قناة الفلاح للرياضيات

الفصل الدراسي الأول

حلول

المراجعة النهائية

الصف الثاني عشر علمي

@MOH82FALAH

أ / محمد نوري الفلاح

(1 إذا كانت الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x & : \quad x<1 \\ \frac{x}{x^2+1} & : \quad x>1 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim_{x\to1} f(x)$

النهاية جهة اليمين

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x}{x^2+1}$$

$$=\frac{\lim_{x\to1^+} x}{\lim_{x\to1^+}(x^2+1)}$$

$$=\frac{1}{2}$$

نهاية المقام

$$\lim_{x\to1^+}(x^2+1)=(1)^2+1$$

$$=2$$

$$2\neq0$$

النهاية جهة اليسار

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(x^3+x)$$

$$=(1)^3+1$$

$$=2$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)\neq\lim_{x\to1^+} f(x)$$

$\lim_{x\to1} f(x)$ غير موجودة

(2 أوجد: $\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{x^3-4x+5}}{x-2}$

$$=\frac{\lim_{x\to-1}\sqrt[3]{x^3-4x+5}}{\lim_{x\to-1}(x-2)}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{\lim_{x\to-1}(x^3-4x+5)}}{\lim_{x\to-1}(x-2)}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{(-1)^3-4(-1)+5}}{-3}$$

$$=-\frac{2}{3}$$

نهاية المقام

$$\lim_{x\to-1}(x-2)$$

$$=-1-2=-3$$

$$-3\neq0$$

3) أوجد: $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{3x^2-2}}{x-2}$

نظرية المقام

$\lim\limits_{x\to3}(x-2) = 3-2=1$

$1 \neq 0$

نظرية الجذر التربيعي

$\lim\limits_{x\to3}(3x^2-2) = 3(3)^2-2$

$= 25 \qquad , 25>0$

$\lim\limits_{x\to3}\sqrt{3x^2-2} = \sqrt{\lim\limits_{x\to}(3x^2-2)}$

$= \sqrt{25} = 5$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to3}\sqrt{3x^2-2}}{\lim\limits_{x\to3}(x-2)}$$

$$= \frac{5}{1}$$

$$= 5$$

4) أوجد إن أمكن: $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$

بالتعويض المباشر نحصل على صيغة غير معينة $(\frac{0}{0})$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \lim_{x\to2}\frac{(\cancel{x-2})(x-1)}{(\cancel{x-2})(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to2}\frac{x-1}{x+2}$$

نظرية المقام

$\lim\limits_{x\to2}(x+2)$

$= 2+2 = 4$

$4 \neq 0$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to2}(x-1)}{\lim\limits_{x\to2}(x+2)}$$

$$= \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

5) أوجد إن أمكن:

$$\lim_{x\to -7}\frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x}$$

بالتعويض المباشر نحصل على صيغة غير معينة ($\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to -7}\frac{(x+4-3)(x+4+3)}{x(x+7)}$$

$$=\lim_{x\to -7}\frac{(x+1)\cancel{(x+7)}}{x\cancel{(x+7)}}$$

$$=\lim_{x\to -7}\frac{x+1}{x}$$

$$=\frac{\lim_{x\to -7}(x+1)}{\lim_{x\to -7}x}=\frac{-7+1}{-7}=\frac{6}{7}$$

نهاية المقام

$$\lim_{x\to -7}x=-7$$

$$-7\neq 0$$

6) أوجد إن أمكن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x}$$

بالتعويض المباشر نحصل على صيغة غير معينة ($\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2+x-2)\left((2+x)^2+(2+x)(2)+(2)^2\right)}{x}$$

$$\boxed{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(4+4x+x^2+4+2x+4)}{\cancel{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x^2+6x+12)$$

$$=(0)^2+6(0)+12$$

$$=12$$

7) أوجد إن أمكن: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

بالتعويض المباشر نحصل على صيغة غير معينة $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(\cancel{\sqrt[3]{x}-1})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{\cancel{\sqrt[3]{x}-1}}$$

$$=\lim_{x\to1}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)$$

$$=\lim_{x\to1}\sqrt[3]{x^2}+\lim_{x\to1}\sqrt[3]{x}+\lim_{x\to1}1$$

$$=\sqrt[3]{\lim_{x\to1}x^2}+\sqrt[3]{\lim_{x\to1}x}+\lim_{x\to1}1=\sqrt[3]{(1)^2}+\sqrt[3]{1}+1=3$$

8) أوجد إن أمكن: $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{|x+2|}{x^2+3x+2}$

بالتعويض المباشر نحصل على صيغة غير معينة $\left(\frac{0}{0}\right)$

$-(x+2)$ ⟵ -2 ⟶ $x+2$

$$f(x)=\frac{|x+2|}{x^2+3x+2}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\cancel{x+2}}{(\cancel{x+2})(x+1)}, & x>-2,\ x\neq-1\\[2ex] \dfrac{-(\cancel{x+2})}{(\cancel{x+2})(x+1)}, & x<-2\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & x>-2,\ x=\\[2ex] \dfrac{-1}{x+1}, & x<-2\end{cases}$$

النهاية جهة اليسار

$$\lim_{x\to-2^-}f(x)=\lim_{x\to-2^-}\frac{-1}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to-2^-}(-1)}{\lim\limits_{x\to-2^-}(x+1)}=\frac{-1}{-1}=1$$

نهاية المقام

$$\lim_{x\to-2^-}(x+1)=-2+1=-1$$

$-1\neq0$

النهاية جهة اليمين

$$\lim_{x\to-2^+}f(x)=\lim_{x\to-2^+}\frac{1}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to-2^+}1}{\lim\limits_{x\to-2^+}(x+1)}=\frac{1}{-1}=-1$$

نهاية المقام

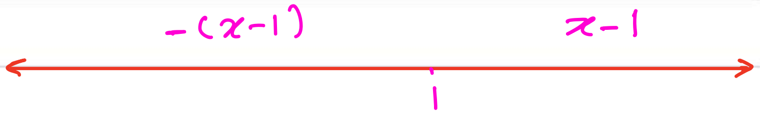
$$\lim_{x\to-2^+}(x+1)=-2+1=-1$$

$-1\neq0$

$$\lim_{x\to-2^-}f(x)\neq\lim_{x\to-2^-}f(x)$$

$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{|x+2|}{x^2+3x+2}$ غير موجودة

9) أوجد إن أمكن: $\lim\limits_{x\to1} \frac{|x-1|}{x^2-1}$



$$\frac{|x-1|}{x^2-1} = \begin{cases} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x+1)} & : x>1 \\ \frac{-(\cancel{x-1})}{(\cancel{x-1})(x+1)} & : x<1 , x\neq-1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & : x>1 \\ \frac{-1}{x+1} & : x<1 , x\neq-1 \end{cases}$$

النهاية جهة اليمين

$$\lim_{x\to1^+} \frac{|x-1|}{x^2-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to1^+} 1}{\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

نهاية المقام

$$\lim_{x\to1^+}(x+1) = 1+1=2$$

$$2\neq0$$

النهاية جهة اليسار

$$\lim_{x\to1^-} \frac{|x-1|}{x^2-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{-1}{x+1}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to1^-}(-1)}{\lim\limits_{x\to1^-}(x+1)}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

نهاية المقام

$$\lim_{x\to1^-}(x+1) = 1+1=2$$

$$, \quad 2\neq0$$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{|x-1|}{x^2-1} \neq \lim_{x\to1^+} \frac{|x-1|}{x^2-1}$$

$\lim\limits_{x\to1} \frac{|x-1|}{x^2-1}$ غير موجودة

10) أوجد: $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$

بالتعويض المباشر نحصل على صيغة غير معينة $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}\times\frac{\sqrt{2x-3}+1}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{2x-3-1}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$$=\frac{\lim_{x\to2}2}{\lim_{x\to2}(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$$=\frac{2}{2}$$

$$=1$$

نهاية الجذر

$$\lim_{x\to2}(2x-3)=2(2)-3=1\ ,\ 1>0$$

$$\lim_{x\to2}\sqrt{2x-3}=\sqrt{\lim_{x\to2}(2x-3)}=\sqrt{1}=1$$

نهاية المقام

$$\lim_{x\to2}(\sqrt{2x-3}+1)=\lim_{x\to2}\sqrt{2x-3}+\lim_{x\to2}1$$

$$=1+1=2$$

$$2\neq0$$

11) أوجد: $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}$

بالتعويض المباشر نحصل على صيغة غير معينة

$$=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}\times\frac{\sqrt{x^2+7}+4}{\sqrt{x^2+7}+4}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x^2+7-16}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(\cancel{x-3})(x+3)}{(\cancel{x-3})(x-1)(\sqrt{x^2+7}+4)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x+3}{(x-1)(\sqrt{x^2+7}+4)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to3}(x+3)}{\lim_{x\to3}\left[(x-1)(\sqrt{x^2+7}+4)\right]}$$

$$=\frac{3+3}{16}$$

$$=\frac{3}{8}$$

نهاية الجذر:

$$\lim_{x\to3}(x^2+7)=(3)^2+7=16$$

$$,16>0$$

$$\lim_{x\to3}\sqrt{x^2+7}=\sqrt{\lim_{x\to3}(x^2+7)}$$

$$=\sqrt{16}=4$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to3}(x-1)\cdot\lim_{x\to3}(\sqrt{x^2+7}+4)$$

$$=\lim_{x\to3}(x-1)\cdot(\lim_{x\to3}\sqrt{x^2+7}+\lim_{x\to3}4$$

$$=(3-1)(4+4)=16\ ,\ 16\neq0$$

(12 أوجد إن أمكن: $\lim_{x\to 2} \frac{-x^5+x^3+x+22}{x-2}$

بالتعويض المباشر نحصل على صيغة غير معينة $\left(\frac{0}{0}\right)$

2	-1	0	1	0	1	22
		-2	-4	-6	-12	-22
	-1	-2	-3	-6	-11	0

$$\frac{-x^5+x^3+x+22}{x-2} = -x^4-2x^3-3x^2-6x-11 \quad , x \neq 2$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{-x^5+x^3+x+22}{x-2} = \lim_{x\to 2}(-x^4-2x^3-3x^2-6x-11)$$

$$= -(2)^4-2(2)^3-3(2)^2-6(2)-11 = -67$$

(13 إذا كانت $\lim_{x\to\infty} \frac{a\,x^2+b\,x+3}{2x+5} = 3$ فأوجد قيمة كل من الثابتين $a\,,b$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+3}{2x+5} = 3 \quad , 3 \neq 0$$

يجب أن تكون درجة البسط = درجة المقام

$$ax^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{bx+3}{2x+5} = 3$$

$$\frac{b}{2} = 3$$

$$b = 6$$

14) أوجد

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\frac{x}{x}-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{4}{x^2}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

عندما $x\to\infty$ يكون $|x|=x$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$=\frac{1-0}{1}$$

$$=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}$$

$$=1+0-0=1\ ,\ 1>0$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}$$

$$=\sqrt{1}=1$$

$$1\neq 0$$

15) أوجد $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\frac{3x}{x}-\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{9}{x^2}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}$$

عندما $x\to-\infty$ يكون $|x|=-x$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(3-\frac{5}{x}\right)}{-\cancel{x}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3+\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to-\infty}\left(-3+\frac{5}{x}\right)}{\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to-\infty}(-3)+\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x}}{\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}$$

$$=\frac{-3+0}{1}$$

$$=-3$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{9}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}1-\lim_{x\to-\infty}\frac{9}{x^2}$$

$$=1-0=1\ ,\ 1>$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}$$

$$=\sqrt{1}=1\ ,\ 1\neq 0$$

16) أوجد $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x^2-x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x(2x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{2x-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x-1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\lim\limits_{x\to} 1}{\lim\limits_{x\to 0}(2x-1)}$$

$$= 1 \times \frac{1}{-1} = -1$$

نظرية المقام

$$\lim_{x\to 0}(2x-1)$$

$$= 2(0) - 1 = -1$$

$$-1 \neq 0$$

17) أوجد $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0}(1+\cos x)$$

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \left(\lim_{x\to 0} 1 + \lim_{x\to 0} \cos x\right)$$

$$= (1)^2 (1+1) = 2$$

18) أوجد $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{sin^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x\,(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\sin^2 x}}{\cancel{\sin^2} x\,(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0} (1+\cos x)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

نهاية المقام

$$\lim_{x\to 0} (1+\cos x) = \lim_{x\to 0} 1 + \lim_{x\to 0} \cos x$$

$$= 1+1 = 2 \quad , 2 \neq 0$$

19) أوجد $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sin x}{\cos x-1}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{\cos x-1} \cdot \frac{\cos x+1}{\cos x+1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x\,(\cos x+1)}{\cos^2 x-1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\,\cancel{\sin} x\,(\cos x+1)}{-\sin^{\cancel{2}} x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x}{\sin x} \cdot \lim_{x\to 0} (\cos x+1)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x}{\sin x} \cdot \left(\lim_{x\to 0} \cos x + \lim_{x\to 0} 1\right)$$

$$= -\frac{1}{1} \times (1+1) = -2$$

20) أوجد $\lim_{x\to 0} \frac{5\tan x - 3\sin x}{4x}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{5\tan x}{4x} - \frac{3\sin x}{4x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{5\tan x}{4x} - \lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{4x}$$

$$= \frac{5}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} - \frac{3}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

$$= \frac{5}{4} \times 1 - \frac{3}{4} \times 1$$

$$= \frac{1}{2}$$

21) أوجد $\lim_{x\to 0} \frac{3\tan x + x^2\cos x}{5x}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\tan x}{5x} + \frac{x^{\cancel{2}}\cos x}{5\cancel{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3\tan x}{5x} + \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{5}\cos x\right)$$

$$= \frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{x}{5} \cdot \lim_{x\to 0}\cos x$$

$$= \frac{3}{5} \times 1 + \frac{0}{5} \times 1$$

$$= \frac{3}{5}$$

22) أوجد $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x\tan x - 2x\cos x}{3\,x}$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x \tan x}{3x} - \frac{2\cancel{x}\cos x}{3\cancel{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\cos x}{3}\cdot\frac{\tan x}{x} - \lim_{x\to0}\frac{2}{3}\cos x$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to0}\cos x \cdot \lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x} - \frac{2}{3}\lim_{x\to0}\cos x$$

$$= \frac{1}{3} \times 1 \times 1 - \frac{2}{3} \times 1$$

$$= -\frac{1}{3}$$

23) أوجد $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan 2x + 3x\cos 4x}{5\,x}$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{5x} + \lim_{x\to0}\frac{3\cancel{x}\cos 4x}{5\cancel{x}}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{5x} + \frac{3}{5}\lim_{x\to0}\cos 4x$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\times 1$$

$$= 1$$

(24 لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x^3+x & : \ x\le 0\\ \dfrac{x^2}{x+1} & : \ x>0\end{cases}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=0$

$f(0)=(0)^2+0=0$ ①

النهاية جهة اليسار

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^3+x)$

$=(0)^3+0$

$=0$

النهاية جهة اليمين

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x+1}$

$=\dfrac{\lim_{x\to 0^+} x^2}{\lim_{x\to 0^+}(x+1)}$

$=\frac{(0)^2}{1}=0$

نهاية المقام

$\lim_{x\to 0^+}(x+1)$

$=0+1=1$

$1\neq 0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$

$\lim_{x\to 0} f(x)=0$ ②

من ① و ② f متصلة عند $x=0$

(25 لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & : \ x>3\\ 7 & : \ x\le 3\end{cases}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=3$

$f(3)=7$

$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} 7=7$

$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

$=\lim_{x\to 3^+}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}$

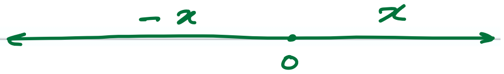
$=\lim_{x\to 3^+}(x+3)=3+3=6$

$\lim_{x\to 3^-} f(x)\neq\lim_{x\to 3^+} f(x)$

$\lim_{x\to 3} f(x)$ غير موجودة

f ليست متصلة عند $x=3$

(26 لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-3x}{|x|} & : \ x\neq 0\\ -3 & : \ x=0\end{cases}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=0$



$$f(x)=\begin{cases}\frac{\cancel{x}(x-3)}{\cancel{x}} & : x>0\\ \frac{-\cancel{x}(x-3)}{\cancel{x}} & : x<0\\ -3 & : x=0\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}x-3 & : x>0\\ -x+3 & : x<0\\ -3 & : x=0\end{cases}$$

$$f(0)=-3$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x+3)=0+3=3$$

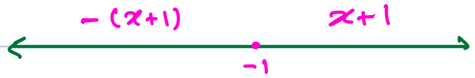
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-3)=0-3=-3$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ غيرموجودة

f ليست متصلة عند $x=0$

(27 لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases}\frac{|x+1|}{x+1}-2x & : \ x\neq -1\\ 2 & : \ x=-1\end{cases}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=-1$



$$f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x+1}-2x & : x>-1\\ \frac{-(x+1)}{x+1}-2x & : x<-1\\ 2 & : x=-1\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}1-2x & : x>-1\\ -1-2x & : x<-1\\ 2 & : x=-1\end{cases}$$

$$f(-1)=2$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(-1-2x)=-1-2(-1)=1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(1-2x)=1-2(-1)=3$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)\neq \lim_{x\to -1^+} f(x)$$

$\lim_{x\to -1} f(x)$ غيرموجودة

f ليست متصلة عند $x=-1$

28) لتكن الدالة f : $f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = \sqrt{x}$ ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

① f متصلة عند $x = -2$

$f(-2) = (-2)^2 + 5 = 9$

g متصلة عند كل $x \in R^+$

g متصلة عند $x = 9$

② أي g متصلة عند $f(-2)$

من ① , ② نجد $g \circ f$ متصلة عند $x = -2$

29) لتكن الدالة f : $f(x) = 2x^2 - 3$, $g(x) = \sqrt{x + 4}$ ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

① f متصلة عند $x = -2$

$f(-2) = 2(-2)^2 - 3 = 5$

ندرس اتصال g عند $x = 5$

نفرض $a(x) = x + 4$

a متصلة عند $x = 5$

$a(5) = 5 + 4 = 9$, $9 > 0$

إذاً g متصلة عند $x = 5$

② أي g متصلة عند $f(-2)$

من ① , ② $g \circ f$ متصلة عند $x = -2$

(30 لتكن الدالة f : $f(x)=\frac{|x|}{x+2}$, $g(x)=2x+3$ ابحث اتصال الدالة $f\circ g$ عند $x=1$

① g متصلة عند $x=1$

$g(1)=2(1)+3=5$

ندرس اتصال f عند $x=5$

نفرض $a(x)=|x|$ متصلة عند $x=5$

نفرض $b(x)=x+2$ متصلة عند $x=5$

$b(5)=5+2=7$, $7\neq0$

f متصلة عند $x=5$

② أي f متصلة عند $g(1)$

من ① ② $f\circ g$ متصلة عند $x=1$

(31 ادرس اتصال الدالة f على $[1,3]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}-2 & : \quad x=1\\ x^2-3 & : \quad 1<x<3\\ 6 & : \quad x=3\end{cases}$$

نفرض

$g(x)=x^2-3$

g دالة كثيرة حدود

متصلة على R

$f(x)=g(x)\ \forall x\in(1,3)$

f متصلة على $(1,3)$

①

ندرس اتصال f عند $x=1$ من اليمين

$f(1)=-2$

$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}(x-3)$

$=1-3=-2$

$\lim_{x\to1^+} f(x)=f(1)=-2$

f متصلة عند $x=1$ من اليمين

②

ندرس اتصال f عند $x=3$ من اليسار

$f(3)=6$

$\lim_{x\to3^-} f(x)=\lim_{x\to3^-}(x^2-3)$

$=(3)^2-3=6$

$\lim_{x\to3^-} f(x)=f(3)=6$

f متصلة عند $x=3$ من اليسار

③

من ① ، ② ، ③ f متصلة على $[1,3]$

(32 ادرس اتصال الدالة f على $[1\,,5]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & : \quad x=1 \\ \dfrac{x^2+1}{x} & : \quad 1<x<5 \\ \dfrac{26}{5} & : \quad x=5 \end{cases}$$

نفرض $g(x) = \frac{x^2+1}{x}$

g دالة حدودية نسبية
متصلة لكل $x \in R - \{0\}$

$f(x) = g(x) \quad \forall x \in (1,5)$

f متصلة على $(1,5)$

①

ندرس اتصال f عند $x=1$ من اليمين

$f(1) = 2$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x^2+1}{x}$

$= \frac{(1)^2+1}{1} = 2$

شرط المقام:

$\lim_{x\to1^+} x = 1 \quad , \quad 1 \neq 0$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = f(1) = 2$

f متصلة عند $x=1$
من اليمين

②

ندرس اتصال f عند $x=5$ من اليسار

$f(5) = \frac{26}{5}$

$\lim_{x\to5^-} f(x) = \lim_{x\to5^-} \frac{x^2+1}{x}$

$= \frac{(5)^2+1}{5} = \frac{26}{5}$

شرط المقام

$\lim_{x\to5^-} x = 5 \quad , \quad 5 \neq 0$

$\lim_{x\to5^-} f(x) = f(5) = \frac{26}{5}$

f متصلة عند
$x=5$ من اليسار

③

من ① ، ② ، ③ f متصلة على $[1,5]$

(33 ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & : \ x\le -1 \\ \frac{4}{x+3} & : \ x>-1 \end{cases}$$

$D_f = (-\infty,-1] \cup (-1,\infty) = R$

نفرض $g(x) = x+3$

g دالة كثيرة حدود

متصلة على R

$f(x) = g(x) \ \forall x \in (-\infty,-1]$

f متصلة على $(-\infty,-1]$

①

نفرض $h(x) = \frac{4}{x+3}$

h دالة حدودية نسبية

متصلة لكل $x \in R-\{-3\}$

$f(x) = h(x) \ \forall x \in (-1,\infty)$

f متصلة على $(-1,\infty)$

②

ندرس اتصال f عند $x=-1$ من اليمين

$f(-1) = -1+3 = 2$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{4}{x+3}$

$= \frac{4}{2} = 2$

نظرية للمقام:

$\lim_{x\to -1^+}(x+3) = -1+3 = 2$

$2 \neq 0$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = 2$

f متصلة عند $x=-1$ من اليمين

③

من ①، ②، ③ f متصلة على مجالها R

34) لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 - a & : \quad x < 0 \\ 2 & : \quad x = 0 \\ ax + b & : \quad x > 0 \end{cases}$ متصلة على مجالها R

أوجد قيمة الثابتين a , b

f متصلة على R اذاً f متصلة عند $x = 0$ اذاً $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$	$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$
$\lim_{x \to 0^+} (ax + b) = 2$	$\lim_{x \to 0^-} (x^2 - a) = 2$
$a(0) + b = 2$	$(0)^2 - a = 2$
$b = 2$	$-a = 2$
	$a = -2$

35) لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} 5 & : \quad x = 1 \\ ax + b & : \quad 1 < x < 4 \\ b + 8 & : \quad x = 4 \end{cases}$ متصلة على $[1 , 4]$

أوجد قيم الثابتين a , b

f متصلة على $[1, 4]$

f متصلة عند $x = 1$ من اليمين	f متصلة عند $x = 4$ من اليسار
$\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$	$\lim_{x \to 4^-} f(x) = f(4)$
$\lim_{x \to 1^+} (ax + b) = 5$	$\lim_{x \to 4^-} (ax + b) = b + 8$
$a(1) + b = 5$	$4a + \cancel{b} = \cancel{b} + 8$
$a + b = 5$	$4a = 8$
	$a = 2$

$2 + b = 5$

$b = 3$

36) لتكن f: $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$ أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-5\,,0]$

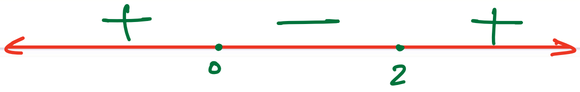
نفرض $g(x)=x^2-2x$

$D_f=\{x : g(x)\geq 0\}$

$x^2-2x\geq 0$

$x^2-2x=0$

$x=2\ ,\ x=0$



$D_f=(-\infty,0]\cup[2,\infty)$

$=R-(0,2)$

ندرس اتصال f على $[-5,0]$

$g(x)\geq 0\quad \forall x\in R-(0,2)$

$[-5,0]$ مجموعة جزئية من $R-(0,2)$

① $g(x)\geq 0\quad \forall x\in[-5,0]$

② g متصلة على $[-5,0]$

من ① , ② f متصلة على $[-5,0]$

37) لتكن f: $f(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$ ادرس اتصال الدالة f على $[1\,,3]$

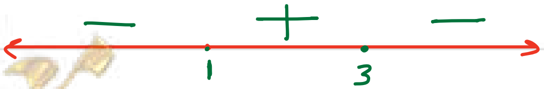
نفرض $g(x)=-x^2+4x-3$

$D_f=\{x : g(x)\geq 0\}$

$-x^2+4x-3\geq 0$

$-x^2+4x-3=0$

$x=1\ ,\ x=3$



$D_f=[1,3]$

ندرس اتصال f على $[1,3]$

① $g(x)\geq 0\quad \forall x\in[1,3]$

② g متصلة على $[1,3]$

من ① و ②

f متصلة على $[1,3]$

38) باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f: $f(x) = 3x^2$ عند $x = -2$

$$f(-2) = 3(-2)^2 = 12$$

$$f'(-2) = \lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - -2}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{3x^2 - 12}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{3(x^2 - 4)}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{3(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} = \lim_{x \to -2} (3(x-2))$$

$$= 3(-2-2) = -12$$

39) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x + 5 & : \ x \le 3 \\ x^2 - 1 & : \ x > 3 \end{cases}$ أوجد إن أمكن $f'(3)$

$$f(3) = 3 + 5 = 8$$

$$f'_-(3) = \lim_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3^-} \frac{x + 5 - 8}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3^-} \frac{\cancel{x - 3}}{\cancel{x - 3}}$$

$$= \lim_{x \to 3^-} 1$$

$$= 1$$

$$f'_+(3) = \lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 1 - 8}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} (x + 3) = 3 + 3 = 6$$

$$f'_-(3) \neq f'_+(3)$$

$f'(3)$ غيرموجودة

40) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^2 & : x \le 2 \\ 4x - 4 & : x > 2 \end{cases}$ أوجد إن أمكن $f'(2)$

$$f(2) = (2) = 4$$

$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{4x-4-4}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{4x-8}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{4\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} 4$$

$$= 4$$

$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} (x+2)$$

$$= 2 + 2$$

$$= 4$$

$$f'_-(2) = f'_+(2) = 4$$

$$f'(2) = 4$$

41) أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة f حيث $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$ عند النقطة $(1,0)$

$$f'(x) = \frac{(x-1)'(x+2)-(x-1)(x+2)'}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1(x+2)-(x-1)(1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x+2-x+1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$$

$$m = \frac{3}{(1+2)^2} = \frac{1}{3}$$ ميل المماس

معادلة المماس

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$

$$y-0 = \frac{1}{3}(x-1)$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

معادلة الناظم

$$y-y_1 = \frac{-1}{m}(x-x_1)$$

$$y-0 = \frac{-1}{\frac{1}{3}}(x-1)$$

$$y = -3(x-1)$$

$$y = -3x+3$$

42) أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودي (الناظم) لمنحنى الدالة $y=\frac{8}{4+x^2}$ عند $x=2$

$$y = \frac{8}{4+(2)^2} = 1$$

النقطة $(2,1)$

$$y' = \frac{-8(2x)}{(4+x^2)^2} = \frac{-16x}{(4+x^2)^2}$$

$$m = \frac{-16(2)}{(4+(2)^2)^2} = -\frac{1}{2}$$ ميل المماس

معادلة المماس:

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$

$$y-1 = -\frac{1}{2}(x-2)$$

$$y = -\frac{1}{2}x+2$$

معادلة العمودي

$$y-y_1 = \frac{-1}{m}(x-x_1)$$

$$y-1 = \frac{-1}{-\frac{1}{2}}(x-2) \Rightarrow y-1 = 2(x-2)$$

$$y = 2x-3$$

43) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & : x \le 1 \\ 2x+1 & : x > 1 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها أوجد $f'(x)$ إن أمكن

$$D_f = (-\infty, 1] \cup (1, \infty) = R$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : x < 1 \\ \text{نبحث} & : x = 1 \\ 2 & : x > 1 \end{cases}$$

$$f(1) = (1)^2 + 2 = 3$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+2-3}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} (x+1)$$

$$= 1 + 1 = 2$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{2x+1-3}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{2x-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} 2$$

$$= 2$$

$$f'_-(1) = f'_+(1) = 2$$

$$f'(1) = 2$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : x < 1 \\ 2 & : x = 1 \\ 2 & : x > 1 \end{cases}$$

44) أوجد المشتقة إن أمكن للدالة المتصلة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : \; x < 1 \\ 2\sqrt{x} & : \; x \geq 1 \end{cases}$$

$D_f = (-\infty, 1) \cup [1, \infty)$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : \; x < 1 \\ \text{نبحث} & : \; x = 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & : \; x > 1 \end{cases}$$

$f(1) = 2\sqrt{1} = 2$

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} (x+1)$$

$$= 1 + 1 = 2$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{2\sqrt{x} - 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{\sqrt{x} + 1}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 1^+} 2}{\lim_{x \to 1^+} (\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

نظرية المقام

$$\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x} + \lim_{x \to 1^+} 1$$

$$= \sqrt{1} + 1 = 2$$

$$2 \neq 0$$

$$f'_-(1) \neq f'_+(1)$$

$f'(1)$ غيرموجودة

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : \; x < 1 \\ \text{غيرموجودة} & : \; x = 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & : \; x > 1 \end{cases}$$

(45 إذا كانت $y=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$ أثبت أن $y' = (y.\csc x)^2$

$$y' = \frac{(\sin x)'(\sin x+\cos x) - \sin x(\sin x+\cos x)'}{(\sin x+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x(\sin x+\cos x) - \sin x(\cos x - \sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cancel{\sin x\cos x} + \cos^2 x - \cancel{\sin x\cos x} + \sin^2 x}{(\sin x+\cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$$

$$(y.\csc x)^2 = \left(\frac{\cancel{\sin x}}{\sin x+\cos x}\cdot\frac{1}{\cancel{\sin x}}\right)^2 = \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2} = y'$$

(46 أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y=\frac{\cos x}{1-\sin x}$

$$y = \frac{\cos x}{1-\sin x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\cos x)'(1-\sin x) - \cos x(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x(1-\sin x) - \cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{1}{1-\sin x}$$

47) أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \tan x$ عند النقطة $P(\frac{\pi}{4}\ , 1)$

$y' = \sec^2 x$

$m = \sec^2 \frac{\pi}{4} = (\sqrt{2})^2 = 2$

معادلة المستقيم العمودي : $y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

$y - 1 = \frac{-1}{2}(x - \frac{\pi}{4})$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8} + 1$

48) أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \sec x$ عند النقطة $P(\frac{\pi}{3}\ , 2)$

$y' = \sec x \cdot \tan x$

$m = \sec \frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$ ميل المماس

$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$ معادلة العمودي

$y - 2 = \frac{-1}{2\sqrt{3}}(x - \frac{\pi}{3})$

$y = -\frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + 2$

49) لتكن: $g(x) = x^2 + 1$, $(x \neq 0)$ $f(x) = \frac{2x+1}{x}$

أوجد 1) باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$ 2) $(f \circ g)'(1)$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2x - (2x+1)(1)}{x^2}$$

$$= \frac{2x - 2x - 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$g(x) = x^2 + 1$$

$$g'(x) = 2x$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$$

$$= f'(x^2+1)\,(2x)$$

$$= \frac{-1}{(x^2+1)^2}(2x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$2)\ (f \circ g)'(1) = \frac{-2(1)}{((1)^2+1)^2} = -\frac{1}{2}$$

50) لتكن: $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$ ، أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(1)$

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+4) - (x^2-4)(2x)}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{\cancel{2x^3} + 8x - \cancel{2x^3} + 8x}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{16x}{(x^2+4)^2}$$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{16\sqrt{x}}{((\sqrt{x})^2+4)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{8}{(x+4)^2}$$

$$(f \circ g)'(1) = \frac{8}{(1+4)^2} = \frac{8}{25}$$

(51 إذا كانت: $g(x) = x^3$, $f(x) = 2x + 1$

1) أوجد $(g \circ f)'(x)$
2) أوجد معادلة المماس للدالة $(g \circ f)(x)$ عند النقطة $A(0,1)$

$g(x) = x^3$ $\qquad f(x) = 2x + 1$

$g'(x) = 3x^2$ $\qquad f'(x) = 2$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) . f'(x)$$
$$= g'(2x+1) . (2)$$
$$= 3(2x+1)^2 (2) = 6(2x+1)^2$$

② $m = (g \circ f)'(0) = 6(2(0)+1)^2 = 6$

معادلة المماس :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = 6(x - 0)$$
$$y = 6x + 1$$

(52 إذا كانت $u = 2x^3 + x$, $y = u^2 + 4u - 3$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

$u = 2x^3 + x$ $\qquad y = u^2 + 4u - 3$

$\frac{du}{dx} = 6x^2 + 1$ $\qquad \frac{dy}{du} = 2u + 4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$
$$= (2u+4)(6x^2+1)$$
$$= (2(2x^3+x)+4)(6x^2+1)$$
$$= (4x^3+2x+4)(6x^2+1)$$
$$= 24x^4 + 16x^3 + 24x^2 + 2x + 4$$

53) أوجد y'' حيث $y = \frac{1}{\cos x}$

$$y = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

$$y' = \sec x \cdot \tan x$$

$$y'' = (\sec x)' \cdot \tan x + \sec x \cdot (\tan x)'$$

$$y'' = \sec x \cdot \tan x \cdot \tan x + \sec x \cdot \sec^2 x$$

$$y'' = \sec x \cdot \tan^2 x + \sec^3 x$$

54) لتكن: $y^2 + xy = 7x$ أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$

$$y^2 + xy = 7x$$

نشتق

$$2yy' + 1y + xy' = 7$$

$$2yy' + xy' = 7 - y$$

$$y'(2y + x) = 7 - y$$

$$y' = \frac{7 - y}{2y + x}$$

55) لتكن: $y = x + x^2y^5$ أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$

$$y = x + x^2y^5$$

نشتق

$$y' = 1 + 2xy^5 + x^2(5y^4y')$$

$$y' - 5x^2y^4y' = 1 + 2xy^5$$

$$y'(1 - 5x^2y^4) = 1 + 2xy^5$$

$$y' = \frac{1 + 2xy^5}{1 - 5x^2y^4}$$

56) أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1,1)$

$$x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$$

نشتق :

$$2x - 2yy' + y'x + y(1) = 0$$

$$y'(-2y + x) = -2x - y$$

$$y' = \frac{-2x - y}{-2y + x}$$

ميل المماس

$$m = \frac{-2(1) - 1}{-2(1) + 1} = 3$$

57) أوجد ميل المماس $(\frac{dy}{dx})$ للمنحنى الذي معادلته: $2y = x^2 + \sin y$ عند النقطة $(2\sqrt{\pi}, 2\pi)$

$$2y = x^2 + \sin y$$

نشتق:

$$2y' = 2x + \cos y . y'$$

$$2y' - \cos y . y' = 2x$$

$$y'(2 - \cos y) = 2x$$

$$y' = \frac{2x}{2 - \cos y}$$

ميل المماس

$$m = \frac{2(2\sqrt{\pi})}{2 - \cos(2\pi)} = 4\sqrt{\pi}$$

58) للمنحنى الذي معادلته: $y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1,1)$

$$y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$$

نشتق:

$$2yy' + \frac{1}{2\sqrt{y}} y' + 2x = 0$$

$$y'\left(2y + \frac{1}{2\sqrt{y}}\right) = -2x$$

$$y' = \frac{-2x}{2y + \frac{1}{2\sqrt{y}}}$$

ميل المماس:

$$m = \frac{-2(1)}{2(1) + \frac{1}{2\sqrt{1}}} = -\frac{4}{5}$$

(59 إذا كانت $y = \sqrt{1-2x}$ فأثبت أن: $yy'' + (y')^2 = 0$

$y = \sqrt{1-2x}$

تربيع الطرفين:

$y^2 = 1-2x$

نشتق:

$\frac{2}{2}yy' = -\frac{2}{2}$

$yy' = -1$

نشتق:

$y'y' + yy'' = 0$

$(y')^2 + yy'' = 0$

(60 إذا كانت $y = x\sin x$ فأثبت أن: $y''' + y' + 2\sin x = 0$

$y = x\sin x$

$y' = 1 . \sin x + x\cos x$

$y' = \sin x + x\cos x$

نشتق مرة ثانية:

$y'' = \cos x + 1 . \cos x + x(-\sin x)$

$y'' = 2\cos x - x\sin x$

$y'' = 2\cos x - y$

نشتق:

$y''' = -2\sin x - y'$

$y''' + y' + 2\sin x = 0$

(61 أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة f: $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[-2\,,1]$

الدالة f متصلة على $[2,1]$

f لها قيمة عظمى مطلقة ولها قيمة صغرى مطلقة في الفترة $[-2,1]$

$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 1 = -1$

$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 1 = -1$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

نضع $f'(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0$

$x = 1 \notin (-2,1)$

$x = -1 \in (-2,1)$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$

نقطة حرجة $(-1,3)$

x	-2	-1	1
$f(x)$	-1	3	-1

-1 قيمة صغرى مطلقة

3 قيمة عظمى مطلقة

(62 أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة f: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ في الفترة $[-2\,,3]$

f متصلة على $[-2,3]$

f لها قيمة عظمى مطلقة ولها قيمة صغرى مطلقة في الفترة $[-2,3]$

$f(-2) = (-2)^{\frac{2}{3}} \approx 1.58$

$f(3) = (3)^{\frac{2}{3}} \approx 2.08$

$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$

نلاحظ $f'(x) \neq 0$

لكن المشتقة ليست موجودة عند $x=0$

إذاً $f(0) = 0$ نقطة حرجة $(0,0)$

x	-2	0	3
$f(x)$	1.58	0	2.08

0 قيمة صغرى مطلقة

2.08 قيمة عظمى مطلقة

(63 بين أن الدالة f: $f(x) = x^2 + 2x$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3\,,1]$ ثم أوجد قيمة c الذي تتنبىء به النظرية وفسر إجابتك.

f دالة كثيرة حدود متصلة على R

f متصلة على $[-3,1]$ ، وقابلة للاشتقاق على $(-3,1)$

فهي تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة يوجد على الأقل $c \in (-3,1)$ بحيث

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(1) - f(3)}{1 - -3}$$

$$f(-3) = (-3)^2 + 2(-3) = 3 \quad , \quad f(1) = (1)^2 + 2(1) = 3$$

$$f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow f'(c) = 2c + 2$$

$$2c + 2 = \frac{3 - 3}{1 + 3}$$

$$2c + 2 = 0$$

$$2c = -2$$

$$c = -1 \in (-3,1)$$

التفسير : يوجد مماس لمنحنى الدالة f عند $x = -1$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $(-3,3)$, $(1,3)$

(64 بين أن الدالة f: $f(x) = x^3 + 1$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3\,,3]$ ثم أوجد قيمة c الذي تتنبىء به النظرية وفسر إجابتك.

f دالة كثيرة حدود متصلة على R

f متصلة على $[-3,3]$ ، وقابلة للاشتقاق على $(-3,3)$

فهي تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة يوجد على الأقل $c \in (-3,3)$ بحيث

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(-3)}{3 - -3}$$

$$f(-3) = (-3)^3 + 1 = -26 \quad , \quad f(3) = (3)^3 + 1 = 28$$

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(c) = 3c^2$$

$$3c^2 = \frac{28 - -26}{3 + 3} = 9$$

$$c^2 = 3$$

$$c = \sqrt{3} \in (-3,3) \quad , \quad c = -\sqrt{3} \in (-3,3)$$

التفسير : يوجد مماسان لمنحنى الدالة f عند $x = -\sqrt{3}$ و $x = \sqrt{3}$

والمماسان يوازيان القاطع المار بالنقطتين $(-3,-26)$, $(3,28)$

65) لتكن الدالة f: $f(x) = x^3 - 12x - 5$ أوجد كلا مايلي ما يلي:

1) النقاط الحرجة للدالة 2) الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.

3) القيم القصوى المحلية.

1) f دالة كثيرة حدود فهي متصلة وقابلة للاشتقاق على R

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

نضع $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 12 = 0$$

$x = 2$, $f(2) = (2)^3 - 12(2) - 5 = -21$

$x = -2$, $f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) - 5 = 11$

النقاط الحرجة $(2, -21)$, $(-2, 11)$

2) جدول إشارة f'

$-\infty$ -2 2 ∞

الفترات	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة f'	+	−	+
سلوك f	↗ متزايدة	↘ متناقصة	↗ متزايدة

f متزايدة على $(-\infty, -2)$ وعلى $(2, \infty)$

f متناقصة على $(-2, 2)$

3) للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = -2$ قيمتها 11

للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ قيمتها -21

66) أوجد فترات التقعر ونقط الانعطاف لمنحنى الدالة $f: \ f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

f دالة كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على R

$f'(x) = 3x^2 - 4x$

$f''(x) = 6x - 4$

نضع $f''(x) = 0$

$6x - 4 = 0$

$\frac{6x}{6} = \frac{4}{6}$

$x = \frac{2}{3}$

جدول إشارة f''

$-\infty \qquad \frac{2}{3} \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty, \frac{2}{3})$	$(\frac{2}{3}, \infty)$
إشارة f''	$-$	$+$
التقعر	$\cap$ مقعر للأسفل	$\cup$ مقعر للأعلى

منحنى f مقعر للأسفل على $(-\infty, \frac{2}{3})$

ومقعر للأعلى على $(\frac{2}{3}, \infty)$

$f(\frac{2}{3}) = (\frac{2}{3})^3 - 2(\frac{2}{3})^2 + 1 = \frac{11}{27}$

نقطة الانعطاف $(\frac{2}{3}, \frac{11}{27})$

67) ادرس تغير الدالة f: $f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بيانها.

f دالة كثيرة حدود مجالها R

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$

f قابلة للاشتقاق على R

$f'(x) = 3x^2 - 3$

نضع $f'(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0$

$x = 1 \quad , \quad x = -1$

$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 4 = 2$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 4 = 6$

النقاط الحرجة $(1,2)$ و $(-1,6)$

جدول إشارة f'

	$-\infty$ -1	1	∞
الفترات	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
إشارة f'	+	−	+
سلوك f	↗ متزايدة	↘ متناقصة	↗ متزايدة

f متزايدة على $(-\infty,-1)$ وعلى $(1,\infty)$

f متناقصة على $(-1,1)$

$f''(x) = 6x$

نضع $f''(x) = 0$

$\frac{6x}{6} = \frac{0}{6}$

$x = 0$

$f(0) = (0)^3 - 3(0) + 4 = 4$

جدول إشارة f''

	$-\infty$ 0	∞
الفترات	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
إشارة f''	−	+
التقعر	∩ مقعر للأسفل	∪ مقعر للأعلى

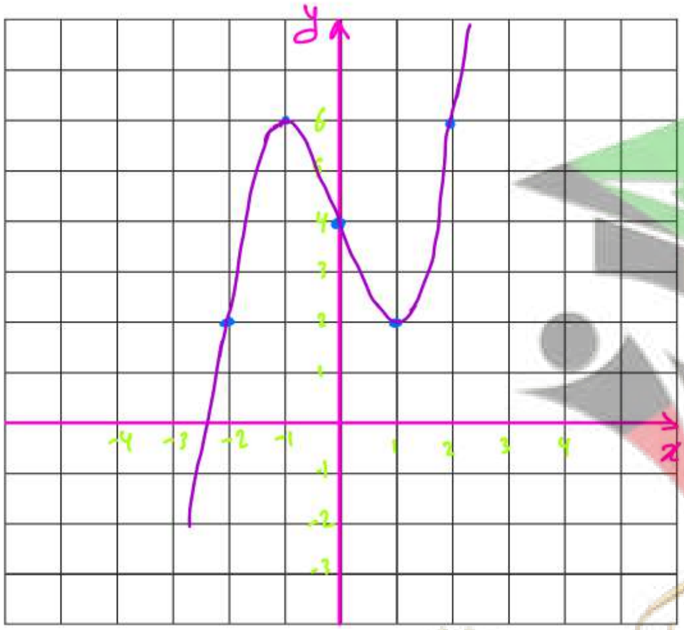
منحنى f مقعر للأسفل على $(-\infty,0)$

ومقعر للأعلى على $(0,\infty)$

نقطة انعطاف $(0,4)$

نقاط إضافية

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	6	4	2	6
	اضافية	عظمى محلية	انعطاف	صغرى محلية	اضافية



68) ادرس تغير الدالة f: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها.

f دالة كثيرة حدود مجالها R

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$

f قابلة للاشتقاق على R

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

نضع $f'(x) = 0$

$3x^2 - 12x + 9 = 0$

$x = 3 \quad , \quad x = 1$

$f(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) - 4 = -4$

$f(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) - 4 = 0$

النقاط الحرجة

$(3, -4) \quad , \quad (1, 0)$

الفترات	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
إشارة f'	+	—	+
سلوك f	↗	↘	↗

الدالة f متزايدة على $(-\infty, 1)$ وعلى $(3, \infty)$

ومتناقصة على $(1, 3)$

$f''(x) = 6x - 12$

نضع $f''(x) = 0$

$6x - 12 = 0$

$6x = 12 \Rightarrow x = 2$

$f(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 9(2) - 4 = -2$

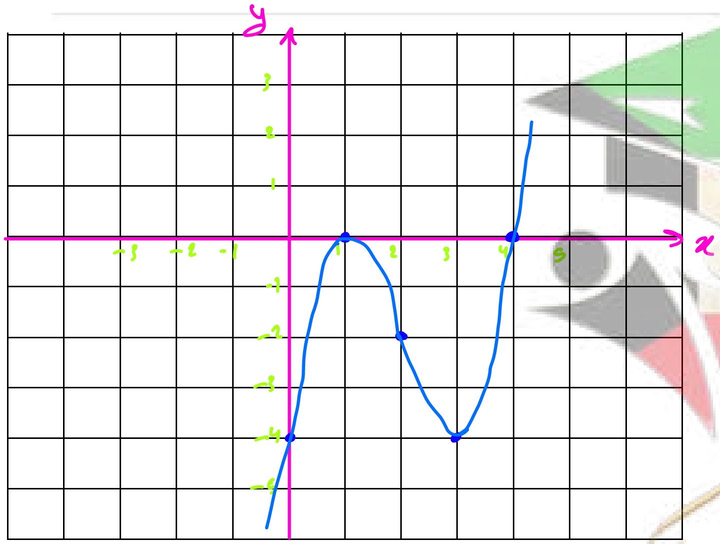
الفترات	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة f''	—	+
التقعر	$\cap$	$\cup$

منحنى الدالة f مقعر للأسفل على $(-\infty, 2)$

ومقعر للأعلى على $(2, \infty)$

$(2, -2)$ نقطة انعطاف

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-4	0	-2	-4	0
	اضافية	عظمى محلية	انعطاف	صغرى محلية	اضافية



69) ادرس تغير الدالة f: $f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها.

f دالة كثيرة حدود مجالها R

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-2x^3) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (-2x^3) = -\infty$$

f قابلة للاشتقاق على R

$f'(x) = 1 - 6x^2$

نضع $f'(x) = 0$

$1 - 6x^2 = 0$

$x = -\frac{\sqrt6}{6}$, $x = \frac{\sqrt6}{6}$

$f(-\frac{\sqrt6}{6}) = -\frac{\sqrt6}{6} - 2(-\frac{\sqrt6}{6})^3 = -\frac{\sqrt6}{9}$

$f(\frac{\sqrt6}{6}) = \frac{\sqrt6}{6} - 2(\frac{\sqrt6}{6})^3 = \frac{\sqrt6}{9}$

النقاط الحرجة

$(-\frac{\sqrt6}{6}, -\frac{\sqrt6}{9})$ و $(\frac{\sqrt6}{6}, \frac{\sqrt6}{9})$

$-\infty$ $-\frac{\sqrt6}{6}$ $\frac{\sqrt6}{6}$

الفترات	$(-\infty, -\frac{\sqrt6}{6})$	$(-\frac{\sqrt6}{6}, \frac{\sqrt6}{6})$	$(\frac{\sqrt6}{6}, \infty)$
إشارة f'	—	+	—
سلوك f	↘ متناقصة	↗ متزايدة	↘ متناقصة

f متناقصة على $(-\infty, -\frac{\sqrt6}{6})$ وعلى $(\frac{\sqrt6}{6}, \infty)$

f متزايدة على $(-\frac{\sqrt6}{6}, \frac{\sqrt6}{6})$

$f''(x) = -12x$

نضع $f''(x) = 0$

$\frac{-12x}{-12} = \frac{0}{-12}$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 - 2(0)^3 = 0$

$-\infty$ 0 ∞

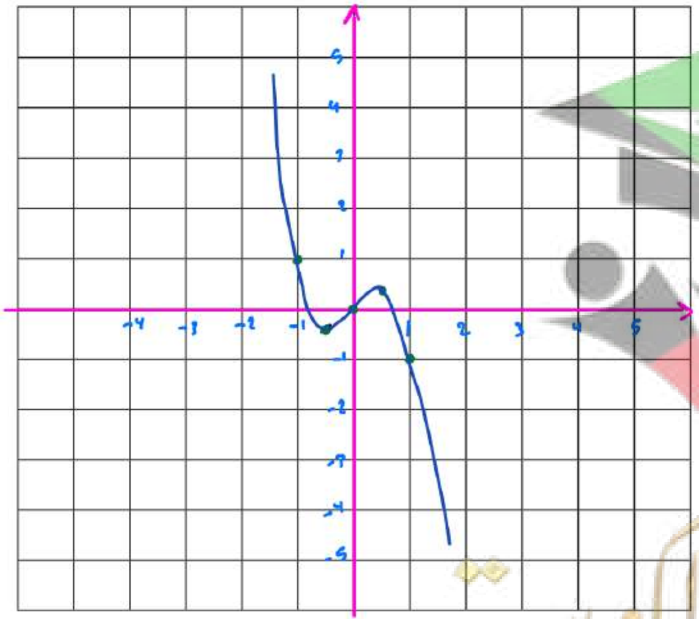
الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
إشارة f''	+	—
التقعر	$\cup$ مقعر للأعلى	$\cap$ مقعر للأسفل

منحنى f مقعر للأعلى على $(-\infty, 0)$

ومقعر للأسفل على $(0, \infty)$

$(0, 0)$ نقطة انعطاف

x	-1	$-\frac{\sqrt6}{6}$	0	$\frac{\sqrt6}{6}$	1
$f(x)$	1	$\frac{\sqrt6}{9}$	0	$\frac{\sqrt6}{9}$	-1
		صغرى محلية	انعطاف	عظمى محلية	



70) ادرس تغير الدالة $f:\ f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها.

f دالة كثيرة حدود مجالها R

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-x^3) = \infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(-x^3) = -\infty$

f قابلة للاشتقاق على R

$f'(x) = -3x^2$

نضع $f'(x) = 0$

$-3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = 1-(0)^3 = 1$

نقطة حرجة $(0,1)$

جدول إشارة f'

$-\infty \quad 0 \quad \infty$

الفترات	$(0,\infty)$	$(-\infty,0)$
إشارة f'	—	—
سلوك f	متناقصة ↘	متناقصة ↘

f متناقصة على $(-\infty,0)$

وعلى $(0,\infty)$

$f''(x) = -6x$

نضع $f''(x) = 0$

$-6x = 0$

$x = 0$

$f(0) = 1-(0)^3 = 1$

$-\infty \quad 0 \quad \infty$

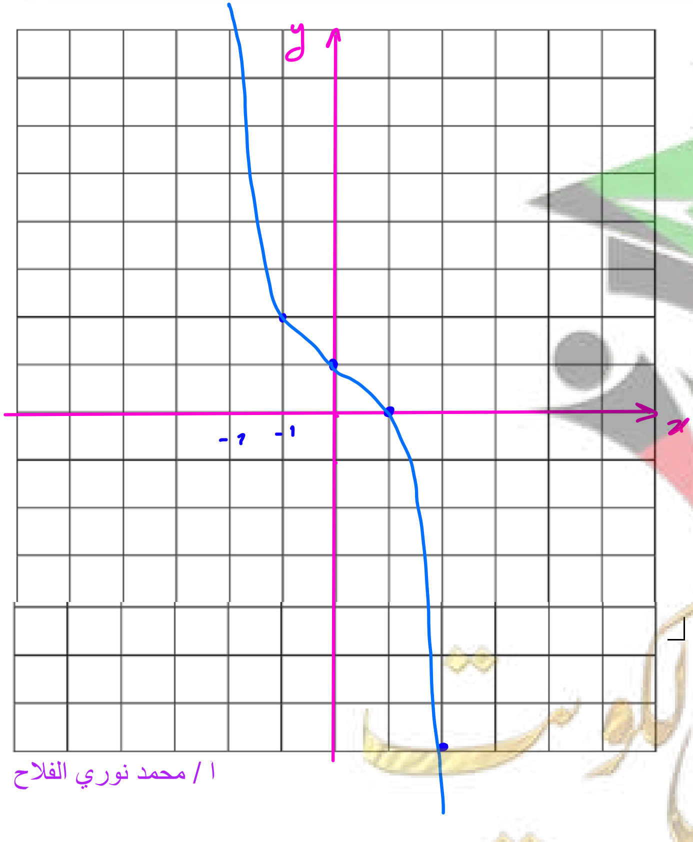
الفترات	$(0,\infty)$	$(-\infty,0)$
إشارة f''	—	+
التقعر	∩	∪

منحنى f مقعر للاعلى على $(-\infty,0)$

ومقعر للاسفل على $(0,\infty)$

نقطة انعطاف $(0,1)$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	9	2	1	0	-7



71) عددان موجبان مجموعهما 100 ومجموع مربعيها أصغر ما يمكن، ما العددان؟

نفرض أحد العددين x حيث $0 < x < 100$

فيكون العدد الآخر $100 - x$

مجموع مربعيها: $f(x) = x^2 + (100-x)^2$

$f'(x) = 2x + 2(100-x)(-1)$

$= 2x - 200 + 2x = 4x - 200$

نضع $f'(x) = 0$

$4x - 200 = 0$

$f''(x) = 4$	$4x = 200$
$f''(50) = 4 \quad , 4 > 0$	$x = 50$
للدالة قيمة صغرى عند $x = 50$	للدالة نقطة حرجة عند $x = 50$

العددان $50, 50$

72) أوجد عددين موجبين مجموعهما 20 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن.

نفرض أحد العددين x حيث $0 < x < 20$

العدد الآخر $20 - x$

ناتج ضربهما $f(x) = x(20-x) = 20x - x^2$

$f'(x) = 20 - 2x$

نضع $f'(x) = 0$

$20 - 2x = 0$

$\frac{-2x}{-2} = \frac{-20}{-2}$

$x = 10$

للدالة نقطة حرجة عند $x = 10$

$f''(x) = -2$

$f''(10) = -2$ و $-2 < 0$

للدالة قيمة عظمى عند $x = 10$

العددان : 10 و 10

73) أثبت أن من بين المستطيلات التي محيطها $8\ m$، واحدا منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعا.

نفرض بعدي المستطيل x , y

محيط المستطيل = 2 (الطول + العرض)

$2(x+y) = 8 \Rightarrow x+y = 4 \Rightarrow y = 4 - x$

مساحة المستطيل = الطول × العرض $\quad s = x \cdot y$

$s(x) = x(4-x) = 4x - x^2$

$s`(x) = 4 - 2x$

نضع $s'(x) = 0$ إذاً $4 - 2x = 0$

$-2x = -4$

$x = 2$

توجد نقطة حرجة عند $x = 2$

$s''(x) = -2$

$s''(2) = -2 \quad , \quad -2 < 0$

للدالة قيمة عظمى عند $x = 2$

أكبر مساحة للمستطيل عند $x = 2$

بعدي المستطيل $2 , 2$ وتكون مربعاً

74) تعطى الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36\,h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h.

1) أوجد الارتفاع $h\ (cm)$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة.

2) ما قيمة هذا الحجم ؟

$V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$

$V'(h) = 2\pi(-3h^2 + 36)$

نضع $V'(h) = 0$ إذاً $\frac{2\pi}{2\pi}(-3h^2 + 36) = \frac{0}{2\pi}$

$-3h^2 + 36 = 0$

$h = 2\sqrt{3} \quad , \quad h = -2\sqrt{3}$ مرفوض

توجد نقطة حرجة عند $h = 2\sqrt{3}$

$V''(h) = 2\pi(-6h) = -12\pi h$

$V''(2\sqrt{3}) = -12\pi(2\sqrt{3}) = -24\sqrt{3}\,\pi < 0$

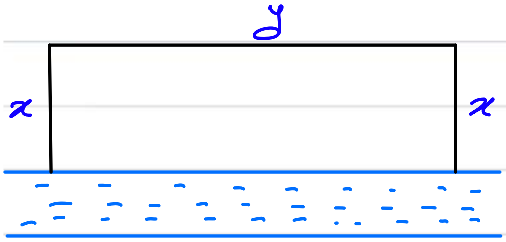
للدالة قيمة عظمى عند $h = 2\sqrt{3}$

حجم الأسطوانة أكبر ما يمكن عند $h = 2\sqrt{3}$

2) قيمة الحجم :

$V(2\sqrt{3}) = 2\pi(-(2\sqrt{3})^3 + 36(2\sqrt{3})) \approx 522.37$

75) مزرعة على شكل قطعة مستطيلة من الأرض تقع على حافة نهر مستقيم . يراد وضع سياج على الجوانب الثلاثة الأخرى ، ما أكبر مساحة يمكن إحاطتها بسياج طوله $800\ m$ ؟ وما أبعادها؟



نفرض بعدي المستطيل x, y

$$2x + y = 800$$

$$y = 800 - 2x$$

نفرض مساحة المستطيل A : $A = x.y$

$$A(x) = x(800-2x) = 800x - 2x^2$$

$$A'(x) = 800 - 4x$$

نضع $800 - 4x = 0$

للدالة نقطة حرجة عند $x=200$ ، $-4x = -800 \Rightarrow x = 200$

$A''(x) = -4 \Rightarrow A''(200) = -4$, $-4 < 0$

للدالة قيمة عظمى عند $x=200$ إذاً مساحة المنطقة أكبر ما يمكن عند $x=200$

$y = 800 - 2(200) = 400$ إذاً أكبر مساحة : $A = 400 \times 200 = 80000\,m^2$

76) أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهن فإذا كان حجم عينة الإناث $n = 40$ والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 12.5$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 76.3$. باستخدام مستوى ثقة 95%

1)أوجد هامش الخطأ

2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

3) فسر فترة الثقة.

مستوى الثقة 95% , $x = 76.3$, $\sigma = 12.5$, $n=40$

القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

σ معلوم نستخدم Z .

هامش الخطأ : $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{12.5}{\sqrt{40}} = 3.8737$

2) فترة الثقة : $(\bar{x} - E , \bar{x} + E) = (76.3 - 3.8737 , 76.3 + 3.8737)$

$$= (72.4263 , 80.1737)$$

3) التفسير :

عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه $(n=40)$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي القيمة الحقيقية لـ μ .

77) عينة عشوائية حجمها 36، فإذا كان المتوسط الحسابي للعينة 60 وتباينها 16 ، باستخدام مستوى ثقة 95% .

1)أوجد هامش الخطأ 2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

$n=36$, $\bar{x}=60$, $S^2=16 \Rightarrow S=\sqrt{16}=4$

مستوى الثقة 95% ، القيمة الحرجة $z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$

سـ غير معلوم ، $n>30$ نستخدم z .

هامش الخطأ : $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}=1.96\times\frac{4}{\sqrt{36}}=1.3066$

فترة الثقة $(\bar{x}-E , \bar{x}+E)$

$=(60-1.3066 , 60+1.3066)$

$=(58.6934 , 61.3066)$

78) أوجد فترة ثقة 95% للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ علما أن العينة أخذت من مجتمع طبيعي.

إذا كان لدينا $n=13$, $S=0.3$, $\bar{x}=8.4$

سـ غير معلوم ، $n<30$ نستخدم t .

درجات الحرية : $n-1=13-1=12$

من جدول t : $\alpha=0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=0.025 \Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2}}=2.179$

هامش الخطأ : $E=t_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}=2.179\times\frac{0.3}{\sqrt{13}}=0.1813$

فترة الثقة : $(\bar{x}-E , \bar{x}+E)$

$=(8.4-0.1813 , 8.4+0.1813)$

$=(8.2187 , 8.5813)$

(79 تزعم شركة أن متوسط رواتب موظفيها يساوي 4000 دينار كويتي. إذا أخذت عينة من 25 موظفا، ووجد أن متوسط رواتب العينة هو 3950 دينارا كويتيا فإذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع $\sigma = 125$ ، وضح كيفية إجراء الاختبار الإحصائي بمستوى ثقة 95%

$\mu = 4000$, $n = 25$, $\bar{x} = 3950$, $\sigma = 125$

1) صياغة الفروض $H_0 : \mu = 4000$, $H_1 : \mu \neq 4000$

2) σ معلوم نستخدم Z :

$$Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{3950-4000}{\frac{125}{\sqrt{25}}} = -2$$

3) مستوى الثقة 95%

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

4) منطقة القبول $(-1.96 , 1.96)$

5) القرار : $-2 \notin (-1.96 , 1.96)$

القرار رفض الفرض $\mu = 4000$ وقبول الفرض البديل $\mu \neq 4000$

(80 إذا كانت $S = 1.79$, $\bar{x} = 37.2$, $n = 80$

اختبر الفرض بأن $\mu = 37$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

1) صياغة الفروض: $H_0 : \mu = 37$, $H_1 : \mu \neq 37$

2) σ غير معلوم ، $n > 30$ نستخدم Z :

$$Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{37.2-37}{\frac{1.79}{\sqrt{80}}} = 0.999$$

3) $\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

4) منطقة القبول $(-1.96 , 1.96)$

5) القرار : $0.999 \in (-1.96 , 1.96)$

القرار قبول الفرض $\mu = 37$ ورفض الفرض البديل $\mu \neq 37$

81) يعتقد مدير شركة أن متوسط رواتب المستخدمين لديه 290 دينار.فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 مستخدمين ، وتبين أن متوسطها الحسابي $\bar{x} = 283$ دينار وانحرافها المعياري $S = 32$ دينار فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟ باستخدام مستوى ثقة 95% (علما بأن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي)

$\mu = 290$, $n = 10$, $\bar{x} = 283$, $S = 32$

1) صياغة الفروض : $H_1 : \mu \neq 290$, $H_0 : \mu = 290$

2) σ غير معلوم ، $n < 30$ نستخدم t :

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{283 - 290}{\frac{32}{\sqrt{10}}} = -0.6917$$

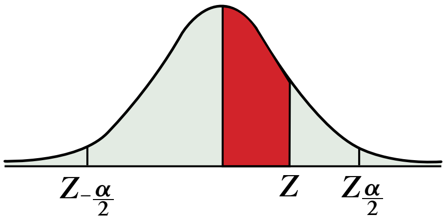
3) درجات الحرية . $n - 1 = 10 - 1 = 9$

من جدول t : $\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.262$

4) منطقة القبول $(-2.262, 2.262)$

5) القرار : $-0.6917 \in (-2.262, 2.262)$

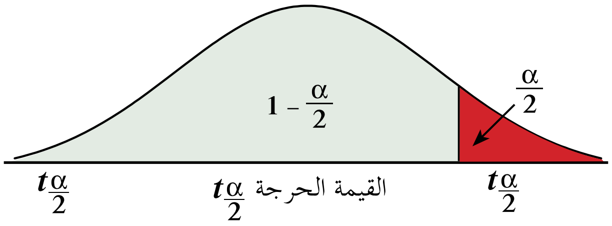
القرار قبول الفرض $\mu = 290$



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (Z)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.10 وأكثر	0.4999									

ملاحظة: استخدم **0.4999** عندما تزيد قيمة Z عن **3.09**



جدول التوزيع t

درجات الحرية $(n - 1)$	$\frac{\alpha}{2}$ 0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.25
1	63.657	31.821	12.706	6.314	3.078	1.000
2	9.925	6.965	4.303	2.920	1.886	0.816
3	5.841	4.541	3.182	2.353	1.638	0.765
4	4.604	3.747	2.776	2.132	1.533	0.741
5	4.032	3.365	2.571	2.015	1.476	0.727
6	3.707	3.143	2.447	1.943	1.440	0.718
7	3.500	2.998	2.365	1.895	1.415	0.711
8	3.355	2.896	2.306	1.860	1.397	0.706
9	3.250	2.821	2.262	1.833	1.383	0.703
10	3.169	2.764	2.228	1.812	1.372	0.700
11	3.106	2.718	2.201	1.796	1.363	0.697
12	3.054	2.681	2.179	1.782	1.356	0.696
13	3.012	2.650	2.160	1.771	1.350	0.694
14	2.977	2.625	2.145	1.761	1.345	0.692
15	2.947	2.602	2.132	1.753	1.341	0.691
16	2.921	2.584	2.120	1.746	1.337	0.690
17	2.898	2.567	2.110	1.740	1.333	0.689
18	2.878	2.552	2.101	1.734	1.330	0.688
19	2.861	2.540	2.093	1.729	1.328	0.688
20	2.845	2.528	2.086	1.725	1.325	0.687
21	2.831	2.518	2.080	1.721	1.323	0.686
22	2.819	2.508	2.074	1.717	1.321	0.686
23	2.807	2.500	2.069	1.714	1.320	0.685
24	2.797	2.492	2.064	1.711	1.318	0.685
25	2.787	2.485	2.060	1.708	1.316	0.684
26	2.779	2.479	2.056	1.706	1.315	0.684
27	2.771	2.473	2.052	1.703	1.314	0.684
28	2.763	2.467	2.048	1.701	1.313	0.683
29	2.756	2.462	2.045	1.699	1.311	0.683
30 وأكثر	2.575	2.327	1.960	1.645	1.282	0.675

قوانين الاحصاء

(القيمة الحرجة) $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \; ; \; -Z_{\frac{\alpha}{2}} = -Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$

(الخطأ المعياري للمجتمع) $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(هامش الخطأ – توزيع طبيعي) $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

فترة الثقة للمتوسط الحسابي $(\overline{x} - E \; , \; \overline{x} + E)$

(التوزيع t) $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{1-\frac{\alpha}{2}}$

(هامش الخطأ – توزيع t الانحراف المعياري σ غير معاوم) $E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

(المقياس الإحصائي – توزيع طبيعي) $Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

(المقياس الإحصائي – توزيع طبيعي – الانحراف المعياري σ غير معلوم) $Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

(المقياس الاحصائي – توزيع t – الانحراف المعياري σ غير معاوم) $t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$