نماذج أجابة توقعات فاينال 12ع

فصل أول

عمل / أ . أحمد نصار

((مذكره مجانية ... المرجع: الكتاب المدرسي وكراسة التمارين وزارة التربية والتعليم الكويتية))

1-

أوجد

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x+1)^2 - 9}{x^2 - 2x}$$

الحل :

عند التعويض المباشر عن x بـ 2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$\frac{(x+1)^2 - 9}{x^2 - 2x} = \frac{(x+1-3)(x+1+3)}{x(x-2)}$$

$$= \frac{(x-2)(x+4)}{x(x-2)}$$

$$= \frac{x+4}{x} \quad , \quad x \neq 2$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)^2 - 9}{x^2 - 2x} = \lim_{x\to 2} \frac{x+4}{x}$$

$$\because \lim_{x\to 2} x = 2 \quad , \quad 2 \neq 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} \frac{x+4}{x} = \frac{\lim_{x\to 2}(x+4)}{\lim_{x\to 2} x}$$

$$= \frac{2+4}{2} = 3$$

2-

عند التعويض المباشر عن x بـ 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معيّنة.

اكتب البسط دون استخدام رمز القيمة المطلقة وحلّل المقام إلى عوامل

$(x-1)$ عامل صفري مشترك بين البسط والمقام

$$\frac{|x-1|}{x^2-1}=\begin{cases}\dfrac{\overset{1}{\cancel{x-1}}}{\underset{1}{\cancel{(x-1)}}(x+1)} & : \quad x>1\\[2ex] \dfrac{\overset{-1}{\cancel{1-x}}}{\underset{1}{\cancel{(x-1)}}(x+1)} & : \quad x<1\ ,\ x\neq -1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & : \quad x>1\\[2ex] \dfrac{-1}{(x+1)} & : \quad x<1\ ,\ x\neq -1\end{cases}$$

لإيجاد $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x^2-1}$

نتحقق من نهاية المقام $\neq 0$

$$\because\ \lim_{x\to 1^+}(x+1)=2 \qquad , \qquad 2\neq 0$$

استخدم الصيغة المبسطة وعوّض عن x بـ 1 (النهاية من جهة اليمين)

$$\therefore\ \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$\because\ \lim_{x\to 1^-}-(x+1)=-(1+1)=-2 \qquad , \qquad -2\neq 0$$

استخدم الصيغة المبسطة وعوّض عن x بـ 1 (النهاية من جهة اليسار)

$$\therefore\ \lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{(x+1)}=\frac{-1}{(1+1)}=-\frac{1}{2}$$

$$\because\ \lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|}{x^2-1}\neq\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x^2-1}$$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x^2-1}$ غير موجودة

3-

عند التعويض المباشر عن x بـ 0 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معيّنة.

$$\frac{(2+x)^3-8}{x}=\frac{(2+x-2)\left((2+x)^2+2(2+x)+(2)^2\right)}{x}$$

$$=\frac{\cancel{x}^1(4+4x+x^2+4+2x+4)}{\cancel{x}^1}$$

x عامل صفري مشترك بين البسط والمقام

$$=x^2+6x+12 \qquad , \qquad x\neq 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x}=\lim_{x\to 0}(x^2+6x+12)=12$$

استخدم الصيغة المبسطة

4-

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

عند التعويض المباشر عن x بـ 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

$$\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{\overset{1}{\cancel{(\sqrt[3]{x}-1)}}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{\underset{1}{\cancel{(\sqrt[3]{x}-1)}}}$$

حلّل البسط: الفرق بين مكعبين

$$=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1 \qquad , \qquad x\neq 1$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to 1}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)$$

استخدم الصيغة المبسطة

$$=\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{x^2}+\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{x}+\lim_{x\to 1}1$$

$$=\sqrt[3]{\lim_{x\to 1}x^2}+\sqrt[3]{\lim_{x\to 1}x}+1$$

$$=1+1+1=3$$

عوّض عن x بـ 1

5-

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}$$

عند التعويض عن x بـ -2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

مرافق $\sqrt[3]{a}$ هو $\sqrt[3]{a^2}$

$$\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}} = \frac{(x^2-4)}{\sqrt[3]{x+2}} \times \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}$$

$\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a} = a$

$$= \frac{(x^2-4) \times \sqrt[3]{(x+2)^2}}{x+2}$$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$= \frac{\cancel{(x+2)}^{1}(x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\cancel{(x+2)}_{1}}$$

$$= (x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2} \qquad , \qquad x \neq -2$$

استخدم الصيغة المبسطة

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}} = \lim_{x \to -2}\left((x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2}\right)$$

$$= \lim_{x \to -2}(x-2) \cdot \lim_{x \to -2}\sqrt[3]{(x+2)^2}$$

$$= \lim_{x \to -2}(x-2) \cdot \sqrt[3]{\lim_{x \to -2}(x+2)^2}$$

$$= (-2-2) \cdot \sqrt[3]{(-2+2)^2}$$

$$= (-4) \times (0) = 0$$

6-

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+3x+2}{x^2-4} = \frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن x بـ -2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2-4} = \frac{(x+1)\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}}$$

$$= \frac{x+1}{x-2} \quad : \quad x \neq -2$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x \to -2}(x-2) = -2-2 = -4 \neq 0$$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x+1}{x-2}$$

$$= \frac{\lim_{x \to -2}(x+1)}{\lim_{x \to -2}(x-2)} = \frac{-2+1}{-4} = \frac{1}{4}$$

7-

$$\lim_{x\to 5}\frac{|x+2|-7}{x^2-25} = \frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن x بـ 5 لحصلنا على صيغة غير معينة

اعادة تعريف المطلق

$|x+2|$

$-(x+2) \quad | \quad (x+2)$ ، -2

$\because x \longrightarrow 5$

$\therefore |x+2| = x+2$

$$f(x) = \frac{|x+2|-7}{x^2-25} = \frac{x+2-7}{x^2-25}$$

$$= \frac{x-5}{(x-5)(x+5)} = \frac{1}{x+5} \quad : x \neq 5$$

نهاية المقام :

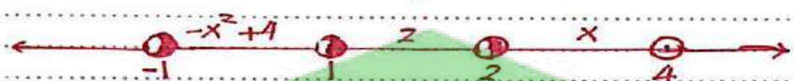
$$\lim_{x\to 5}(x+5) = 5+5 = 10 \neq 0$$

$$\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5}\frac{1}{x+5}$$

$$= \frac{1}{10}$$

8-

الحل



(a)

يسار :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(-x^2+4) = -(-1)^2+4 = 3$$

يمين :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(2) = 2$$

$$\therefore \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة

(b)

يسار :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(2) = 2$$

يمين :

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x) = 2$$

$$\therefore \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x) = 2$$

9-

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}} = \frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن $x = 0$ لحصلنا على صيغة غير معينة

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}} = \sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x+1}} = \sqrt[3]{\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)}}$$

$$= \sqrt[3]{x^2-x+1} \quad ; \; x \neq -1$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\sqrt[3]{x^2-x+1}$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)}$$

$$= \sqrt[3]{(-1)^2-(-1)+1} = \sqrt[3]{3}$$

10-

عند التعويض المباشر عن x بـ 2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2} = \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2} \times \frac{\sqrt{2x-3}+1}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$$= \frac{2x-3-1}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$$= \frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2x-3}+1} \quad , \quad x \neq 2$$

$$\lim_{x\to 2}(2x-3) = 1 \; , \qquad 1 > 0$$

$$\lim_{x\to 2}(\sqrt{2x-3}+1) = \lim_{x\to 2}\sqrt{2x-3} + \lim_{x\to 2} 1$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to 2}(2x-3)} + 1 = 1 + 1 = 2 \; , \qquad 2 \neq 0$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 2} 2}{\lim_{x\to 2}(\sqrt{2x-3}+1)} = \frac{2}{2} = 1$$

<u>11-</u>

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^5+32}{x+2}$$

$\frac{x^5+32}{x+2}$ عند التعويض عن x بـ -2 في كل البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

$$x^5+32 = x^5+0x^4+0x^3+0x^2+0x+32$$

أقسم البسط على المقام وأوجد الناتج باستخدام القسمة التركيبية

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \\ & & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & 0 \end{array}$$

الناتج: $x^4-2x^3+4x^2-8x+16$ والباقي صفر

$$\frac{x^5+32}{x+2} = x^4-2x^3+4x^2-8x+16 \quad , \quad x \neq -2$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^5+32}{x+2} = \lim_{x \to -2} (x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$$

عوّض عن x بـ -2

$$= (-2)^4-2(-2)^3+4(-2)^2-8(-2)+16$$

$$= 16+16+16+16+16$$

بسّط

$$= 80$$

12-

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2-5x+1}}{3x-5}$$

الحل:

$$f(x)=\frac{\sqrt{3x^2-5x+1}}{3x-5}=\frac{\sqrt{x^2(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2})}}{x(3-\frac{5}{x})} \qquad [1]$$

$$=\frac{|x|\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x(3-\frac{5}{x})} \quad , \ |x|=-x \text{ يكون } x<0 \text{ عندما} \qquad [0.5]$$

$$=\frac{-x\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x(3-\frac{5}{x})}=-\frac{\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} \quad , x\neq 0 \qquad [1]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}3-\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=3-0+0=3 \ , 3>0 \quad [1.5]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\sqrt{3} \qquad [1]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{5}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}3-\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x}=3-0=3 \quad , \quad 3\neq 0 \qquad [1.5]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2-5x+1}}{3x-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}}$$

$$=\frac{-\lim_{x\to\infty}\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to\infty}(3-\frac{5}{x})}=\frac{-\sqrt{3}}{3}=\frac{-1}{\sqrt{3}} \qquad [1.5]$$

13-

أوجد

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$$

الحل: بفرض أن $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$

$$f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}=\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}}$$

$$=\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$=\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$ عندما $x>0$ يكون $|x|=x$

$$=\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$ بشرط $x\neq 0$

$$\because \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}$$

$$=1+0-0=1 \quad , \ 1>0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}=\sqrt{1}=1 \quad ,1\neq 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=1-0=1$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$=\frac{1}{1}=1$$

14-

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\ cosx} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{1-\ cosx}\cdot\frac{1+cosx}{1+\ cosx}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2(1+cosx)}{1-\ cos^2x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2(1+cosx)}{sin^2x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{x^2}{sin^2x}\right)\cdot(1+cosx)\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{x}{sinx}\right)^2\cdot(1+cosx)\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{sinx}\right)^2\cdot \lim_{x\to 0}(1+cosx)$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{sinx}\right)^2\cdot\left(\lim_{x\to 0}(1)+\lim_{x\to 0}cosx\right)$$

$$= (1)^2 \times (1+1)$$

$$= 1 \times 2 = 2$$

15-

أوجد : -

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{0}{0}$$

الحل

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos2x}{\sin2x}\times\frac{1+\cos2x}{1+\cos2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x}{\sin2x(1+\cos2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{\sin2x(1+\cos2x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin2x}{1+\cos2x}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0}\sin2x}{\lim_{x\to 0}(1+\cos2x)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0}(2\sin x\cos x)}{\lim_{x\to 0}(1+\cos2x)}$$

$$= \frac{2\cdot0\cdot1}{2} = 0$$

نهاية المقام :

$$\lim_{x\to 0}(1+\cos2x)$$

$$= \lim_{x\to 0}1 + \lim_{x\to 0}\cos2x$$

$$= 1+1 = 2 \neq$$

16-

اذا كان
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{ax^2+bx-3} = -1$$
فاوجد قيمة كل من الثابتين a ، b

الحل

$\because -1 \neq 0$

$\therefore$ درجة البسط = درجة المقام

$ax^2 = 0 \longrightarrow a = 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{bx-3} = -1$$

$\frac{1}{b} = -1 \longrightarrow b = -1$

17-

أوجد:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x\cos x} = \frac{0}{0}$$

الحل

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{3x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right)$$

نهاية المقام:
$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1 \neq 0$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x} \cdot \frac{\lim_{x\to\infty} 1}{\lim_{x\to 0} \cos x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

18-

$$\frac{\tan 2x + 3x\cos 4x}{5x} = \frac{\tan 2x}{5x} + \frac{3x\cos 4x}{5x}$$

$$= \frac{\tan 2x}{5x} + \frac{3}{5}\cos 4x \qquad , \qquad x \neq 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{5x}\right) = \frac{2}{5}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x\cos 4x}{5x}\right) = \frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\cos 4x = \frac{3}{5}(1) = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x + 3x\cos 4x}{5x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{5x} + \frac{3}{5}\cos 4x\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{5x}\right) + \frac{3}{5}\lim_{x\to 0}(\cos 4x)$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

19-

أوجد : $f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad g(x) = x^2 + 4$

a $(f \circ g)(x)$ b $(f \circ g)(2)$ c $(g \circ f)(x)$ d $(g \circ f)(2)$

الحل:

a $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2+4}$

b $(f \circ g)(2) = \sqrt{(2)^2+4} = \sqrt{8}$

c $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 + 4 = (\sqrt{x})^2 + 4 = x + 4$

d $(g \circ f)(2) = 2 + 4 = 6$

20-

لتكن: $g(x)=2x+3$, $f(x)=\frac{|x|}{x+2}$. ابحث اتصال الدالة $f\circ g$ عند $x=1$

الحل

(I) $g(x)=2x+3$

g دالة متصلة عند $x=1$

(II) $g(1)=2(1)+3=\underline{5}$

(III) $f(x)=\frac{|x|}{x+2}$

بفرض: $f(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$

(1) $f_1(x)=|x|$

f_1 دالة مطلق x متصلة عند $x=\underline{5}$

(2) $f_2(x)=x+2$

f_2 دالة متصلة عند $x=\underline{5}$

شرط المقام:

(3) $f_2(\underline{5})=5+2=7\neq 0$

من 1 ، 2 ، 3 ينتج أن

$f(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ متصلة عند $x=\underline{5}$

من I ، II ، III ينتج أن

$f\circ g$ متصلة عند $x=1$

21-

ابحث اتصال الدالة f : $f(x) = \left| \sqrt{x} - 3 \right|$ عند $x = 4$

الحل

بفرض : $f_1(x) = \sqrt{x} - 3$ و $f_2(x) = |x|$

$\therefore f(x) = (f_2 \circ f_1)(x)$

(1) $f_1(x) = \sqrt{x} - 3$

بفرض : $f_1(x) = g(x) - h(x)$

(1) $g(x) = \sqrt{x}$
و دالة متصلة عند $x = 4 \in R^+$
دالة جذرية ($n = 2$ زوجي)

(2) $h(x) = -3$
h دالة متصلة عند $x = 4$
دالة ثابتة

من 1 ، 2 ينتج أن
$f_1(x) = g(x) - h(x)$ متصلة عند $x = 4$

(II) $f_1(4) = \sqrt{4} - 3 = -1$

(III) $f_2(x) = |x|$
f_2 دالة متصلة عند $x = -1$

من I ، II ، III ينتج أن

$f(x) = (f_2 \circ f_1)(x)$ متصلة عند $x = 4$

22-

ادرس اتصال الدالة f على $[1,5]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & : x=1 \\ \frac{x^2+1}{x} & : 1<x<5 \\ \frac{26}{5} & : x=5 \end{cases}$$

الحل

نفرض: $g(x)=\frac{x^2+1}{x}$

g دالة حدودية نسبية متصلة لكل $x\in R-\{0\}$

$g(x)=f(x) \quad \forall x\in(1,5)$

∴ f متصلة على $(1,5)$ ← I

دراسة اتصال f عند $x=1$ من اليمين

① $f(1)=2$

② $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)=\frac{1+1}{1}=2$

نهاية المقام: $\lim\limits_{x\to1^+} x=1\neq0$

من 1، 2 ينتج أن

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)$

∴ f متصلة عند $x=1$ من اليمين II

دراسة اتصال f عند $x=5$ من اليسار

① $f(5)=\frac{26}{5}$

② $\lim\limits_{x\to5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to5^-}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)=\frac{(5)^2+1}{5}=\frac{26}{5}$

نهاية المقام: $\lim\limits_{x\to5^-} x=5\neq0$

من 1، 2 ينتج

$\lim\limits_{x\to5^-} f(x)=f(5)$

∴ f متصلة عند $x=5$ من اليسار III

من I، II، III ينتج

f متصلة على $[1,5]$

23-

ابحث اتصال الدالة g : $g(x)=\sqrt{x^2+1}-|x-3|$ عند $x=3$

الحل

نفرض أن : $g(x)=h(x)-f(x)$

(I) $h(x)=\sqrt{x^2+1}$

نفرض : $h(x)=\sqrt{a(x)}$

① $a(x)=x^2+1$

a دالة متصلة عند $x=3$

② $a(3)=(3)^2+1=10>0$

من 1 ، 2 ينتج أن

الدالة h متصلة عند $x=3$

(II) $f(x)=|x-3|$

نفرض :

$f_1(x)=x-3$ و $f_2(x)=|x|$

$\therefore f(x)=(f_2\circ f_1)(x)$

① $f_1(x)=x-3$

f_1 دالة متصلة عند $x=3$

② $f_1(3)=3-3=0$

③ $f_2(x)=|x|$

f_2 دالة متصلة عند $x=0$

من 1 ، 2 ، 3 ينتج

f متصلة عند $x=3$

$\therefore$ من I ، II ينتج

$g(x)=h(x)-f(x)$ متصلة عند $x=3$

24-

$$f(x)=\begin{cases} -x+4 & : x \le 7 \\ \dfrac{9}{-x+4} & : x > 7 \end{cases}$$

الحل:

مجال الدالة f هو : $D_f = (-\infty, 7] \cup (7, \infty) = \mathbb{R}$

ندرس اتصال الدالة f على مجالها

نفرض : $g(x) = -x + 4$

g دالة متصلة على $\mathbb{R}$

$\forall x \in (-\infty, 7] \quad f(x) = g(x) \quad$ e

E f دالة متصلة على $(-\infty, 7]$ (1)

$$f(x)=\begin{cases} -x+4 & : x \le 7 \\ \dfrac{9}{-x+4} & : x > 7 \end{cases}$$

تابع للحل

نفرض : $h(x) = \dfrac{9}{-x+4}$

h دالة حدودية نسبية متصلة لكل $x \in \mathbb{R} - \{4\}$

$\forall x \in (7, \infty) \quad f(x) = h(x) \quad$ E

E f دالة متصلة على $(7, \infty)$ (2)

ندرس اتصال الدالة f عند $x = 7$ من جهة اليمين

$f(7) = -3$

$$\lim_{x\to 7^+} f(x) = \lim_{x\to 7+} \left(\frac{9}{-x+4}\right) = -3$$

$$\text{E} \quad f(7) = \lim_{x\to 7+} f(x)$$

E الدالة f متصلة عند $x = 7$ من جهة اليمين (3)

من (3) , (2) , (1) نجد : f دالة متصلة على $(-\infty, \infty)$

(شرط نهاية المقام : 3- = 4+7- لا يساوى صفر)

25-

لتكن f : $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

أوجد مجال الدالة f ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-1 \,,\, 1]$

الحل :

نفرض أن

$$f(x) = \sqrt{g(x)} \quad , \quad g(x) = x^2 - 7x + 10$$

$$D_f = \{ x : g(x) \geq 0 \}$$

$$x^2 - 7x + 10 \geq 0$$

المعادلة المناظرة :

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x-2)(x-5) = 0$$

$$x = 2 \quad , x = 5$$

++ 0 --- 0 ++
2 5

$\therefore$ مجال الدالة f هو $(-\infty, 2] \cup [5 \,,\, \infty)$

لدراسة اتصال الدالة f على $[-1, 1]$

$$g(x) \geq 0 \qquad \forall x \in (-\infty, 2] \cup [5, \infty)$$

$\because$ $[-1, 1]$ مجموعة جزئية من D_f

$\therefore g(x) \geq 0 \qquad \forall x \in [-1, 1]$ (1)

(2) الدالة g : $g(x) = x^2 - 7x + 10$ متصلة على $[-1, 1]$

من (1) و (2)

f متصلة على $[-1 \,,\, 1]$

26-

$$F(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$$

نفرض أن $\Leftarrow$ $F(x) = \sqrt{g(x)}$

$$, \quad g(x) = 8 - 2x^2$$

$$\therefore D_f = \{X : g(x) \geq 0\}$$

$$\boxed{8 - 2x^2 \geq 0}$$

$$4 - x^2 \geq 0$$

المعادلة المناظرة $\Leftarrow$ $4 - x^2 = 0$

$$(x-2)(x+2) = 0$$

$$X = 2 \quad , \quad X = -2$$

مثل | عكس إشارة معامل X^2 | مثل

$-\infty$ $-$ -2 $+$ 2 $-$ ∞

$\therefore$ مجال الدالة $F(x)$ هو : $[-2, 2]$

لدراسة أتصال الدالة $F(x)$ على مجالها $[-2, 2]$

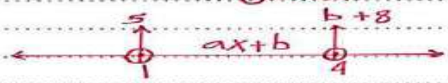
$$\because g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-2, 2]$$

$\therefore g(x) = 8 - 2x^2 \longrightarrow$ متصلة على $[-2, 2]$

$\therefore F(x) = \sqrt{8 - 2x^2} \longrightarrow$ متصلة على $[-2, 2]$

27-

الحل



$\therefore$ f متصلة على $[1, 4]$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 1$ من اليمين

$\therefore \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$

$\lim\limits_{x \to 1^+} (ax + b) = 5$

$a(1) + b = 5$

$a + b = 5$

$2 + b = 5$

$\boxed{b = 3}$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 4$ من اليسار

$\therefore \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = f(4)$

$\lim\limits_{x \to 4^-} (ax + b) = b + 8$

$a(4) + \cancel{b} = \cancel{b} + 8$

$\frac{4a}{4} = \frac{8}{4}$

$\boxed{a = 2}$

بالتعويض

28-

باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f: $f(x) = 3x^2$ عند $x = -2$

الحـــــــل

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$x = -2 \rightarrow a = -2 \,, f(-2) = 3(-2)^2 = 12$$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{3(-2+h)^2 - 12}{h}$$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{12 + 3h^2 - 12h - 12}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}\,(3h + 12)}{\cancel{h}}$$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} 3h - 12 = -12$$

29-

باستخدام التعريف البديل. أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = \sqrt{x}$ عند $x = a$ حيث $a > 0$

الحل:

عند النقطة $x = a$ ، (إن وجدت) $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

$$\lim_{h \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$$

$$\lim_{h \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

$$\lim_{h \to a} \frac{(x - a)}{x - a} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

$$\lim_{h \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

أختبار الجذر

$$\lim_{x \to a} x = a , \quad a > 0$$

$$\therefore \lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x \to a} x} = \sqrt{a}$$

أختبار المقام

$$\lim_{x \to a} \sqrt{x} + \sqrt{a}$$

$$\lim_{x \to a} \sqrt{x} + \lim_{x \to a} \sqrt{a}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a} \quad , 2\sqrt{a} \neq 0$$

يمكننا الآن إيجاد النهاية

$$= \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

30-

لتكن $f(x) = x^2 + 2$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة.

الحل

$f(x) = x^2 + 2$

$f(x+h) = (x+h)^2 + 2$

$= x^2 + 2xh + h^2 + 2$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ إن وجدت

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 + \cancel{2} - \cancel{x^2} - \cancel{2}}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$ $\quad : h \neq 0$

$= \lim\limits_{h \to 0} (2x + h) = 2x$

31-

لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & : x \leqslant -1 \\ x^2 - x - 2 & : x > -1 \end{cases}$

أوجد إن أمكن $f'(-1)$.

$f_-'(-1) = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$ (ان وجدت)

$f_-'(-1) = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{(x^2 + x) - (0)}{x + 1}$

$f_-'(-1) = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x(x + 1)}{x + 1}$

$f_-'(-1) = \lim\limits_{x \to -1^-} x = -1$

$f_+'(-1) = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$ (ان وجدت)

$f_+'(-1) = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{(x^2 - x - 2) - (0)}{x + 1}$

$f_+'(-1) = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{(x + 1)(x - 2)}{x + 1}$

$f_+'(-1) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x - 2) = -3$

$f_+'(-1) \neq f'_-(-1)$

$f'(-1)$ غير موجود

32-

لتكن f : $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & : x\le 2 \\ 3x-2 & : x>2 \end{cases}$ ، ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x=2$.

الحل

$f(2)=(2)^2-4=0 \rightarrow ①$

اليمين:

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(3x-2)=3(2)-2=4$

اليسار:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-4)=(2)^2-4=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ غيرموجودة $\rightarrow ②$

من 1 و 2 ينتج أن f غيرمتصلة عند $x=2$

$\therefore f$ غير قابلة للاشتقاق عند $x=2$

33-

لتكن f : $f(x)=|x-2|$ ، ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x=2$.

الحل

اعادة تعريف :

$f(x)=\begin{cases} x-2 & : x\geq 2 \\ -(x-2) & : x<2 \end{cases}$

f دالة متصلة عند $x=2$

الاشتقاق :

$-(x-2)$ | 2 | $x-2$

$\boxed{f(2)=(2)-2=0}$

اليمين:

$f'_+(2)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x-2-0}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2^+}(1)=1$

اليسار:

$f'_-(2)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)-0}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2^-}(-1)=-1$

$\therefore f'_-(2)\neq f'_+(2)$

$f'(2)$ غير موجودة

$\therefore f$ غير قابلة للاشتقاق عند $x=2$

34

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$ حيث :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x}{|x|} & : x \neq 0 \\ -3 & : x = 0 \end{cases}$$

الحل :

$$\frac{x^2 - 3x}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{x(x-3)}{x} & : x > 0 \\ \dfrac{x(x-3)}{-x} & : x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x - 3 & : \; x > 0 \\ -x + 3 & : \; x < 0 \\ -3 & : \; x = 0 \end{cases}$$

$$f(0) = -3$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x - 3) = -3$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x + 3) = 3$$

$$\because \lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ليست موجودة

$\therefore$ الدالة f ليست متصلة عند $x = 0$

35

الحل :

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & : x<1 \\ 2\sqrt{x} & : x \geqslant 1 \end{cases}$$

مجال الدالة :

$$D_f = (-\infty, 1] \cup (1, \infty) = R$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : x<1 \\ \text{تبحث} & : x=1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & : x>1 \end{cases}$$

$$f(2) = 2\sqrt{1} = 2$$

إن وجدت $f'_{+}(1) = \lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$f'_{+}(1) = \lim_{x\to1^+} \frac{2\sqrt{x}-2}{x-1}$$

$$f'_{+}(1) = \lim_{x\to1^+} \frac{2\sqrt{x}-2}{x-1}$$

$$f'_{+}(1) = 2\lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

و منها

$$f'_{+}(1) = 1$$

إن وجدت $f'_{-}(1) = \lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$f'_{-}(1) = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2+1-2}{x-1}$$

$$f'_{-}(1) = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$f'_{-}(1) = \lim_{x\to1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$f'_{-}(1) = \lim_{x\to1^-} (x+1) \quad : x\neq 1$$

$$f'_{-}(1) = 2$$

$$f'_{-}(1) \neq f'_{+}(1)$$

و بالتالي $f'(1)$ غير موجودة

$$f'(X) = \begin{cases} 2x & : x<1 \\ \text{غير موجودة} & : x=1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & : x>1 \end{cases}$$

$$f'(X) = \begin{cases} 2x & : x<1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & : x>1 \end{cases}$$

36

إذا كانت: $y = u^3 - 3u + 1 \quad , \quad u = 5x^2 + 2$

فأوجد: $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

مشتقة بدلالة u

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 - 3$$

مشتقة بدلالة x

$$\frac{du}{dx} = 10x$$

قاعدة التسلسل

$$\frac{dy}{dx} = (3u^2 - 3) \times (10x)$$

تعويض

$$\frac{dy}{dx} = (3(5x^2 + 2)^2 - 3) \times (10x)$$
$$= 750x^5 + 600x^3 + 90x$$

37

أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \sec x$ عند النقطة $F\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$

الحل

نشتق: $\frac{dy}{dx} = \sec x \cdot \tan x$

نعوض:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{3}} = \sec\frac{\pi}{3} \cdot \tan\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} \cdot \tan\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$$

ميل المماس: $m = 2\sqrt{3}$

ميل العمودي: $\frac{-1}{m} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$

معادلة العمودي

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$
$$y - 2 = \frac{-1}{2\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$
$$y - 2 = \frac{-1}{2\sqrt{3}}x + 0.3$$
$$y = \frac{-1}{2\sqrt{3}}x + 0.3 + 2$$
$$y = \frac{-1}{2\sqrt{3}}x + 2.3$$

تذكر

$$\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x}}$$

38

الحل :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x) \qquad (1)$$

$$g'(x) = 3x^2$$

$$g'(f(x)) = 3\,(2x+1)^2$$

$$f'(x) = 2$$

$$(g \circ f)'(x) = 3(2x+1)^2\ (\ 2\ )$$

$$= 6\,(2x+1)^2$$

(2) ميل المماس للدالة $(g \circ f)(x)$ عند $x = 0$

$$(g \circ f)'(0) = 6(0+1)^2 = 6$$

∴ معادلة المماس هي :

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - 1 = 6\,(x - 0)$$

$$6\,x - y + 1 = 0$$

39

إذا كانت:

$$y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$$

أثبت أن

$$y' = (y\,.\,cscx)^2$$

الحل :

$$y' = \frac{(\sin x)'\,(\sin x + \cos x) - (\sin x)(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x\ (\sin x + \cos x) - \sin x\,(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x\,.\sin x + \cos^2 x - \sin x.\cos x + \sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$(y\,.\csc x)^2 = \left(\frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)}\cdot\frac{1}{\sin x}\right)^2$$

$$= \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= y'$$

40

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $y = \frac{8}{4 + x^2}$
عند النقطة $(2\,,1)$

الحل :

$$f^{\backslash}(x) = \frac{(4 + x^2)(8)^{\backslash} - (8)(4 + x^2)^{\backslash}}{(4 + x^2)^2}$$

$$f^{\backslash}(x) = \frac{(4 + x^2)(0) - (8)(2x)}{(4 + x^2)^2}$$

$$f^{\backslash}(x) = \frac{-16x}{(4 + x^2)^2}$$

$$f^{\backslash}(2) = \frac{-16 \times 2}{(4 + 4)^2} = \frac{-32}{64} = -\frac{1}{2}$$

$\therefore$ ميل المماس يساوي $-\frac{1}{2}$

معادلة خط المماس $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

41

الحل

$(f \circ g)^{\backslash}(x) = f^{\backslash}(g(x)) \cdot g^{\backslash}(x)$

① $f(x) = -2x^3 + 4$

② $g(x) = x^{13}$

③ $f^{\backslash}(x) = -6x^2$

⑤ $g^{\backslash}(x) = 13x^{12}$

نستبدل x بـ g(x)

④ $f^{\backslash}(g(x)) = -6(x^{13})^2 = -6x^{26}$

⑥ $(f \circ g)^{\backslash}(x) = -6x^{26} \cdot 13x^{12} = -78x^{38}$

$(g \circ f)^{\backslash}(x) = g^{\backslash}(f(x)) \cdot f^{\backslash}(x)$

① $g(x) = x^{13}$

② $f(x) = -2x^3 + 4$

③ $g^{\backslash}(x) = 13x^{12}$

⑤ $f^{\backslash}(x) = -6x^2$

نستبدل x بـ f(x)

④ $g^{\backslash}(f(x)) = 13(-2x^3 + 4)^{12}$

⑥ $(g \circ f)^{\backslash}(x) = 13(-2x^3 + 4)^{12} \cdot -6x^2 = -78x^2(-2x^3 + 4)^{12}$

$(g \circ f)^{\backslash}(0) = -78(0)^2(-2(0)^3 + 4)^{12} = 0$ (تعويض عن $x=0$)

42

أثبت أن منحنى كل من الدالتين $y = \frac{1}{\cos x}$, $y = \cos x$ له مماس أفقيّ عند $x = 0$

$y = \cos x$

$\frac{dy}{dx} = -\sin x$

$\frac{dy}{dx} = -\sin 0 = 0$

$y = \frac{1}{\cos x}$

$y = \sec x$

$\frac{dy}{dx} = \sec x \tan x$

$\frac{dy}{dx} = \sec 0 \tan 0 = 0$

∴ كلا من الدالتين يوجد له مماس افقي عند $x = 0$

لان لكل من الدالتين ميل المماس يساوى صفر عند النقطة (x=0) وبالتالي ظل الزاوية التي يصنعها المماس مع محور السينات يساوى صفر لكل من الدالتين.

43

للمنحنى الذي معادلته: $y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1, 1)$

الحل

بالاشتقاق الضمني بالنسبة لـ x

$$2yy' + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' + 2x = 0$$

$$2yy' + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = -2x$$

$$y'\left[2y + \frac{1}{2\sqrt{y}}\right] = -2x$$

$$y' = \frac{-2x}{2y + \frac{1}{2\sqrt{y}}}$$

ميل المماس: $y'\Big|_{(1,1)} = \frac{-2(1)}{2(1) + \frac{1}{2\sqrt{1}}} = \frac{-4}{5}$

44

$$2xy + \pi \sin y = 2\pi \quad , \quad (1, \tfrac{\pi}{2})$$

الحل :

$$2(y+xy') + \pi(\cos y)(y') = 0$$

$$2y+2xy' + \pi(\cos y)(y') = 0$$

$$2xy' + \pi(\cos y)(y') = -2y$$

$$y'(2x + \pi \cos y) = -2y$$

$$\frac{y'(2x+\pi \cos y)}{2x+\pi \cos y} = \frac{-2y}{2x+\pi \cos y}$$

$$y' = \frac{-2y}{2x+\pi \cos y}$$

ميل المماس للمنحني عند النقطة $(1, \frac{\pi}{2})$ هو :

$$m = y'\big|_{(1,\frac{\pi}{2})} = \frac{-2y}{2x+\pi \cos y}\bigg|_{(1,\frac{\pi}{2})} = \frac{-2(\frac{\pi}{2})}{2(1)+\pi \cos \frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2}$$

فتكون معادلة المماس هي :

$$y - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}\,(x - 1)$$

$$y - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}$$

$$y = -\frac{\pi}{2}x + \pi$$

ميل الناظم $m_1 = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$ فتكون معادلة الناظم هي :

$$y - \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}\,(x - 1)$$

$$y - \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}x - \frac{2}{\pi}$$

$$y = \frac{2}{\pi}x - \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}$$

45

$$y = \sqrt{1-2x}$$

أثبت أن

$$yy'' + (y')^2 = 0$$

$$\boxed{y = (1-2x)^{\frac{1}{2}}}$$

مشتقة ما بداخل القوس

$$y' = \frac{1}{2}(1-2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2)$$

$$\boxed{y' = -(1-2x)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$y'' = -(-\tfrac{1}{2})(1-2x)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2)$$

$$\boxed{y'' = -(1-2x)^{-\frac{3}{2}}}$$

$$yy'' + (y')^2$$

بالتعويض

$$(1-2x)^{\frac{1}{2}} \cdot -(1-2x)^{-\frac{3}{2}} + \left(-(1-2x)^{-\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$-(1-2x)^{-1} + (1-2x)^{-1} = 0$$

46

$y = x^{\frac{3}{5}} \quad , \quad [-2,3]$

الحل :

نوجد قيم الدالة عند النقاط الطرفية $x = 3$, $x = -2$.

$f(-2) = (-2)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{-8} \cong -1.515$

$f(3) = (3)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{27} \cong 1.933$

$f'(x) = \frac{-2}{3} x^{\frac{3}{5}-1}$

$f'(x) = \frac{-2}{3} x^{\frac{-2}{5}}$

$f'(x) = \frac{-2}{3x^{\frac{2}{5}}}$

$f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[5]{x^2}}$

$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [-2,3]$

f' غير موجودة عند $x = 0$ ، $0 \in [-2,3]$

$f(0) = (0)^{\frac{3}{5}} = 0$

$\therefore$ النقطة $(0,0)$ نقطة حرجة .

x	-2	0	3
$f(x)$	-1.515	0	1.933

من الجدول :

أكبر قيمة للدالة f في الفترة $[-2,3]$ هي 1.933

$\therefore$ 1.933 قيمة عظمى مطلقة .

أصغر قيمة للدالة f في الفترة $[-2,3]$ هي -1.515

$\therefore$ -1.515 قيمة صغرى مطلقة .

47

إذا كانت f الدالة: $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة.

الحل:

الدالة f حدودية نسبية فهي متصلة لكل x حيث $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

نوجد مشتقة الدالة

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - 1(x)^2}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

نضع $f'(x) = 0$

$$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0$$
$$\Rightarrow x = 0 \quad , \quad x = 2$$

نكوّن الجدول لدراسة إشارة f'

$-\infty \quad\quad 0 \quad\quad 1 \quad\quad 2 \quad\quad \infty$

الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة f'	+	−	−	+
سلوك الدالة f	↗	↘	↘	↗

من الجدول f متزايدة على كل من الفترة $(-\infty, 0)$ والفترة $(2, \infty)$ ومتناقصة على كل من الفترة $(0, 1)$ والفترة $(1, 2)$

48

بيّن أن الدالّة $f: f(x) = x^3 + 1$ تحقّق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3, 3]$، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

الحل:

الدالّة f دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ فهي متّصلة على الفترة $[-3, 3]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(-3, 3)$.

$\therefore$ شروط نظريّة القيمة المتوسّطة محققة على الفترة $[-3, 3]$.

$\therefore$ يوجد على الأقل $c \in (-3, 3)$ بحيث:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$= \frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)}$$

$$\because f(-3) = (-3)^3 + 1 = -26 \quad , \quad f(3) = 3^3 + 1 = 28$$

$$f'(x) = 3x^2 \quad , \quad f'(c) = 3c^2$$

$$\therefore 3c^2 = \frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)}$$

$$3c^2 = \frac{28 - (-26)}{3 + 3} = \frac{54}{6} = 9$$

$$c^2 = \frac{9}{3} = 3$$

$$c = \sqrt{3} \in (-3, 3) \quad , \quad c = -\sqrt{3} \in (-3, 3)$$

التفسير:

يوجد مماسان لمنحنى الدالة f عند: $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$

والمماسان يوازيان القاطع المار بالنقطتين: $(-3 , -26)$, $(3 , 28)$

49

لتكن الدالة f : $f(x) = x^3 - 12x - 5$

أوجد كلا مما يلي :

(1) النقاط الحرجة للدالة

(2) الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها

(3) القيم القصوى المحلية

الحل :

(1) $\because$ f دالة كثيرة الحدود

$\therefore$ f متصلة و قابلة للاشتقاق عند كل x : $x \in \mathbb{R}$

نوجد النقاط الحرجة :

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3(x-2)(x+2) = 0$$

$$x = 2 \quad , x = -2$$

$\therefore$ النقاط الحرجة هي :

$$(-2, f(-2)) = (-2,11)$$

$$(2, f(2)) = (2,-21)$$

(2) نكون الجدول لدراسة إشارة f'

الفترات	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
إشارة f'	$+++$	$---$	$+++$
سلوك الدالة f	متزايدة ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗

الدالة متزايدة على الفترة $(-\infty,-2)$ و الفترة $(2,\infty)$

و متناقصة على الفترة $(-2,2)$

(3) توجد قيمة عظمى محلية عند $x = -2$ و هي 11

وجد قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ و هي -21

<u>50</u>

$$y' = (x-1)^2(x-2)(x-4)$$

الحل :

$$y' = (x-1)^2(x-2)(x-4)$$

نضع $y' = 0$

$$(x-1)^2(x-2)(x-4) = 0$$

$$x = 1\ ,\ x = 2\ ,\ x = 4$$

نكون الجدول لدراسة إشارة f' :

$-\infty$ 1 2 4 ∞

الفترات	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,4)$	$(4,\infty)$
إشارة f'	$++$	$++$	$--$	$++$
سلوك الدالة f	↗↗	↗↗	↘↘	↗↗

نستطيع أن نلاحظ من الجدول أنه توجد قيمة عظمى محليا عند $x = 2$ وتوجد قيمة صغرى محليا عند $x = 4$

نوجد y'' :

$$y' = (x^2-2x+1)(x^2-6x+8)$$

$$y' = x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 2x^3 + 12x^2 - 16x + x^2 - 6x + 8$$

$$\boxed{y' = x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 22x + 8}$$

$$\boxed{y'' = 4x^3 - 24x^2 + 42x - 22 = 0}$$

Mod 5 4 $\Rightarrow$ $x = 1$, $x = \frac{5+\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$

$-\infty$ 1 $\frac{5-\sqrt{3}}{2}$ $\frac{5+\sqrt{3}}{2}$ ∞

الفترات	( )	( )	( )	( )
أشارة y''	$-$	$+$	$-$	$+$
التقعر	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

نقطة تقعر   نقطة تقعر   نقطة تقعر

يوجد ثلاث نقاط للتقعر وهي عند $X = 1$, $X = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$, $X = \frac{5+\sqrt{3}}{2}$

51

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

ثم ارسم بيانها

الحل :

f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} 2x^3 = \infty$$

نوجد النقاط الحرجة حيث f دالة قابلة للإشتقاق على مجالها

$f'(x) = 6x^2 + 6x$

نضع $f'(x) = 0$

$6x^2 + 6x = 0$

$6x(x + 1) = 0$

$6x = 0 \rightarrow x = 0$ أو $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

$f(0) = -1$, $f(-1) = 0$

النقاط الحرجة $(-1, 0)$, $(0, -1)$

نكون جدول التغير لدراسة اشارة f'

الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
اشارة f'	+ + + +	- - - -	+ + + +
سلوك الدالة f	متزايدة ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗

الدالة f متزايدة في الفترة $(-\infty, -1)$ والفترة $(0, \infty)$

الدالة f متناقصة في الفترة $(-1, 0)$

للدالة f قيمة عظمى محلية عند $x = -1$ وقيمة صغرى محلية عند $x = 0$

$f''(x) = 12x + 6$

نضع

$f''(x) = 0$

$12x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-1}{2}$

$-\infty \qquad -\frac{1}{2} \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, \infty)$
إشارة f''	---	+++
التقعر	$\frown$	$\smile$

منحنى الدالة مقعر للأسفل على الفترة $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

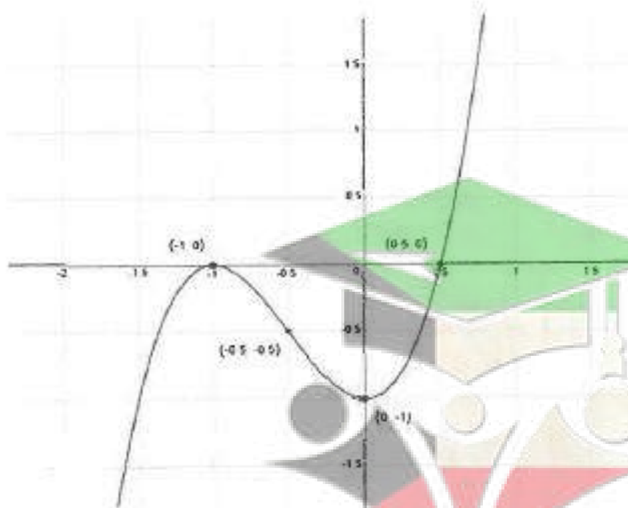
منحنى الدالة مقعر للأعلى على الفترة $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

$\therefore \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ نقطة انعطاف

نقاط اضافية

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	-5	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	4



52

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = -x^3 - 3x$ وارسم بيانها.

الحل: ① ∵ f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

∴ الدالة f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

② نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x^3) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (-x^3) = -\infty$$

③ نوجد النقاط الحرجة $f(x) = -x^3 - 3x$

نضع: $f'(x) = 0$ $f'(x) = -3x^2 - 3$

$$\therefore \ f'(x) = -3(x^2+1)$$

$$-3(x^2+1) = 0$$

$$x^2 = -1 \ : \ x \notin \mathbb{R}$$

∴ لا توجد نقاط حرجة للدالة

$$\therefore \ f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

∴ الدالة متناقصة دوماً لكل $x \in \mathbb{R}$

∴ لا توجد قيم قصوى محلية

⑤ نكوّن الجدول لدراسة إشارة f'' : وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت:

$$\because \ f'(x) = -3x^2 - 3$$

$$\therefore \ f''(x) = -6x$$

نضع: $f''(x) = 0$

$$-6x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

الفترات	$-\infty$	$(-\infty , 0)$	0	$(0 , \infty)$	∞
إشارة f''		+ +	0	− −	
بيان f		∪		∩	

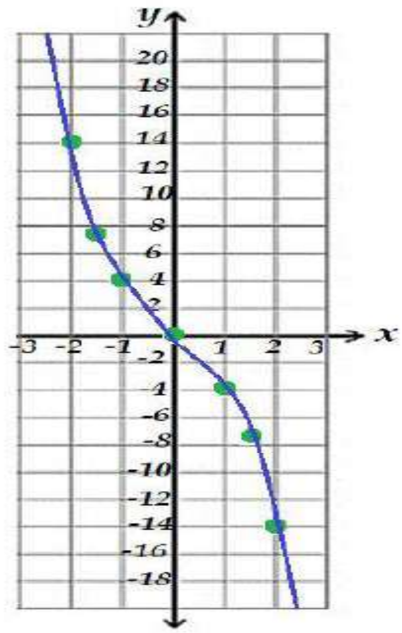
نلاحظ من الجدول أنّ: بيان الدالّة f مقعّر لأسفل على الفترة $(0 , \infty)$

بيان الدالّة f مقعّر لأعلى على الفترة $(-\infty , 0)$

للدالة f نقطة الانعطاف عند $x = 0$ وهي $(0 , f(0))$

∴ $(0 , 0)$ نقطة الانعطاف

x	-3	-2	-1.5	-1	0	1	1.5	2	3
y	36	14	7.9	4	0	-4	-7.9	-14	-36



53

بفرض طول البعد الاول للمستطيل هو x وطول البعد الثاني y

المحيط $= 2x + 2y \longrightarrow 8 = 2x + 2y$

$4 = x + y \rightarrow y = 4 - x$

∴ طول البعد الثاني للمستطيل هو $4 - x$

x لا يمكن ان تزيد على 4 أي : $0 < x < 4$

مساحة المستطيل = حاصل ضرب البعدين

$$s(x) = x\,.(4 - x)$$
$$= 4x - x^2$$
$$s'(x) = 4 - 2x$$

نضع $s'(x)$

$$4 - 2x = 0$$
$$x = 2 \in (0, 4)$$

∴ $(2, s(2))$ نقطة حرجة

$s''(x) = -2$, $-2 < 0$

∴ توجد قيمة عظمى مطلقة عند $x = 2$

∴ أكبر مساحة ممكنة للمستطيل عند $x = 2$

∴ البعد الأول للمستطيل هو $x = 2\ cm$

والبعد الثاني هو $4 - x = 4 - 2 = 2\ cm$

يصبح مربع لأن بعداه متساويان

54

أوجد عددين مجموعهما 14 و ناتج ضربهما أكبر مايمكن .

الحل : بفرض أحد العددين هو x حيث $0 < x < 14$ فيكون العدد الآخر هو $14 - x$

ناتج ضربهما : $f(x) = x(14 - x) = 14x - x^2$

$$f'(x) = 14 - 2x$$

$$f'(x) = 0 \implies 14 - 2x = 0 \implies x = 7$$

يوجد نقطة حرجة $(7, f(7))$

$$f''(x) = -2 \quad , -2 < 0 \quad , \quad \forall\, x \in (0,14)$$

$$f''(7) = -2 \quad , -2 < 0$$

$\therefore$ $f(7) = 49$ قيمة عظمى عند $x = 7$

العدد الأول هو 7 و العدد الثاني هو : $14 - 7 = 7$

العددان هما $7 \;,\; 7$

55

تعطى الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h .

a) أوجد الارتفاع $h(cm)$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة .

b) ما قيمة هذا الحجم ؟

الحل : a) $\frac{dV}{dh} = 2\pi(-3h^2 + 36)$ نضع $\frac{dV}{dh} = 0$

$$2\pi(-3h^2 + 36) = 0 \quad \Rightarrow -3h^2 + 36 = 0 \implies h^2 = 12$$

(مرفوضة) $h = -2\sqrt{3}$ أو $h = 2\sqrt{3}$

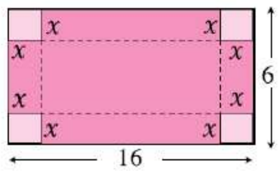
$$\frac{d^2V}{dh^2} = 2\pi(-6h) = -12\pi h \implies \left.\frac{d^2V}{dh^2}\right|_{h=2\sqrt{3}} = -12\pi(2\sqrt{3}) = -24\sqrt{3}\pi < 0$$

$\therefore$ يوجد عند $h = 2\sqrt{3}$ قيمة عظمى

$\therefore$ نحصل على أكبر حجم للأسطوانة عند $h = 2\sqrt{3}$

b) أكبر حجم للأسطوانة : $V(2\sqrt{3}) = 2\pi(-(2\sqrt{3})^3 + 36(2\sqrt{3})) \approx 522.37cm^3$

56



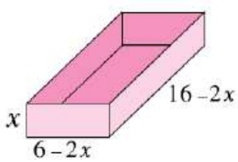
صنع صندوق

يراد صنع صندوق بدون غطاء بقصّ مربّعات متطابقة طول ضلع كلّ منها x من أركان طبقة صفيح أبعادها $16\ \text{cm}$, $6\ \text{cm}$ وثني جوانبها إلى أعلى (انظر الشكل المقابل).

أوجد قيمة x بحيث يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن. وما هو حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة؟

الحل:

نمذج:



ارتفاع الصندوق x، والبعدان الآخران هما $(6-2x)$, $(16-2x)$

$2x$ لا يمكن أن تزيد على 6، $0 < 2x < 6$

أي أنّ $0 < x < 3$

∴ حجم الصندوق هو: $V(x) = x(6-2x)(16-2x)$

بفك الأقواس نحصل على: $V(x) = 4x^3 - 44x^2 + 96x$

المشتقّة الأولى للحجم V هي: $V'(x) = 12x^2 - 88x + 96$

نضع $V'(x) = 0$

$$12x^2 - 88x + 96 = 0$$

$$4(3x^2 - 22x + 24) = 0$$

$$4(x-6)(3x-4) = 0$$

حلّا المعادلة التربيعيّة هما: $x = 6 \quad , \quad x = \frac{4}{3}$

وحيث إن $6 \notin (0\,,3)$ فيتم استبعادها

المشتقة الثانية: $V''(x) = 24x - 88$

$$V''\left(\frac{4}{3}\right) = 24 \times \frac{4}{3} - 88 = -56 \quad , \quad -56 < 0$$

لذلك يكون الصندوق أكبر ما يمكن عند $x = \frac{4}{3}$

حجم أكبر صندوق: $V\left(\frac{4}{3}\right) = 4\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 44\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 96\left(\frac{4}{3}\right)$

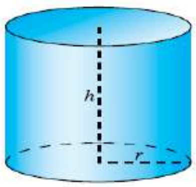
$$= \frac{1600}{27}\ \text{cm}^3$$

فسّر

طول ضلع كل مربّع يقطع من أركان طبقة صفيح $\frac{4}{3}\ \text{cm}$ ليعطي أكبر سعة للصندوق.

ويكون أكبر حجم $\frac{1600}{27}\ \text{cm}^3$

57



تصميم علبة

طلب إليك تصميم علبة زيت تسع لترًا واحدًا تكون على شكل أسطوانة دائرية قائمة (كما في الشكل المقابل).
ما أبعادها لتكون كمية المعدن المستخدم لصنعها أقل ما يمكن؟

الحل:

نفرض أن طول نصف قطر قاعدة العلبة هو r وارتفاعها h . لكي تكون كمية المعدن المستخدمة أقل ما يمكن، يجب أن تكون المساحة السطحية (الكلية) أقل ما يمكن وفي الوقت نفسه تحقق شرط الحجم

المساحة السطحية للعلبة = المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2 \qquad (1)$$

وحيث إن حجم العلبة معلوم

$$1L = 1000\ \text{cm}^3$$

$$\therefore\ V = \pi r^2 h = 1000$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \qquad (2)$$

وبالتعويض عن h في المعادلة (1) نحصل على

$$A = 2\pi r \times \frac{1\,000}{\pi r^2} + 2\pi r^2$$

$$A = \frac{2\,000}{r} + 2\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dr} = \frac{-2\,000}{r^2} + 4\pi r$$

نضع

$$\frac{dA}{dr} = 0$$

$$\therefore\ 0 = \frac{-2\,000}{r^2} + 4\pi r$$

$$4\pi r = \frac{2\,000}{r^2}$$

$$\therefore\ 4\pi r^3 = 2\,000$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

$$r \approx 5.42$$

وهذه هي القيمة الحرجة الوحيدة حيث $r \neq 0$

وللتأكد من أن هذه القيمة تعطي أقل مساحة سطحية نوجد المشتقة الثانية:

المشتقة الثانية: $\frac{d^2A}{dr^2} = \frac{4\,000}{r^3} + 4\pi$

وهي موجبة على كل مجال A.

لذلك فإن منحنى الدالة A مقعرًا لأعلى وقيمة A عند $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ هي قيمة صغرى مطلقة.

$$h = \frac{1\,000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r \quad , \quad h \approx 10.84$$

فسّر:

علبة اللتر الواحد التي تستخدم أقل معدن ممكن لتصنيعها يكون ارتفاعها مساويًا للقطر، حيث:

$r \approx 5.42$ cm , $h \approx 10.84$ cm

58

$0 < x < 400$

مزرعة على شكل قطعة مستطيلة من الأرض تقع على حافة نهر مستقيم يراد وضع سياج على الجوانب الثلاثة الأخرى ما أكبر مساحة يمكن إحاطتها بسياج طوله $800m$؟ و ما أبعادها ؟

الحل : أبعاد الحديقة : $x\ ,\ 800-2x$

دالة المساحة : $A(x) = x(800-2x) = 800x - 2x^2$

$$A'(x) = 800 - 4x \Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow 800 - 4x = 0 \Rightarrow 4x = 800 \Rightarrow x = 200$$

$$A''(x) = -4 < 0$$

يوجد قيمة عظمى عند $x = 200$

أكبر مساحة هي : $A(200) = 200(800 - 2\times200) = 80000\ m^2$

، بعدا المستطيل : 200m , 400 m

59

إذا اجريت الدراسة على عينة أخري من الإناث حجمها 25 والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 3.6$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 18.4$
باستخدام مستوى ثقة 95 %
(1) أوجد هامش الخطأ.
(2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ
(3) فسّر فترة الثقة.

الحـــــــل

(1) مستوى الثقة 95 % القيمة الحرجة: $\therefore\ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

σ معلوم

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$= 1.96 \times \frac{3.6}{\sqrt{25}} \approx 1.4112$$

E هامش الخطأ هو ≈ 1.4112

(2) فترة الثقة هي $(\bar{X} - E\ ,\ \bar{X} + E)$

$$= (18.4 - 1.4112\ ,\ 18.4 + 1.4112)$$

$$= (16.9888\ ,\ 19.8112)$$

(3) التفسير : عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه $(n = 25)$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع μ

60

أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 25$، فإذا كان الانحراف المعياري للعينة (S) يساوي 10 ومتوسطها الحسابي $(\overline{x})$ يساوي 15، استخدم مستوى ثقة 95% لإيجاد:

1. هامش الخطأ.
2. فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

الحل:

1. $\because$ σ^2 غير معلوم ، $n \leq 30$

$\therefore$ نستخدم توزيع t.

$$\because \quad n = 25$$

$\therefore$ درجات الحرية: $n - 1 = 25 - 1 = 24$

$\because$ مستوى الثقة: $1 - \alpha = 95\%$

$$\therefore \quad 1 - \alpha = 0.95 \Longrightarrow \alpha = 0.050$$

$$\therefore \quad \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

من جدول توزيع t تكون قيمة $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0.025}$ مناظرة للعدد 2.064

هامش الخطأ $E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

$$= 2.064 \times \frac{10}{\sqrt{25}}$$

$\therefore$ هامش الخطأ $= 4.128$

2. فترة الثقة: $(\overline{x} - E \ , \ \overline{x} + E)$

$$= (15 - 4.128 \ , \ 15 + 4.128)$$

$$= (10.872 \ , \ 19.128)$$

61

عينة عشوائية حجمها 36، فإذا كان المتوسط الحسابي للعينة 60 وتباينها 16، باستخدام مستوى ثقة 95%:

1. أوجد هامش الخطأ.
2. أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.
3. فسّر فترة الثقة.

الحل:

حجم العينة: $n = 36$ ، المتوسط الحسابي: $\bar{x} = 60$

التباين: $S^2 = 16$ ، الانحراف المعياري: $S = 4$

1 $\because$ مستوى الثقة 95%

$$\therefore \; Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$\because$ σ^2 غير معلوم ، $n > 30$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$
$$= 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{36}}$$
$$= 1.3066$$

$\therefore$ هامش الخطأ ≈ 1.3067

2 فترة الثقة هي:

$$(\bar{x} - E \;,\; \bar{x} + E)$$
$$= (60 - 1.3067 \;,\; 60 + 1.3067)$$
$$= (58.6933 \;,\; 61.3067)$$

3 عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه $(n = 36)$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع μ.

62

إذا كانت $S = 1.79$ ، $\bar{x} = 37.2$ ، $n = 80$

اختبر الفرض بأن $\mu = 37$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

الحل:

$S = 1.79$ ، $\bar{x} = 37.2$ ، $n = 80$

1 صياغة الفروض:

$H_0 : \mu = 37$ مقابل $H_1 : \mu \neq 37$

2 $\because$ σ غير معلومة ، $n > 30$

$\therefore$ نستخدم المقياس الإحصائي Z:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$Z = \frac{37.2 - 37}{\frac{1.79}{\sqrt{80}}} = 0.999$$

3 تحديد مستوى المعنوية α:

$$\because \; \alpha = 0.05 \longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$
$$\therefore \; Z_{0.025} = 1.96$$

4 منطقة القبول هي $(-1.96 \;,\; 1.96)$

5 اتخاذ القرار الإحصائي:

$$\because \; 0.999 \in (-1.96 \;,\; 1.96)$$

$\therefore$ القرار بقبول فرض العدم $\mu = 37$

63

إذا أجريت دراسة إحصائية أخري علي المدينة ذاتها
وتبين من خلالها أن $s = 5$ ، $\overline{x} = 296$ لعينة من 10 منازل مع استخدام درجة الثقة نفسها .
فهل يبقي افتراض المدير عند الشركة صحيحاً أم لا ؟ وضح إجابتك .

الحـــــل:

1 - صياغة الفروض: $H_0 : \mu = 290$ مقابل $H_1 : \mu \neq 290$

2 - σغير معلومة ، $n < 30$ نستخدم المقياس الإحصائي t:

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{296 - 290}{\frac{5}{\sqrt{10}}} \approx 3.7947$$

3-تحديد مستوى المعنوية α: $n = 10$ درجات الحرية : $n-1 = 10 - 1 = 9$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$t_{0.025} = 2.262$ من جدول توزيع t

(4) منطقة القبول $(-2.262 , 2.262)$

٥ - اتخاذ القرار الإحصائي : $3.7947 \notin (-2.262 , 2.262)$

القرار : رفض فرض العدم $\mu = 290$ وقبول الفرض البديل $\mu \neq 290$
قرار المدير في هذه الحالة غير صحيح

64

$\mu = 1800$ $\sigma = 150$ $n = 40$ $\overline{X} = 1840$

• صياغة الفروض :

$H_0 : \mu = 1800$ في مقابل $H_1 : \mu \neq 1800$

• المقياس الأحصائي

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1840 - 1800}{\frac{150}{\sqrt{40}}} = 1.6865$$

• ∵ مستوى الثقة 95 %

∴ $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

• منطقة القبول هي $(-1.96 , 1.96)$

$1.6865 \in (-1.96 , 1.96)$

• القرار : نقبل فرض العدم