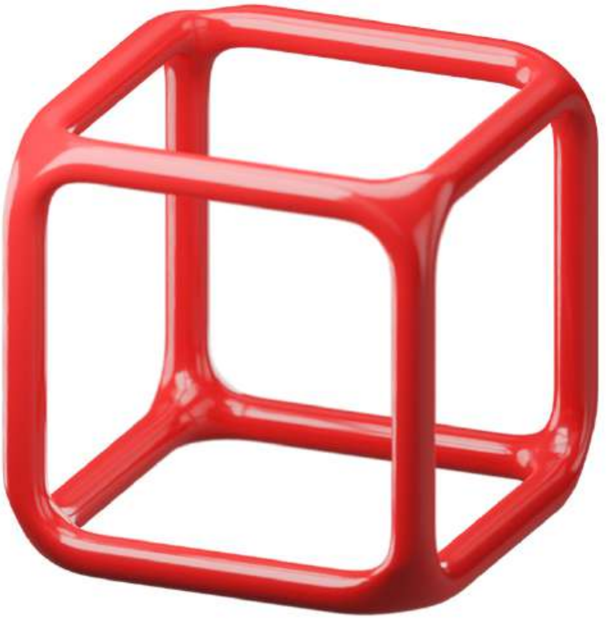


قوانين الرياضيات

الكورس الثاني

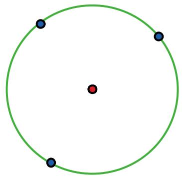
10

2024 - 2023

UULA.COM

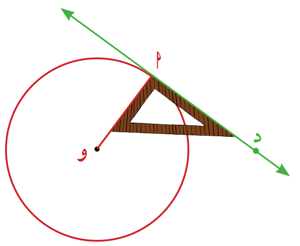
UULA

نظرية (١) :



كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.

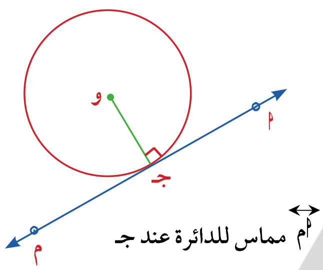
نظرية (٢) :



المماس عمودي على نصف قطر التماس إذا كان مستقيم مماس لدائرة فإنه يكون متعامدا مع نصف القطر المار بنقطة التماس أي أن

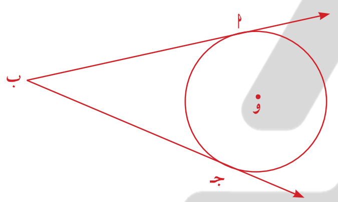
أو ⊥ أد

نظرية (٣) :



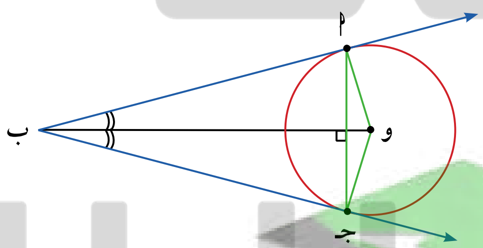
المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماسا لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

نظرية (٤) :



القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

نتائج على نظرية (٤) :



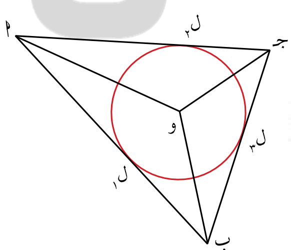
بأ ≅ جب

بو منصف للزاوية (أبج)

بو منصف للزاوية (أوج)

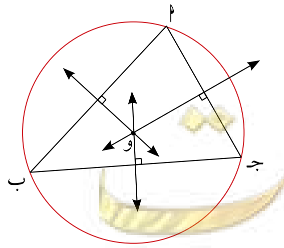
بو ⊥ أج

الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة)



هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل.
مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث.

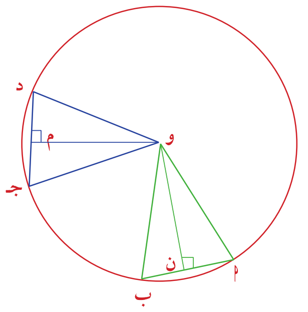
الدائرة المحيطة بمثلث (الخارجة)



هي دائرة تمر برؤوس المثلث الثلاثة.
مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث
(نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع المثلث).

الأوتار والأقواس

نظرية (١) :



في دائرة أو دوائر متطابقة

- للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة
- الأوتار المتطابقة تقابل أقواسا" متطابقة
- للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة

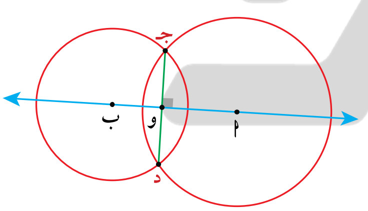
نظرية (٢) :

- الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.
- الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.

نظرية (٣) :

- القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلا من قوسيه
- القطر الذي ينصف وترا (ليس قطرا) في دائرة يكون عموديا على هذا الوتر
- العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة

نتيجة:



خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديا على الوتر المشترك بينهما وينصفه.

الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

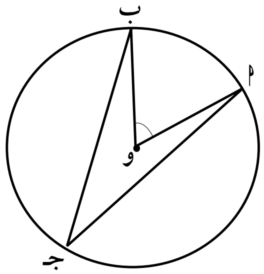
تعريف

- الزاوية التي رأسها مركز الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمي بالزاوية المركزية.
- الزاوية التي رأسها إحدى نقاط الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمي بالزاوية المحيطة.

نظرية (١) :

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة

نظرية (٢) :



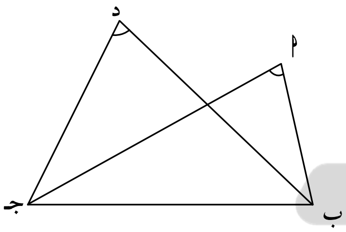
في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها

ن(اجـب) = $\frac{1}{2}$ ن(اب⌒)

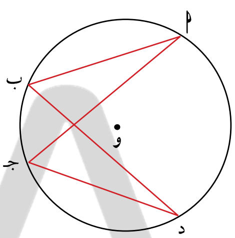
ن(اجـب) = $\frac{1}{2}$ ن(اوب)

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه.

نتائج:

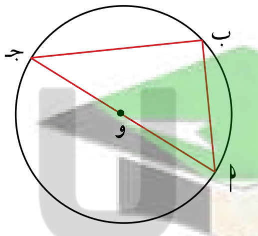


- كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.
- كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.
- كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة)، تكون زواياه المتقابلة متكاملة.
- في الشكل إذا تطابقت الزاويتان ا ، د المرسومات على القاعدة بجـ وفي جهة واحدة منها.
كان الشكل ابجـد رباعيا دائريا.



جـبد ، اجـد تحصران اد⌒

∴ ن(ابد) = ن(اجـد)



ابجـ تحصر اجـ⌒

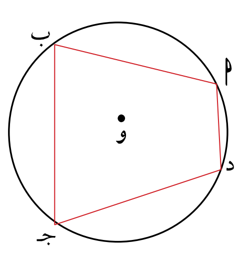
(نصف دائرة)

∴ ن(ابجـ) = ٩٠

(ابجـ) زاوية محيطية

مرسومة على قطر الدائرة

وهي زاوية قائمة



ن(ا) + ن(جـ) = ١٨٠°

ن(ب) + ن(د) = ١٨٠°

نظرية (٣) :

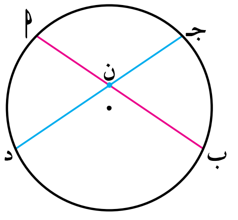
- قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.
- قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

الدائرة :الأوتار المتقاطعة ، المماس

نظرية (١) :

إذا تقاطع وترين داخل دائرة فإن ناتج ضرب طولي جزأي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزأي الوتر الآخر.

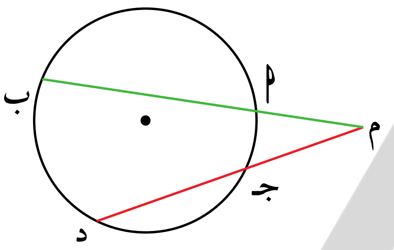
ن أ × ن ب = ن د × ن جـ



نتيجة:

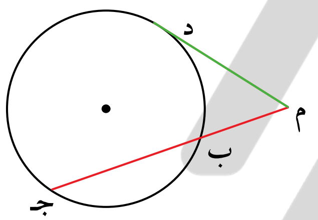
إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.

م أ × م ب = م جـ × م د



نتيجة:

إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.



تنظيم البيانات في مصفوفات

المصفوفات: المربعة ، الأفقية ، العمودية

- المصفوفة المربعة: هي مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة. وفيما عدا ذلك، تسمي المصفوفة: مصفوفة مستطيلة.
- المصفوفة الأفقية: هي مصفوفة مكونة من صف واحد.
- المصفوفة العمودية: هي مصفوفة مكونة من عمود واحد.

المصفوفات المتساوية:

تكون مصفوفتان متساويتين إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها، وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية والعكس صحيح.

خواص جمع المصفوفات:

إذا كان $\underline{\text{أ}}$ ، $\underline{\text{ب}}$ ، $\underline{\text{جـ}}$ مصفوفات من الرتبة $\text{م}\times\text{ن}$ فإن:

- $\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}}$ هي من الرتبة $\text{م}\times\text{ن}$ — خاصية الإقفال (الانغلاق)
- $\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}} = \underline{\text{ب}} + \underline{\text{أ}}$ — خاصية الإبدال
- $(\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}}) + \underline{\text{جـ}} = \underline{\text{أ}} + (\underline{\text{ب}} + \underline{\text{جـ}})$ — خاصية التجميع
- $\underline{\text{0}}_{\text{م}\times\text{ن}} + \underline{\text{أ}} = \underline{\text{أ}} + \underline{\text{0}}_{\text{م}\times\text{ن}} = \underline{\text{أ}}$ — المصفوفة الصفرية هي العنصر المحايد الجمعي من الرتبة $\text{م}\times\text{ن}$
- $\underline{\text{أ}} + (-\underline{\text{أ}}) = \underline{\text{0}}_{\text{م}\times\text{ن}}$ — خاصية المعكوس الجمعي (النظير الجمعي)

مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات)

مصفوفة الوحدة المصفوفة المربعة التي عناصر قطرها الرئيسي (١) وبقية العناصر (صفرا)

$$\underline{\text{و}}_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} ، \quad \underline{\text{و}}_{٣\times٣} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

النظير الضربي $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{أ}}^{-١} = \underline{\text{أ}}^{-١} \times \underline{\text{أ}} = \underline{\text{و}}$

محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} \text{جـ} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{ب} \end{bmatrix}$ هو $|\underline{\text{أ}}| = \begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{ب} \end{vmatrix} = \text{أد} - \text{بجـ}$

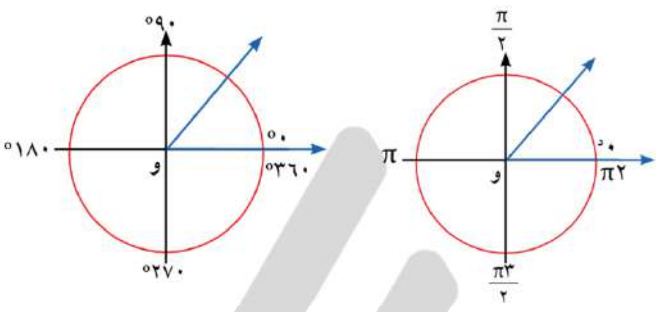
💡 **ملاحظة:** المصفوفة التي محددها الصفر ليس لها نظير ضربي وتسمى (مصفوفة منفردة).

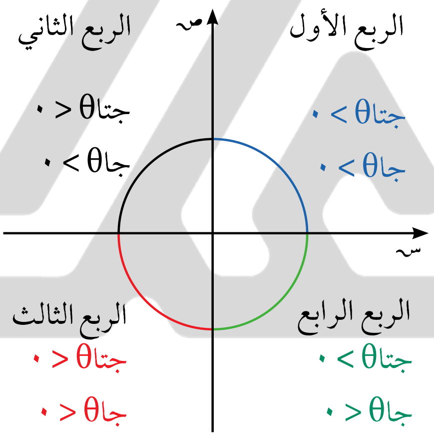
النظير الضربي لمصفوفة:

بفرض أن: $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{جـ} \end{bmatrix}$ إذا كان $\text{أد} - \text{بجـ} \neq ٠$، فإن لها نظيرا ضربيا $\underline{\text{أ}}^{-١} = \frac{١}{|\underline{\text{أ}}|}\begin{bmatrix} -\text{ب} & \text{د} \\ \text{أ} & -\text{جـ} \end{bmatrix}$

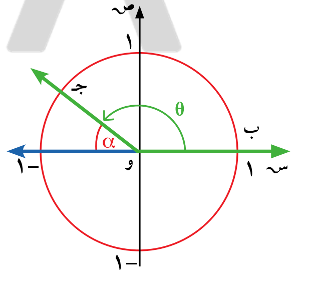
دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)

دائرة الوحدة هي دائرة مركزها نقطة الأصل (و) وطول نصف قطرها واحد وحدة



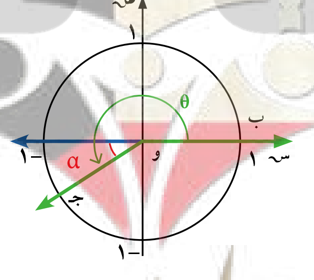


زاوية الإسناد هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات



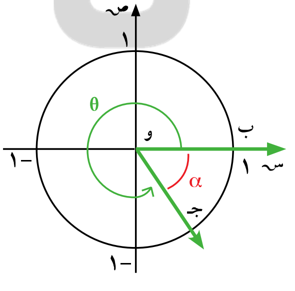
عندما θ تقع في الربع الثاني

$$\alpha^\circ = ١٨٠^\circ - \theta^\circ$$
$$\alpha' = \pi - \theta'$$



عندما θ تقع في الربع الثالث

$$\alpha^\circ = \theta^\circ - ١٨٠^\circ$$
$$\alpha' = \theta' - \pi$$



عندما θ تقع في الربع الرابع

$$\alpha^\circ = ٣٦٠^\circ - \theta^\circ$$
$$\alpha' = ٢\pi - \theta'$$

العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

النسب المثلثية للزاويتين θ، $-\theta$

جتا$(-\theta)$ = جتا(θ) ، جا$(-\theta)$ = $-$جا(θ) ، ظا$(-\theta)$ = $-$ظا(θ)

النسب المثلثية للزاويتين θ، $(\pi-\theta)$

جتا$(\pi-\theta)$ = $-$جتا(θ) ، جا$(\pi-\theta)$ = جا(θ) ، ظا$(\pi-\theta)$ = $-$ظا(θ)

النسب المثلثية للزاويتين θ، $(\pi+\theta)$

جتا$(\pi+\theta)$ = $-$جتا(θ) ، جا$(\pi+\theta)$ = $-$جا(θ) ، ظا$(\pi+\theta)$ = ظا(θ)

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{٢}-\theta\right)$

جتا$\left(\frac{\pi}{٢}-\theta\right)$ = جا(θ) ، جا$\left(\frac{\pi}{٢}-\theta\right)$ = جتا(θ) ، ظا$\left(\frac{\pi}{٢}-\theta\right)$ = ظتا(θ)

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{٢}+\theta\right)$

جتا$\left(\frac{\pi}{٢}+\theta\right)$ = $-$جا(θ) ، جا$\left(\frac{\pi}{٢}+\theta\right)$ = جتا(θ) ، ظا$\left(\frac{\pi}{٢}+\theta\right)$ = $-$ظتا(θ)

الدوال المثلثية (الدائرية) على ع

جا$(\theta + ٣٦٠$ك$)$ = جاθ جا$(\theta + ٢$ك$\pi)$ = جاθ

جتا$(\theta + ٣٦٠$ك$)$ = جتاθ جتا$(\theta + ٢$ك$\pi)$ = جتاθ

ظا$(\theta + ١٨٠$ك$)$ = ظاθ ظا$(\theta +$ك$\pi)$ = ظاθ (حيث ك عدد صحيح)

حل المعادلات المثلثية

بفرض الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن:

حل المعادلة: جتاس = جتاθ هو:

س $= \theta + ٢\text{ك}\pi$ ، س $= -\theta + ٢\text{ك}\pi$ ك $\in$ ص:

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجباً عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع

بفرض الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن:

حل المعادلة: جاس = جاθ هو:

س $= \theta + ٢\text{ك}\pi$ ، س $= \pi - \theta + ٢\text{ك}\pi$ ك $\in$ ص:

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجباً عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني

بفرض الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن:

حل المعادلة: ظاس = ظاθ هو:

س $= \theta + ٢\text{ك}\pi$ ، س $= \pi + \theta + ٢\text{ك}\pi$ ك $\in$ ص: أو يمكن الحل بهذه الطريقة: س $= \theta + \text{ك}\pi$ ك $\in$ ص:

لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجباً عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث

العلاقات بين الدوال المثلثية (2)

قوانين مهمة

$\text{ظا}\theta = \dfrac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ $\text{ظتا}\theta = \dfrac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$ $\text{قا}\theta = \dfrac{١}{\text{جتا}\theta}$ $\text{قتا}\theta = \dfrac{١}{\text{جا}\theta}$

$\text{جا}^٢(\theta) + \text{جتا}^٢(\theta) = ١$ $١ + \text{ظا}^٢(\theta) = \text{قا}^٢(\theta)$ $١ + \text{ظتا}^٢(\theta) = \text{قتا}^٢(\theta)$

المستوى الاحداثي

قانون المسافة بين أي نقطتين أ(س١، ص١)، ب(س٢، ص٢) = $\sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$

قانون نقطة المنتصف

إذا كانت أ(س١، ص١) ، ب(س٢، ص٢) ، فإن إحداثيات نقطة المنتصف هي م $\left(\dfrac{\text{س}_1+\text{س}_2}{2} \,،\, \dfrac{\text{ص}_1+\text{ص}_2}{2}\right)$

تقسيم قطعة مستقيمة

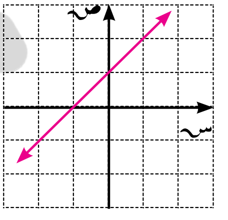
التقسيم من الداخل

إذا كانت $\overline{\text{أب}}$ قطعة مستقيمة بحيث أ(س١، ص١) ، ب(س٢، ص٢) ويراد تقسيمها من جهة أ بنسبة م:ن من الداخل وكانت نقطة التقسيم جـ(س، ص) فإن:

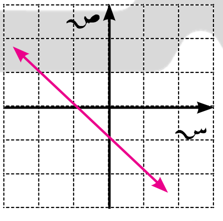
$$\text{جـ}\left(\dfrac{\text{م}\,\text{س}_2 + \text{ن}\,\text{س}_1}{\text{م}+\text{ن}} \,،\, \dfrac{\text{م}\,\text{ص}_2 + \text{ن}\,\text{ص}_1}{\text{م}+\text{ن}}\right)$$

ميل الخط المستقيم

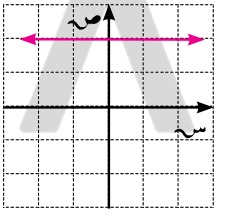
ميل المستقيم موجب



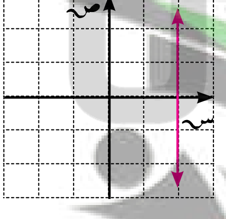
ميل المستقيم سالب



ميل المستقيم الأفقي يساوي صفرًا



المستقيم الرأسي ليس له ميل



$$\text{الميل} = \dfrac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$

تذكر أن

العلاقة بين ظل الزاوية θ التي يصنعها مستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وميل هذا المستقيم م هي:

م = ظا θ

معادلة الخط المستقيم

معادلة الخط المستقيم الذي ميله (م) ويمر بالنقطة $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ $\qquad \text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م}\,(\text{س} - \text{س}_1)$

البعد بين نقطة ومستقيم

إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة ل: $\text{أ}\text{س} + \text{ب}\text{ص} + \text{جـ} = ٠$
فإن البعد ف بين النقطة $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ والمستقيم ل

$$\text{ف} = \frac{|\text{أ}\text{س}_1 + \text{ب}\text{ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$$

الصورة القياسية لمعادلة دائرة

$$(\text{س} - \text{د})^2 + (\text{ص} - \text{هـ})^2 = \text{نق}^2$$

وتسمى هذه الصورة القياسية لمعادلة الدائرة بمعلومية المركز م(د ، هـ) وطول نصف القطر نق

الصورة العامة لمعادلة دائرة

$$\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ل}\,\text{س} + \text{ك}\,\text{ص} + \text{ب} = ٠$$

حيث ل ، ك ، ب ثوابت

مركز الدائرة $\left(\frac{-\text{ل}}{2} ، \frac{-\text{ك}}{2}\right)$

نصف القطر $\text{نق} = \frac{1}{2}\sqrt{\text{ل}^2 + \text{ك}^2 - ٤\text{ب}}$ حيث $\text{ل}^2 + \text{ك}^2 - ٤\text{ب} > ٠$

- عندما $\text{ل}^2 + \text{ك}^2 - ٤\text{ب} < ٠$ فإن المعادلة لا تمثل دائرة.
- عندما $\text{ل}^2 + \text{ك}^2 - ٤\text{ب} = ٠$ فإن المعادلة تمثل نقطة.
- عندما $\text{ل}^2 + \text{ك}^2 - ٤\text{ب} > ٠$ فإن المعادلة تمثل دائرة.

الإحصاء والاحتمال

تذكر: مضروب ن أو
ن! هو : ن × (ن − ١) × ... × ٣ × ٢ × ١
فمثلا : ٥! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١
٠! = ١ تقرأ مضروب صفرا = ١

التباديل: قانون التباديل هو: $^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$

ن ∈ ص$^{+}$
ر ≤ ن
$^{ن}ل_{٠} = ١$

التوافيق: قانون التوافيق هو : $^{ن}ق_{ر} = \binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)! \; ر!}$

الاحتمال المشروط

في كل تجربة عشوائية ، نهتم أولا بمعرفة مجموعة النواتج الممكنة والتي تسمى فضاء العينة (ف). كل حدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

إذا كانت جميع نواتج التجربة لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث هو :

$$ل\ (\text{الحدث } أ) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث } أ}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$$

أي أن: $ل(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(ف)}$

يكتب الاحتمال بصورة كسر عشري، أو كسر، أو نسبة، أو نسبة مئوية.

خواص الاحتمال لحدث ما:

ليكن أ حدثا في فضاء عينة ف منته وغير خال فإن: $٠ \le ل(أ) \le ١$

- إذا كان أ = { } إذاً ل(أ) = ٠ ويسمى حدثا مستحيلا.
- إذا كان أ = ف إذاً ل(أ) = ١ ويسمي حدثا مؤكدا.
- مجموع احتمالات جميع النواتج في فضاء العينة يساوي ١ .

العمليات على الأحداث واحتمالاتها:

تقاطع حدثين أ ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ ، ب في آن معا ويرمز إليه بـ أ ∩ ب .

اتحاد حدثين أ ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ أو ب ويرمز إليه بـ أ ∪ ب .

الحدثان أ ، ب هما متنافيان إذا لم يشتركا في أي عنصر أي أ ∩ ب = ∅

متمم الحدث أ هو $\bar{أ}$ الذي يتألف من كل النواتج الموجودة في فضاء العينة وغير الموجودة في أ .

قاعدة الاحتمال لا تحاد حدثين

$$ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب)$$
$$\Leftarrow ل(أ \cap ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cup ب)$$

قاعدة الاحتمال لمتمم الحدث أ

$$ل(\bar{أ}) = ١ - ل(أ)$$

قاعدة الاحتمال لحدثين متنافيين

إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف فإن: $ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب)$

الأحداث المستقلة

إذا كان أ، ب حدثين مستقلين فإن احتمال وقوع الحدثين معا هو:

$$ل(أ \cap ب) = ل(أ) \times ل(ب)$$

الحدث التابع

يكون الحدث تابعا عندما يتأثر ظهوره بحدث سابق.

الاحتمال المشروط

إذا كان وقوع الحدث ب مشروطا بوقوع الحدث أ فإن:

$ل(ب | أ) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)}$ حيث : $ل(أ) \neq ٠$ وكذلك $ل(أ \cap ب) = ل(أ) \times ل(ب | أ)$