وزارة التربية الإدارة العامة للتعليم الخاص التوجيه الفني للرياضيات	امتحان تجريبي للصف الثاني عشر علمي الفترة الدراسية الأولى	المجال الدراسي : رياضيات العام الدراسي : 2025 - 2024

أولا : أسئلة المقال

السؤال الأول :

(a) أوجد :

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}$$

(b) أوجد :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1}$$

السؤال الثاني :

(a) الدالة f معرفة كما يلي: $f(x)=\begin{cases} -x+4 & : \quad x\leqslant 7 \\ \dfrac{9}{-x+4} & : \quad x>7 \end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

(b) لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 & : \quad x \le 2 \\ 4x - 4 & : \quad x > 2 \end{cases}$. أوجد $f'(2)$

السؤال الثالث :

(a) (1) إذا كانت : $u = 6x + 2$, $y = \cos u$ ، فأوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

(2) أوجد y' للمنحنى الذي معادلته: $y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$ ، ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1 , 1)$

(b) مزرعة على شكل قطعة مستطيلة من الأرض تقع على حافة نهر مستقيم. يراد وضع سياج على الجوانب الثلاثة الأخرى، ما أكبر مساحة يمكن إحاطتها بسياج طوله $800\ \text{m}$؟ وما أبعادها؟

<u>السؤال الرابع :</u>

(a) لتكن الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

أوجد : **(1) النقاط الحرجة للدالة**

(2) الفترات التي تكون عندها الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها

(3) فترات التقعر و الانعطاف

(4) ارسم بيان الدالة

(b) أخذت عينة عشوائية من مجتمع قيد الدراسة حجمها $n = 150$، فوجد أن المتوسط الحسابي للعينة $\overline{x} = 30.3$ مع انحراف معياري $S = 6.5$. اختبر الفرض إذا كان المتوسط الحسابي للمجتمع هو $\mu = 30$، مقابل الفرض البديل $\mu \neq 30$ عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$.

ثانيا: البنود الموضوعية

أولا: في البنود من (1) الى (3) عبارات ظلل ⓐ اذا كانت العبارة صحيحة

ⓑ اذا كانت العبارة خاطئة

1)	$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\lvert x-2\rvert}{x^2-4} = \dfrac{1}{4}$	ⓐ ⓑ
2)	الدالة f : $f(x)=\sqrt{-x^2+5x-4}$ متصلة عند $x=2$	ⓐ ⓑ
3)	ميل مماس منحنى الدالة f : $f(x)=\lvert x\rvert$ عند $x=-2$ هو 2	ⓐ ⓑ

ثانيا: في البنود من (4) الى (10) لكل بند أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ظلل الرمز الدال على الإجابة الصحيحة

4)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2+5\sin^2 x}{3x^2}$ يساوي : ⓐ 3 ⓑ 9 ⓒ 0 ⓓ ∞
5)	لتكن الدالة f: $f(x)=\sqrt{x^2+7}$ ، g : $g(x)=x^2-3$ فإن: $(f\circ g)(0)$ يساوي: ⓐ -1 ⓑ 1 ⓒ -4 ⓓ 4
6)	معادلة المستقيم العمودي على المماس لبيان الدالة $y=2\cos x$ عند النقطة $\left(\dfrac{\pi}{2}\ ,\ 0\right)$ هي: ⓐ $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}$ ⓑ $y=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}$ ⓒ $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}$ ⓓ $y=-\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}$
7)	إذا كانت $r=\tan(2-\theta)$ فإن $\dfrac{dr}{d\theta}$ تساوي: ⓐ $\sec^2(2-\theta)$ ⓑ $-\sec^2(2-\theta)$ ⓒ $\sec^2(\theta+2)$ ⓓ $\sec(2-\theta)$

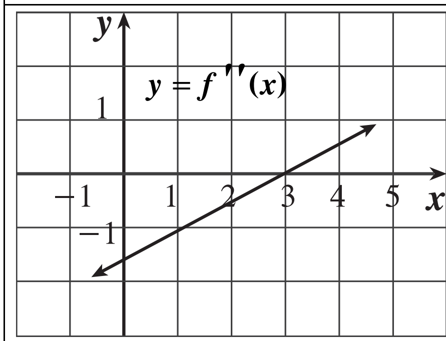
8) الدالة f : $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-25}}$ متصلة على:

ⓐ $\left(-\infty , \frac{1}{2}\right]$ ⓑ $\mathbb{R}$ ⓒ $(5 , \infty)$ ⓓ $(-5 , 5)$

9) عدد النقاط الحرجة للدالة: $y = 3x^3 - 9x - 4$ على الفترة $(0 , 2)$ هو:

ⓐ 3 ⓑ 2 ⓒ 1 ⓓ 0

10) إذا كانت f دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة والشكل المقابل يوضح بيان f'' فإن منحنى f مقعرا للأسفل في الفترة:



ⓐ $(-\infty , 3)$ ⓑ $(3 , 5)$ ⓒ $(-1 , 4]$ ⓓ $(3 , \infty)$

إجابة الموضوعي				
ⓐ		ⓑ		1)
ⓐ		ⓑ		2)
ⓐ		ⓑ		3)
ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ	4)
ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ	5)
ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ	6)
ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ	7)
ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ	8)
ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ	9)
ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ	10)

أولا : أسئلة المقال

السؤال الأول :

(a) أوجد : $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}$

الحل:

بالتعويض المباشر عن x بـ 3 نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3} \times \frac{\sqrt{x^2+7}+4}{\sqrt{x^2+7}+4} = \frac{x^2+\boxed{7-4^2}^{\,-9}}{(x^2-4x+3)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}$$

$$= \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}(x-1)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)} = \frac{(x+3)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)} \quad : x \neq 3$$

شرط الجذر:

$$\lim_{x \to 3}(x^2+7)$$

$$= 3^2 + 7 = 16, \qquad 16 > 0$$

نهاية البسط:

$$\lim_{x \to 3}(x+3) = 3+3 = 6$$

نهاية المقام

$$\lim_{x \to 3}(x-1)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)$$

$$= \lim_{x \to 3}(x-1)\left(\sqrt{\lim_{x \to 3}(x^2+7)} + \lim_{x \to 3} 4\right)$$

$$= (3-1)\left(\sqrt{16}+4\right) = 16 : 16 \neq 0$$

$$\therefore \lim_{x \to 3} f(x)$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x+3)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 3}(x+3)}{\lim\limits_{x \to 3}(x-1)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}$$

$$= \frac{6}{16}$$

$$= \frac{3}{8}$$

(b) أوجد : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin x}{\cos x - 1}$

الحل :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1} \times \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x (\cos x + 1)}{\cos x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x \cancel{\sin x} (\cos x + 1)}{-\sin^{\cancel{2}} x} \qquad x \neq 0$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\left(\frac{x}{-\sin x}\right) \cdot (\cos x + 1)\right)$$

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{-x}{\sin x}\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0} \cos x + \lim_{x\to 0} 1\right)$$

$$= \left(\frac{-1}{1}\right) \cdot (1 + 1)$$

$$= -2$$

السؤال الثاني :

(a) الدالة f معرفة كما يلي: $f(x)=\begin{cases}-x+4 & : \quad x\leqslant 7\\ \dfrac{9}{-x+4} & : \quad x>7\end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

الحل:

$$Df=(-\infty\,,7]\cup(7\,,\infty)=\mathbb{R}$$

$$g(x)=\frac{9}{-x+4}$$

$g(x)$ حدودية نسبية متصلة
$\forall x\in\mathbb{R}-\{\ 4\ \}$

$\because f(x)=g(x)\quad \forall x\in(7,\infty)$

② $\therefore f$ متصلة على $(7\,,\infty)$

$$h(x)=-x+4$$

h كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\because f(x)=h(x)\quad \forall x\in(-\infty,7]$

① $\therefore f$ متصلة على $(-\infty,7]$

ندرس الاتصال عند $x=7$ من اليمين

شرط المقام

$\lim\limits_{x\to7^+}(-x+4)$
$=-7+4=-3$
$-3\neq0$

$$f(7)=-(7)+4=-3$$

$$\lim_{x\to7^+}f(x)=\lim_{x\to7^+}\frac{9}{-x+4}=\frac{9}{-3}=-3$$

$$\because \lim_{x\to7^+}f(x)=f(7)$$

③ $\therefore f$ متصلة عند $x=7$ من اليمين

من ③, ②, ① نجد f متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

(b) لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases} x^2 & : \quad x\le 2 \\ 4x-4 & : \quad x>2 \end{cases}$. أوجد $f'(2)$

الحل:

$$f(2)=2^2=4$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{4x-4-4}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{4x-8}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{4\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=4$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}(x+2)=4$$

$$\because\ f'_-(2)=f'_+(2)=4$$

$$\therefore\ f'(2)=4$$

السؤال الثالث :

(a) **(1)** إذا كانت : $u = 6x + 2 \quad , \quad y = \cos u$ ، فأوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = -\sin u$$

$$\frac{du}{dx} = 6$$

$$\frac{dy}{dx} = -6\sin u = -6\sin(6x+2)$$

---

(2) أوجد y' للمنحنى الذي معادلته: $y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$ ، ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1\,,\,1)$

الحل

$$2yy' + \frac{y'}{2\sqrt{y}} + 2x = 0$$

$$2yy' + \frac{y'}{2\sqrt{y}} = -2x$$

$$2yy'(2\sqrt{y}) + y' = -2x.(2\sqrt{y})$$

$$y'(4y\sqrt{y} + 1) = -2x.(2\sqrt{y})$$

$$y' = \frac{-2x.(2\sqrt{y})}{(4y\sqrt{y} + 1)}$$

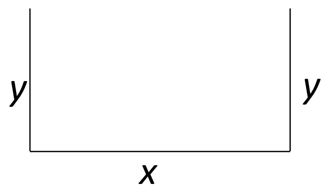
و بالتعويض بـ $(1\,,\,1)$

$$y' = \frac{-2(2)}{(4+1)} = \frac{-4}{5}$$

(b) مزرعة على شكل قطعة مستطيلة من الأرض تقع على حافة نهر مستقيم. يراد وضع سياج على الجوانب الثلاثة الأخرى، ما أكبر مساحة يمكن إحاطتها بسياج طوله 800 m؟ وما أبعادها؟

الحل

بفرض طول المزرعة x و عرضها y .



$$x + 2y = 800$$

$$y = \frac{800 - x}{2}$$

$A = xy$ حيث A المساحة.

$$A = x \cdot \frac{800 - x}{2}$$

$$A = \frac{800x - x^2}{2}$$

$$A' = \frac{800 - 2x}{2}$$

$$A' = 400 - x$$

و نضع $A' = 0$

$$400 - x = 0$$

$$x = 400$$

و هذه هي القيمة الحرجة الوحيدة حيث $x \neq 0$

و للتأكد من أن هذه القيمة تعطي أكبر مساحة نحسب المشتقة الثانية

$$A'' = -1$$

و هي سالبة على كل مجال A لذلك فان منحني الدالة مقعر لأسفل و قيمة A عند $x = 400$ هي قيمة عظمى مطلقة.

المساحة المطلوبة هي:

$$A = 400 \times \frac{800 - 400}{2} = 80000\ m^2$$

و الأبعاد هي $x = 400\ m$ و $y = \frac{800-x}{2} = 200\ m$

السؤال الرابع :

(a) لتكن الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

أوجد : **(1) النقاط الحرجة للدالة**

(2) الفترات التي تكون عندها الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها

(3) فترات التقعر و الانعطاف

(4) ارسم بيان الدالة

الحل

f دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty}(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1)$$

نضع $f' = 0$

$$3(x-1)(x+1) = 0$$

$$x = 1 \quad , \quad x = -1$$

$$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 4 = 2 \quad , f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 4 = 6$$

$(1,2), (-1,6)$ نقطتان حرجتان.

$-\infty$ -1   1 ∞

الفترات	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
	+++	---	+++
سلوك الدالة f	متزايدة	متناقصة	متزايدة

الدالة متزايدة على كل من الفترة $(-\infty,-1)$ و الفترة $(1,\infty)$ و متناقصة على الفترة $(-1,1)$

$f''(x) = 6x$

نضع $f''(x) = 0$

$6x = 0 , x = 0$

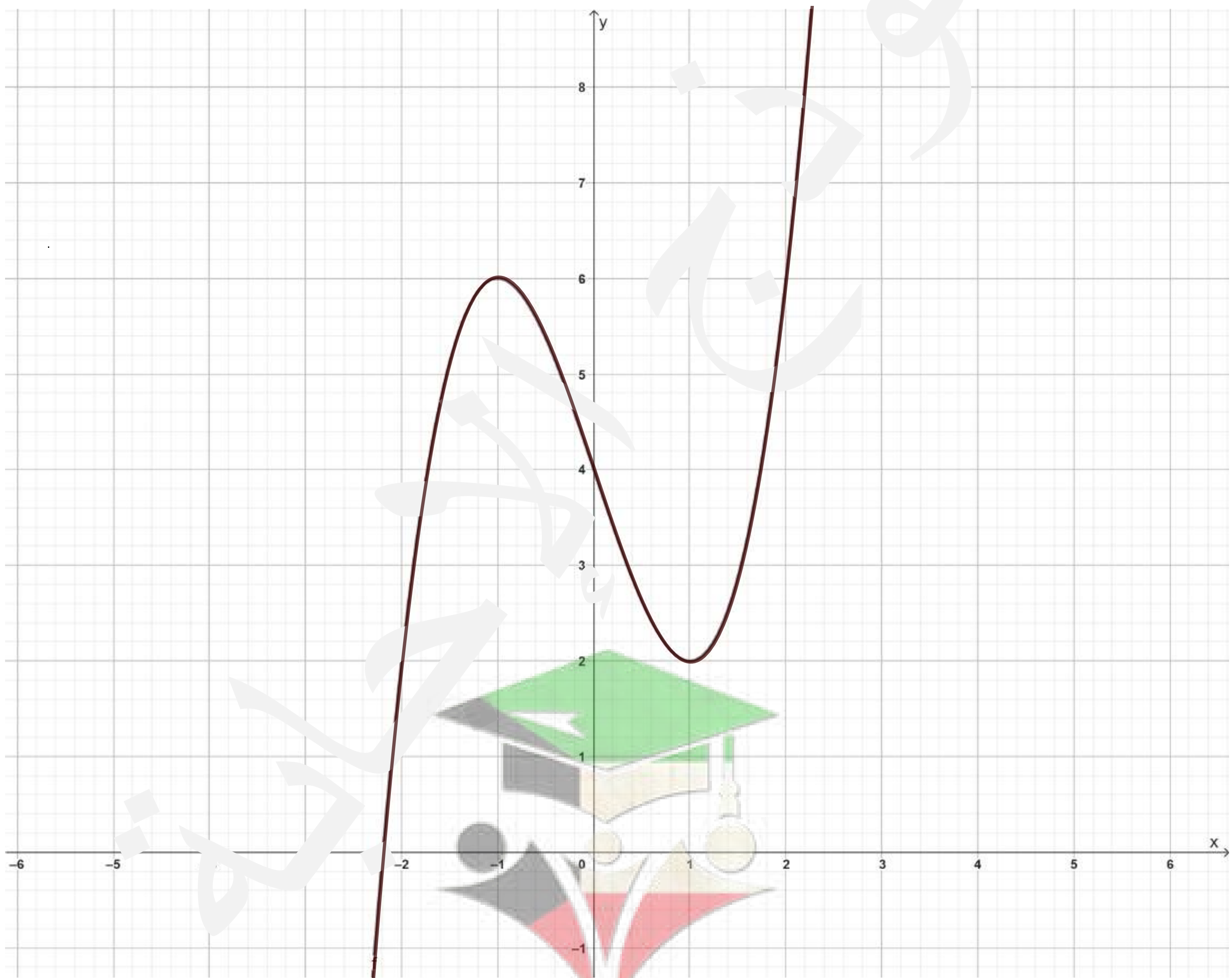
$f(0) = 4$

$-\infty$ 0 ∞

الفترات	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
إشارة f''	---	+++
التقعر	$\cap$	$\cup$

منحني الدالة مقعر لأسفل على الفترة $(-\infty,0)$ و مقعر لأعلى على الفترة $(0,\infty)$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-14	2	6	4	2	6	22
	نقطة اضافية	نقطة اضافية	نقطة عظمى محلية	نقطة انعطاف	نقطة صغرى محلية	نقطة اضافية	نقطة اضافية



$(\boldsymbol{b})$ أخذت عينة عشوائية من مجتمع قيد الدراسة حجمها $n = 150$، فوجد أن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 30.3$ مع انحراف معياري $S = 6.5$. اختبر الفرض إذا كان المتوسط الحسابي للمجتمع هو $\mu = 30$، مقابل الفرض البديل $\mu \neq 30$ عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$.

الحل

$n = 150 \quad , \quad \bar{x} = 30.3 \quad , \quad s = 6.5$

① صياغة الفروض

$H_0 : \mu = 30$ مقابل $H_1 : \mu \neq 30$

② $\because$ σ غير معلومة ، $n > 30$

$\therefore$ نستخدم المقياس الإحصائي Z :

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$z = \frac{30.3 - 30}{\frac{6.5}{\sqrt{150}}} \approx 0.5653$$

③ تحديد مستوى المعنوية α: $\because \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0 \cdot 025$

$\therefore z_{0.025} = 1.96$

④ منطقة القبول هي $(-1.96 , 1.96)$

⑤ اتخاذ القرار الإحصائي: $\because 0.5653 \in (-1.96 , 1.96)$

$\therefore$ القرار بقبول فر العدم $\mu = 30$

ثانيا: البنود الموضوعية

أولا: في البنود من (1) الى (3) عبارات ظلل ⓐ اذا كانت العبارة صحيحة

ⓑ اذا كانت العبارة خاطئة

1)	$\lim_{x\to 2^+} \frac{\|x-2\|}{x^2-4} = \frac{1}{4}$	ⓐ ⓑ
2)	الدالة f : $f(x) = \sqrt{-x^2+5x-4}$ متصلة عند $x = 2$	ⓐ ⓑ
3)	ميل مماس منحنى الدالة f : $f(x) = \|x\|$ عند $x = -2$ هو 2	ⓐ ⓑ

ثانيا: في البنود من (4) الى (10) لكل بند أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ظلل الرمز الدال على الإجابة الصحيحة

4) $\lim_{x\to 0} \frac{4x^2+5\sin^2 x}{3x^2}$ يساوي :

ⓐ 3 ⓑ 9 ⓒ 0 ⓓ ∞

5) لتكن الدالة f: $f(x) = \sqrt{x^2+7}$ ، g : $g(x) = x^2-3$ فإن: $(f\circ g)(0)$ يساوي:

ⓐ -1 ⓑ 1 ⓒ -4 ⓓ 4

6) معادلة المستقيم العمودي على المماس لبيان الدالة $y = 2\cos x$ عند النقطة $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ هي:

ⓐ $y = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$ ⓑ $y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$ ⓒ $y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$ ⓓ $y = -\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$

7) إذا كانت $r = \tan(2-\theta)$ فإن $\frac{dr}{d\theta}$ تساوي:

ⓐ $\sec^2(2-\theta)$ ⓑ $-\sec^2(2-\theta)$ ⓒ $\sec^2(\theta+2)$ ⓓ $\sec(2-\theta)$

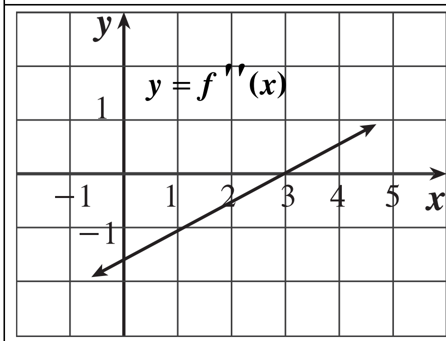
8) الدالة f : $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-25}}$ متصلة على:

ⓐ $\left(-\infty \,,\, \frac{1}{2}\right]$ ⓑ $\mathbb{R}$ ⓒ $(5 \,,\, \infty)$ ⓓ $(-5 \,,\, 5)$

9) عدد النقاط الحرجة للدالة: $y = 3x^3 - 9x - 4$ على الفترة $(0 \,,\, 2)$ هو:

ⓐ 3 ⓑ 2 ⓒ 1 ⓓ 0

10) إذا كانت f دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة والشكل المقابل يوضح بيان f'' فإن منحنى f مقعرا للأسفل في الفترة:



ⓐ $(-\infty \,,\, 3)$ ⓑ $(3 \,,\, 5)$ ⓒ $(-1 \,,\, 4]$ ⓓ $(3 \,,\, \infty)$

إجابة الموضوعي				
1)	ⓑ		ⓐ	
2)	ⓑ		ⓐ	
3)	ⓑ		ⓐ	
4)	ⓓ	ⓒ	ⓑ	ⓐ
5)	ⓓ	ⓒ	ⓑ	ⓐ
6)	ⓓ	ⓒ	ⓑ	ⓐ
7)	ⓓ	ⓒ	ⓑ	ⓐ
8)	ⓓ	ⓒ	ⓑ	ⓐ
9)	ⓓ	ⓒ	ⓑ	ⓐ
10)	ⓓ	ⓒ	ⓑ	ⓐ