نماذج أجابة أسئله أمتحان تقييمى ثانى

عمل / أ . أحمد نصار

أولا الأسئله المقالى

(1)

أوجد: $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\,dx$

حلل المقام

$2x^3-5x^2-3x = x(2x^2-5x-3) = x(2x+1)(x-3)$

اصفار المقام: 0 ، $-\frac{1}{2}$ ، 3

بالضرب في $x(2x+1)(x-3)$

$$\frac{x^2-2}{x(2x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(2x+1)} + \frac{C}{(x-3)}$$

$$x^2-2 = A(2x+1)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(2x+1)$$ ← 1

التعويض بأصفار المقام

بالتعويض في 1 بـ $x=0$

$-2 = A(2(0)+1)(0-3) + B(0) + C(0)$ ⟹ $A = \frac{2}{3}$

بالتعويض في 1 بـ $x=-0.5$

$(-0.5)^2-2 = A(0) + B(-0.5)(-0.5-3) + C(0)$ ⟹ $B = -1$

بالتعويض في 1 بـ $x=3$

$(3)^2-2 = A(0) + B(0) + C(3)(2(3)+1)$ ⟹ $C = \frac{1}{3}$

تابع الحل

أوجد: $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\,dx$

$$\frac{x^2-2}{x(2x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(2x+1)} + \frac{C}{(x-3)}$$

$A = \frac{2}{3}$

$B = -1$

$C = \frac{1}{3}$

$$\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\,dx = \int \left(\frac{\frac{2}{3}}{x} + \frac{-1}{2x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-3}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-3| + C$$

صفوة معلمى الكويت

(2)

أوجد: $\int \frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$

حلل المقام $x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1) = x(x-1)^2$

اصفار المقام: 0 مكرر 1

الأصفار	0	1	1
المقامات	x	$x-1$	$(x-1)^2$

$$\frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

بالضرب في $x(x-1)^2$

$$4x^2-4x+1 = A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx$$

التعويض بأصفار المقام

بالتعويض في $x=0$ بـ 1: $1 = A(0-1)^2+B(0)+C(0)$ ⟹ $A=1$

بالتعويض في $x=1$ بـ 1: $4(1)^2-4(1)+1 = A(0)+B(0)+C(1)$ ⟹ $C=1$

بالتعويض في $x=2$ بـ 1: $4(2)^2-4(2)+1 = (1)(2-1)^2+B(2)(2-1)+(1)(2)$ ⟹ $B=3$

x قيمة اختيارية لا تساوي اصفار المقام و A, C من الحل

تابع الحل

أوجد: $\int \frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$

$$\frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$A = 1$

$B = 3$

$C = 1$

$$\frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x}+\frac{3}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\int \frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x}+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{3}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx =$$

$$= ln|x| + 3ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

(3)

حلل المقام

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2}\,dx$$

$$x^3+4x^2 = x^2(x+4)$$

الأصفار	0	0	-4
المقامات	x	x^2	$x+4$

اصفار المقام: 0 مكرر، -4

بالضرب في $x^2(x+4)$

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+4}$$

$$x^2+1 = Ax(x+4) + B(x+4) + Cx^2$$

التعويض بأصفار المقام 1

بالتعويض في 1 بـ $x=0$: $B=\frac{1}{4}$

$$0^2+1 = A(0)+B(0+4)+C(0)$$

بالتعويض في 1 بـ $x=-4$: $C=\frac{17}{16}$

$$(-4)^2+1 = A(0)+B(0)+C(-4)^2$$

بالتعويض في 1 بـ $x=1, B=\frac{1}{4}, C=\frac{17}{16}$: $A=\frac{-1}{16}$

x قيمة اختيارية لا تساوي أصفار المقام و B, C من الحل

$$(1)^2+1 = A(1)(1+4) + \frac{1}{4}(1+4) + \frac{17}{16}(1)^2$$

تابع الحل

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+4}$$

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+4)} = \frac{\frac{-1}{16}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{\frac{17}{16}}{x+4}$$

$A=\frac{-1}{16}$ $B=\frac{1}{4}$ $C=\frac{17}{16}$

$$\int \frac{x^2+1}{x(x+4)^2}\,dx = \int \frac{\frac{-1}{16}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{\frac{17}{16}}{x+4}\,dx =$$

$$= \int \frac{\frac{-1}{16}}{x}\,dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{x^2}\,dx + \int \frac{\frac{17}{16}}{x+4}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{4x} + \frac{17}{16}\ln|x+4| + C$$

صفوة معلمي الكويت

(4)

$$\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}\,dx$$

∵ درجة البسط = درجة المقام

∴ نبدأ بقسمة البسط على المقام باستخدام القسمة المطولة

$$\begin{array}{r|l} & 1 \leftarrow \text{ناتج القسمة} \\ \hline x^2-4x+4 & x^2-3x+7 \\ & -\,x^2-4x+4 \\ \hline & x+3 \leftarrow \text{الباقي} \end{array}$$

$$\frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4} = 1+\frac{x+3}{(x-2)^2}$$

الحدودية النسبية

$$\frac{x+3}{(x-2)^2} = \frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{(x-2)^2}$$

نضرب كلًّا من طرفي المعادلة في $(x-2)^2$ ثم نبسّط

$$x+3 = A_1(x-2)+A_2$$

عوّض عن x بـ 2

$$2+3 = A_1(0)+A_2$$

$$\therefore\ A_2 = 5$$

نعوّض في المعادلة عن $A_2 = 5$ وإحدى قيم x ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_1 .

$$1+3 = -A_1+5$$

$$\therefore\ A_1 = 1$$

$$\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}\,dx = \int \left(1+\frac{1}{x-2}+\frac{5}{(x-2)^2}\right)dx$$

$$= x+\ln|x-2|-\frac{5}{x-2}+C$$

صفوة معلمي الكويت

(5)

بأستخدام القسمه المطولة:

A)

$$\frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}=1+\frac{9x-7}{(x-3)^2}$$

$$\frac{9x-7}{(x-3)^2}=\frac{A_1}{x-3}+\frac{A_2}{(x-3)^2}$$

$$9x-7=A_1(x-3)+A_2$$

عوّض عن x بـ 3 $\quad\therefore\quad A_2=20$

عوّض عن A_2 بـ 20 ولتكن $x=1$ لإيجاد قيمة A_1.

$$\therefore\ A_1=9$$

$$\frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}=1+\frac{9}{x-3}+\frac{20}{(x-3)^2}$$

$$\int\frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}dx=x+9\ln|x-3|-\frac{20}{x-3}+C$$

B)

$$\frac{2x^2+x+3}{x^2-1}=2+\frac{x+5}{x^2-1}$$

$$\frac{x+5}{x^2-1}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+1}$$

$$x+5=A_1(x+1)+A_2(x-1)$$

عوّض عن x بـ 1 $\quad\therefore\quad A_1=3$

عوّض عن x بـ -1 $\quad\therefore\quad A_2=-2$

$$\frac{2x^2+x+3}{x^2-1}=2+\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}$$

$$\int\frac{2x^2+x+3}{x^2-1}dx=\int\left(2+\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$=2x+3\ln|x-1|-2\ln|x+1|+C$$

صفوة معلمي الكويت

(6)

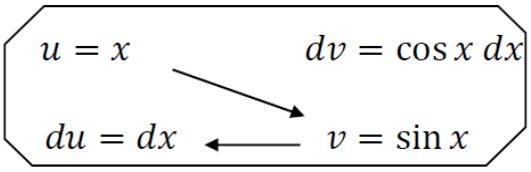
$$\int x\cos x\,dx$$

الحل:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xcos\,x\,dx = xsin\,x - \int \sin x\,dx$$

$$= xsin\,x + \cos x + C$$



(7)

$$\int (4x-1)\ln x\ dx$$

الحل :

$u = \ln x$ $\qquad$ $dv = (4x-1)dx$

$du = \frac{1}{x}dx$ $\qquad$ $v = 2x^2 - x = x(2x-1)$

$$\int u\,dv = u.v - \int v\,du$$

$$\int (4x-1)\ln x\ dx$$

$$= x(2x-1)\ln x - \int \frac{1}{x}.x(2x-1)dx$$

$$= x(2x-1)\ln x - \int (2x-1)dx$$

$$= x(2x-1)\ln x - (x^2 - x) + c$$

$$= x(2x-1)\ln x - x^2 + x + c$$

صفوة معلمي الكويت

(8)

$$\int 4xe^{-5x}\,dx$$

الحل :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$u = 4x \qquad dv = e^{-5x}dx$

$du = 4dx \qquad v = -\frac{1}{5}e^{-5x}$

$$\int 4xe^{-5x}\,dx = 4x\left(-\frac{1}{5}e^{-5x}\right) - \int -\frac{4}{5}e^{-5x}dx$$

$$= -\frac{4}{5}x\,e^{-5x} - \frac{4}{25}e^{-5x} + C$$

(9)

$$\int \ln x\;dx$$

الحل :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = x$

$$\int \ln x\;dx = x\,ln\,x - \int x.\frac{1}{x}dx$$

$$= x\,ln\,x - \int dx = x\,ln\,(x) - x + C$$

(10)

$$\int x^2 \sin x \ dx$$

الحل :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x^2 \sin x \ dx = -x^2 \cos x + \int 2x\cos x \, dx$$

$u = x^2$, $dv = \sin x \, dx$

$du = 2xdx$ ← , $v = -\cos x$

$$\int 2x\cos x \, dx = 2x\sin x - \int 2 \sin x \, dx$$

$$= 2x\sin x + 2\cos x + C$$

$u = 2x$, $dv = \cos x \, dx$

$du = 2 \, dx$ ← , $v = \sin x$

$$\therefore \int x^2 \sin x \ dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

(11)

$$\int x \sin(5x) dx$$

$u = x$, $dv = \sin(5x)dx$

$du = dx$ ← , $v = \frac{-\cos(5x)}{5}$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x \sin(5x) dx$$

$$= \frac{-1}{5} x \cos(5x) - \int \frac{-\cos(5x)}{5} dx$$

$$= \frac{-1}{5} x \cos(5x) + \frac{1}{5} \int \cos(5x) \, dx$$

$$= \frac{-1}{5} x \cos(5x) + \frac{1}{5} \left(\frac{\sin(5x)}{5} \right) + c$$

$$= \frac{-1}{5} x \cos(5x) + \frac{1}{25} (\sin(5x)) + c$$

(12)

أوجد : $\int x^2 \ln x^2 \, dx$

الحل

$$I = \int 2x^2 . \ln x \, dx$$

$u = \ln x \qquad dv = 2x^2 dx$

$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = \frac{2}{3} x^3$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$I = \ln x . \frac{2}{3}x^3 - \int \frac{2}{3}x^2 . \frac{1}{x} dx$$

$$I = \frac{2}{3}x^3 . \ln x - \frac{2}{3}\int x^2 dx$$

$$I = \frac{2}{3}x^3 . \ln x - \frac{2}{3} . \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$I = \frac{2}{3}x^3 . \ln x - \frac{2}{9}x^3 + C$$

صفوة معلمي الكويت

(13)

$$\int x^2 e^{2x-3} dx$$

$u = x^2$ ، $dv = e^{2x-3} dx$

$du = 2x dx$ ، $v = \frac{1}{2} e^{2x-3}$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x^2 e^{2x-3} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x-3}$$

$$- \int xe^{2x-3} dx \ldots\ldots\ldots (1)$$

نستخدم قاعدة التجزيء مرة أخرى لإيجاد تكامل

$$\int xe^{2x-3} dx$$

$u = x$ ، $dv = e^{2x-3} dx$

$du = dx$ ، $v = \frac{1}{2} e^{2x-3}$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xe^{2x-3} dx = \frac{1}{2} xe^{2x-3} - \frac{1}{2} \int e^{2x-3} dx$$

$$= \frac{1}{2} xe^{2x-3} - \frac{1}{4} e^{2x-3} + c \quad (2)$$

من (2) ، (1) نحصل على

$$\therefore \int x^2 e^{2x-3} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x-3} - \frac{1}{2} xe^{2x-3} + \frac{1}{4} e^{2x-3} + c$$

$$= \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) e^{2x-3} + c$$

صفوة معلمي الكويت

(14)

الحل : نوجد قيم x بحيث :

$$f(x)=x^3-9x \quad , \quad [-2\ ,\ 1]$$

$$f(x)=0$$

$$x^3-9x=0$$

$$x(x^2-9)=0$$

$$x(x-3)(x+3)=0$$

$$x=0 \qquad x=3 \qquad x=-3$$

$$0\in(-2,1) \qquad 3\notin(-2,1) \qquad -3\notin(-2,1)$$

$$A=\left|\int_{-2}^{0} f(x)dx\right|+\left|\int_{0}^{1} f(x)dx\right|$$

$$A=\left|\int_{-2}^{0} (x^3-9x)dx\right|+\left|\int_{0}^{1} (x^3-9x)dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{9}{2}x^2\right]_{-2}^{0}\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{9}{2}x^2\right]_{0}^{1}\right|$$

$$=\left|\left[\frac{(0)^4}{4}-\frac{9}{2}(0)^2\right]-\left[\frac{(-2)^4}{4}-\frac{9}{2}(-2)^2\right]\right|+\left|\left[\frac{(1)^4}{4}-\frac{9}{2}(1)^2\right]-\left[\frac{(0)^4}{4}-\frac{9}{2}(0)^2\right]\right|=\frac{73}{4}\ square\ units$$

صفوة معلمي الكويت

(15)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

$f(x) = \cos x \ , \ [0 \ , \pi]$

الحل :

نلاحظ أنه في الفترة $[0,\pi]$

تنقسم المنطقة المطلوبة إلى منطقتين حيث $f(x) = 0$ عند $x = \frac{\pi}{2}$

فتكون المساحة المطلوبة كما يلي :

$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx \right|$$

$$= \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos x)dx \right|$$

$$= \left| [sinx]_0^{\frac{\pi}{2}} \right| + \left| (sinx)_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right|$$

$$= \left| \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - [\sin(0)] \right| + \left| [\sin(\pi)] - \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \right| = 2 \quad square \ \ units$$

صفوة معلمي الكويت

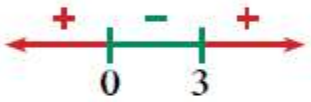
(16)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 3x$ ومحور السينات.

الحل:

نوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات بوضع

$$f(x) = 0$$
$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x-3) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{أو} \quad x = 3$$



نبحث هل $f(x) \leqslant 0$ أو $f(x) \geqslant 0$ في $[0, 3]$

$\because \quad f(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in [0, 3]$

$\therefore$ المساحة:

$$A = -\int_0^3 f(x)\,dx$$
$$= -\int_0^3 (x^2 - 3x)\,dx$$
$$= -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_0^3$$
$$= -\left[\left(9 - \frac{27}{2}\right) - (0)\right]$$
$$= -\left(-\frac{9}{2}\right)$$
$$= \frac{9}{2} \text{ units square}$$

ملاحظه:

يمكن حل السؤال بطريقه المطلق دون الاحتياج لخطوه اختبار الداله موجبه ولا سالبه.

صفوة معلمي الكويت

(17)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي: $f(x)=x^2+1\ ,\ g(x)=-x^2+9$

الحل:

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنيين نضع $f(x)=g(x)$

$$x^2+1=-x^2+9$$
$$2x^2=8$$
$$x^2=4$$
$$x=\pm 2$$

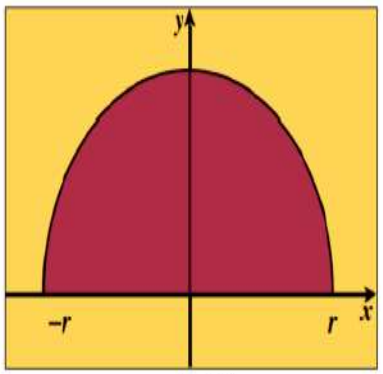
يكون التكامل من $x=-2$ إلى $x=2$ ومساحة المنطقة هي:

$$A=\left|\int_{-2}^{2}(f(x)-g(x))dx\right|$$
$$=\left|\int_{-2}^{2}(x^2+1+x^2-9)dx\right|=\left|\int_{-2}^{2}(2x^2-8)dx\right|$$
$$=\left|\left[\frac{2x^3}{3}-8x\right]_{-2}^{2}\right|$$
$$=\left|\left[\frac{2(2)^3}{3}-8(2)\right]-\left[\frac{2(-2)^3}{3}-8(-2)\right]\right|$$
$$=\frac{64}{3}\quad \text{(وحدة مربعة)}$$

صفوة معلمي الكويت

(18)

باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بنصف الدائرة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$



شكل توضيحي

الحل :

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

تمثل معادلة نصف دائرة مركزها $(0,0)$ و طول نصف قطرها r

المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات هو كرة

$$V = \pi \int_{-r}^{r} y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx$$

$$= \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx$$

$$= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^{r}$$

$$= \pi \left(\left[r^2 (r) - \frac{1}{3} (r)^3 \right] - \left[r^2 (-r) - \frac{1}{3} (-r)^3 \right] \right)$$

$$= \frac{4}{3} \pi r^3 \ cubic\ units$$

صفوة معلمي الكويت

(19)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f:

$f(x) = \sqrt{x-1}$ ومحور السينات في الفترة $[1,5]$.

الحل :

$$V = \pi \int_1^5 (f(x))^2 dx$$

$$= \pi \int_1^5 (\sqrt{x-1})^2 dx$$

$$= \pi \int_1^5 (x-1) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^5$$

$$= \pi\left(\left[\frac{(5)^2}{2} - (5)\right] - \left[\frac{(1)^2}{2} - (1)\right]\right)$$

$$= 8\pi \quad cubic\ units$$

صفوة معلمي الكويت

(20)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيى الدالتين
$g: g(x)=\sqrt{x}\ ,\ f(x)=x^2$

الحل:

المنطقة المستوية محددة بمنحنيي الدالتين

نجد التقاطع بوضع:

$$f(x)=g(x)$$
$$x^2=\sqrt{x} \qquad (x\geqslant 0)$$

بتربيع الطرفين

$$x^4=x$$
$$x^4-x=0$$
$$x(x^3-1)=0$$
$$x(x-1)(x^2+x+1)=0$$

نحصل على: $x=0\ ,\ x=1$

وبالنسبة إلى المعادلة $x^2+x+1=0$

نوجد المميز Δ :

$$\Delta=1-4(1)(1)=-3\ ,\ -3<0$$

∴ المعادلة ليس لها حلول في $\mathbb{R}$ فيكون التكامل على $[0,1]$

نأخذ قيمة اختيارية في $(0,1)$ ولتكن $x=\frac{1}{4}$

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{16}\ ,\ g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$$
$$\therefore\ g(x)\geqslant f(x)\geqslant 0 \quad \forall x\in[0,1]$$

∴ حجم المجسم الناتج عن الدوران: $V=\pi\int_0^1[(g(x))^2-(f(x))^2]dx$

$$V=\pi\int_0^1\left[(\sqrt{(x)})^2-(x^2)^2\right]dx$$
$$V=\pi\int_0^1(x-x^4)dx$$
$$=\pi\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\pi\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)-(0)\right]$$
$$=\frac{3}{10}\pi \quad \text{units cube}$$

صفوة معلمي الكويت

(21)

اوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بين منحنيي الدالتين

$f(x)=\frac{x^2}{2}+1$, $g(x)=\frac{x}{2}+2$

الحل : نوجد نقاط التقاطع

$$f(x)=g(x)$$
$$\frac{x^2}{2}+1=\frac{x}{2}+2$$
$$\frac{x^2}{2}+1-\frac{x}{2}-2=0$$
$$\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}-1=0$$
$$x=2 \quad , \quad x=-1$$

نأخذ نقطة اختيارية في الفترة $(-1,2)$ و لتكن $x=0$

$$f(0)=\frac{(0)^2}{2}+1=1$$
$$g(0)=\frac{(0)}{2}+2=2$$

$$g(x)\geq f(x)\geq o \quad \forall x \in [-1,2]$$

$$V=\pi\int_{-1}^{2}((g(x))^2-(f(x))^2)dx=\pi\int_{-1}^{2}((\frac{x}{2}+2)^2-(\frac{x^2}{2}+1)^2)dx$$
$$=\pi\int_{-1}^{2}(\left(\frac{x^2}{4}+2x+4\right)-\left(\frac{x^4}{4}+x^2+1\right))dx$$
$$=\pi\int_{-1}^{2}(\frac{x^2}{4}+2x+4-\frac{x^4}{4}-x^2-1)dx$$
$$=\pi\int_{-1}^{2}(-\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{4}+2x+3)dx$$
$$=\pi\left[-\frac{x^5}{20}-\frac{x^3}{4}+x^2+3x\right]_{-1}^{2}$$
$$=\pi(\left[-\frac{32}{20}-2+4+6\right]-\left[\frac{1}{20}+\frac{1}{4}+1-3\right])$$
$$=\frac{81}{10}\pi \ cubic\ units$$

(22)

حاله خاصة :

تمثل المنطقة المظللة من $x=-1$ إلى $x=2$ ويتقاطعا عند النقطة $x=\frac{1}{2}$.

$$V=\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}[(-x+3)^2-(x+2)^2]dx+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}[(x+2)^2-(-x+3)^2]dx=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(5-10x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}(-5+10x)dx$$

$$=[5x-5x^2]_{-1}^{\frac{1}{2}}+[-5x+5x^2]_{\frac{1}{2}}^{2}=\ 22.5\ \text{unit cub}$$

صفوة معلمي الكويت

ثانيا الأسئله الموضوعية

في التمارين (5—1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int x\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos 2x + C$ — (a) (b)

(2) $\int x\sin(\pi x)\,dx = -\frac{x}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) + C$ — (a) (b)

(3) $\int x\,e^{6x}\,dx = \frac{1}{6}x\,e^{6x} - \frac{1}{36}e^{6x} + C$ — (a) (b)

(4) $\int x\,e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} + e^{-x} + C$ — (a) (b)

(5) $\int x\sec^2 x\,dx = x\tan x - \ln|\sec x| + C$ — (a) (b)

في التمارين (11—6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int (2x+1)\sin x\,dx$

(a) $(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$
(b) $-(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$
(c) $-(x+1)\cos x - 2\sin x + C$
(d) $(2x+1)\cos x - \sin x + C$

(7) $\int x^2\ln(x)\,dx =$

(a) $\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{3} + C$
(b) $\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$
(c) $\frac{1}{3}x^3\ln(x) + \frac{x^3}{9} + C$
(d) $-\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$

في التمرينين (9—8)، إذا كان $\int (2x+1)\ln x\,dx = uv - \int v\,du$ فإن:

(8) $uv =$

(a) $(2x+1)\ln x$
(b) $2x\ln x$
(c) $\frac{2x+1}{2}\ln x$
(d) $x(x+1)\ln x$

(9) $\int v\,du =$

(a) $\frac{1}{2}x\ln x + C$
(b) $\frac{1}{2}x^2 + x + C$
(c) $(2x+1)\ln x + C$
(d) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$

في التمرينين (11—10)، إذا كان $\int (3x-1)e^{3x+2}\,dx = uv - \int v\,du$ فإن:

(10) $uv =$

(a) $(3x-1)e^{3x+2}$
(b) $\frac{1}{3}(3x-1)e^{3x+2}$
(c) $(3x-1)e^{x+2}$
(d) $\frac{1}{3}(x-1)e^{3x+2}$

(11) $\int v\,du =$

(a) $-\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$
(b) $-e^{3x+2} + C$
(c) $\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$
(d) $e^{3x+2} + C$

صفوة معلمي الكويت

في التمارين (1–4)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int \frac{4dx}{(x+3)(x+7)} = \ln|x+3| + \ln|x+7| + C$ (a) (b)

(2) $\int \frac{-6dx}{x^2+3x} = -2\ln|x+3| + 2\ln|x| + C$ (a) (b)

(3) الدالة: $f(x) = \frac{4x-11}{2x^2-x-3}$ على صورة كسور جزئية هي: $f(x) = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{2x-3}$ (a) (b)

(4) للحدودية النسبية: $\frac{x^2-x+2}{x^3-2x^2+x}$ ثلاثة كسور جزئية. (a) (b)

في التمارين (5–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) $\int \frac{6}{x^2-9}dx =$

(a) $\ln|x+3| - \ln|x-3| + C$ (b) $\ln(x-3) - \ln(x+3) + C$

(c) $\ln|x+3| + \ln|x-3| + C$ (d) $\ln|x-3| - \ln|x+3| + C$

(6) $\int \frac{7x-7}{x^2-3x-10}dx =$

(a) $4\ln|x+2| + 3\ln|x-5| + C$ (b) $3\ln|x+2| + 2\ln|x-5| + C$

(c) $4\ln|x-5| + 3\ln|x+2| + C$ (d) $4\ln|x-5| - 3\ln|x+2| + C$

(7) الدالة النسبية: $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ على صورة كسور جزئية هي $f(x)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}$ (b) $\frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)}$

(c) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$ (d) $\frac{1}{2(x-2)} - \frac{1}{2(x+2)}$

(8) $\int \frac{2x^2-4x+3}{x^2-1}dx =$

(a) $2 + 2\ln|x-1| - \frac{9}{2}\ln|x+1| + C$ (b) $\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{9}{2}\ln|x+1| + C$

(c) $2x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{9}{2}\ln|x+1| + C$ (d) $x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - 9\ln|x+1| + C$

(9) $\int \frac{3x^2+2x}{x^2-4}dx =$

(a) $4\ln|x-2| - 2\ln|x+2| + C$ (b) $3x + 2\ln|x-2| - 2\ln|x-2| + C$

(c) $3x + 4\ln|x-2| - 2\ln|x+2| + C$ (d) $3x + 4\ln|x-2| + 2\ln|x+2| + C$

صفوة معلمي الكويت

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x=a\ ,\ x=b$ هي: $\int_a^b f(x)dx$

(a) (b)

(2) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f: f(x)=4-x^2$ ومحور السينات في $[-2,2]$ هي: $2\int_0^2 f(x)dx$

(a) (b)

(3) إذا كانت: $\forall x\in[a,b]\quad f(x)\le 0$ فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في $[a,b]$ هي: $\int_b^a f(x)dx$

(a) (b)

(4) إذا كان منحنى الدالة $f: f(x)=x^2-2x-3$ يقطع محور السينات عند $x=-1$، $x=3$. فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات هي: $A=\int_{-1}^{3} f(x)dx$

(a) (b)

(5) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f: f(x)=|x|$ ومحور السينات. في الفترة $[-2,2]$ هي: 2 وحدة مساحة

(a) (b)

في التمارين (10–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f: f(x)=\sqrt{9-x^2}$ ومحور السينات هي:

(a) 9π units^2 (b) 6π units^2

(c) 3π units^2 (d) $\frac{9}{2}\pi$ units^2

(7) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $g: g(x)=(x-2)^3$ ومحور السينات في الفترة $[0,4]$ بالوحدات المربعة هي:

(a) $2\int_0^2 g(x)dx$ (b) $-2\int_0^2 g(x)dx$

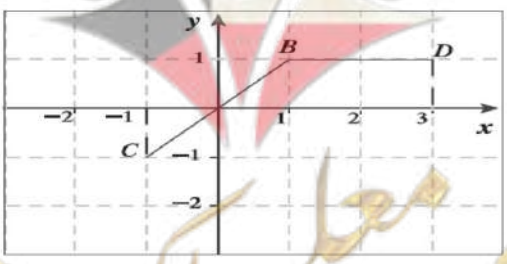
(c) $\int_0^4 g(x)dx$ (d) $-2\int_2^4 g(x)dx$

(8) مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f(x)=2$ ومنحنى الدالة $g: g(x)=-\sqrt{x}$ والمستقيمين $x=0$ ، $x=4$ هي:

(a) 20 units^2 (b) $\frac{8}{3}$ units^2

(c) $\frac{40}{3}$ units^2 (d) 8 units^2

(10) إذا كان بيان الدالة f يمثله $\overline{CB}\cup\overline{BD}$ كما هو موضح بالشكل فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x=3\ ,\ x=-1$ هي:



(a) 3 units^2 (b) 4 units^2 (c) 2 units^2 (d) 5 units^2

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=\sqrt[3]{x}$ في الفترة $[1,8]$ هو: $V=\pi\int_{8}^{1}(\sqrt[3]{x})^2dx$

(a) (b)

(2) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=2\sqrt{x}$ في الفترة $[1,4]$ هو: $V=\pi\int_{0}^{4}4xdx-\pi\int_{0}^{1}4xdx$

(a) (b)

(3) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=x$ ومنحنى الدالة g : $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ هو: $V=\pi\int_{0}^{2}\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx$

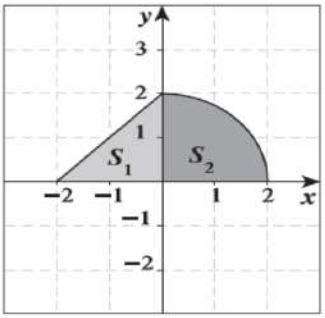
(a) (b)

في التمارين (12–5)، ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=3$ ومحور السينات في الفترة $[-1,1]$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 6π (b) 18 (c) 18π (d) 81π

(6) المنطقة المظللة $S=S_1\cup S_2$ حيث S_1 منطقة مثلثة، S_2 منطقة ربع دائرة كما هو موضح بالشكل.



حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة S بالوحدات المكعبة يساوي:

(a) $\frac{40}{3}\pi$ (b) $4+2\pi$ (c) $\frac{16}{3}\pi$ (d) 8π

(7) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة $y=-\sqrt{4-x^2}$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 4π (b) 6π (c) $\frac{16}{3}\pi$ (d) $\frac{32}{3}\pi$

(8) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى الدالة f : $f(x)=\frac{1}{x}$ والمستقيمات $x=1$, $x=2$, $y=0$ هو:

(a) π units^3 (b) $\frac{\pi}{3}$ units^3 (c) $\frac{\pi}{2}$ units^3 (d) $\frac{\pi}{4}$ units^3

(9) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى الدالة f : $f(x)=\sqrt{x+1}$ ومحور السينات والمستقيمين $x=3$, $x=-1$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 8π (b) 7π (c) 8 (d) $\frac{5}{2}\pi$