نماذج أجابة أمتحان تقييمى ثانى

2024 / 2025 فصل أول

عمل / أ . أحمد نصار

النموذج الأول

1-

لتكن $f(x) = x^2 + 2$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة.

الحل

$f(x) = x^2+2$

$f(x+h) = (x+h)^2+2$

$= x^2+2xh+h^2+2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ إن وجدت

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2+\cancel{2}-\cancel{x^2}-\cancel{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} \quad : h \neq 0$$

$$= \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x$$

2-

لتكن f : $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

أوجد مجال الدالة f ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-1\ ,\ 1]$

الحل :

نفرض أن

$g(x) = x^2 - 7x + 10$ ، $f(x) = \sqrt{g(x)}$

$D_f = \{ x : g(x) \geq 0 \}$

$x^2 - 7x + 10 \geq 0$

المعادلة المناظرة :

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x-2)(x-5) = 0$

$x = 2 \quad , x = 5$

	2		5	
$++$	0	$---$	0	$++$

∴ مجال الدالة f هو $(-\infty , 2] \cup [5\ ,\ \infty)$

لدراسة اتصال الدالة f على $[-1 , 1]$

$g(x) \geq 0 \qquad \forall x \in (-\infty , 2] \cup [5 , \infty)$

∵ $[-1 , 1]$ مجموعة جزئية من D_f

$\therefore\ g(x) \geq 0 \qquad \forall x \in [-1 , 1]$ (1)

(2) الدالة g : $g(x) = x^2 - 7x + 10$ متصلة على $[-1 , 1]$

من (1) و (2)

f متصلة على $[-1 , 1]$

النموذج الثانى

1-

$$f(x)=\begin{cases} -x+4 & : x \le 7 \\ \dfrac{9}{-x+4} & : x > 7 \end{cases}$$

الحل:

مجال الدالة f هو : $D_f = (-\infty,7] \cup (7,\infty) = \mathbb{R}$

ندرس اتصال الدالة f على مجالها

نفرض : $g(x) = -x+4$

g دالة متصلة على $\mathbb{R}$

$\forall x \in (-\infty,7] \quad f(x) = g(x)$ e

E f دالة متصلة على $(-\infty,7]$ (1)

$$f(x)=\begin{cases} -x+4 & : x \le 7 \\ \dfrac{9}{-x+4} & : x > 7 \end{cases}$$

تابع للحل

نفرض : $h(x) = \dfrac{9}{-x+4}$

h دالة حدودية نسبية متصلة لكل $x \in \mathbb{R} - \{4\}$

$\forall x \in (7,\infty) \quad f(x) = h(x)$ E

E f دالة متصلة على $(7,\infty)$ (2)

ندرس اتصال الدالة f عند $x = 7$ من جهة اليمين

$f(7) = -3$

$$\lim_{x\to 7^+} f(x) = \lim_{x\to 7^+} \left(\frac{9}{-x+4}\right) = -3$$

E $f(7) = \lim_{x\to 7^+} f(x)$

E الدالة f متصلة عند $x = 7$ من جهة اليمين (3)

من (1) , (2) , (3) نجد :

f دالة متصلة على $(-\infty,\infty)$

(شرط نهايه المقام : 3- = 4+7- لا يساوى صفر)

2-

$$F(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$$

نفرض أن $\Leftarrow$ $F(x) = \sqrt{g(x)}$

، $g(x) = 8 - 2x^2$

$$\therefore D_f = \{ X : g(x) \geq 0 \}$$

$$\boxed{8 - 2x^2 \geq 0}$$

$$4 - x^2 \geq 0$$

المعادلة المناظرة $\Leftarrow$ $4 - x^2 = 0$

$$(x-2)(x+2) = 0$$

$X = 2$ ، $X = -2$

مثل ــــ عكس إشارة معامل x^2 ــــ مثل

$-\infty$ ــ $-$ ــ (-2) ــ $+$ ــ (2) ــ $-$ ــ ∞

$\therefore$ مجال الدالة $F(x)$ هو : $[-2, 2]$

لدراسة اتصال الدالة $F(x)$ على مجالها $[-2, 2]$

$\therefore g(x) \geq 0 \quad \forall \, x \in [-2, 2]$

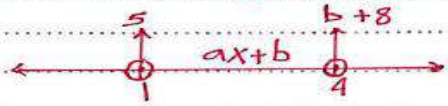
$\therefore g(x) = 8 - 2x^2 \rightarrow$ متصلة على $[-2, 2]$

$\therefore F(x) = \sqrt{8 - 2x^2} \rightarrow$ متصلة على $[-2, 2]$

النموذج الثالث

1-

الحل



∴ f متصلة على $[1 , 4]$

∴ f متصلة عند $x=1$ من اليمين

$\therefore \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$

$\lim_{x \to 1^+} (ax+b) = 5$

$a(1)+b=5$

$a+b=5$

$2+b=5$

$\boxed{b=3}$

∴ f متصلة عند $x=4$ من اليسار

$\therefore \lim_{x \to 4^-} f(x) = f(4)$

$\lim_{x \to 4^-} (ax+b) = b+8$

$a(4) + \cancel{b} = \cancel{b}+8$

$\frac{4a}{4} = \frac{8}{4}$

$\boxed{a=2}$

بالتعويض

2-

باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f: $f(x) = 3x^2$ عند $x = -2$

الحـــــــل

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$x = -2 \rightarrow a = -2\,, f(-2) = 3(-2)^2 = 12$$

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0}\frac{3(-2+h)^2-12}{h}$$

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0}\frac{12+3h^2-12h-12}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(3h+12)}{\cancel{h}}$$

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} 3h-12 = -12$$

النموذج الرابع

1-

باستخدام التعريف البديل. أوجد مشتقة الدالة f : $f(x)=\sqrt{x}$ عند $x=a$ حيث $a>0$

الحل:

عند النقطة $x=a$ ، (إن وجدت)

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\lim_{h\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$$

$$\lim_{h\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$\lim_{h\to a}\frac{(x-a)}{x-a}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$\lim_{h\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

أختبار الجذر

$$\lim_{x\to a}x=a\,,\quad a>0$$

$$\therefore \lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{\lim_{x\to a}x}=\sqrt{a}$$

أختبار المقام

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}+\sqrt{a}$$

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}+\lim_{x\to a}\sqrt{a}\qquad \sqrt{a}+\sqrt{a}=2\sqrt{a}\quad ,2\sqrt{a}\neq 0$$

يمكننا الآن إيجاد النهاية

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

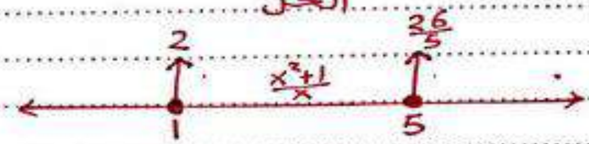
$$=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

2-

ادرس اتصال الدالة f على $[1,5]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & : x=1 \\ \dfrac{x^2+1}{x} & : 1<x<5 \\ \dfrac{26}{5} & : x=5 \end{cases}$$

الحل



بفرض: $g(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

g دالة حدودية نسبية متصلة لكل $x\in R-\{0\}$

$g(x)=f(x) \quad \forall x\in(1,5)$

$\therefore$ f متصلة على $(1,5)$ $\longleftarrow$ I

دراسة اتصال f عند $x=1$ من اليمين

① $f(1)=2$

② $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)=\dfrac{1+1}{1}=2$

نهاية المقام: $\lim\limits_{x\to1^+} x=1\neq0$

من 1، 2 ينتج أن

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)$

$\therefore$ f متصلة عند $x=1$ من اليمين II

دراسة اتصال f عند $x=5$ من اليسار

① $f(5)=\dfrac{26}{5}$

② $\lim\limits_{x\to5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to5^-}\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)=\dfrac{(5)^2+1}{5}=\dfrac{26}{5}$

نهاية المقام: $\lim\limits_{x\to5^-} x=5\neq0$

من 1، 2 ينتج

$\lim\limits_{x\to5^-} f(x)=f(5)$

$\therefore$ f متصلة عند $x=5$ من اليسار III

من I ، II ، III ينتج

f متصلة على $[1,5]$

النموذج الخامس

1-

لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x^2+x & : x\leqslant -1 \\ x^2-x-2 & : x>-1 \end{cases}$

أوجد إن أمكن $f'(-1)$.

$$f_-'(-1)=\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$ (ان وجدت)

$$f_-'(-1)=\lim_{x\to -1^-}\frac{(x^2+x)-(0)}{x+1}$$

$$f_-'(-1)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x(x\ \ +1)}{x+1}$$

$$f_-'(-1)=\lim_{x\to -1^-}x=-1$$

$$f_+'(-1)=\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$ (ان وجدت)

$$f_+'(-1)=\lim_{x\to -1^+}\frac{(x^2-x-2)-(0)}{x+1}$$

$$f_+'(-1)=\lim_{x\to -1^+}\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}$$

$$f_+'(-1)=\lim_{x\to -1^+}(x-2)=-3$$

$$f_+'(-1)\neq f'_-(-1)$$

$f'(-1)$ غير موجود

2-

لتكن f : $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & : \quad x\le 2 \\ 3x-2 & : \quad x>2 \end{cases}$ ، ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x=2$.

الحل

$f(2) = (2)^2 - 4 = 0 \rightarrow ①$

اليمين:

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(3x-2) = 3(2)-2 = 4$

اليسار:

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x^2-4) = (2)^2 - 4 = 0$

$\therefore \lim_{x\to 2^-} f(x) \ne \lim_{x\to 2^+} f(x)$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة $\rightarrow ②$

من 2 ينتج أن f غير متصلة عند $x=2$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x=2$

النموذج السادس

1-

لتكن f : $f(x) = |x-2|$ ، ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x = 2$.

الحل

اعادة تعريف :

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & : x \geq 2 \\ -(x-2) & : x < 2 \end{cases}$$

f دالة متصلة عند $x = 2$

الاشتقاق :

$-(x-2)$ | 2 | $x-2$

$$\boxed{f(2) = (2) - 2 = 0}$$

اليمين :

$$f'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{x-2-0}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{x-2}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} (1) = \underline{\underline{1}}$$

اليسار :

$$f'_-(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x-2)-0}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} (-1) = \underline{\underline{-1}}$$

$\therefore f'_-(2) \neq f'_+(2)$

$\therefore f'(2)$ غير موجودة

$\therefore f$ غير قابلة للاشتقاق عند $x = 2$

2-

أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \sec x$ عند النقطة $F(\frac{\pi}{3}, 2)$

الحل

نستتق: $\frac{dy}{dx} = \sec x \cdot \tan x$

نعوض: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{3}} = \sec\frac{\pi}{3} \cdot \tan\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} \cdot \tan\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$

ميل المماس: $m = 2\sqrt{3}$

ميل العمودى: $\frac{-1}{m} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$

معادلة العمودى

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{-1}{2\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$y - 2 = \frac{-1}{2\sqrt{3}}x + 0.3$$

$$y = \frac{-1}{2\sqrt{3}}x + 0.3 + 2$$

$$y = \frac{-1}{2\sqrt{3}}x + 2.3$$

تذكر: $\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x}}$

النموذج السابع

1-

إذا كانت:

$$y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$$

أثبت أن

$$y' = (y \,.\, cscx)^2$$

الحل :

$$y' = \frac{(sin\,x)'\,(sin\,x + \ cos\,x) - (sin\,x)(sin\,x + \ cos\,x)'}{(sin\,x + \ cos\,x)^2}$$

$$= \frac{cosx\ \ (sinx + \ cosx) - sinx\ (cosx - sinx)}{(sin\,x + \ cos\,x)^2}$$

$$= \frac{cosx\,.\,sinx + \ cos^2x - sinx.cosx + sin^2x}{(sin\,x + \ cos\,x)^2}$$

$$= \frac{cos^2x + sin^2x}{(sin\,x + \ cos\,x)^2}$$

$$= \frac{1}{(sin\,x + \ cos\,x)^2}$$

$$(y\,.\,csc\,x)^2 = \left(\frac{sinx}{(sin\,x + \ cos\,x)} \cdot \frac{1}{sinx}\right)^2$$

$$= \frac{1}{(sin\,x + \ cos\,x)^2}$$

$$= y'$$

2-

الحل :

$$f(0) = \frac{0-4}{0+2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$f'(x) = \frac{(x+2)\cdot(3x-4)' - (x+2)'.(3x-4)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{(x+2)\cdot(3) - (3x-4)\cdot(1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{10}{(x+2)^2}$$

ميل المماس :

$$m = f'(a) = f'(0) = \frac{10}{(0+2)^2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

فتكون معادلة المماس هي

$$y - f(a) = f'(a)\,(x-a)$$

$$y - (-2) = \frac{5}{2}\,(x-0)$$

$$2y + 4 = 5x$$

$$2y - 5x + 4 = 0$$

النموذج الثامن

1-

أثبت أن منحنى كل من الدالتين $y = \frac{1}{\cos x}$, $y = \cos x$ له مماس أفقي عند $x = 0$

$$y = \frac{1}{\cos x}$$

$$y = \sec x$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec x \tan x$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec 0 \tan 0 = 0$$

$$y = \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin 0 = 0$$

$\therefore$ كلا من الدالتين يوجد له مماس افقي عند $x = 0$

لان لكل من الدالتين ميل المماس يساوى صفر عند النقطه (x=0) وبالتالى ظل الزاويه التى يصنعها المماس مع محور السينات يساوى صفر لكل من الدالتين.

2-

الحل :

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & : \quad x<1\\ 2\sqrt{x} & : \quad x\geqslant 1\end{cases}$$

مجال الدالة :

$$D_f = (-\infty\,,1] \cup (1\,,\infty) = R$$

$$f'(x) = \begin{cases}2x & : \quad x<1\\ \text{تبحث} & : \quad x=1\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & : \quad x>1\end{cases}$$

$$f(2) = 2\sqrt{1} = 2$$

إن وجدت

$$f'_{+}(1) = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$f'_{+}(1) = \lim_{x\to 1^+}\frac{2\sqrt{x}-2}{x-1}$$

$$f'_{+}(1) = \lim_{x\to 1^+}\frac{2\sqrt{x}-2}{x-1}$$

$$f'_{+}(1) = 2\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

و منها

$$f'_{+}(1) = 1$$

إن وجدت

$$f'_{-}(1) = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$f'_{-}(1) = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}$$

$$f'_{-}(1) = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$f'_{-}(1) = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$f'_{-}(1) = \lim_{x\to 1^-}(x+1) \quad : x\neq 1$$

$$f'_{-}(1) = 2$$

$$f'_{-}(1) \neq f'_{+}(1)$$

و بالتالى $f'(1)$ غير موجودة

$$f'(X) = \begin{cases}2x & : \quad x<1\\ \text{غير موجودة} & : \quad x=1\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & : \quad x>1\end{cases}$$

$$f'(X) = \begin{cases}2x & : \quad x<1\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & : \quad x>1\end{cases}$$

النموذج التاسع

1-

ادرس اتصال الدالة f على $[1, 3]$ حيث: $f(x)=\begin{cases}-2 & : x=1 \\ x^2-3 & : 1<x<3 \\ 6 & : x=3\end{cases}$

$f(x)=x^2-3 \quad : \quad x\in(1,3)$

$\forall c\in(1,3)$

$f(c)=c^2-3$

$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c}(x^2-3)=c^2-3$

$\therefore \lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c) \qquad \forall c\in(1,3)$

$\therefore$ الدالة f متصلة على $(1, 3)$ $\quad$ (1)

ندرس اتصال الدالة f عند $x = 1$ من جهة اليمين.

$f(1)=-2$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-3)=-2$

$\because f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = 1$ من جهة اليمين. $\quad$ (2)

ندرس اتصال الدالة f عند $x = 3$ من جهة اليسار.

$f(3)=6$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-3)=6$

$\therefore f(3)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = 3$ من جهة اليسار. $\quad$ (3)

من (1), (2), (3)

$\therefore$ الدالة f متصلة على $[1,3]$

2-

لتكن: $f(x)=\sqrt[3]{x^2-5x+4}$. ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

الحل:

نفرض أن: $h(x)=x^2-5x+4$, $g(x)=\sqrt[3]{x}$

$$f(x)=(g\circ h)(x)$$

$$\begin{aligned} f(x)=(g\circ h)(x)&=g(h(x))\\ &=g(x^2-5x+4)\\ &=\sqrt[3]{x^2-5x+4} \end{aligned}$$

$\because$ الدالة h متصلة على $\mathbb{R}$.

$\because$ الدالة g متصلة على $\mathbb{R}$.

$\therefore$ الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن تركيب دالتين كل منهما متصلة على $\mathbb{R}$.

النموذج العاشر

1-

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $y = \frac{8}{4 + x^2}$

عند النقطة $(2, 1)$

الحل :

$$f^{\backslash}(x) = \frac{(4 + x^2)(8)^{\backslash} - (8)(4 + x^2)^{\backslash}}{(4 + x^2)^2}$$

$$f^{\backslash}(x) = \frac{(4 + x^2)(0) - (8)(2x)}{(4 + x^2)^2}$$

$$f^{\backslash}(x) = \frac{-16x}{(4 + x^2)^2}$$

$$f^{\backslash}(2) = \frac{-16 \times 2}{(4 + 4)^2} = \frac{-32}{64} = -\frac{1}{2}$$

∴ ميل المماس يساوي $-\frac{1}{2}$

معادلة خط المماس $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

2-

بفرض أنّ v , u دالّتان في x وقابلتان للاشتقاق عند $x = 0$، وأنّ

$v'(0) = 2 \quad , \quad v(0) = -1 \quad , \quad u'(0) = -3 \quad , \quad u(0) = 5$

أوجد قيم المشتقّات التالية عند $x = 0$

(a) $(uv)'$ (b) $\left(\frac{u}{v}\right)'$ (c) $\left(\frac{v}{u}\right)'$ (d) $(7v - 2u)'$

الحل

(a) عند $x = 0$: $\frac{d}{dx}(uv) = u(0)v'(0) + v(0)u'(0) = (5)(2) + (-1)(-3) = 13$

(b) عند $x = 0$: $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(0)u'(0) - u(0)v'(0)}{[v(0)]^2} = \frac{(-1)(-3) - (5)(2)}{(-1)^2} = -7$

(c) عند $x = 0$: $\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{u(0)v'(0) - v(0)u'(0)}{[u(0)]^2} = \frac{(5)(2) - (-1)(-3)}{(5)^2} = \frac{7}{25}$

(d) عند $x = 0$: $\frac{d}{dx}(7v - 2u) = 7v'(0) - 2u'(0) = 7(2) - 2(-3) = 20$