يوضّح المخطط التالي العلاقات بين مجموعات الأعداد.

عمل الاستاذ / أحمد نصار
٦٧٧٧٢٨٦٤

الأعداد الحقيقية

الأعداد النسبية

أمثلة: $\frac{١}{٣}$ ، ١٤ , ٠ ، $-٢\frac{١}{٣}$

الأعداد الصحيحة

.... ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ...

الأعداد الطبيعية (الكلية):

٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ...

الأعداد غير النسبية

أمثلة:

$\sqrt{٣}$

π

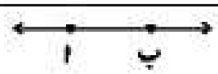
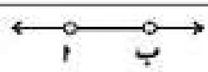
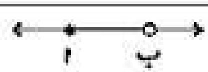
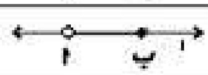
$\sqrt{٥}$

١,٣٤٣٣٤...

(٥) الفترات : الفترة مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

أولاً : الفترات المحدودة

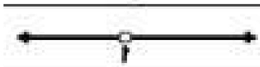
الجدول التالي يوضح أنواع الفترات المحدودة: لتكن أ، ب، أعدادًا حقيقية.

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
[أ ، ب]	مغلقة	أ ≤ س ≤ ب	
(أ ، ب)	مفتوحة	أ < س < ب	
[أ ، ب)	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	أ ≤ س < ب	
(أ ، ب]	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	أ < س ≤ ب	

الأعداد أ، ب هما نقطتا الحدود لكل فترة حيث أ الحد الأدنى للفترة، ب الحد الأعلى للفترة.

ثانياً : الفترات غير المحدودة :

الجدول التالي يوضح بعض الفترات غير المحدودة: ليكن أ، ب ∈ ح.

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
[أ ، ∞)	نصف مغلقة وغير محدودة من الأعلى	س ≥ أ	
(أ ، ∞)	مفتوحة وغير محدودة	س > أ	
(−∞ ، ب]	نصف مغلقة وغير محدودة من الأسفل	س ≤ ب	
(−∞ ، ب)	مفتوحة وغير محدودة من الأسفل	س < ب	

١ إذا كان أ عددًا حقيقيًا موجبًا فإن حل المعادلة |س| = أ هو: س = أ أو س = −أ وتكون مجموعة الحل {−أ ، أ}.

٢ إذا كان أ عددًا حقيقيًا سالبًا فإن المعادلة |س| = أ مجموعة حلها ∅

٣ إذا كان أ = ٠ فإن |س| = أ مجموعة حلها {٠}.

عند حل المعادلة |س| = |ص| نستخدم طريقة المساواة، نضع س = ص أو س = −ص. ونحل المعادلات أو نستخدم طريقة تربيع الطرفين ثم نحل المعادلة الناتجة ونتحقق من القيم بالتعويض عن المجهول لتحديد مجموعة الحل.

تعميم

رأس منحنى الدالة ص = |أس + ب| + جـ هو النقطة $\left(-\frac{ب}{أ}\ ،\ جـ\right)$

ملاحظة: رأس منحنى الدالة ص = |أس + ب| هو النقطة $\left(-\frac{ب}{أ}\ ،\ ٠\right)$

① أوجد مجموعة حل النظام
$\begin{cases} ٢س + ص = ٥ \\ -س + ص = -١ \end{cases}$
بيانيًا وتحقق من الحل.

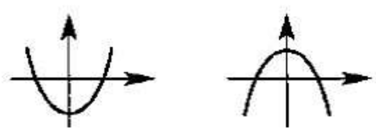
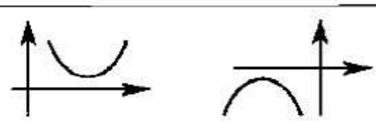
س			
ص			

س			
ص			

يمكن حل نظام معادلتين خطيتين جبريًّا بطريقة الحذف. نستخدم خاصية الجمع والضرب في المعادلات.

يمكن أيضًا حل نظام معادلتين جبريًّا بطريقة التعويض.

حدّد قيمة أحد المتغيرين بدلالة الآخر في إحدى المعادلتين، وعوّض عنه بقيمته في المعادلة الثانية.

المميز	نوع جذري المعادلة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ ، أ ≠ ٠	التمثيل البياني للدالة ص = أس^{٢} + ب س + جـ حيث أ ≠ ٠
ب^{٢} − ٤أجـ > ٠ (عدد موجب)	الجذران حقيقيان (مختلفان)	
ب^{٢} − ٤أجـ = ٠	الجذران حقيقيان متساويان	
ب^{٢} − ٤أجـ < ٠ (عدد سالب)	جذران غير حقيقيين	

١ إذا كانت إشارة معامل س^{٢} موجبة يكون المنحنى بالشكل ∪.

٢ إذا كانت إشارة معامل س^{٢} سالبة يكون المنحنى بالشكل ∩.

إذا كان جذرا المعادلة: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ هما م، ن
فإن: م + ن = $-\frac{ب}{أ}$ ، م × ن = $\frac{جـ}{أ}$

المعادلة على الصورة: س^{٢} − (م + ن)س + م ن = ٠

تكون الزاوية الموجهة موجبة إذا كان الانتقال من الضلع الابتدائي $\overleftarrow{\text{وأ}}$ إلى الضلع النهائي $\overleftarrow{\text{وب}}$ عكس اتجاه دوران عقارب الساعة، وتكون سالبة إذا كان الانتقال من $\overleftarrow{\text{وأ}}$ إلى $\overleftarrow{\text{وب}}$ مع اتجاه دوران عقارب الساعة.

الزاوية الربعية Quarter Angle

هي زاوية موجهة في الوضع القياسي ينطبق ضلعها النهائي على أحد محوري الإحداثيات مثل الزوايا ٠°، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°، ٣٦٠° أو −٩٠°، −١٨٠°، −٢٧٠°، −٣٦٠°.

تعريف:

القياس الدائري لزاوية مركزية في دائرة = $\dfrac{\text{طول القوس الذي تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$

ويرمز إليه بالرمز $\text{هـ}^{\text{د}}$.

فإذا رمزنا إلى طول القوس بالرمز (ل) وإلى طول نصف القطر بالرمز نق

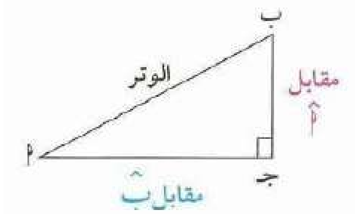
فإن $\text{هـ}^{\text{د}} = \dfrac{\text{ل}}{\text{نق}}$ ومنها $\text{ل} = \text{هـ}^{\text{د}}\,\text{نق}$

وحدة قياس الزوايا لهذا النوع من القياس تسمى **الراديان** ويرمز لها بالرمز ($١^{\text{د}}$)

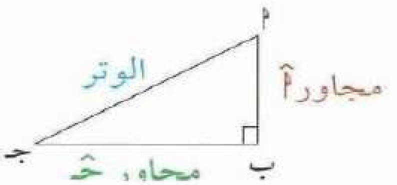
قانون: إذا كان لدينا زاوية قياسها الدائري $\text{هـ}^{\text{د}}$ وقياسها الستيني س° فإن:

$$\frac{\text{هـ}^{\text{د}}}{\pi} = \frac{\text{س}^\circ}{١٨٠^\circ}$$

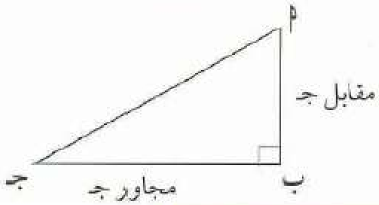
ومنها $\text{س}^\circ = \text{هـ}^{\text{د}} \times \dfrac{١٨٠^\circ}{\pi}$ ، $\text{هـ}^{\text{د}} = \text{س}^\circ \times \dfrac{\pi}{١٨٠^\circ}$



$$\text{جيب الزاوية} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$



$$\text{جيب تمام الزاوية} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$



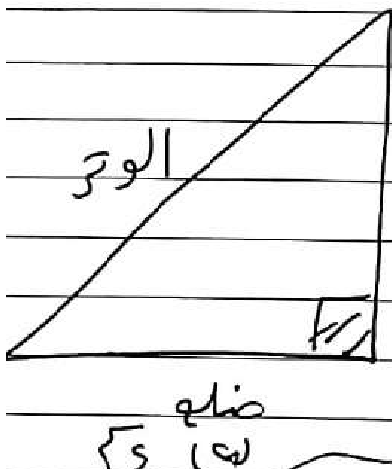
$$\text{ظل الزاوية} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\text{قتا أ} = \frac{1}{\text{جا أ}} : \text{جا أ} \neq 0$$

$$\text{قا أ} = \frac{1}{\text{جتا أ}} : \text{جتا أ} \neq 0$$

نظرية فيثاغورس :-

أطول أضلاع



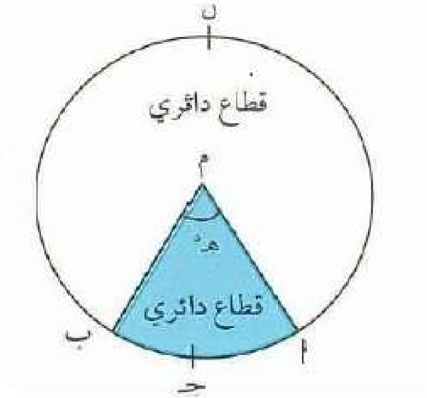
$$\text{الوتر} = \sqrt{(\text{ضلع}_1)^2 + (\text{ضلع}_2)^2}$$

$$\text{ضلع} = \sqrt{(\text{الوتر})^2 - (\text{ضلع})^2}$$

عكس نظرية فيثاغورس ← لإثبات أن الزاوية = ٩٠°

مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ ل نق

= $\frac{١}{٢}$ هـ^د^ نق^٢^



القطعة الدائرية: Circular Segment

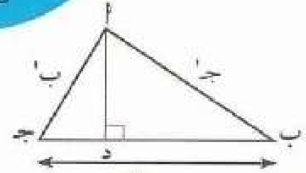
القطعة الدائرية هي جزء من سطح الدائرة محدود بقوس فيها ووتر.

مساحة المثلث: Area of a Triangle

مساحة المثلث أب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × أد

لكن جاب = $\frac{\text{أد}}{\text{أب}}$ ∴ أد = أب × جاب

مساحة المثلث أب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × ب أ × جاب.



مساحة المثلث أب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × ب أ × جاب

= $\frac{١}{٢}$ ب جـ × أجـ × جاجـ

= $\frac{١}{٢}$ أب × أجـ × جاأ

أي أن مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحددة بهما

وباختصار نكتب مساحة المثلث أب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ جـ' جاب

= $\frac{١}{٢}$ أ ب' × جاجـ

= $\frac{١}{٢}$ ب' جـ' جاأ

مساحة القطعة الدائرية: Area of a Circular Segment

مساحة القطعة الدائرية تساوي مساحة القطاع الدائري مطروحًا منه مساحة المثلث.

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^٢^ (هـ^د^ − جاهـ^د^)

مساحة القطعة الدائرية = مساحة القطاع الدائري − مساحة المثلث

ليكن أ، ب، جـ، د $\in$ ح*

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإنه يقال أن أ، ب، جـ، د **أعداد متناسبة**.

وإذا كانت أ، ب، جـ، د أعداد متناسبة فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

ويسمى أ، د **طرفي التناسب**، كما يسمى جـ، ب **وسطي التناسب**.

ولأنّ في هذه الحالة أد = ب جـ خاصيّة الضرب التقاطعي

فإنّ: حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين.

إذا كانت أ، ب، جـ أعدادًا متناسبة مع الأعداد د، هـ، و، فإن:

$\frac{أ}{د} = \frac{ب}{هـ} = \frac{جـ}{و} = م$

حيث م عدد ثابت

ليكن أ، ب، جـ $\in$ ح*

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ فإنه يقال إن أ، ب، جـ **في تناسب متسلسل** (أو تناسب هندسي)

وبالعكس: إذا كانت أ، ب، جـ في تناسب متسلسل فإنّ: $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$

ويسمى ب **الوسط المتناسب** للعددين أ، جـ أو **الوسط الهندسي** لهما كما يسمى أ، جـ **طرفي التناسب**.

$$\text{مقياس الرسم} = \frac{\text{المسافة على الخريطة}}{\text{المسافة الحقيقية}}$$

إذا كانت ص تتغير طرديًّا مع س أي ص α س فإن:
ص = ك س حيث ك ثابت لا يساوي الصفر
والعكس صحيح.

فمعنى ذلك أن $\frac{\text{ص}_1}{\text{س}_1} = \frac{\text{ص}_2}{\text{س}_2}$

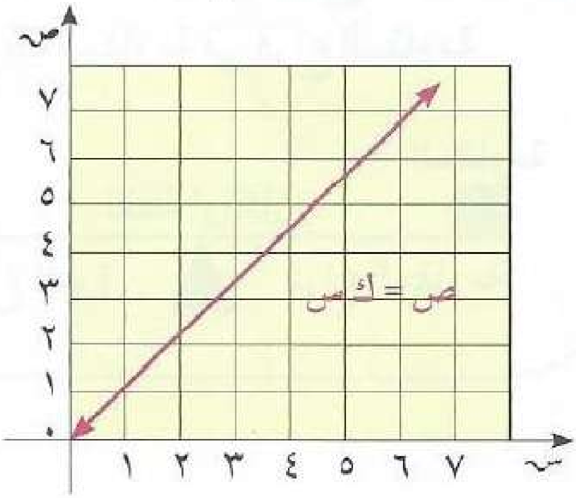
التناسب في التعبير عن التغيّر العكسي

ص α $\frac{1}{\text{س}}$ ، أي ص = $\frac{\text{ك}}{\text{س}}$ فإنّ

$\text{س}_1 \text{ص}_1 = \text{س}_2 \text{ص}_2 = \text{ك}$

ومن ذلك نستنتج أن $\frac{\text{ص}_1}{\text{ص}_2} = \frac{\text{س}_2}{\text{س}_1}$

تغيّر طردي



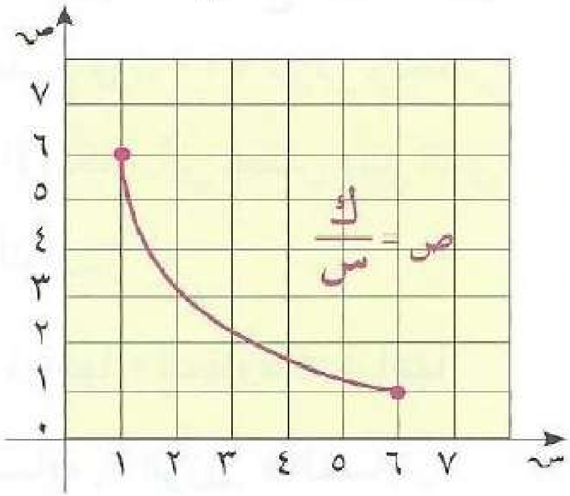
$$ص \propto س$$

$$ص = ك\,س \qquad ك > ٠$$

$$ك = \frac{ص}{س}$$

= ثابت التغيّر

تغيّر عكسي



$$ص \propto \frac{١}{س}$$

$$ص = \frac{ك}{س} \quad : \quad ك > ٠$$

$$ك = س\,ص$$

= ثابت التغيّر

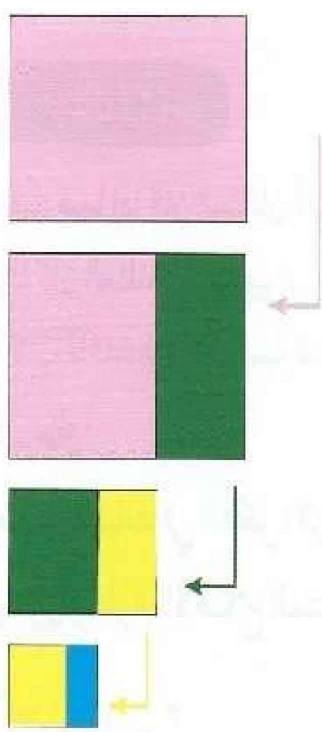
يقال لمضلعين (لهما العدد نفسه من الأضلاع) إنهما متشابهان إذا تحقق الشرطان التاليان معًا:

- قياسات زواياهما المتناظرة متساوية.
- أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

والعكس صحيح.

وتسمى النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين **نسبة التشابه**.

المضلعان المتطابقان يكونان متشابهين.



المستطيل الذهبي Golden Rectangle

هو مستطيل يمكن تقسيمه إلى جزئين، أحدهما مربع والآخر مستطيل.

والمستطيل الناتج يكون مستطيلًا ذهبيًا آخر ويكون مشابهًا للمستطيل الأصلي.

يبيّن الشكل المقابل نمطًا من المستطيلات الذهبية.

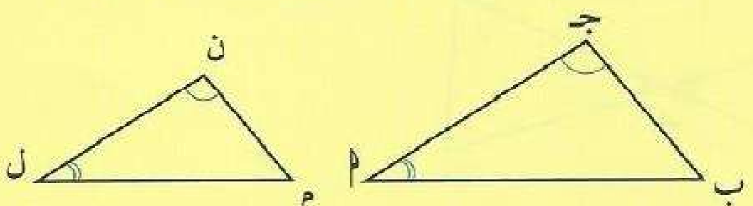
النسبة الذهبية Golden Ratio

في كل مستطيل ذهبي، نسبة طول الضلع الأكبر إلى طول الضلع الأصغر تسمى النسبة الذهبية وتساوي $\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$: ١ أي حوالي ١,٦١٨ : ١.

نظرية (١)

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثين مع زاويتين في المثلث الآخر.

$\triangle$ أ ب جـ ~ $\triangle$ ل م ن.



نظرية (٢)

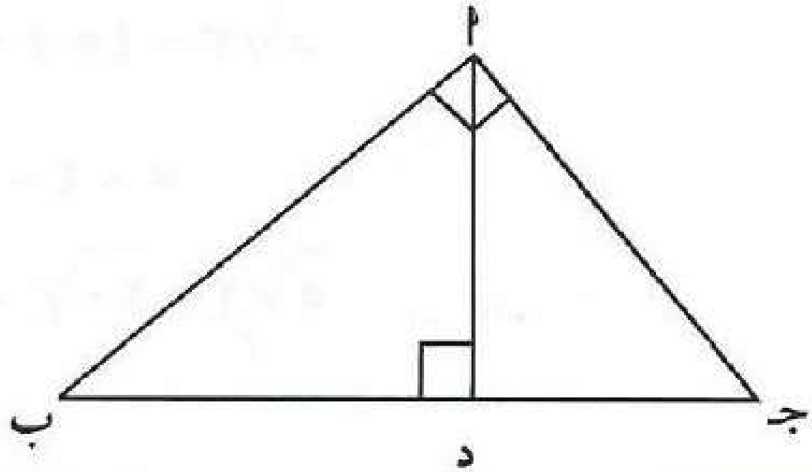
يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فيهما.

نظرية (٣)

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاوية في أحدهما مع زاوية في المثلث الآخر، وتناسب طولا الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين.

نظرية (١)

العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكل منهما يشابه المثلث الأصلي.



$$(\text{أد})^2 = \text{ب د} \times \text{جـ د}$$

$$(\text{أب})^2 = \text{ب د} \times \text{ب جـ}$$

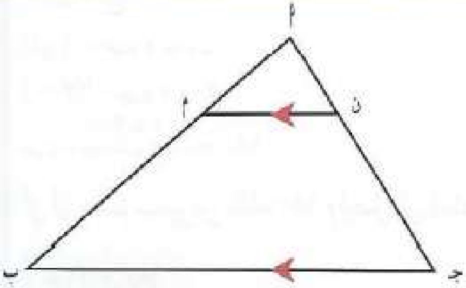
$$(\text{أجـ})^2 = \text{جـ د} \times \text{جـ ب}$$

$$\text{أب} \times \text{أجـ} = \text{أد} \times \text{ب جـ}$$

Parallel Line Theory

نظرية (١) نظرية المستقيم الموازي

إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة.

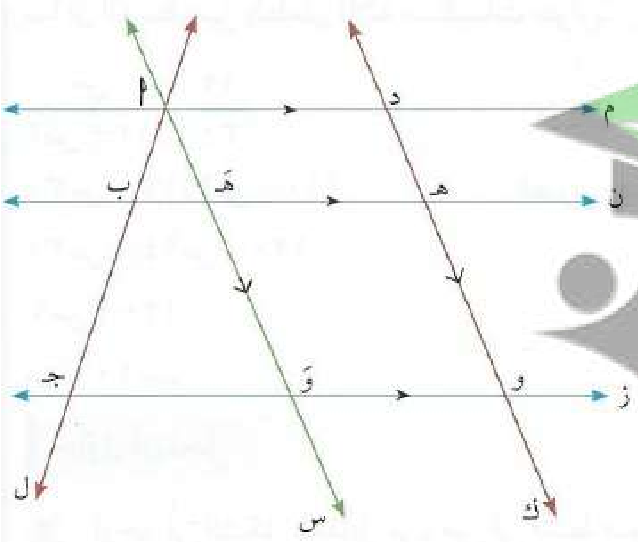


$$\therefore \frac{\text{أم}}{\text{م ب}} = \frac{\text{أن}}{\text{ن جـ}} .$$

Thales Theory

نظرية (٢) نظرية طاليس

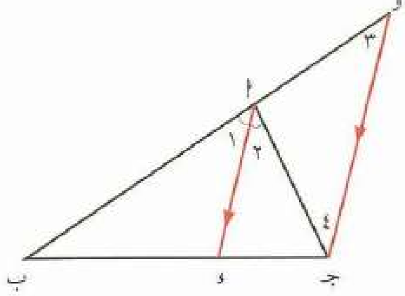
إذا قطع مستقيمان ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.



$$\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{هـ و}}$$

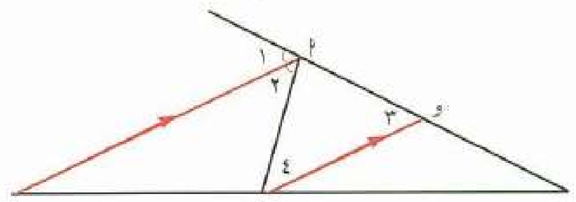
نظرية (٣) نظرية منصف الزاوية في مثلث

إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث.



شكل (١)

$$\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$$



شكل (٢)

$$\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$$

معلومة رياضية:

(٢̂)، (٣̂): زاويتان متبادلتان داخليًا

(١̂)، (٤̂): زاويتان متبادلتان خارجيًا

ق(٢̂) = ق(٣̂): التوازي والتبادل الداخلي

ق(١̂) = ق(٤̂): التوازي والتبادل الخارجي

((ملخص لأهم قوانين الوحدة الخامسة))

- في المتتالية الحسابية $ح_{ن+1} - ح_{ن} = د$ عدد ثابت يسمى أساس المتتالية.
- الحد النوني للمتتالية الحسابية $ح_{ن} = ح_{1} + (ن-1)د$
- إذا كانت أ، ب، ج متتالية حسابية فإن $ب = \frac{أ+ج}{2}$ وهو الوسط الحسابي لـ أ ، ج
- في المتتالية الهندسية: $ح_{ن+1} \div ح_{ن} = ر$ عدد ثابت يسمى أساس المتتالية الهندسية.
- الحد النوني للمتتالية الهندسية $ح_{ن} = ح_{1} ر^{ن-1}$
- إذا كانت أ، ب، ج متتالية هندسية فإن $ب = \pm\sqrt{أ ج}$ وهو الوسط الهندسي لـ أ ، ج
- مجموع ن حداً من متتالية حسابية:

$$جـ_{ن} = \frac{ن}{2}(ح_{1} + ح_{ن}) \quad \text{أو} \quad جـ_{ن} = \frac{ن}{2}[2ح_{1} + (ن-1)د]$$

- مجموع ن حداً من متتالية هندسية:

$$جـ_{ن} = ح_{1} \times \frac{ر^{ن} - 1}{ر - 1}$$

- مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة الأولى التي عددها ن $= \frac{ن(ن+1)}{2}$