◀ **أولاً :** يجوز توزيع النهايات على عمليات الالجمع والطرح والضرب بطريقة مباشرة .

Level 1

مثال :

بفرض أن $\lim\limits_{x\to1} g(x) = 5$ ، $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -2$ ، أوجد :

(a) $\lim\limits_{x\to1} (f(x) - g(x))$

(b) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2f(x)}{g(x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{g(x)+4}{f(x).g(x)}$

الحـــــــــل

(a) $\lim\limits_{x\to1} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to1} f(x) - \lim\limits_{x\to1} g(x)$

$= -2 - 5 = -7$

(b) $\lim g(x) = 5 \quad , \quad 5 \neq 0$

$$\lim\limits_{x\to1} \frac{2f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to1} 2f(x)}{\lim\limits_{x\to1} g(x)} = \frac{2\lim\limits_{x\to1} f(x)}{\lim\limits_{x\to1} g(x)}$$

$$= \frac{2(-2)}{5}$$

$$= \frac{-4}{5} = -0.8$$

(c) $$\lim\limits_{x\to1} \frac{g(x)+4}{f(x).g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to1} (g(x)+4)}{\lim\limits_{x\to1} (f(x).g(x))}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to1} g(x) + \lim\limits_{x\to1} 4}{\lim\limits_{x\to1} f(x) . \lim\limits_{x\to1} g(x)}$$

$$= \frac{5+4}{-10} = \frac{9}{10} = -0.9$$

◀ **ثانياً :** وهو التعويض بقيمة المجهول في النهاية وكيفية التعويض بها .

Level 2

مثال :

أوجد :

ⓐ $\lim\limits_{x \to 1} (x^4 - 2x^3 + 5)$

ⓑ $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$

ⓒ $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 (2 - x)$

الحـــــــل

ⓐ $\lim\limits_{x \to 1} (x^4 - 2x^3 + 5) = (-1)^4 - 2(-1)^3 + 5$

$= 1 + 2 + 5 = 8$

ⓑ $g(x) = x + 2$

$g(2) = 2 + 2 = 4 \quad , \quad 4 \neq 0$

$\therefore \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} = \frac{(2)^2 + 2(2) + 4}{2 + 2}$

$= \frac{4 + 4 + 4}{4} = \frac{12}{4} = 3$

ⓒ $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 (2 - x) = \lim\limits_{x \to 3} (2x^2 - x^3)$

$= 2(3)^2 - (3)^3$

$= 18 - 27 = -9$

حاول أن تحل :

أوجـــد :

ⓐ $\lim\limits_{x \to 1} (x^3 + 3x^2 - 2x - 17)$

ⓑ $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

الحــــــل

a $\lim_{x\to1}(x^3+3x^2-2x-17) = (1)^3+3(1)-2(1)^2-17$
$=1+3-2-17=-15$

نعوض بقيمة x=١ في النهاية.

b $\lim_{x\to2}\frac{x^2+5x+6}{x+2} = \frac{(2)^2+5(2)+6}{2+2}$
$=\frac{4+10+6}{4}=\frac{20}{4}=5$

بالتعويض بصورة مباشرة عن x=2 في النهاية.

Level 3

تأتي هذه الأمثلة عندما تكون الدالة مجزأة يعني لها شكل معروف عشان تفرقه

مثال :

إذا كانت الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & : x<1\\ 5 & : x=1\\ \frac{5}{x} & : x>1\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن : $\lim_{x\to1}f(x)$

الحــــــل

النهاية من جهة اليسار

$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(3x+2)=3(1)+2=5$

النهاية من جهة اليمين

$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{5}{x}=\frac{5}{1}=5$

(يمكن التحقق من أن نهاية المقام ≠ 0)

$\because \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)=5$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)=5$

مستر مؤمن سالم
97737570

حاول أن تحل :

إذا كانت الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases} x^2-3 & : x<2 \\ x-1 & : x>2 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن : $\lim_{x\to 2} f(x)$

الحـــــــل

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} x-1=2-1=1$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} x^2-3=(2)^2-3=1$$

$$=\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=1$$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)=1$ النهاية موجودة

مثال :

إذا كانت الدالة g :
$$g(x)=\begin{cases} x^2-2 & : x\leq 0 \\ 1-2x & : x>0 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن : $\lim_{x\to 0} g(x)$

الحـــــــل

النهاية من جهة اليسار $\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2-2)=-2$

النهاية من جهة اليمين $\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}(1-2x)=1$

$\because \lim_{x\to 0^+} g(x)\neq \lim_{x\to 0^-} g(x)$

$\therefore \lim_{x\to 0} g(x)$ غير موجودة

حاول أن تحل :

إذا كانت الدالة f :

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + x & : x > 1 \\ \dfrac{x}{x^2 + 1} & : x \le 1 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن : $\lim_{x \to 1} g(x)$

الحـــــــل

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 + x = (1)^2 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{(1)}{(1)^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\because \lim_{x \to 1^+} g(x) \neq \lim_{x \to 1^-} g(x)$$

$\therefore \lim_{x \to 1} g(x)$ غير موجودة

Level 4

إلغاء العامل الصفري في المقام :

ويعني ذلك عند التعويض بقيمة المجهول وينتج من التعويض أن المقام = صفر

ومن هنا يبدأ الشغل :

مثال :

أوجد إن أمكن :

ⓐ $\lim \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$

ⓑ $\lim \dfrac{(2 + x)^3 - 8}{x}$

ⓒ $\lim \dfrac{|x - 1|}{x^2 - 1}$

الحـــــل

a عند التعويض المباشر عن x بـ ١ في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة .

(x - ١) عامل صفري مشترك بين البسط والمقام

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{x\cancel{(x-1)}}$$

$$=\frac{x+2}{x}\quad , \quad x\neq 1$$

استخدم الصيغة المبسطة

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x}$$

$$\because \lim_{x\to 1}x=1$$

عوض عن x بـ ١

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x}=\frac{1+2}{1}=3$$

b عند التعويض المباشر عن x بـ 0 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة .

$$\frac{(2+x)^3-8}{x}=\frac{(2+x-2)\left((2+x)^2+2(2+x)+(2)^2\right)}{x}$$

x عامل صفري مشترك بين البسط والمقام

$$\frac{\cancel{x}(4+4x+x^2+4+2x+4)}{\cancel{x}}$$

$$=x^2+6x+12\quad , \quad x\neq 0$$

استخدم الصيغة المبسطة

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x}=\lim_{x\to 0}(x^2+6x+12)=12$$

الحـــــل

c عند التعويض المباشر عن x بـ ١ في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة .

اكتب البسط دون استخدام رمز القيمة المطلقة وحلل المقام إلى عوامل (x-١) عامل صفري مشترك بين البسط والمقام

$$\frac{|x-1|}{x^2-1}=\begin{cases}\dfrac{\overset{1}{\cancel{x-1}}}{\underset{1}{\cancel{(x-1)}}(x+1)} & : \ x>1 \\[2ex] \dfrac{\overset{-1}{\cancel{1-x}}}{\underset{1}{\cancel{(x-1)}}(x+1)} & : \ x<1 \ , \ x\neq 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & : \ x>1 \\[2ex] \dfrac{-1}{(x+1)} & : \ x<1 \ , \ x\neq -1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x^2-1}$$

تحقق من نهاية المقام ≠ 0

$$\because \lim_{x\to 1^+}(x+1)=2 \quad , \quad 2\neq 0$$

استخدم الصيغة المبسطة وعوض عن x بـ ١ (النهاية جهة اليمين)

$$\therefore \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$\because \lim_{x\to 1^-}(x+1)=-(1+1)=-2 \quad , \quad 2\neq 0$$

استخدم الصيغة المبسطة وعوض عن x بـ ١ (النهاية جهة اليسار)

$$\therefore \lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{(x+1)}=\frac{-1}{(1+1)}=-\frac{1}{2}$$

$$\because \lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|}{x^2-1}\neq \lim\frac{|x-1|}{x^2-1}$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x^2-1}$$

حاول أن تحل :

أوجد إن أمكن : $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

الحـــــل

عند التعويض عن x بـ -2

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}=\frac{(2)^2+3(2)+2}{(2)^2-4}=\frac{12}{0}$$

وهنا نلجأ إلى التحليل

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}}=\frac{x+1}{x-2}$$

عوض عن x بـ -2

$$\frac{-2+1}{-2-2}=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4}$$

مثال :

أوجد إن أمكن :

c $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}$

b $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

a $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$

الحـــــل

a $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$

عند التعويض المباشر عن x بـ 2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

اضرب البسط و المقام في مرافق البسط

$$\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}=\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}\times\frac{\sqrt{2x-3}+1}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$$=\frac{2x-3-1}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$(\sqrt{a}-b)(\sqrt{a}+b)=a-b^2$

الحـــــــل

(x - 2) عامل مشترك بين البسط والمقام

$$= \frac{2\cancel{(x-2)}^{1}}{\cancel{(x-2)}_{1}(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2x-3}+1} \quad , \quad x \neq 2$$

تحقق أن نهاية ما تحت الجذر أكبر من 0

$$\lim_{x\to 2}(2x-3) = 1 \; ; \; 1 > 0$$

$$\lim_{x\to 2}(\sqrt{2x-3}+1) = \lim_{x\to 2}\sqrt{2x-3} + \lim_{x\to 2} 1$$

تحقق من أن نهاية المقام ≠ 0

$$= \sqrt{\lim_{x\to 2}(2x-3} + 1 = 1+1 = 2 \quad , \quad 2 \neq 0$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}+1}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 2} 2}{\lim_{x\to 2}(\sqrt{2x-3}+1)} = \frac{2}{2} = 1$$

b $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

عند التعويض المباشر عن x بـ 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

حلل البسط : الفرق بين مكعبين

$$\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{\cancel{(\sqrt[3]{x}-1)}^{1}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{\cancel{(\sqrt[3]{x}-1)}_{1}}$$

$$= \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1 \quad , \quad x \neq 1$$

استخدم الصيغة المبسطة

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)$$

$$= \lim_{x\to 1}\sqrt[3]{x^2} + \lim_{x\to 1}\sqrt[3]{x} + \lim_{x\to 1} 1$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{x\to 1} x^2} + \sqrt[3]{\lim_{x\to 1} x} + 1$$

عوض عن x بـ 1

$$= 1+1+1 = 3$$

الحـــــل

c $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}$

عند التعويض المباشر عن x بـ 2- في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

مرافق $\sqrt[3]{a}$ هو $\sqrt[3]{a^2}$

$$\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}=\frac{(x^2-4)}{\sqrt[3]{x+2}}\times\frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}$$

$\sqrt[3]{a^2}.\sqrt[3]{a}=a$

$$=\frac{(x^2-4)\times\sqrt[3]{(x+2)^2}}{x+2}$$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$$=\frac{\cancel{(x+2)}^{1}(x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\cancel{(x+2)}_{1}}$$

$$=(x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2}\quad,\quad x\neq -2$$

استخدم الصيغة المبسطة

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}=\lim_{x\to -2}\left((x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to -2}(x-2).\lim_{x\to -2}\sqrt[3]{(x+2)^2}$$

$$=\lim_{x\to -2}(x-2).\sqrt[3]{\lim_{x\to -2}(x+2)^2}$$

$$=(-2-2).\sqrt[3]{(-2-2)^2}$$

$$=(-4)\times(0)=0$$

مثال :

أوجد إن أمكن :

a $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}$

b $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^5+32}{x+2}$

الحـــــــل

a $\lim \dfrac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}$

عند التعويض المباشر عن x بـ 1- في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 6 & 2 & -3 \\ & & -1 & -5 & 3 \\ \hline & 1 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

الناتج : x^2+5x-3 والباقي صفر

$$\frac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}=x^2+5x-3 \quad , \quad x\neq -1$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x^2+5x-3)$$

عوض عن x بـ 1-

$$=(-1)^2+5(-1)-3=-7$$

a $\lim \dfrac{x^5+32}{x+2}$

عند التعويض المباشر عن x بـ 2- في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$\frac{x^5+32}{x+2}$$

$$x^5+32=x^5+0x^4+0x^3+0x^2+0x+32$$

اقسم البسط على المقام وأوجد الناتج باستخدام القسمة التركيبية

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \\ & & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & 0 \end{array}$$

الناتج : $x^4-2x^3+4x^2-8x+16$ والباقي صفر

$$\frac{x^5+32}{x+2}=x^4-2x^3+4x^2-8x+16 \quad , \quad x\neq -2$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^5+32}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$$

عوض عن x بـ 2-

$$=(-2)^4-2(-2)^3+4(-2)^2-8(-2)+16$$

بسط

$$=16+16+16+16+16=80$$