!} = ٧٩٢$$

إذا كان فريق كرة قدم يتكون من ٢٠ لاعبا. فما عدد الفرق المختلفة التي يمكن تكوينها من ١١ لاعبا من بين لاعبي هذا الفريق؟ (يمكن لأي لاعب اللعب في أي مركز)

$$ق^{٢٠}_{١١} = \frac{٢٠!}{١١!\ (٢٠-١١)!}$$

$$= \frac{٢٠\times١٩\times١٨\times١٧\times١٦\times١٥\times١٤\times١٣\times١٢\times١١\times١٠}{١١!} = ١٦٧\ ٩٦٠$$

- من أجل اختبار لوائح المرشحين للانتخابات النيابية يجب اختيار (١٠) مرشحين من بين (٥١) مرشحا ما عدد اللوائح المختلفة التي يمكن تكوينها؟

$$\text{ق}^{51}_{10} = \frac{51!}{(51-10)!\ 10!} = 12\ 777\ 711\ 870$$

- أثناء الإعداد لزيارة المتحف الوطني أراد منظمو الزيارة إعداد لوائح للطلاب لاستخدام حافلات تتسع كل منها ١٥ طالبا علما أن عدد الطلاب هو ٦٠ طالبا. ما عدد اللوائح المختلفة التي يمكن إعدادها للزيارة؟

$$\text{ق}^{60}_{15} = \frac{60!}{(60-15)!\ 15!} = 5{,}31940891 9\times 10^{13}$$

فيما يلي ، حدد ما إذا كان المثال يبين تبديلا أو توفيقا.

- اختيار ٣ طلاب من الصف العاشر للمشاركة في مسابقة تلاوة القرآن. التوافيق
- مراكز المشاركين الثلاثة في مسابقة تلاوة القرآن. التباديل

في كل مما يلي حدد ما إذا كان المثال يبين تبديلا أو توفيقا واحسب عدد الطرق في كل حالة.

- اختيار رئيس ، نائب رئيس ، أمين سر من بين ٢٥ عضوا في نادي القراءة التباديل $\text{ل}^{25}_{3} = 13800$
- اختيار ٥ حبات بطاطا من كيس يحتوي على ١٢ حبة لإعداد وجبة غذائية التوافيق $\text{ق}^{12}_{5} = 792$
- وضع معلم مخططا يبين مقاعد ٢٢ طالبا في غرفة بها ٢٥ مقعدا التباديل $\text{ل}^{25}_{22} = 2{,}5852\times 10^{24}$
- اختيار ٤ أبيات من قصيدة شعرية مكونة من ١١ بيتا لكتابتها وتعليقها في غرفة الفصل التوافيق $\text{ق}^{11}_{4} = 330$

موضوعي- طرق العد

إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

١. ٥! = ١٢٠ (أ) (ب)

٢. $^{٨}ل_{٥}$ = ٦٧٣٠ (أ) (ب)

٣. $^{١٤}ق_{٥}$ = ٢٠٠٢ (أ) (ب)

اختر الإجابة الصحيحة

٤. بكم طريقة يمكن اختيار ٣ طلاب من أصل ٩ طلاب؟

(أ) ٥٠٤ طريقة
(ب) ٨٤ طريقة
(ج) ٢٧ طريقة
(د) ١٢ طريقة

٥. بكم طريقة ترتيب ٤ سيارات في ٤ مواقف

(أ) ٢٤ طريقة
(ب) ١٦ طريقة
(ج) ٤ طرق
(د) ١٢ طريقة

السؤال	١	٢	٣	٤	٥
الإجابة	أ	ب	أ	ب	أ

الاحتمال المشروط

في كل تجربة عشوائية ، نهتم أولا بمعرفة مجموعة النواتج الممكنة والتي تسمى فضاء العينة (ف). كل حدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

إذا كانت جميع نواتج التجربة لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث هو :

$$\text{ل (الحدث}\ \text{أ)} = \frac{\text{عدد نواتج الحدث أ}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$$

أي أن: $\text{ل(أ)} = \frac{\text{ن(أ)}}{\text{ن(ف)}}$

يكتب الاحتمال بصورة كسر عشري، أو كسر، أو نسبة، أو نسبة مئوية.

خواص الاحتمال لحدث ما:

ليكن أ حدثا في فضاء عينة ف منته وغير خال فإن: $٠ \leq \text{ل(أ)} \leq ١$

- إذا كان أ = { } إذاً ل(أ) = ٠ ويسمى حدثا مستحيلا.
- إذا كان أ = ف إذاً ل(أ) = ١ ويسمى حدثا مؤكدا.
- مجموع احتمالات جميع النواتج في فضاء العينة يساوي ١.

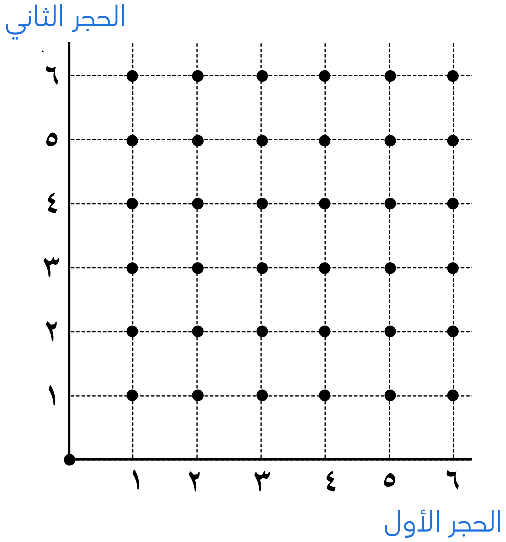
Q في لعبة "رمي حجري نرد منتظمين ومتمايزين" والتجربة هي ملاحظة الوجه العلوي لكل من الحجرين:

- مم يتألف كل ناتج؟
- اكتب فضاء العينة
- ما عدد النواتج الممكنة ؟

ن(ف) = ٣٦

ف	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	(١ ، ١)	(١ ، ٢)	(١ ، ٣)	(١ ، ٤)	(١ ، ٥)	(١ ، ٦)
٢	(٢ ، ١)	(٢ ، ٢)	(٢ ، ٣)	(٢ ، ٤)	(٢ ، ٥)	(٢ ، ٦)
٣	(٣ ، ١)	(٣ ، ٢)	(٣ ، ٣)	(٣ ، ٤)	(٣ ، ٥)	(٣ ، ٦)
٤	(٤ ، ١)	(٤ ، ٢)	(٤ ، ٣)	(٤ ، ٤)	(٤ ، ٥)	(٤ ، ٦)
٥	(٥ ، ١)	(٥ ، ٢)	(٥ ، ٣)	(٥ ، ٤)	(٥ ، ٥)	(٥ ، ٦)
٦	(٦ ، ١)	(٦ ، ٢)	(٦ ، ٣)	(٦ ، ٤)	(٦ ، ٥)	(٦ ، ٦)

- مثل فضاء العينة بيانيا.



- ما احتمال الحدث أ "ظهور عددين مجموعهما يساوي ٤" ؟

$$\text{ل}(\text{أ}) = \frac{\text{ن}(\text{أ})}{\text{ن}(\text{ف})} = \frac{٣}{٣٦} = \frac{١}{١٢}$$

- ما احتمال الحدث ب "ظهور عددين مجموعهما يساوي ٧" ؟

$$\text{ل}(\text{ب}) = \frac{\text{ن}(\text{ب})}{\text{ن}(\text{ف})} = \frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$$

- ما احتمال الحدث جـ "ظهور عددين مجموعهما يساوي ١٣" ؟

ل(جـ) = صفرا مستحيل

- ما احتمال الحدث د "ظهور عددين أحدهما مربع للآخر" ؟

$$\text{ل}(\text{د}) = \frac{\text{ن}(\text{د})}{\text{ن}(\text{ف})} = \frac{٣}{٣٦} = \frac{١}{١٢}$$

العمليات على الأحداث واحتمالاتها:

تقاطع حدثين أ ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ ، ب في آن معا ويرمز إليه بـ أ ∩ ب .

اتحاد حدثين أ ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ أو ب ويرمز إليه بـ أ ∪ ب .

الحدثان أ ، ب هما متنافيان إذا لم يشتركا في أي عنصر أي أ ∩ ب = ∅

متمم الحدث أ هو أ̄ الذي يتألف من كل النواتج الموجودة في فضاء العينة وغير الموجودة في أ .

قاعدة الاحتمال لاتحاد حدثين

$ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب)$

$\Leftarrow ل(أ \cap ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cup ب)$

قاعدة الاحتمال لمتمم الحدث أ

$ل(\overline{أ}) = ١ - ل(أ)$

قاعدة الاحتمال لحدثين متنافيين

إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف فإن: $ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب)$

- إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف وكان:

$ل(أ) = ٠,٧$ ، $ل(ب) = ٠,٤$ ، $ل(أ \cap ب) = ٠,٤$ أوجد كلا من: $ل(أ \cup ب)$ ، $ل(\overline{أ})$

$ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب) = ٠,٧ + ٠,٤ - ٠,٤ = ٠,٧$

$ل(\overline{أ}) = ١ - ل(أ) = ١ - ٠,٧ = ٠,٣$

- إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف وكان:

$ل(أ) = ٠,٣$ ، $ل(ب) = ٠,٥$ ، $ل(أ \cup ب) = ٠,٦$ أوجد كلا من: $ل(أ \cap ب)$ ، $ل(\overline{ب})$

$ل(أ \cap ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cup ب) = ٠,٣ + ٠,٥ - ٠,٦ = ٠,٢$

$ل(\overline{ب}) = ١ - ل(ب) = ١ - ٠,٥ = ٠,٥$

- إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف وكان:

$ل(\overline{أ}) = ٠,٢$ ، $ل(أ \cup ب) = ٠,٩$ ، $ل(أ \cap ب) = ٠,٤$ أوجد كلا من: $ل(\overline{ب})$ ، $ل(\overline{أ \cap ب})$

$ل(\overline{أ}) = ٠,٢ \Leftarrow ل(أ) = ١ - ٠,٢ = ٠,٨$

$ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب)$

$٠,٩ = ٠,٨ + ل(ب) - ٠,٤$

$\Leftarrow ل(ب) = ٠,٩ - ٠,٤ = ٠,٥$

$\therefore ل(\overline{ب}) = ١ - ل(ب) = ١ - ٠,٥ = ٠,٥$

$ل(\overline{أ \cap ب}) = ١ - ل(أ \cap ب) = ١ - ٠,٤ = ٠,٦$

- إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة وكان:

$ل(أ) = ٠,٥$ ، $ل(ب) = ٠,٦$ ، $ل(أ \cap ب) = ٠,٢$ أوجد: $ل(\overline{أ \cup ب})$

$ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب) = ٠,٥ + ٠,٦ - ٠,٢ = ٠,٩$

$\therefore ل(\overline{أ \cup ب}) = ١ - ل(أ \cup ب) = ١ - ٠,٩ = ٠,١$

- في فضاء عينة ف لدينا حدثان أ ، ب متنافيان حيث: $ل(أ) = ٠,٤$ ، $ل(ب) = ٠,٥$

احسب $ل(أ \cup ب)$ ، $ل(\overline{أ \cup ب})$

$ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) = ٠,٤ + ٠,٥ = ٠,٩$ (أ ، ب حدثين متنافيين)

$ل(\overline{أ \cup ب}) = ١ - ل(أ \cup ب) = ١ - ٠,٩ = ٠,١$

الأحداث المستقلة

إذا كان أ، ب حدثين مستقلين فإن احتمال وقوع الحدثين معا هو:

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب)

- قام أحمد بتطوير قاعدة باستخدام الآلة الحاسبة البيانية لإنتاج أرقام عشوائية من ٠ إلى ٩ فما احتمال أن يكون الرقم الأول الذي حصل عليه زوجيا وأن يكون الرقم الثاني مضاعفا لـ ٣ ؟

أ = {٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨}   ب = {٣ ، ٦ ، ٩}

∵ أ، ب مستقلان   ∴ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب) = $\frac{٥}{١٠} \times \frac{٣}{١٠}$ = ٠,١٥

- في تجربة عشوائية عند رمي قطعة نقود ثلاث مرات وملاحظة الوجه العلوي.
ما احتمال أن يكون الناتج (ص ، ك ، ص) ؟

أ الرمية الأولى صورة

ب الرمية الثانية كتابة

جـ الرمية الثالثة صورة

∵ أ، ب ، جـ أحداث مستقلة

∴ ل(أ ∩ ب ∩ جـ) = ل(أ) × ل(ب) × ل(جـ) = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٨}$

- إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٤ أوجد كلا من:

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب) = ٠,٣ × ٠,٤ = ٠,١٢

ل($\overline{أ}$) = ١ − ل(أ) = ١ − ٠,٣ = ٠,٧

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب) = ٠,٣ + ٠,٤ − ٠,١٢ = ٠,٥٨

الحدث التابع

يكون الحدث تابعا عندما يتأثر ظهوره بحدث سابق.

الاحتمال المشروط

إذا كان وقوع الحدث ب مشروطا بوقوع الحدث أ فإن:

$\text{ل}(\text{ب} \mid \text{أ}) = \frac{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ل}(\text{أ})}$ حيث : $\text{ل}(\text{أ}) \neq ٠$ وكذلك $\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \text{ل}(\text{أ}) \times \text{ل}(\text{ب} \mid \text{أ})$

Q في تجربة عشوائية أ ، ب حدثان حيث: ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٢ أوجد كلا من:
ل(ب | أ) ، ل(أ | ب)

$$\text{ل}(\text{ب} \mid \text{أ}) = \frac{\text{ل}(\text{ب} \cap \text{أ})}{\text{ل}(\text{أ})} = \frac{٠,٢}{٠,٣} = \frac{٢}{٣}$$

$$\text{ل}(\text{أ} \mid \text{ب}) = \frac{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ل}(\text{ب})} = \frac{٠,٢}{٠,٦} = \frac{١}{٣}$$

Q في تجربة عشوائية أ ، ب حدثان حيث: ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب | أ) = ٠,٢ أوجد كلا من: ل(أ ∩ ب)

$$\text{ل}(\text{ب} \mid \text{أ}) = \frac{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ل}(\text{أ})}$$

$$\frac{٠,٢}{١} = \frac{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{٠,٣} \Leftarrow \text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}) = ٠,٢ \times ٠,٣ = ٠,٠٦$$

Q رمى جاسم حجر نرد منتظما ولاحظ الوجه العلوي له نسمي الحدث ب :"الحصول على عدد أكبر من أو يساوي ٥"
الحدث أ : "الحصول على عدد فردي"
أحسب ل(ب | أ) "احتمال ظهور عدد أكبر من أو يساوي ٥ بشرط أن يكون عددا فرديا"

ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

ب = {٥، ٦} ، $\text{ل}(\text{ب}) = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

أ = {١، ٣، ٥} ، $\text{ل}(\text{أ}) = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

أ ∩ ب = {٥} ، $\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \frac{١}{٦}$

$$\text{ل}(\text{ب} \mid \text{أ}) = \frac{\text{ل}(\text{ب} \cap \text{أ})}{\text{ل}(\text{أ})} = \frac{\left(\frac{١}{٦}\right)}{\left(\frac{١}{٢}\right)} = \frac{١}{٦} \times \frac{٢}{١} = \frac{١}{٣}$$

Q في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم إذا كان الحدث ب "الحصول على عدد زوجي" ، والحدث أ "الحصول على عدد أولي "
فاحسب ل(ب | أ)

ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

أ = {٢، ٣، ٥} ، $\text{ل}(\text{أ}) = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

ب = {٢، ٤، ٦} ، $\text{ل}(\text{ب}) = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

أ ∩ ب = {٢} ، $\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \frac{١}{٦}$

$$\text{ل}(\text{ب} \mid \text{أ}) = \frac{\text{ل}(\text{ب} \cap \text{أ})}{\text{ل}(\text{أ})} = \frac{\left(\frac{١}{٦}\right)}{\left(\frac{١}{٢}\right)} = \frac{١}{٦} \times \frac{٢}{١} = \frac{١}{٣}$$

موضوعي- الاحتمال

اختر الإجابة الصحيحة:

١. إذا كان ا، ب حدثين مستقلين وكان ل(ا) = ٠,٢، ل(ب) = ٠,٥ فإن ل(ا ∪ ب) =

ⓐ ٠,٥
ⓑ ٠,٧
ⓒ ٠,٨
ⓓ ٠,٦

٢. إذا كان ا، ب حدثين في فضاء العينة وكان ل(ا) = ٠,٧، ل(ب) = ٠,٥ ، ل(ا ∪ ب) = ٠,٨
فإن ل(ا ∩ ب) =

ⓐ ٠,٢
ⓑ ٠,٤
ⓒ ٠,٦
ⓓ ١,٢

٣. إذا كان ا، ب حدثين مستقلين في فضاء العينة وكان ل(ا) = ٠,٦، ل(ب) = ٠,٤ فإن ل(ا | ب) =

ⓐ ٠,٦
ⓑ ٠,٤
ⓒ ٠,٢
ⓓ ١

السؤال	١	٢	٣	
الإجابة	د	ب	أ	

تــدرب وتـفـوق

جاوب على أهم أسئلة الدرس واثبت لنا قوتك في هذا الدرس!