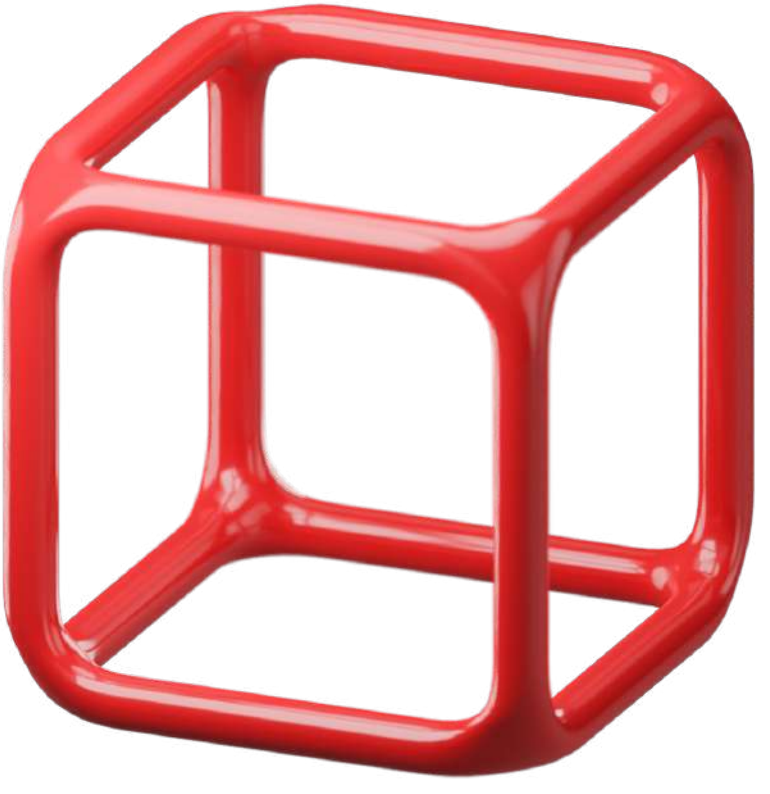
UULA

الرياضيات



حل كراسة التمارين

11

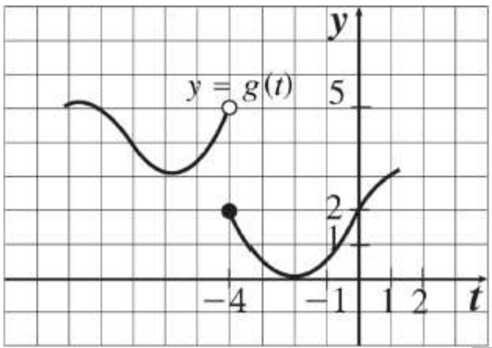
الكورس الأول

2024 – 2025

UULA.COM

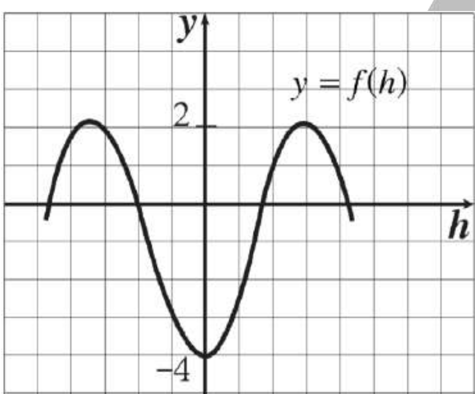
النهايات

1. الشكل المقابل, يمثل بيان الدالة g. أوجد إن أمكن:



- $\lim_{t\to -4^-} g(t) = 5$
- $\lim_{t\to -4^+} g(t) = 2$
- $\lim_{t\to -4} g(t)$ غير موجودة
- $g(-4) = 2$

2. الشكل المقابل, يمثل بيان الدالة f. أوجد إن أمكن:



- $\lim_{h\to 0^-} f(h) = -4$
- $\lim_{h\to 0^+} f(h) = -4$
- $\lim_{h\to 0} f(h) = -4$
- $f(0) = -4$

3. بفرض أن $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 4} g(x) = 3$, أوجد:

- $\lim_{x\to 4} (g(x)+3) = \lim_{x\to 4} g(x) + \lim_{x\to 4} (3) = 3 + 3 = 6$
- $\lim_{x\to 4} xf(x) = \lim_{x\to 4} x \cdot \lim_{x\to 4} f(x) = (4)(0) = 0$
- $\lim_{x\to 4} (g(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to 4} g(x) \cdot \lim_{x\to 4} g(x) = 3 \times 3 = 9$
- $\lim_{x\to 4} \frac{g(x)}{f(x)-1} = \frac{\lim_{x\to 4} g(x)}{\lim_{x\to 4} (f(x)-1)} = \frac{3}{-1} = -3$

شرط المقام:

$\lim_{x\to 4} (f(x)-1) = \lim_{x\to 4} f(x) - \lim_{x\to 4} 1 = 0 - 1 = -1, -1 \neq 0$

في التمارين التالية أوجد:

4. $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} (3x^2(2x-1)) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}} (6x^3 - 3x^2) = 6\left(\frac{-1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{-1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{2} = -1.5$

5. $\lim\limits_{y\to-3} \frac{y^2+4y+3}{y^2-3}$ $= \frac{(-3)^2+4(-3)+3}{(-3)^2-3}$ $= \frac{0}{6} = 0$

شرط المقام:

$\lim\limits_{y\to-3}(y^2-3) = (-3)^2-3 = 6$

$6 \neq 0$

6. $\lim\limits_{x\to-4}(x+3)^{1998}$ $= \left(\lim\limits_{x\to-4}(x+3)\right)^{1998} = (-4+3)^{1998} = 1$

7. $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{x-2}$ $= \sqrt{\lim\limits_{x\to3}(x-2)} = \sqrt{1} = 1$

شرط الجذر: $\lim\limits_{x\to3}(x-2) = 3-2 = 1\,, 1 > 0$

8. لتكن الدالة f أوجد: $\lim\limits_{x\to2} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 3-x & : x < 2 \\ 2 & : x = 2 \\ \frac{x}{2} & : x > 2 \end{cases}$$

$f(2) = 2$

$3-x$ | 2 | $\frac{x}{2}$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-}(3-x)$
$= 3-2 = 1$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+}\frac{x}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$\because \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 1$ $\quad \therefore \lim\limits_{x\to2} f(x) = 1$

سؤال من المريخ:

9. لتكن الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{1-x^2} & ,0 \leq x < 1 \\ 1 & ,1 \leq x < 2 \\ 2 & ,x = 2 \end{cases}$$

أوجد إن أمكن : $(a)\ \lim\limits_{x\to1} f(x)$ $\quad (b)\ \lim\limits_{x\to2^-} f(x)$

$\sqrt[3]{1-x^2}$ | 1 | 2

0 | 1 | 2

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}\sqrt[3]{1-x^2}$
$= \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to1^-}(1-x^2)}$
$= \sqrt[3]{1-(1)^2} = 0$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) =$
$\lim\limits_{x\to1^+}(1) = 1$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) =$
$\lim\limits_{x\to2^-}(1) = 1$

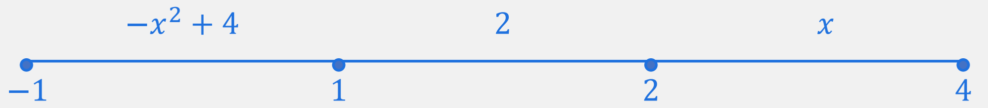
$\because \lim\limits_{x\to1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ $\quad \therefore \lim\limits_{x\to1} f(x)$ غير موجودة

سؤال من المريخ:

10. لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+4 & ,-1\le x<1\\ 2 & ,1\le x<2\\ x & ,2\le x<4\end{cases}$$

أوجد إن أمكن : $(b)\ \lim\limits_{x\to 2} f(x) \qquad (a)\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)$



$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(-x^2+4)$$

$$=-(1)^2+4=3$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2)=2$$

$$\because \lim_{x\to 1^-} f(x)\ne \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} 2=2$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} x=2$$

$$\because \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=2$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)=2$$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(4+x)^2-16}{x}$

بالتعويض المباشر عن x بـ 0 نحصل على صيغة غير معينة

(1)

$$f(x)=\frac{(4+x)^2-16}{x}=\frac{(4+x+4)\cancel{(4+x-4)}}{\cancel{x}}=8+x \qquad x\ne 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(8+x)=8+0=8$$

12. $\lim\limits_{t\to 2}\frac{t^2-3t+2}{t^2-4}$

بالتعويض المباشر عن t بـ 2 نحصل على صيغة غير معينة

(1)

$$f(t)=\frac{t^2-3t+2}{t^2-4}=\frac{\cancel{(t-2)}(t-1)}{\cancel{(t-2)}(t+2)}=\frac{t-1}{t+2}\quad : t\ne 2$$

$$\therefore \lim_{t\to 2} f(t)=\lim_{t\to 2}\frac{t-1}{t+2}=\frac{2-1}{4}=\frac{1}{4}$$

شرط المقام:

$$\lim_{t\to 2}(t+2)=2+2=4\ne 0$$

13. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(3+x)^3-27}{x}$

بالتعويض المباشر عن x بـ 0 نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x)=\frac{\overset{(1)}{\cancel{(3+x-3)}}((3+x)^2+(3+x)3+3^2)}{\cancel{x}}\qquad : x\neq0$$

$$=(3+x)^2+3(3+x)+9$$

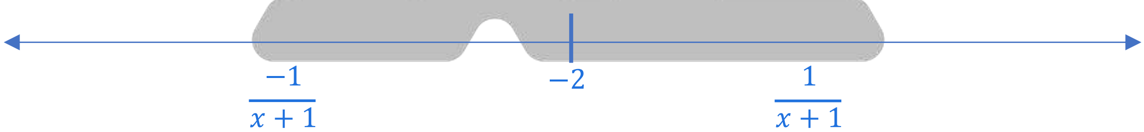
$$\therefore \lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left((3+x)^2+3(3+x)+9\right)$$

$$=\left(\lim_{x\to0}(3+x)\right)^2+3\lim_{x\to0}(3+x)+\lim_{x\to0}9\qquad=(3+0)^2+3(3+0)+9=27$$

14. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{|x+2|}{x^2+3x+2}$

بالتعويض المباشر عن x بـ -2 نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x^2+3x+2}=\dfrac{\overset{(1)}{\cancel{x+2}}}{\cancel{(x+2)}(x+1)}=\dfrac{1}{x+1} & x>-2 \qquad x\neq-2\\[2ex] \dfrac{-x-2}{x^2+3x+2}=\dfrac{\overset{(-1)}{\cancel{-x-2}}}{\cancel{(x+2)}(x+1)}=\dfrac{-1}{x+1} & x<-2 \qquad x\neq-2\end{cases}$$



$\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=$

$\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{-1}{x+1}=$

$\frac{-1}{-1}=1$

شرط المقام

$\lim\limits_{x\to-2^-}(x+1)$

$=(-2)+1=-1$

$-1\neq0$

$\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=$

$\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{1}{x+1}=$

$\frac{1}{-1}=-1$

شرط المقام

$\lim\limits_{x\to-2^+}(x+1)$

$=(-2)+1=-1$

$-1\neq0$

$\because \lim\limits_{x\to-2^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)$ $\therefore \lim\limits_{x\to-2}f(x)$ غير موجودة

15. $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}$

بالتعويض المباشر عن x بـ 3 نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x)=\underbrace{\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}}_{(1)}\times\frac{\sqrt{x^2+7}+4}{\sqrt{x^2+7}+4}=\frac{x^2+\overbrace{\boxed{7-4^2}}^{-9}}{(x^2-4x+3)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}$$

$$=\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}(x-1)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}=\frac{(x+3)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}\quad : x\neq3$$

شرط الجذر:

$$\lim_{x\to3}(x^2+7)$$

$$=3^2+7=16,\qquad 16>0$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to3}(x-1)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)$$

$$=\lim_{x\to3}(x-1)\left(\sqrt{\lim_{x\to3}(x^2+7)}+\lim_{x\to3}4\right)$$

$$=(3-1)\left(\sqrt{16}+4\right)=16:\ 16\neq0$$

$$\therefore \lim_{x\to3}f(x)$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x+3)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to3}(x+3)}{\lim_{x\to3}(x-1)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}$$

$$=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

16. معلق

17. $\lim_{x\to-2}\frac{x^3-3x^2-7x+6}{x+2}$

بالتعويض المباشر عن x بـ -2 نحصل على صيغة غير معينة

-2	1	-3	-7	6
		-2	10	-6
	1	-5	3	0

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2-7x+6}{x+2}$$

$$=x^2-5x+3 \quad : x\neq -2$$

$$\therefore \lim_{x\to-2} f(x)=\lim_{x\to-2}(x^2-5x+3)$$

$$=(-2)^2-5(-2)+3=17$$

18. $\lim_{x\to3}\frac{x^4-7x^2-18}{x-3}$

بالتعويض المباشر عن x بـ 3 نحصل على صيغة غير معينة

3	1	0	-7	0	-18
		3	9	6	18
	1	3	2	6	0

$$f(x)=\frac{x^4-7x^2-18}{x-3}$$

$$=x^3+3x^2+2x+6 \quad : x\neq 3$$

$$\therefore \lim_{x\to3} f(x)=\lim_{x\to3}(x^3+3x^2+2x+6)$$

$$=3^3+3(3)^2+2(3)+6=66$$

19. $\lim_{x\to2}\frac{4x^3-5x^2-12}{x-2}$

بالتعويض المباشر عن x بـ 2 نحصل على صيغة غير معينة

2	4	-5	0	-12
		8	6	12
	4	3	6	0

$$f(x)=\frac{4x^3-5x^2-12}{x-2}$$

$$=4x^2+3x+6 \quad : x\neq 2$$

$$\therefore \lim_{x\to2} f(x)=\lim_{x\to2}(4x^2+3x+6)$$

$$=4(2)^2+3(2)+6=28$$

19. معلق
20. معلق
21. معلق

نهايات تشتمل على $\pm\infty$

1. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-2} = 0$

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^3} = 0$

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{2x+3} = \frac{1}{2}$

4. $\lim_{x\to-\infty} \left(\left(2-\frac{x}{x+1}\right)\left(\frac{x^2}{5+x^2}\right)\right) =$

$$\left(\lim_{x\to-\infty} 2 - \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x+1}\right)\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{5+x^2}\right) = \left(2-\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{1}\right) = 1$$

5. معلق
6. معلق
7. معلق
8. معلق

صيغ غير معينة

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2-5x+4)=\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2)=\infty$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(-4x^2+x-1)=\lim\limits_{x\to\infty}(-4x^2)=-\infty \quad \because -4<0$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-3x+7)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3)=-\infty$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^3+2x+5)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^3)=\infty \quad \because -4<0$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-5x+7}{-2x^2+3x-1}=\frac{4}{-2}=-2$ درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام

6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3+7x-1}{-5x^3+x+2}=\frac{2}{-5}$ درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+5}{2x^3+x-1}=0$ درجة حدودية البسط < درجة حدودية المقام

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2-2x+3}=0$ درجة حدودية البسط < درجة حدودية المقام

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+5}{\sqrt{x^2+2x+7}}$

$$f(x)=\frac{x+5}{\sqrt{x^2+2x+7}}=\frac{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}}$$

$(x>0\,,|x|=x)$

$$=\frac{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}}=\frac{\overset{(1)}{\cancel{x}}\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}}=\frac{\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}}\quad : x\neq 0$$

شرط الجذر: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x^2}=1+0+0=1>0$

البسط: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}=1+0=1$

شرط المقام: $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}\sqrt{1}=1\neq 0$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}}=\frac{1}{1}=1$$

10. $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{4x^2+5x+6}}$

$$f(x) = \frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}} = \frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}} \quad (x<0 \ \ , |x| = -x)$$

$$= \frac{\overset{(-1)}{\cancel{x}}\left(2-\frac{3}{x}\right)}{-\cancel{x}\sqrt{\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}} = \frac{-2+\frac{3}{x}}{\sqrt{\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}} \qquad : x \neq 0$$

شرط الجذر:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty}(4) + \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{x}\right) + \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{6}{x^2}\right)$$

$$= 4+0+0 = 4, \qquad 4>0$$

البسط:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-2+\frac{3}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}(-2) + \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{x}\right) = -2+0 = -2$$

شرط المقام :

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)} = \sqrt{4} = 2 \neq 0$$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2+\frac{3}{x}}{\sqrt{\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}} = \frac{\lim_{x\to-\infty}\left(-2+\frac{3}{x}\right)}{\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}} = \frac{-2}{2} = -1$$

11. إذا كانت: $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+4}{3x^2-2x+1} = -1$ فأوجد قيم a,b

$$\because \lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+4}{3x^2-2x+1} = -1, \quad -1 \neq 0$$

$\therefore$ درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام أي أن حدودية البسط من الدرجة الثانية، بالتالي:

$$ax^3 = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{bx^2+4}{3x^2-2x+1} = -1 \Longrightarrow \frac{b}{3} = -1 \Rightarrow b = -3$$

12. إذا كانت: $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+2x-5}{ax^3+bx^2+3} = -1$ فأوجد قيم a,b

$$\because \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+2x-5}{ax^3+bx^2+3} = -1, \quad -1 \neq 0$$

$\therefore$ درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام أي أن حدودية المقام من الدرجة الثانية، بالتالي

$$ax^3 = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+2x-5}{bx^2+3} = -1 \Longrightarrow \frac{2}{b} = -1 \Rightarrow b = -2$$

13. معلق

نهايات بعض الدوال المثلثية

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\frac{5}{3}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}\times\frac{1+\cos 2x}{1+\cos 2x}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x}{\sin 2x(1+\cos 2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{\sin 2x(1+\cos 2x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x}{\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos 2x)}=\frac{0}{2}=0$$

شرط المقام: $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos 2x)=\lim\limits_{x\to 0}1+\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x=1+1=2\ ,2\neq 0$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos 2x}\times\frac{1+\cos 2x}{1+\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(1+\cos 2x)}{1-\cos^2 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(1+\cos 2x)}{\sin^2 2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin 2x}\right)^2\cdot(1+\cos 2x)=\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}\right)^2\cdot\left(\lim_{x\to 0}1+\lim_{x\to 0}\cos 2x\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot(1+1)=\frac{1}{2}$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1+\cos x}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}x^2}{\lim\limits_{x\to 0}1+\cos x}=\frac{0^2}{2}=0$$

شرط المقام: $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)$

$$=\lim_{x\to 0}1+\lim_{x\to 0}\cos x=1+1=2\ ,\quad 2\neq 0$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\tan x}{\sin x-\cos x}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(1-\tan x)}{\lim\limits_{x\to 0}(\sin x-\cos x)}=\frac{1-0}{-1}=-1$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}1-\lim\limits_{x\to 0}\tan x}{1}$$

شرط المقام: $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x-\cos x)$

$$=\lim_{x\to 0}\sin x-\lim_{x\to 0}\cos x$$

$$=0-1=-1\ ,\quad -1\neq 0$$

8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{1-\cos x}}{(\cancel{1-\cos x})(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{(1+\cos x)}=\frac{\lim\limits_{x\to0}1}{\lim\limits_{x\to0}(1+\cos x)}=\frac{1}{2}$$

شرط المقام: $\lim\limits_{x\to0}(1+\cos x)=\lim\limits_{x\to0}1+\lim\limits_{x\to0}\cos x=1+1=2\,,\quad 2\neq0$

طريقة ثانية:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x(1+\cos x)}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cancel{\sin^2 x}}{\cancel{\sin^2 x}(1+\cos x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{(1+\cos x)}=\frac{\lim\limits_{x\to0}1}{\lim\limits_{x\to0}(1+\cos x)}=\frac{1}{2}$$

شرط المقام: $\lim\limits_{x\to0}(1+\cos x)=\lim\limits_{x\to0}1+\lim\limits_{x\to0}\cos x=1+1=2\,,\quad 2\neq0$

9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\cancel{1-\cos x})(1+\cos x)}{\cancel{1-\cos x}}=\lim_{x\to0}(1+\cos x)=\lim_{x\to0}1+\lim_{x\to0}\cos x=1+1=2$$

طريقة ثانية:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2 x\,(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cancel{\sin^2 x}(1+\cos x)}{\cancel{\sin^2 x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}(1+\cos x)=\lim_{x\to0}1+\lim_{x\to0}\cos x=1+1=2$$

10. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x\div x}{\sin 7x\div x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{\sin 4x}{x}\right)}{\left(\frac{\sin 7x}{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 7x}{x}\right)}=\frac{4}{7}$$

شرط المقام: $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 7x}{x}\right)=7,\quad 7\neq0$

11. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 3x\div x}{\tan 2x\div x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{\tan 3x}{x}\right)}{\left(\frac{\tan 2x}{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan 3x}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan 2x}{x}\right)}=\frac{3}{2}$$

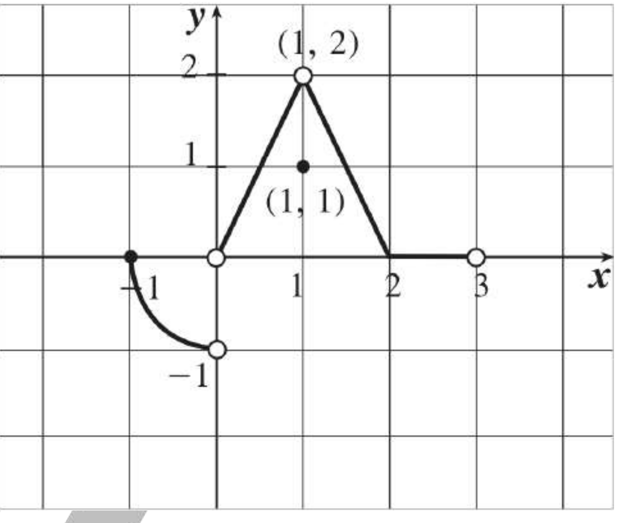
شرط المقام: $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan 2x}{x}\right)=\frac{2}{1}=2\,,\quad 2\neq0$

12. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 5x}{\cos 3x}=\frac{\lim\limits_{x\to0}\cos 5x}{\lim\limits_{x\to0}\cos 3x}=\frac{1}{1}=1$

شرط المقام: $\lim\limits_{x\to0}\cos 3x=1\,,\quad 1\neq0$

الاتصال

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1\,, & -1\le x<0 \\ 2x\,, & 0<x<1 \\ 1\,, & x=1 \\ -2x+4\,, & 1<x<2 \\ 0\,, & 2\le x<3 \end{cases}$$



1. ابحث اتصال الدالة f عند $x=0$

$f(0)$ غير موجودة

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-1\\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\because \lim\limits_{x\to0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to0} f(x)$ غير موجودة

$\therefore$ f غير متصلة عند $x=0$

2. ابحث اتصال الدالة f عند $x=1$

$f(1)=1$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=2,\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=2$

$\because \lim\limits_{x\to1^-} f(x)= \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=2$

$\therefore \lim\limits_{x\to1} f(x)=2$

$\because \lim\limits_{x\to1} f(x)\neq f(1)$

$\therefore$ f غير متصلة عند $x=1$

3. ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$

$f(2)=0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\because \lim\limits_{x\to2^-} f(x)= \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to2} f(x)=0$

$\because \lim\limits_{x\to2} f(x)=f(2)=0$

$\therefore$ f متصلة عند $x=2$

ابحث اتصال كل من الدوال التالية عند $x = c$:

6. $f(x) = \begin{cases} x+5 : x \geq 0 \\ 5-x : x < 0 \end{cases}$, $x = 0$

$5 - x$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $x + 5$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (5 - x)$

$= 5 - 0 = 5$

$f(0) = 0 + 5 = 5$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x + 5)$

$= 0 + 5 = 5$

$\because \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 5 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 5$

$\because \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 5 \Rightarrow$ $\qquad$ $\therefore$ f متصلة عند $x = 0$

7. $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x-4}{x+1} : x \neq -1 \\ -1 \quad : x = -1 \end{cases}$, $x = -1$ $\qquad$ $h(-1) = -1 \rightarrow$ 1

$\lim\limits_{x\to -1} h(x) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-4)}{\cancel{x+1}}$ $\qquad$ $x \neq -1$

$= \lim\limits_{x\to -1} (x - 4) = (-1) - 4 = -5 \rightarrow$ 2

$\because \lim\limits_{x\to -1} h(x) \neq h(-1) \Rightarrow$ $\qquad$ $\therefore$ h غير متصلة عند $x = -1$

Q ابحث اتصال $f(x)$ عند $x = 0$:

8. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x}{|x|} : x \neq 0 \\ -3 \quad : x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^2-3x}{x} = \frac{x(x-3)}{x} = x - 3 & : x > 0 \\ -3 & : x = 0 \\ \frac{x^2-3x}{-x} = \frac{x(x-3)}{-x} = -x + 3 & : x < 0 \end{cases}$

$f(0) = -3$

$-x + 3$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $x - 3$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x + 3)$

$= -0 + 3 = 3$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x - 3)$

$= 0 - 3 = -3$

$\because \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ $\qquad$ $\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة

$\therefore$ f غير متصلة عند $x = 0$

$\because \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = -3 \Rightarrow$ $\qquad$ ملاحظة: الدالة f متصلة عند $x = 0$ من اليمين فقط

9. $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & : x\neq 1\\ \frac{1}{2} & : x=1\end{cases}\quad , \quad x=1$

$f(1)=\frac{1}{2}\rightarrow (1)$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+1)}{(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x+1)}{\lim\limits_{x\to1}(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$=\frac{1+1}{4}=\frac{1}{2}\rightarrow (2)$

من (1),(2) نجد

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)=\frac{1}{2}$

$\therefore$ f متصلة عند $x=1$

$\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}\times\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2}$

$=\frac{x^2+3-2^2}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$=\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$=\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$=\frac{(x+1)}{(\sqrt{x^2+3}+2)}\quad : x\neq 1$

شرط الجذر:

$\lim\limits_{x\to1}(x^2+3)=1^2+3=4, 4>0$

شرط المقام:

$\lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)=$

$\sqrt{\lim\limits_{x\to1}(x^2+3)}+\lim\limits_{x\to1}2=$

$\sqrt{4}+2=4,\qquad 4\neq 0$

10. أوجد قيمة a بحيث تصبح الدالة التالية متصلة عند $x=3$

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1\ , & x<3\\ 2ax\ , & x\geq 3\end{cases}$$

$\because$ f متصلة عند $x=3$

$\therefore \lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to3^-}(x^2-1)=\lim\limits_{x\to3^+}(2ax)$

$\Rightarrow 3^2-1=2a(3)\Rightarrow 8=6a\Rightarrow a=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

أوجد قيم x التي تكون عندها الدالة منفصلة ثم حدد نوع الانفصال و إمكانية التخلص منه مع ذكر السبب.

11. معلق
12. معلق
13. معلق
14. معلق
15. معلق
16. معلق

نظريات الاتصال

ابحث اتصال كل دالة مما يلي عند $x = c$:

1. $f(x) = x^2 - |2x-3|,\ x = 2$

$h(x) = x^2$ دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = 2$

$g(x) = |2x-3|$ متصلة عند $x = 2$ لأن:

$a(x) = 2x - 3$ دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = 2$

$a(2) = 2(2) - 3 = 1$

$b(x) = |x|$ دالة متصلة عند $x = 1$

إذاً: $g(x) = (b \circ a)(x)$ متصلة عند $x = 2$

$\therefore\ f(x) = h(x) - g(x)$ متصلة عند $x = 2$

2. $f(x) = \frac{x+3}{x^2+1} - \frac{3}{x},\ x = -1$

$h(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$ حدودية نسبية متصلة عند $x = -1$ لأن المقام $\neq 0$ عند $x = -1$

$g(x) = \frac{3}{x}$ حدودية نسبية متصلة عند $x = -1$ لأن المقام $\neq 0$ عند $x = -1$

$\therefore\ f(x) = h(x) - g(x)$ متصلة عند $x = -1$

3. $f(x) = x^2 + 3x + |x|,\ x = 3$

$u(x) = x^2 + 3x$ دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = 3$

$v(x) = |x|$ متصلة عند $x = 3$

$\therefore\ f(x) = u(x) + v(x)$ متصلة عند $x = 3$

4. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}, x = -1$

① $h(x) = \sqrt[3]{x}$ دالة جذر تكعيبي متصلة عند $x = -1$

② $g(x) = x^2 + 1$ دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = -1$

③ شرط المقام $2 \neq 0$ ، $g(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$

①,②,③ $\Rightarrow$ f متصلة عند $x = -1$

5. $f(x)=\sqrt{x^2+5x+4},\ x=-5$

$g(x)=x^2+5x+4$

g متصلة عند $x=-5$

$g(-5)=(-5)^2+5(-5)+4=4,\qquad 4>0$

$\therefore\ f(x)=\sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x=-5$

.6 الدالتان f,g معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=-x+2, g(x)=x^2-3$ أوجد

a) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=(f(x))^2-3=(-x+2)^2-3$
$=x^2-4x+4-3=x^2-4x+1$

b) $(g\circ f)(-1)=(-1)^2-4(-1)+1=6$

c) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=-(g(x))+2=-(x^2-3)+2=-x^2+5$

d) $(f\circ g)(-1)=-(-1)^2+5=4$

.7 الدالتان f,g معرفتان كما يلي: $f(x)=\sqrt{x}, g(x)=x^2+4$ أوجد

a) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)}=\sqrt{x^2+4}$

b) $(f\circ g)(2)=\sqrt{(2)^2+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

c) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2+4=x+4$

d) $(g\circ f)(2)=(2)+4=6$

.8 الدالتان f,g معرفتان كما يلي: $f(x)=\sqrt{x^2-9}, g(x)=\frac{1}{x^2+16}$ أوجد

a) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x^2-9})=\frac{1}{(\sqrt{x^2-9})^2+16}=\frac{1}{x^2+7}$

b) $(g\circ f)(4)=\frac{1}{(4)^2+7}=\frac{1}{23}$

c) $(g\circ f)(-4)=\frac{1}{(-4)^2+7}=\frac{1}{23}$

9. لتكن: $f(x)=2x^2-3\,,\,g(x)=\sqrt{x+4}$ ابحث اتصال الدالة $g\circ f$ عند $x=-2$

(1) $f(x)=2x^2-3$ دالة كثيرة حدود متصلة عند $x=-2$

(2) $f(-2)=2(-2)^2-3=5$

(3) $g(x)=\sqrt{x+4}$ متصلة عند $x=5$ لأن

$$\boxed{u(x)=x+4\ \begin{cases} u \text{ متصلة عند } x=5 \\ u(5)=(5)+4=9,\quad 9>0 \end{cases}}$$

(1),(2),(3) $\Leftarrow$ $g\circ f$ متصلة عند $x=-2$ ⇒

10. ابحث اتصال الدالة $f(x)=\left|\sqrt{x}-3\right|$ عند $x=4$

$$\begin{cases} h(x)=\sqrt{x}-3 \\ g(x)=|x| \end{cases} \quad f(x)=(g\circ h)(x)=g\big(h(x)\big)=g(\sqrt{x}-3)=\left|\sqrt{x}-3\right|$$

(1) $h(x)=\sqrt{x}-3$ متصلة عند $x=4$

لأنها طرح دالتين متصلتين عند $x=4$ $(4>0)$

$h(4)=\sqrt{4}-3=-1$

(2) $g(x)=|x|$ دالة قيمة مطلقة متصلة عند $x=-1$

(1),(2) $\Leftarrow$ $f=g\circ h$ متصلة عند $x=4$

11. ابحث اتصال الدالة $g(x)=\sqrt{x^2+1}-|x-3|$ عند $x=3$

$h(x)=|x-3|$

$u(x)=x-3\,,v(x)=|x|$

$h(x)=(v\circ u)(x)=v\big(u(x)\big)=$

$v(x-3)=|x-3|$

(1) $u(x)=x-3$ متصلة عند $x=3$

$u(3)=0$

(2) $v(x)=|x|$ متصلة عند $x=0$

(1),(2) $\Leftarrow$ $h=v\circ u$ متصلة عند $x=3$

$f(x)=\sqrt{x^2+1}$

$a(x)=x^2+1$

$a(x)$ متصلة عند $x=3$

$a(3)=3^2+1=10,\ 10>0$

$\therefore$ $f(x)=\sqrt{a(x)}$ متصلة عند $x=3$

إذا $g(x)=f(x)-h(x)$ متصلة عند $x=3$

الاتصال على فترة

ادرس اتصال كل دالة مما يلي على الفترة المبينة:

1. $f(x)=x^2+2x-3 \ , \ [-2,5]$

f دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$[-2,5] \subseteq \mathbb{R}$

$\therefore f$ متصلة على $[-2,5]$

2. $f(x)=\frac{7x}{x^2+5} \ , \ [1,3]$

$x^2+5\neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\therefore f$ حدودية نسبية متصلة على $\mathbb{R}$

$\because [1,3]\subseteq\mathbb{R}$

$\therefore f$ متصلة على $[1,3]$

3. $f(x)=\frac{2x+1}{x-3} \ , \ [0,5]$

$x-3=0 \Rightarrow x=3$

f حدودية نسبية متصلة $\forall x\in\mathbb{R}-\{3\}$

$\because f$ غير متصلة عند $x=3 \ , \ 3\in[0,5]$

$\therefore f$ متصلة $\forall x\in[0,5]-\{3\}$

$\therefore f$ متصلة على كل من $[0,3) \ , \ (3,5]$

4. $f(x)=\frac{-x+3}{x^2-5x+4} \ , \ [-2,6]$

$x^2-5x+4=0 \Rightarrow x=1 \ , x=4$

$\therefore f$ حدودية نسبية متصلة $\forall x\in\mathbb{R}-\{1,4\}$

$\because f$ غير متصلة عند $x=1 \ , \ x=4$

$1,4\in[-2,6]$

$\therefore f$ متصلة $\forall x\in[-2,6]-\{1,4\}$

$\therefore f$ متصلة على كل من $[-2,1) \ , \ (1,4) , (4,6]$

5. ادرس اتصال الدالة على $[-3,4]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}-5 & : x=-3\\ -x^2+4 & : -3<x<4\\ -10 & : x=4\end{cases}$$

$-3 \qquad\qquad 4$

①

$g(x)=-x^2+4$

$g(x)$ دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\because f(x)=g(x) \quad \forall x\in(-3,4)$

$\therefore f$ متصلة على $(-3,4)$

②

$f(-3)=-5$

$\lim_{x\to-3^+} f(x)=\lim_{x\to-3^+}(-x^2+4)=-5$

$\because \lim_{x\to-3^+} f(x)=f(-3)$

$\therefore f$ متصلة عند $x=-3$ من اليمين

③

$f(4)=-10$

$\lim_{x\to4^-} f(x)=\lim_{x\to4^-}(-x^2+4)=-12$

$\because \lim_{x\to4^-} f(x)\neq f(4)$

$\therefore f$ غير متصلة عند $x=4$ من اليسار

$1,2,3 \Rightarrow f$ متصلة على $[-3,4)$

6. ادرس اتصال الدالة على مجالها:

$$f(x)=\begin{cases}-x+4, x\le 7\\ \frac{9}{-x+4}, x>7\end{cases}$$

$Df=(-\infty,7]\cup(7,\infty)=\mathbb{R}$

7

$h(x)=-x+4$

h دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\because f(x)=h(x) \quad \forall x\in(-\infty,7]$

$\therefore f$ متصلة على $(-\infty,7]$ ①

$g(x)=\frac{9}{-x+4}$

$g(x)$ حدودية نسبية متصلة
$\forall x\in\mathbb{R}-\{4\}$

$\because f(x)=g(x) \quad \forall x\in(7,\infty)$

$\therefore f$ متصلة على $(7,\infty)$ ②

ندرس الاتصال عند $x=7$ من اليمين

$f(7)=-(7)+4=-3$

شرط المقام

$\lim\limits_{x\to7^+}(-x+4)=$
$-7+4=-3$
$-3\neq 0$

$\lim\limits_{x\to7^+}f(x)=\lim\limits_{x\to7^+}\frac{9}{-x+4}=\frac{9}{-3}=-3$

$\because \lim\limits_{x\to7^+}f(x)=f(7)\Rightarrow$ $\therefore f$ متصلة عند $x=7$ من اليمين ③

من ①, ②, ③ نجد f متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

7. معلق
8. معلق
9. معلق
10. معلق
11. معلق

12. لتكن الدالة $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x + 6}$ أوجد مجال الدالة f ثم ادرس اتصال f على الفترة $[0,4]$

$g(x) = -x^2 + 5x + 6$

$D_f = \{x : g(x) \geq 0\}$

$-x^2 + 5x + 6 \geq 0$

$-x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow \quad x = -1 \,, x = 6$

$-$ $\quad -1 \quad$ $+$ $\quad 6 \quad$ $-$

$D_f = [-1 \,, 6]$

$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-1 \,, 6]$

$\because [0 \,, 4] \subseteq [-1 \,, 6]$

1 $\quad g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0 \,, 4]$

2 $\quad g(x)$ متصلة على $[0 \,,4]$

1 , 2 $\Longrightarrow$ f متصلة على $[0 \,,4]$

ادرس اتصال كل من الدوال التالية على مجالها:

13. $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$

$g(x) = 8 - 2x^2$

$D_f = \{x : g(x) \geq 0\}$

$8 - 2x^2 \geq 0$

$8 - 2x^2 = 0 \Rightarrow -2x^2 = -8 \Rightarrow$

$x^2 = 4 \Rightarrow \quad x = \mp 2$

$-$ $\quad -2 \quad$ $+$ $\quad 2 \quad$ $-$

$D_f = [-2 \,, 2]$

1 $\quad g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-2 \,, 2]$

2 $\quad g(x)$ متصلة على $[-2 \,,2]$

1 , 2 $\Longrightarrow$ f متصلة على $[-2 \,,2]$

14. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$g(x) = x^2 - 1$

$D_f = \{x : g(x) \geq 0\}$

$x^2 - 1 \geq 0$

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \quad x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$-\infty$ $\quad +$ $\quad -1 \quad$ $-$ $\quad 1 \quad$ $+$ $\quad \infty$

$D_f = (-\infty \,, -1] \cup [1 \,, \infty)$

$= \mathbb{R} - (-1 \,, 1)$

1 $\quad g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - (-1 \,, 1)$

2 $\quad g(x)$ متصلة على $\mathbb{R} - (-1 \,,1)$

1 , 2 $\Longrightarrow$ f متصلة على $\mathbb{R} - (-1 \,,1)$

ادرس اتصال كل من الدوال التالية على $\mathbb{R}$

15. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 2}$

$h(x) = x^2 + 3x - 2$

$g(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(x) = (g\ o\ h)(x) = g\big(h(x)\big) = g(x^2 + 3x - 2) = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 2}$

$h(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$

$g(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore$ $f(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها تركيب دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$

16. $f(x) = |3x^2 + 4x - 1|$

$h(x) = 3x^2 + 4x - 1$

$g(x) = |x|$

$f(x) = (g\ o\ h)(x) = g\big(h(x)\big) = g(3x^2 + 4x - 1) = |3x^2 + 4x - 1|$

$h(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$

$g(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore$ $f(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها تركيب دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$

معدلات التغير وخطوط التماس

أوجد ميل المماس في كل من مما يلي عند النقاط المبينة:

1) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $x = 2$ $\qquad f(2) = \frac{1}{2-1} = 1$

ميل القاطع $= \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{\frac{1}{2+h-1} - 1}{h} = \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = \frac{\frac{1-(1+h)}{1+h}}{h} = \frac{-1}{1+h}$ $: h \neq 0$

ميل المماس $\lim_{h\to 0} \frac{-1}{1+h} = \frac{-1}{1+0} = -1$

شرط المقام: $\lim_{h\to 0}(1+h) = 1 + 0 = 1, 1 \neq 0$

2) $f(x) = x^2 - 4x$, $x = 1$ $\qquad f(1) = 1^2 - 4(1) = -3$

ميل القاطع $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 4(1+h) - (-3)}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 - 4 - 4h + 3}{h}$

$= \frac{h^2 - 2h}{h} = \frac{h(h-2)}{h} = h - 2$ $: h \neq 0$

ميل المماس $\lim_{h\to 0}(h-2) = 0 - 2 = -2$

3) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$, $x = 2$ $\qquad f(2) = \frac{2+2}{2-3} = -4$

ميل القاطع $\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{\frac{2+h+2}{2+h-3} - (-4)}{h} = \frac{\frac{h+4}{h-1} + 4}{h} = \frac{\frac{5h}{1+h}}{h} = \frac{5}{h-1}$ $: h \neq 0$

ميل المماس $\lim_{h\to 0} \frac{5}{h-1} = \frac{5}{0-1} = -5$

شرط المقام: $\lim_{h\to 0}(h-1) = 0 - 1 = -1, -1 \neq 0$

4) $f(x) = 4 - x^2$, $x = 1$ $\qquad f(1) = 4 - 1^2 = 3$

ميل القاطع $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{4 - (1+h)^2 - 3}{h} = \frac{1 - (1+h)^2}{h}$

$= \frac{(1-(1+h))(1+(1+h))}{h} = -2 - h$ $: h \neq 0$

ميل المماس $\lim_{h\to 0}(-2-h) = -2 - 0 = -2$

5) لتكن الدالة f : $f(x) = \frac{2}{x}$

a) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة f عند $x = a$ حيث $a \neq 0$

b) تفكير ناقد (معلق)

ميل القاطع $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{2}{a+h}-\frac{2}{a}}{h} = \frac{\frac{2a-2(a+h)}{a^2+ah}}{h} = \frac{\frac{-2h}{a^2+ah}}{h} = \frac{-2}{a^2+ah}$ $: h \neq 0$

شرط المقام: $\lim_{h\to 0}(a^2+ah) = a^2 - a(0) = a^2$ $: a^2 \neq 0$

ميل المماس $\lim_{h\to 0}\frac{-2}{a^2+ah} = \frac{-2}{a^2+a(0)} = \frac{-2}{a^2}$

المشتقة

1. استخدم التعريف لإيجاد مشتقة الدالة $f(x) = \frac{3}{x}$ عند $x = 3$

$$f(3) = \frac{3}{3} = 1$$

(إن وجدت)

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to 3}\frac{\frac{3}{x}-1}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{\left(\frac{3-x}{x}\right)}{x-3} \qquad x \neq 3$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{-1}{x} = \frac{-1}{3} \qquad : \lim_{x\to 3} x = 3 \quad ,3 \neq 0$$ شرط المقام

2. استخدم التعريف لإيجاد مشتقة الدالة $f(x) = 2x^3$ عند $x = 1$

$$f(1) = 2(1)^3 = 2$$

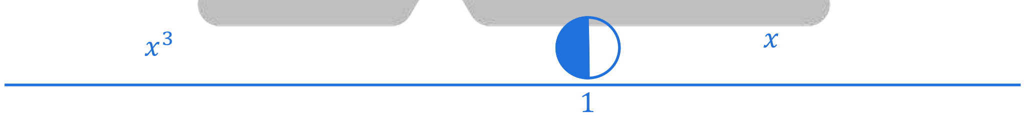
(إن وجدت)

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2x^3-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2(x^3-1^3)}{x-1} = 2\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1^2)}{\cancel{x-1}} \qquad : x \neq 1$$

$$= 2\lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 2(1^2+1+1) = 6$$

3. بين أن الدالة f لها مشتقة لجهة اليمين و مشتقة لجهة اليسار عند $x = 1$

لكن ليس لها مشتقة عند $x = 1$ $\quad f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$



$$f(1) = (1)^3 = 1$$

(إن وجدت)

$$f'_{-}(1) = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-1^3}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1^2)}{\cancel{x-1}} \qquad : x \neq 1$$

$$= \lim_{x\to 1^-}(x^2+x+1) = 1^2+1+1 = 3$$

(إن وجدت)

$$f'_{+}(1) = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1 \qquad : x \neq 1$$

$\because f'_{-}(1) \neq f'_{+}(1) \Rightarrow$ غير موجودة $f'(1)$

4. لتكن f : $f(x)=\begin{cases}x^2+2x : & x\le 1\\ 4x-1 : & x>1\end{cases}$ ابحث قابلية اشتقاق f عند $x=1$.

الاتصال:

x^2+2x	1	$4x-1$

$f(1)=1^2+2(1)=3$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x^2+2x)$

$=(1)^2+2(1)=3$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(4x-1)$

$=4(1)-1=3$

$\because \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=3 \quad \therefore \lim\limits_{x\to1} f(x)=3$

$\because \lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)$ $\therefore$ f متصلة عند $x=1$

الاشتقاق:

$f(1)=1^2+2(1)=3$

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ (إن وجدت)

$=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{x-1}}$ $: x\ne1$

$=\lim\limits_{x\to1^-}(x+3)=4$

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ (إن وجدت)

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{4x-1-3}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{4x-4}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{4\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=\lim\limits_{x\to1^+}4=4$ $: x\ne1$

$\because f'_-(1)=f'_+(1)=4 \Rightarrow f'(1)=4$

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق عند $x=1$

5. لتكن الدالة $f(x) = |x - 3|$
بين أن الدالة f متصلة عند $x = 3$ و لكنها غير قابلة للاشتقاق عندها.

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & : x \geq 3 \\ -x + 3 & : x < 3 \end{cases}$$

$-x + 3$ | 3 | $x - 3$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (-x + 3) = 0$

$f(3) = (3) - 3 = 0$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x - 3) = 0$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 3$ لأن $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0 = f(3)$

$f'_-(3) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ (إن وجدت)

$= \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{-x + 3 - 0}{x - 3} = -1$

$f'_+(3) = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ (إن وجدت)

$= \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x - 3 - 0}{x - 3} = 1$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 3$ لأن $f'_-(3) \neq f'_+(3)$

6. لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} 0 : x < 0 \\ 1 : x = 0 \\ 2 : x > 0 \end{cases}$ بين أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ غير موجودة

$\therefore$ f غير متصلة عند $x = 0$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$

7. لتكن الدالة g : $g(x) = \begin{cases} (x + 1)^2 , & x \leq 0 \\ 2x + 1 , & x > 0 \end{cases}$ أوجد $g'(0)$.

$g(0) = (0 + 1)^2 = 1$

$(x + 1)^2$ | 0 | $2x + 1$

$g'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ (إن وجدت)

$= \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{(x + 1)^2 - 1^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{(x + 1 - 1)(x + 1 + 1)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\cancel{x}(x + 2)}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x \to 0^-} (x + 2) = 2$

$g'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ (إن وجدت)

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x + 1 - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = 2$

$\because g'_-(0) = g'_+(0) = 2 \Rightarrow g'(0) = 2$

8. لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 & : x \le 2 \\ 4x-4 & : x > 2 \end{cases}$ أوجد $f'(2)$.

x^2 | $4x-4$; 2

$f(2) = 2^2 = 4$

(إن وجدت) $f'_{-}(2) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$= \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

$= \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}$

$= \lim\limits_{x \to 2^-} (x+2) = 4$

(إن وجدت) $f'_{+}(2) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$= \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4x-4-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4x-8}{x-2}$

$= \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4(x-2)}{x-2} = 4$

$\because f'_{-}(2) = f'_{+}(2) = 4 \Rightarrow f'(2) = 4$

9. لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^3 & , x \le 1 \\ 3x+k & , x > 1 \end{cases}$
قابلة للاشتقاق عند $x = 1$ فأوجد قيمة k

x^3 | $3x+k$; 1

$\because$ f قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to 1^-} x^3 = \lim\limits_{x \to 1^+} 3x+k \Rightarrow$

$1 = 3 + k \Longrightarrow k = -2$

10. معلق

قواعد الاشتقاق

1. أوجد $\frac{dy}{dx}$

1. $y = \frac{x^3}{3} - x$ $\quad y' = \frac{1}{3}(3x^2) - 1 = x^2 - 1$

2. $y = 2x + 1$ $\quad y' = 2$

3. $y = x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 15$ $\quad y' = 4x^3 - 21x^2 + 4x$

4. $y = 4x^{-2} - 8x + 1$ $\quad y' = -8x^{-3} - 8 = \frac{-8}{x^3} - 8$

5. $f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x^3 + 2x^2 + 1)$

$$f'(x) = (2x - 5)(x^3 + 2x^2 + 1) + (x^2 - 5x + 6)(3x^2 + 4x)$$
$$= 2x^4 + 4x^3 + 2x - 5x^3 - 10x^2 - 5 + 3x^4 - 15x^3 + 18x^2$$
$$+4x^3 - 20x^2 + 24x$$
$$= 5x^4 - 12x^3 - 12x^2 + 26x - 5$$

6. $f(x) = (2x^5 + 4)(5 - x^2)$

$$f'(x) = (10x^4)(5 - x^2) + (2x^5 + 4)(-2x)$$
$$= 50x^4 - 10x^6 - 4x^6 - 8x = -14x^6 + 50x^4 - 8x$$

7. لتكن $y = \frac{x^2+3}{x}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام:

a. قاعدة القسمة

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(2x)(x) - (x^2 + 3)(1)}{(x)^2}$$
$$= \frac{2x^2 - x^2 - 3}{x^2}$$
$$= \frac{x^2 - 3}{x^2}$$

b. توزيع حدود البسط على المقام

$$y = \frac{x^2 + 3}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{3}{x} = x + \frac{3}{x} \Rightarrow$$
$$y' = 1 - \frac{3}{x^2}$$

ملاحظة: الإجابتان مختلفتان بالشكل فقط

أوجد $\frac{dy}{dx}$

8. $y = \frac{x^2}{1-x^3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x)(1-x^3)-(x^2)(-3x^2)}{(1-x^3)^2} = \frac{2x-2x^4+3x^4}{(1-x^3)^2} = \frac{x^4+2x}{(1-x^3)^2}$$

9. $y = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x}+1)-(\sqrt{x}-1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}-\cancel{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

10. بفرض أن u,v دالتان في x و قابلتان للاشتقاق عند $x=0$, و أن
$v'(0)=2,\quad v(0)=-1,\quad u'(0)=-3,\quad u(0)=5$
أوجد قيم المشتقات التالية عند $x=0$

a) $(uv)'(0) = (u'(0))(v(0)) + (u(0))(v'(0))$

$= (-3)(-1)+(5)(2) = 3+10 = 13$

b) $\left(\frac{u}{v}\right)'(0) = \frac{(u'(0))(v(0))-(u(0))(v'(0))}{(v(0))^2} = \frac{(-3)(-1)-(5)(2)}{(-1)^2} = -7$

c) $\left(\frac{v}{u}\right)'(0) = \frac{(v'(0))(u(0))-(v(0))(u'(0))}{(u(0))^2} = \frac{(2)(5)-(-1)(-3)}{(5)^2} = \frac{10-3}{25} = \frac{7}{25}$

d) $(7v-2u)'(0) = 7v'(0)-2u'(0) = 7(2)-2(-3) = 14+6 = 20$

11. أوجد معادلة المماس للمنحنى $y = x^3+x$ عند النقطة $(1,2)$.

$y = f(x) = x^3+x$
$y' = f'(x) = 3x^2+1$
ميل المماس $m = f'(1) = 3(1)^2+1 = 4$

معادلة المماس

$y - y_1 = m(x-x_1)$

$y-2 = 4(x-1)$

$y = 4x-4+2$

$y = 4x-2$

معادلة الناظم (العمودي)

$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x-x_1)$

$y-2 = \frac{-1}{4}(x-1)$

$y = \frac{-1}{4}x+\frac{1}{4}+2 \qquad y = \frac{-1}{4}x+\frac{9}{4}$

12. معلق

13.أوجد معادلة المماس و معادلة العمودي (الناظم) لمنحنى الدالة $y=\frac{8}{4+x^2}$ عند النقطة $(2,1)$.

$$y=f(x)=\frac{8}{4+x^2}$$

$$y'=f'(x)=\frac{-8(2x)}{(4+x^2)^2}=\frac{-16x}{(4+x^2)^2}$$

ميل المماس

$$m=f'(2)=\frac{-16(2)}{(4+2^2)^2}=\frac{-1}{2}$$

معادلة المماس

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-1=\frac{-1}{2}(x-2)$$

$$y=\frac{-1}{2}x+1+1$$

$$y=\frac{-1}{2}x+2$$

معادلة الناظم (العمودي)

$$y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1)$$

$$y-1=2(x-2)$$

$$y=2x-4+1$$

$$y=2x-3$$

14. معلق

مشتقات الدوال المثلثية

في التمارين أوجد $\frac{dy}{dx}$

1. $y = 2\sin x - \tan x$

$y' = 2\cos x - \sec^2 x$

2. $y = 4 - x^2 \sin x$

$y' = (-2x)(\sin x) + (-x^2)(\cos x) = -2x\sin x - x^2\cos x$

3. $y = \frac{\cot x}{1+\cot x}$

$$y' = \frac{(-\csc^2 x)(1+\cot x) - (\cot x)(-\csc^2 x)}{(1+\cot x)^2}$$

$$= \frac{-\csc^2 x \cancel{-\csc^2 x\cot x} \cancel{+\cot x\csc^2 x}}{(1+\cot x)^2} = \frac{-\csc^2 x}{(1+\cot x)^2}$$

4. $y = \frac{\cos x}{1+\sin x}$

$$y' = \frac{(-\sin x)(1+\sin x)-(\cos x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$$

$$= -\frac{\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$$

$$= -\frac{1+\sin x}{(1+\sin x)^2} = -\frac{1}{1+\sin x}$$

5. أوجد مشتقة الدالة $y = \frac{\tan x}{x}$ عند $x = \frac{\pi}{4}$.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(\sec^2 x)(x) - (\tan x)(1)}{x^2} = \frac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2} \Rightarrow$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\pi}{4}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan\frac{\pi}{4}}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1}{\frac{\pi^2}{16}} \approx 0.925$$

6. أثبت أن منحنى كل من الدالتين $y = \frac{1}{\cos x}$, $y = \cos x$ له مماس أفقي عند $x = 0$

$y = \frac{1}{\cos x} = \sec x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec x \cdot \tan x$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \sec(0) \cdot \tan(0) = 0$

∴ ميل المماس عند $x = 0$ هو صفرا

∴ المماس أفقي

$y = \cos x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin x$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = -\sin(0) = 0$

∴ ميل المماس عند $x = 0$ هو صفرا

∴ المماس أفقي

7. لتكن : $y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sin x} + \cot x$ أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة عند $P\left(\frac{\pi}{4}, 4\right)$

$y = 1 + \sqrt{2}\csc x + \cot x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sqrt{2}\csc x \cot x - \csc^2 x$

ميل المماس

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = -\sqrt{2}\csc\left(\frac{\pi}{4}\right)\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) - \csc^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 = m$

معادلة المماس

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 4 = -4\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$y = -4x + \pi + 4$

قاعدة السلسلة

في التمارين التالية أوجد $(f\circ g)'(x)$

1. $f(x)=2x+1\ ,\ g(x)=3x^2$

$(f\circ g)'(x)=f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$

$f'(x)=2$

$f'\big(g(x)\big)=2 \qquad g'(x)=6x$

$(f\circ g)'(x)=2\times 6x=12x$

2. $f(x)=\frac{x-1}{x}\ ,\ g(x)=x^2+1$

$f(x)=\frac{x}{x}-\frac{1}{x}=1-\frac{1}{x}$

$(f\circ g)'(x)=f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$

$f'(x)=-\frac{-1}{x^2}=\frac{1}{x^2} \qquad g'(x)=2x$

$f'\big(g(x)\big)=\frac{1}{(x^2+1)^2}$

$\therefore (f\circ g)'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

3. $f(x)=5x^2-1\ ,\ g(x)=x^{15}$

$(f\circ g)'(x)=f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$

$f'(x)=10x$

$f'\big(g(x)\big)=10(x^{15}) \qquad g'(x)=15x^{14}$

$(f\circ g)'(x)=150x^{29}$

أوجد $(f\circ g)'$ عند القيم المعطاة ل x .

4. $f(x)=x^5+1\ ,\ g(x)=\sqrt{x}\ ,\ x=1$

$(f\circ g)'(x)=f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$

$f'(x)=5x^4$

$f'\big(g(x)\big)=5(\sqrt{x})^4=5x^2 \quad ,\ g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(f\circ g)'(x)=\frac{5x^2}{2\sqrt{x}}\Rightarrow (f\circ g)'(1)=\frac{5(1)^2}{2\sqrt{1}}=\frac{5}{2}$

5. $f(x) = x + \frac{1}{\cos^2 x}$, $g(x) = \pi x$, $x = \frac{1}{4}$ $\quad f(x) = x + (\sec x)^2$

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$f'(x) = 1 + 2(\sec x)^2 \tan x$

$f'(g(x)) = 1 + 2(\sec \pi x)^2 \tan \pi x \quad , \quad g'(x) = \pi$

$(f \circ g)'(x) = (1 + 2(\sec \pi x)^2 \tan \pi x)(\pi) \Rightarrow$

$(f \circ g)'\left(\frac{1}{4}\right) = \left(1 + 2\left(\sec \frac{\pi}{4}\right)^2 \tan \frac{\pi}{4}\right)(\pi) = 5\pi$

6. $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, $g(x) = 10x^2 + x + 1$, $x = 0$

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$f'(x) = \frac{(2)(x^2+1) - (2x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(g(x)) = \frac{2 - 2(10x^2 + x + 1)^2}{\left((10x^2 + x + 1)^2 + 1\right)^2}, \quad g'(x) = 20x + 1$

$(f \circ g)'(x) = \left(\frac{2 - 2(10x^2 + x + 1)^2}{\left((10x^2 + x + 1)^2 + 1\right)^2}\right)(20x + 1) \Rightarrow$

$(f \circ g)'(0) = \left(\frac{2 - 2(0 + 1)^2}{\left((0 + 1)^2 + 1\right)^2}\right)(0 + 1) = 0$

7. أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

a) $y = \cos u$, $u = 6x + 2$ $\quad \frac{dy}{du} = -\sin u \; , \frac{du}{dx} = 6 \Rightarrow$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\sin u \cdot 6 = -6\sin(6x + 2)$

b) $y = 5u^3 + 4$, $u = 3x^2 + 1$ $\quad \frac{dy}{du} = 15u^2 \; , \frac{du}{dx} = 6x \Rightarrow$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$= (15u^2)(6x) = 90\,x\,u^2 = 90\,x\,(3x^2 + 1)^2$

$= 90x(9x^4 + 6x^2 + 1) = 810x^5 + 540x^3 + 90x$

8. أوجد $\frac{ds}{dt}$ حيث $s = \sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}t\right)$

$$\frac{ds}{dt} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)\left(\frac{3\pi}{2}\right) + -\sin\left(\frac{7\pi}{4}t\right)\left(\frac{7\pi}{4}\right) \quad = \frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right) - \frac{7\pi}{4}\sin\left(\frac{7\pi}{4}t\right)$$

أوجد $\frac{dy}{dx}$

9. $y = \tan(2x - x^3)$

$$y' = \sec^2(2x - x^3) \cdot (2 - 3x^2)$$

10. $y = \sin(3x + 1)$

$$y' = \cos(3x + 1) \cdot (3) = 3\cos(3x + 1)$$

11. $y = (\tan x + \sec x)^2$

$$y' = 2(\tan x + \sec x) \cdot (\sec^2 x + \sec x \tan x)$$

12. $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$

$$y' = 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \frac{(1)(x+1) - (x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

$$= 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{4(x-1)}{(x+1)^3}$$

13. $y = (1 - 6x)^{\frac{2}{3}}$

$$y' = \frac{2}{3}(1-6x)^{-\frac{1}{3}} \cdot (-6)$$
$$= -4(1-6x)^{-\frac{1}{3}}$$

14. $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$y' = (1)\left((1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right) + (x)\left(-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}(2x)\right)$$

$$= (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + x\left(-x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$= (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

15. $y = \sin^2(3x - 2)$

$$y' = 2\sin(3x-2)\cos(3x-2)\,(3)$$
$$= 6\sin(3x-2)\cos(3x-2)$$

أوجد معادلة المماس ومعادلة الخط العمودي على المماس في كل مما يلي:

16. $f(x) = \sqrt{x^2+5}$, $(2,3)$

$$f(x) = (x^2+5)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+5)^{-\frac{1}{2}}(2x) = x(x^2+5)^{-\frac{1}{2}}$$

ميل المماس $m = f'(2) = 2(2^2+5)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 3 = \frac{2}{3}(x-2)$$
$$y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} + 3$$
$$y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

الناظم

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$
$$y - 3 = -\frac{3}{2}(x-2)$$
$$y = -\frac{3}{2}x + 3 + 3$$
$$y = -\frac{3}{2}x + 6$$

17. $g(x) = (x^3+1)^8$, عند $(0,1)$

$$g'(x) = 8(x^3+1)^7(3x^2) = 24x^2(x^3+1)^7$$

ميل المماس $g'(0) = 24(0)^2(0^3+1)^7 = 0 \Rightarrow m = 0$

المماس أفقي معادلته

$$y = y_1$$
$$y = 1$$

الناظم رأسي معادلته

$$x = x_1$$
$$x = 0$$

المشتقات ذات الرُتب العليا والاشتقاق الضمني

في التمارين (1-6)، أوجد: $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$

1. $y = 2x^4 - x^3 + x^2 - 3x$

$y' = 8x^3 - 3x^2 + 2x - 3$
$y'' = 24x^2 - 6x + 2$
$y''' = 48x - 6$

2. $y = -x^5 + 2x^3 - 4x + 1$

$y' = -5x^4 + 6x^2 - 4$
$y'' = -20x^3 + 12x$
$y''' = -60x^2 + 12$

3. $y = \frac{3}{(x-2)} = 3(x-2)^{-1}$

$y' = 3(-1)(x-2)^{-2}(1) = -3(x-2)^{-2}$
$y'' = -3(-2)(x-2)^{-3}(1) = 6(x-2)^{-3}$
$y''' = 6(-3)(x-2)^{-4}(1) = -18(x-2)^{-4}$

4. $y = \sin 2x$

$y' = 2\cos 2x$
$y'' = 2(-\sin 2x)(2) = -4\sin 2x$
$y''' = -4\cos 2x(2) = -8\cos 2x$

5. $y = \cos 4x$

$y' = -\sin 4x(4) = -4\sin 4x$
$y'' = -4\cos 4x(4) = -16\cos 4x$
$y''' = -16(-\sin 4x)(4) = 64\sin 4x$

6. $y = \sin^2 x$

$y' = 2\sin x\cos x$
$y'' = (2\cos x)(\cos x) + (2\sin x)(-\sin x) = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$
$y''' = 2(2)\cos x(-\sin x) - 2(2)\sin x(\cos x)$
$= -4\sin x\cos x - 4\sin x\cos x$
$= -8\sin x\cos x$

7. $y^2 = x^2 + 4x + 2$

$$2yy' = 2x + 4 \Rightarrow y' = \frac{2x+4}{2y} = \frac{2(x+2)}{2y} = \frac{x+2}{y}$$

$$y'' = \frac{(1)(y) - (x+2)(y')}{y^2} = \frac{y - (x+2)\frac{(x+2)}{y}}{y^2}$$

$$= \frac{\left(y - \frac{(x+2)^2}{y}\right) \times y}{(y^2) \times y} = \frac{y^2 - (x+2)^2}{y^3}$$

8. $y^2 - 4y = x - 3$

$$2yy' - 4y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{2y-4}$$

$$y'' = \frac{-1(2y')}{(2y-4)^2} = \frac{-2y'}{(2y-4)^2} = \frac{-2\times\frac{1}{(2y-4)} \times (2y-4)}{(2y-4)^2 \times (2y-4)} = \frac{-2}{(2y-4)^3}$$

9. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} \cdot y' = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}\left(x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}} \cdot y'\right) = 0 \Rightarrow$$

$$x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}} \cdot y' = 0$$

$$y' = -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}} = -x^{-\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}}$$

$$y'' = \left(-x^{-\frac{1}{3}}\right)'\left(y^{\frac{1}{3}}\right) + \left(-x^{-\frac{1}{3}}\right)\left(y^{\frac{1}{3}}\right)'$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}\right)\left(y^{\frac{1}{3}}\right) + \left(-x^{-\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} \cdot y'\right)$$

$$= \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}} + \left(-x^{-\frac{1}{3}}\right) \times \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(-x^{-\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$$

أوجد معادلة المماس ومعادلة الخط العمودي على المماس على منحنى الدالة عند كل نقطة معطاة.

10. $x^2 + 2xy - y^2 = 7\,, \quad (2,3)$

$$2x + (2)(y) + (2x)(y') - 2yy' = 0$$

$$y'(2x - 2y) = -2x - 2y$$

$$y' = \frac{-2x - 2y}{2x - 2y}\,, \Rightarrow \quad m = \frac{dy}{dx}\bigg|_{(2,3)} = \frac{-4 - 6}{4 - 6} = 5$$

ميل المماس

المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = 5(x - 2)$$

$$y = 5x - 10 + 3$$

$$y = 5x - 7$$

الناظم

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{-1}{5}(x - 2)$$

$$y = \frac{-1}{5}x + \frac{2}{5} + 3$$

$$y = \frac{-1}{5}x + \frac{17}{5}$$

11. $6x^2 + 3xy - 2y^3 - 7y - 6 = 0\,, \quad (-1,0)$

$$12x + (3)(y) + (3x)(y') - 6y^2 \cdot y' - 7y' = 0$$

$$y' = \frac{-12x - 3y}{3x - 6y^2 - 7} \Rightarrow m = \frac{dy}{dx}\bigg|_{(-1,0)} = \frac{12 - 0}{-3 - 0 - 7} = \frac{-6}{5}$$

المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{-6}{5}(x + 1)$$

$$y = \frac{-6}{5}x - \frac{6}{5}$$

الناظم

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{5}{6}(x + 1)$$

$$y = \frac{5}{6}x + \frac{5}{6}$$

12. $2xy + \pi \sin y = 2\pi, \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

$$(2)(y) + (2x)(y') + \pi \cos y \, y' = 0$$

$$y'(2x + \pi \cos y) = -2y$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-2y}{2x + \pi \cos y}$$

$$\Rightarrow m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-2 \times \frac{\pi}{2}}{2 + \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-\pi}{2}$$

المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{2}(x - 1)$$

$$y = \frac{-\pi}{2}x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$y = \frac{-\pi}{2}x + \pi$$

الناظم

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}(x - 1)$$

$$y = \frac{2}{\pi}x - \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}$$

13. معلق

14. أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y = \frac{\cos x}{1 + \tan x}$

و اكتب معادلة المماس على منحنى الدالة عند $A(0,1)$

$$y' = \frac{(-\sin x)(1 + \tan x) - (\cos x)(\sec^2 x)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$\Rightarrow m = y'(0) = \frac{0 - (1)(1)^2}{(1 + 0)^2} = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -1(x - 0)$$

$$y = -x + 1$$

15. إذا كانت $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ فأثبت أن: $4x^2 f''(x) - 3f(x) = 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{-1}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$\therefore 4x^2 f''(x) - 3f(x) = 4x^2 \cdot \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{-1}{2}} = 3x^{\frac{-1}{2}} - 3x^{\frac{-1}{2}} = 0$$

القيم القصوى (العظمى و الصغرى) للدوال

في التمارين $(7 - 9)$ ، حدد النقاط الحرجة

7. $y = x^2(x+2) = x^3 + 2x^2 = f(x)$

دالة كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 + 4x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(3x+4) = 0 \Rightarrow x = 0 \ , \quad x = -\frac{4}{3}$

$f(0) = 0^3 + 2(0)^2 = 0 \quad , \quad y\left(-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)^3 + 2\left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{32}{27}$

النقاط الحرجة $\left(-\frac{4}{3}, \frac{32}{27}\right) \quad (0,0)$

8. معلق
9. معلق

$(10 - 14)$ أوجد القيم القصوى المطلقة لكل دالة من الدوال التالية في الفترة المبينة.

10. $y = 2x^2 - 8x + 9 \ , \ [0,4]$

بفرض: $y = f(x)$

$\because$ الدالة متصلة على $[0,4]$ إذاً: يوجد قيمة عظمى مطلقة و قيمة صغرى مطلقة

$f(0) = 2(0)^2 - 8(0) + 9 = 9 \quad , \quad f(4) = 2(4)^2 - 8(4) + 9 = 9$

$f'(x) = 4x - 8, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{4} = 2, \quad 2 \in (0,4)$

$f(2) = 2(2)^2 - 8(2) + 9 = 1$

$\therefore$ $(2,1)$ **نقطة حرجة**

x	0	2	4
y	9	1	9

من الجدول:

- 9 قيمة عظمى مطلقة
- 1قيمة صغرى مطلقة

11. $f(x) = x^{\frac{3}{5}}$, $[-2,3]$

$\because$ الدالة متصلة على $[-2,3]$

$\therefore$ يوجد قيمة عظمى مطلقة و قيمة صغرى مطلقة

$$f(-2) = (-2)^{\frac{3}{5}} = -1.516 , \qquad f(3) = (3)^{\frac{3}{5}} = 1.933$$

$$f'(x) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5x^{\frac{2}{5}}}$$

لاحظ أن: $f'(x) \neq 0$ "لأن البسط لا يساوي الصفر"

$f'(x)$ غير موجودة "عندما يكون المقام يساوي صفراً"

$$5\,x^{\frac{2}{5}} = 0 \Rightarrow x = 0, \qquad 0 \in (-2,3)\,, f(0) = 0^{\frac{3}{5}} = 0$$

$\therefore$ $(0,0)$ نقطة حرجة

x	-2	0	3
$f(x)$	-1.516	0	1.933

من الجدول:

- 1.933 قيمة عظمى مطلقة
- -1.516 قيمة صغرى مطلقة]

12. معلق
13. معلق
14. معلق

تزايد وتناقص الدوال

1. بيّن أن الدالة $f: f(x)=x^2+2x-1$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $[0,1]$
ثم أوجد قيمة c التي تنبئ بها النظرية. فسّر إجابتك.

الشروط : $f(x)=x^2+2x-1$ دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ فهي متصلة على الفترة $[0,1]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(0,1)$.

$\because$ شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة $[0,1]$
$\therefore$ يوجد على الأقل $c\in(0,1)$ بحيث :

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f(1)-f(0)}{1}$$

$$f'(x)=2x+2 \Longrightarrow f'(c)=2c+2$$
$$f(1)=(1)^2+2(1)-1=2 \quad ,f(0)=(0)^2+2(0)-1=-1$$

$$\therefore 2c+2=\frac{2-(-1)}{1}=3 \Longrightarrow 2c=1, \qquad c=\frac{1}{2}\in(0,1)$$

التفسير : يوجد مماس لمنحنى الدالة عند $x=\frac{1}{2}$
يوازي القاطع المار بالنقطتين $(1,2)(0,-1)$

2. بيّن أن الدالة $f: f(x)=x+\frac{1}{x}$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $\left[\frac{1}{2},2\right]$
ثم أوجد قيمة c التي تنبئ بها النظرية. فسّر إجابتك.

$$h(x)=x \quad , \qquad g(x)=\frac{1}{x}$$

$$D_h=\mathbb{R} \quad , \qquad D_g=\mathbb{R}-\{0\} \Longrightarrow D_f=D_h\cap D_g=\mathbb{R}-\{0\}$$

$\therefore$ f متصلة على $\mathbb{R}-\{0\}$

الشروط: $f(x)=x+\frac{1}{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^*$ بالتالي هي متصلة على $\left[\frac{1}{2},2\right]$ و قابلة للاشتقاق على $\left(\frac{1}{2},2\right)$

$\because$ شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة $\left[\frac{1}{2},2\right]$
$\therefore$ يوجد على الأقل $c\in\left(\frac{1}{2},2\right)$ بحيث :

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(2)-f(0.5)}{2-0.5}=\frac{f(2)-f(0.5)}{1.5}$$

$$f'(x)=1+\frac{-1}{x^2} \Longrightarrow f'(c)=1+\frac{-1}{c^2}$$

$$f(2)=2+0.5=2.5 \quad , \qquad f(0.5)=(0.5)+\frac{1}{(0.5)}=2.5$$

$$\therefore 1+\frac{-1}{c^2}=\frac{2.5-2.5}{1.5}=0 \Longrightarrow \frac{1}{c^2}=1 \Longrightarrow c^2=1 \Longrightarrow c=\pm1$$

$c=-1\notin(0.5,2) \quad , \quad c=1\in(0.5,2)$

التفسير: يوجد مماس أفقي لمنحنى الدالة f عند $x=1$
يوازي القاطع المار بالنقطتين $(2,2.5)$, $(0.5,2.5)$

حدد فترات التزايد و التناقص لكل من الدوال :

3. $f(x) = 5x - x^2$

f كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 5 - 2x \,, \qquad f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 2.5$

$-\infty \qquad 2.5 \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty, 2.5)$	$(2.5, \infty)$
إشارة f'	$+$	$-$
سلوك f	$\nearrow$	$\searrow$

f متزايدة على $(-\infty,2.5)$ $\qquad$ f متناقصة على $(2.5,\infty)$

4. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24$

f كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 18x \,, \qquad f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \;\;, x = 6$

$-\infty \qquad 0 \qquad 6 \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0,6)$	$(6, \infty)$
إشارة f'	$+$	$-$	$+$
سلوك f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

f متزايدة على كل من $(-\infty,0)$, $(6,\infty)$ $\qquad$ f متناقصة على $(0,6)$

5. $k(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

k حدودية نسبية متصلة $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$k'(x) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3} \neq 0$

$-\infty \qquad 0 \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty, 0)$	غير معرفة	$(0, \infty)$
إشارة k'	$+$		$-$
سلوك k	$\nearrow$		$\searrow$

k متزايدة على $(-\infty,0)$ $\qquad$ k متناقصة على $(0,\infty)$

6. $h(x) = \frac{-x}{x^2+4}$ $(x^2 + 4 \neq 0)$ h حدودية نسبية متصلة على $\mathbb{R}$

$$h'(x) = \frac{(-1)(x^2+4) - (-x)(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2-4}{(x^2+4)^2}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$$

الفترات	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة h'	$+$	$-$	$+$
سلوك h	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

h متزايدة على كل من $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$ h متناقصة على $(-2, 2)$

7. $f(x) = x^4 - 2x^2$

f كثيرة حدود متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x(x^2-1) = 0 \Rightarrow 4x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow$$

$$x = 0 , x = 1 , x = -1$$

الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
إشارة f'	$-$	$+$	$-$	$+$
سلوك f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

f متزايدة على كل من $(-1, 0)$, $(1, \infty)$ f متناقصة على كل من $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$

ربط f'', f' ببيان الدالة f

(6 – 1) أوجد النقاط الحرجة و القيم القصوى المحليّة و عيّن فترات التزايد و فترات التناقص لكل دالة مما يلي :

1. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$, $f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = 4\ , & f(4) = 16 \\ x = 2\ , & f(2) = 20 \end{matrix}$

∴ النقاط الحرجة $(2,20)$, $(4,16)$

الفترات	$(-\infty, 2)$	$(2,4)$	$(4, \infty)$
إشارة f'	$+$	$-$	$+$
سلوك f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
	متزايدة	متناقصة	متزايدة

f متزايدة على كل من $(-\infty,2)$, $(4,\infty)$

f متناقصة على $(2,4)$

يوجد ل f قيمة عظمى محلية عند $x = 2$ و هي $f(2) = 20$

يوجد ل f قيمة صغرى محلية عند $x = 4$ و هي $f(4) = 16$

2. $g(x) = -2x^3 + 6x^2 - 3$

g كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$g'(x) = -6x^2 + 12x$, $g'(x) = 0 \Rightarrow -6x(x-2) = 0$

$\begin{matrix} x = 0 \rightarrow f(0) = -3 \\ x = 2 \rightarrow f(2) = 5 \end{matrix}$ $\left.\begin{matrix} (0,-3) \\ (2,5) \end{matrix}\right\}$ نقط حرجة

الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0,2)$	$(2, \infty)$
إشارة g'	$-$	$+$	$-$
سلوك g	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

g متزايدة على $(0,2)$

g متناقصة على كل من$(2,\infty)$, $(-\infty,0)$

يوجد ل g قيمة عظمى محلية عند $x = 2$ و هي $g(2) = 5$

يوجد ل g قيمة صغرى محلية عند $x = 0$ و هي $g(0) = -3$

3. $h(x) = -x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 1$

h دالة كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$h'(x) = -4x^3 - 12x^2 - 8x \quad , h'(x) = 0 \Rightarrow -4x(x^2 + 3x + 2) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \ , \quad h(0) = 1 \ , \ (0,1) \\ x = -1 \ , \ h(-1) = 0 \ , \ (-1,0) \\ x = -2 \ , \ h(-2) = 1 \ , \ (-2,1) \end{array}\right\} \text{نقاط حرجة}$$

الفترات	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
إشارة h'	$+$	$-$	$+$	$-$
سلوك h	↗	↘	↗	↘

h متزايدة على كل من$(-1,0)$, $(-\infty, -2)$

h متناقصة على كل من$(0,\infty)$, $(-2, -1)$

يوجد ل h قيمة عظمى محلية عند $x = -2$ و هي $h(-2) = 1$

يوجد ل h قيمة صغرى محلية عند $x = -1$ و هي $h(-1) = 0$

يوجد ل h قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ و هي $h(0) = 1$

4. $g(x) = \frac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 6x + \frac{9}{2}$

g دالة كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$g'(x) = 6x^3 + 6x^2 - 6x - 6 \quad , g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{array}{ll} x = 1 \ , & g(1) = -1 \\ x = -1 \ , & g(-1) = 7 \end{array}$

$\therefore$ $(1, -1)$, $(-1,7)$ نقاط حرجة

الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
إشارة g'	$-$	$-$	$+$
سلوك g	↘	↘	↗

g متزايدة على$(1,\infty)$ & g متناقصة على كل من$(-1,1)$, $(-\infty, -1)$

$\therefore$ يوجد ل g قيمة صغرى محلية عند $x = 1$ و هي $g(1) = -1$

5. معلق
6. معلق

استخدم مشتقة الدالة $y = f(x)$ لإيجاد قيم x التي تكون عندها f لها :

a) قيمة عظمى محلية

b) قيمة صغرى محلية

c) نقطة انعطاف

7. $y' = (x-1)^2(x-2)$

$y' = (x-1)^2(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1 , x = 2$ أعداد حرجة

x	$-\infty$	1		2		∞
إشارة y'	$-$	0	$-$	0	$+$	
سلوك y	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

عند $x = 2$ يوجد قيمة صغرى محلية

$y'' = 2(x-1)\,(1)(x-2) + (x-1)^2(1)$

$y'' = (2x-2)(x-2) + x^2 - 2x + 1$

$y'' = 2x^2 - 4x\ - 2x + 4\ + x^2 - 2x + 1$

$y'' = 3x^2 - 8x + 5$

$y'' = 0\ \Rightarrow x = 1 , x = \frac{5}{3}$

x	$-\infty$	1		$\frac{5}{3}$		∞
إشارة y''	$+$	0	$-$	0	$+$	
بيان الدالة	$\cup$		$\cap$		$\cup$	

يوجد نقطتا انعطاف عند $x = 1\ ,\ x = \frac{5}{3}$

8. $y' = (x-1)^2(x-2)(x-4)$

$y' = (x-1)^2(x-2)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 2, x = 4$

x	$-\infty$	1		2		4		∞
إشارة y'	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
سلوك y	↗		↗		↘		↗	

عند $x = 2$ يوجد قيمة عظمى محلية

عند $x = 4$ يوجد قيمة صغرى محلية

$$y' = (x-1)^2(x-2)(x-4) = (x^2-2x+1)(x^2-6x+8)$$

$$= x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 2x^3 + 12x^2 - 16x + x^2 - 6x + 8$$

$$= x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 22x + 8$$

$$y'' = 4x^3 - 24x^2 + 42x - 22 = 0 \Rightarrow x = 1, x = \frac{5 \mp \sqrt{3}}{2}$$

x	$-\infty$	1	$\frac{5-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5+\sqrt{3}}{2}$	∞
y''	$-$	$+$	$-$	$+$	
بيان الدالة	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	

يوجد 3 نقاط انعطاف عند $x = 1, x = \frac{5+\sqrt{3}}{2}, x = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$

أوجد فترات التقعر والانعطاف

10. $g(x) = 3x^2 - 2x^3$

g كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على دالة $\mathbb{R}$

$g'(x) = 6x - 6x^2$

$g''(x) = 6 - 12x, g''(x) = 0 \Rightarrow 6 - 12x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$-\infty$ $\qquad \frac{1}{2} \qquad$ ∞

الفترات	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
إشارة g''	$+$	$-$
بيان الدالة	$\cup$	$\cap$

بيان الدالة g مقعر لأسفل في $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ مقعر لأعلى في $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

نقطة انعطاف

$$\left(\frac{1}{2}, g\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

11. $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 5$

g كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على دالة $\mathbb{R}$

$g'(x) = x^2 - 4x + 1$

$g''(x) = 2x - 4$, $g''(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$

$-\infty$ ⟵ 2 ⟶ ∞

الفترات	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة g''	$-$	$+$
سلوك g	$\cap$	$\cup$

بيان الدالة g مقعر لأسفل في $(-\infty,2)$ &بيان الدالة g مقعر لأعلى في $(2,\infty)$

نقطة انعطاف $(2, g(2)) = \left(2, -\frac{25}{3}\right)$

12. بين أن منحنى الدالة f: $f(x) = 1 - x^4$ ليس له نقاط انعطاف.

$f'(x) = -4x^3$

$f''(x) = -12x^2 \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

التقعر دائما إلى الأسفل" لا يتغير" بالتالي لا يوجد نقاط انعطاف

13. معلق

14. معلق

في التمرينين $(15 - 16)$ ، استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للدالة :

15. $f(x) = x^2 - 6x + 11$

f كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على دالة $\mathbb{R}$

$f'(x) = 2x - 6$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$

$f''(x) = 2$, $\because 2 > 0$

$\therefore$ يوجد لـ f عند $x = 3$ قيمة صغرى محلية و هي $f(3) = 2$

16. $f(x) = x^4 - 18x^2$

f كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 36x$,

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x(x-3)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -3, x = 3$

$f''(x) = 12x^2 - 36$

$f''(-3) = 72 > 0$	$f''(3) = 72 > 0$	$f''(0) = -36 < 0$
$f(-3) = -81$	$f(3) = -81$	$f(0) = 0$
قيمة صغرى محلية	قيمة صغرى محلية	قيمة عظمى محلية

رسم بيان دوال كثيرات الحدود

ادرس تغير كل من الدوال التالية و ارسم بيانها

3) $f(x)=x^3-2x^2-4x+7$

f دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=\infty$$

$f'(x)=3x^2-4x-4$

$f'(x)=0 \Rightarrow$

$x=2, f(2)=-1$

$x=\frac{-2}{3}, f\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{229}{27}$

نقط حرجة→ $(2,-1)$, $\left(\frac{-2}{3},\frac{229}{27}\right)$

	$-\infty$	$\frac{-2}{3}$	2	∞
إشارة f'	+	−	+	
سلوك f	↗	↘	↗	

f متزايدة على:

الفترة $\left(-\infty,\frac{-2}{3}\right)$ والفترة $(2,\infty)$

f متناقصة على $\left(\frac{-2}{3},2\right)$

$f(2)=-1$ قيمة صغرى محلية

$f\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{229}{27}$ قيمة عظمى محلية

$f''(x)=6x-4, f''(x)=0 \Rightarrow$

$x=\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{101}{27}$

	$-\infty$	$2/3$	∞
إشارة f''	−	+	
بيان f	∩	∪	

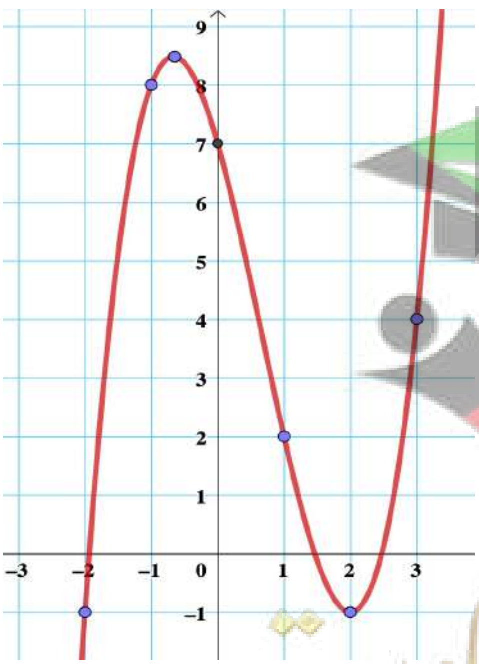
منحنى الدالة f مقعر لـ:

أسفل في $\left(-\infty,\frac{-2}{3}\right)$

أعلى في $\left(\frac{-2}{3},\infty\right)$

$\therefore$ $\left(\frac{2}{3},\frac{101}{27}\right)$نقطة انعطاف

x	-1	$\frac{-2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	2	3
y	8	$\frac{101}{27}$	7	$\frac{229}{27}$	2	-1	4



4) معلق

5) معلق

6) $f(x) = -x^3 - 3x$

f دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$$

$f'(x) = -3x^2 - 3$

$f'(x) \neq 0$

لا يوجد حلول

بالتالي لا يوجد نقاط حرجة

	$-\infty$				∞
إشارة f'	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
سلوك f	$\searrow$				

f متناقصة على $(-\infty,\infty)$

$f''(x) = -6x$, $f''(x) = 0 \Rightarrow$

$x = 0, f(0) = 0$

	$-\infty$	0	∞
إشارة f''	$+$		$-$
سلوك f	$\cup$		$\cap$

منحنى الدالة f مقعر لـ:

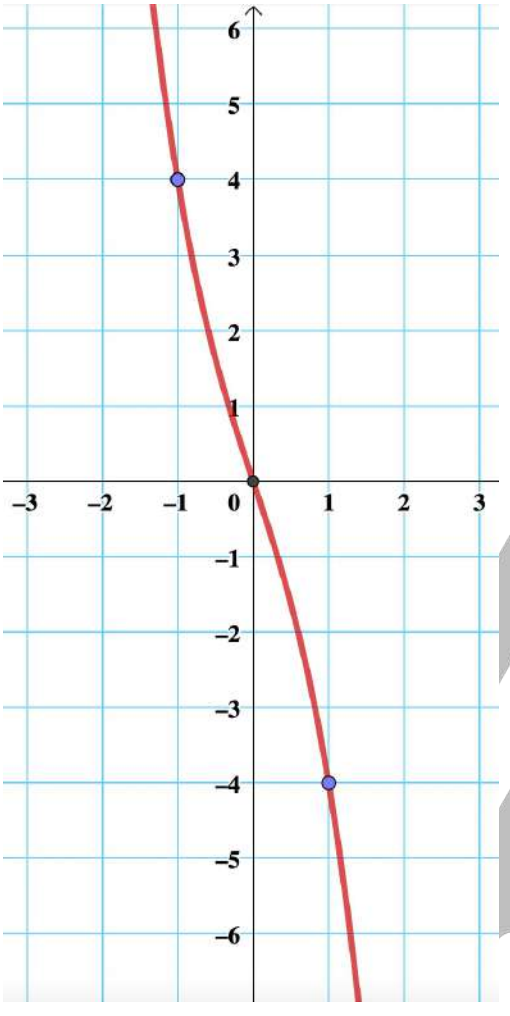
أعلى في $(-\infty,0)$

أسفل في $(0,\infty)$

$\therefore$ $(0,0)$ نقطة انعطاف

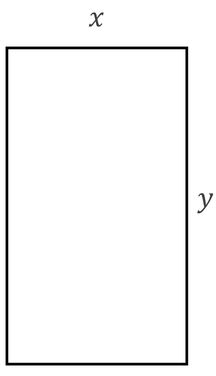
نقاط إضافية

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	14	4	0	-4	-14



تطبيقات القيم القصوى

1. معلق
2. معلق
3. أثبت أن من بين المستطيلات التي محيطها $8m$ واحدا منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعا ؟



محيط المستطيل $= y + y + x + x = 2x + 2y = 8$

$\Rightarrow x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x$

مساحة المستطيل $= f(x) = xy = x.(4 - x) \Rightarrow$

$f(x) = 4x - x^2$

$f'(x) = 4 - 2x, f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{-4}{-2} = 2$

$\therefore$ $(2 , f(2))$ نقطة حرجة

$f''(x) = -2 \ , \quad -2 < 0$

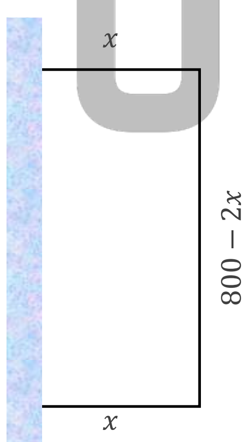
$\Rightarrow \quad x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x \rightarrow (1)$

$\therefore$ يوجد f قيمة عظمى مطلقة عند $x = 2$

$\therefore$ أبعاد المستطيل $2 , 2$

بالتالي الشكل مربع لأنه مستطيل بعداه متساويان

4. معلق
5. مزرعة على شكل قطعة مستطيلة من الأرض تقع على حافة نهر مستقيم يراد وضع سياج على الجوانب الثلاثة الأخرى، ما أكبر مساحة يمكن إحاطتها بسياج طوله $800m$ ؟ وما أبعادها؟



المساحة = الطول × العرض

$0 < x < 400$

$f(x) = x(800 - 2x) = 800x - 2x^2$

$f'(x) = 800 - 4x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{-800}{-4} = 200$

$\therefore$ $(200 , f(200))$ نقطة حرجة

$f''(x) = -4 \ , -4 < 0$

$\therefore$ يوجد لـ f قيمة عظمى عندما $x = 200$

الأبعاد هي $200m$, $800 - 2(200) = 400m$

أكبر مساحة $= f(200) = -2(200)^2 + 800(200) = 80000\ m^2$

6. معلق
7. معلق

8. علبة من الصفيح على شكل أسطوانة قائمة مفتوحة من أعلى حجمها $1000\ cm^3$ أوجد أبعاد العلبة بحيث يكون وزنها أقل ما يمكن

$$v = \pi r^2 h = 1000 \rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2} \qquad r > 0\,, h > 0$$

$$A = 2\pi r h + \pi r^2 = 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} + \pi r^2 = \frac{2000}{r} + \pi r^2$$

$$A' = \frac{-2000}{r^2} + 2\pi r = \frac{-2000 + 2\pi r^3}{r^2}$$

أصفار البسط:

$$A' = 0$$

$$-2000 + 2\pi r^3 = 0$$

$$r^3 = \frac{2000}{2\pi} = \frac{1000}{\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} \approx 6.83 \rightarrow$$ قيمة حرجة

أصفار المقام:

$r^2 = 0 \Rightarrow r = 0$ مرفوض

r	0	6.83	∞
إشارة A'	$-$	0	$+$
سلوك الدالة A	$\searrow$		$\nearrow$

$\therefore$ يوجد لـ A قيمة صغرى مطلقة عند $r = 6.83\ cm$

$$h = \frac{1000}{\pi(6.83)^2} = 6.82\ cm$$

9. معلق

10. معلق

التقدير

1. أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لكل من درجات الثقة التالية، وذلك باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

ⓐ 97% $\quad \frac{0.97}{2} = 0.485 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$

ⓑ 99.2% ← معلق

2. قامت شركة عالمية بدراسة لمعرفة مدي أداء سيارتها، فأخذت عينة من 1000 سيارة. استنتجت أن المتوسط الحسابي لبقاء السيارة في حالة جيدة هو 5 سنوات. أوجد فترة الثقة للمعلمة μ عند درجة ثقة 95% ، علماً أن التباين σ^2 معلوم ويساوي 0.25 وآخذاً بالاعتبار أن المجتمع يتبع توزيعاً طبيعياً.

$n = 1000$
$\sigma = \sqrt{0.25} = 0.5$
$\bar{x} = 5$

① $\because$ مستوى الثقة 95% $\quad \therefore Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

σ معلومة

$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$= 1.96 \times \frac{0.5}{\sqrt{1000}} \approx 0.03$

② فترة الثقة $(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$

$(5 - 0.03, \ 5 + 0.03)$

$(4.97, \ 5.03)$

3. عينة عشوائية حجمها $n = 13$ ، أعطت $\bar{x} = 30$, $\sigma = 3.5$. أوجد فترة الثقة عند درجة ثقة 95% لمعلمة المجتمع μ المجهولة علماً أن المجتمع يتبع توزيعاً طبيعياً. هل تتضمن هذه الفترة المتوسط الحسابي μ ؟

$n = 13$
$\sigma = 3.5$
$\bar{x} = 30$

① $\because$ مستوى الثقة 95% $\quad \therefore Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

σ معلومة

$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$= 1.96 \times \frac{3.5}{\sqrt{13}} \approx 1.9$

② فترة الثقة $(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$

$(30 - 1.9, \ 30 + 1.9)$

$(28.1, \ 31.9)$

③ التفسير

عند اختيار 100 عينة حجم كل منها $n = 13$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحتوى علي μ

4. إذا كان المتوسط الحسابي لعينة من 40 شخصاً هو $\bar{x} = 172.5$ والانحراف المعياري $\sigma = 119.5$ فأوجد تقديراً لفترة ثقة عند درجة ثقة 95% للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.

$n = 40$
$\sigma = 119.5$
$\bar{x} = 172.5$

① ∵ مستوى الثقة 95% ∴ $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

σ معلومة

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$= 1.96 \times \frac{119.5}{\sqrt{40}} \approx 37.0334$$

② فترة الثقة $(\bar{x} - E , \bar{x} + E)$

$$(172.5 - 37.0338 \ , 172.5 + 37.0338)$$

$$(135.4666 \ , \ 209.5334)$$

5. في دراسة للمدة الزمنية المطلوبة من طلاب جامعيين لإنهاء دراستهم، اختير عشوائياً 80 طالباً ، فكان متوسط السنوات لهذه العينة S=2.2 .أوجد فترة الثقة عند درجة ثقة 95% لمعلمة المجتمع μ .

$n = 80$
$\bar{x} = 4.8$
$s = 2.2$
95%

① ∵ مستوى الثقة 95% ∴ $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

σ غير معلومة ، $n > 30$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$= 1.96 \times \frac{2.2}{\sqrt{80}} \approx 0.48$$

② فترة الثقة $(\bar{x} - E , \bar{x} + E)$

$$(4.8 - 0.48 \ , 4.8 + 0.48)$$

$$(4.32 \ , \ 5.28)$$

6. عينة عشوائية حجمها $n = 16$ أخذت من مجتمع إحصائي حيث التباين $s^2 = 15$ ، وعلم أن المتوسط الحسابي $\bar{x} = 13$ أوجد فترة الثقة للمعلمة المجهولة μ عند درجة ثقة 95% .

① ∵ مستوى الثقة 95%

σ غير معلومة $n \leq 30$ ،

نستخدم t

$$a = 0.05 \ , \quad \frac{a}{2} = 0.025$$

درجة الحرية $n - 1 = 15$

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.132$$

$$s = \sqrt{15}$$

$$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.132 \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{16}} \approx 2.0643$$

② فترة الثقة $(\bar{x} - E , \bar{x} + E)$

$$(13 - 2.0643 \ , 13 + 2.0643)$$

$$(10.9357 \ , \ 15.0643)$$

اختبارات الفروض الإحصائية

1. يزعم أستاذ الرياضيات أن المتوسط الحسابي لدرجات الطلاب في مادته هو 16 حيث النهاية العظمى 20 درجة. إذا أعطيت عينة من 25 طالباً متوسطاً حسابياً (درجة) $\bar{x} = 15$ والانحراف المعياري (درجة) $\sigma = 1.4$ ، فاختبر فرضية الأستاذ عند مستوى المعنوية $a = 5\%$.

① صياغة الفروض

$H_0 \quad \mu = 16$

$H_1 \quad \mu \neq 16$

② σمعلومة

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{15 - 16}{\frac{1.4}{\sqrt{25}}} \approx -3.57$$

③ مستوى الثقة 95%

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

④ منطقة القبول

$$(-1.96\,, 1.96)$$

⑤ $-3.57 \notin (-1.96\,, 1.96)$ نقبل H_1 $\mu \neq 16$

2. يزعم مسؤول في متجر لبيع الأدوات الكهربائية، أن متوسط أسعار هو 300 دينار أعطت عينة من 49 آلة (دينار) $\bar{x} = 280$ والانحراف المعياري معلوم (دينار) $\sigma = 40$ ، تأكد من فرضية المسؤول عند مستوى المعنوية $a = 5\%$.

① صياغة الفروض

$H_0 \quad \mu = 300$

$H_1 \quad \mu \neq 300$

② σمعلومة

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{280 - 300}{\frac{40}{\sqrt{49}}} \approx -3.5$$

③ مستوى الثقة 95%

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

④ منطقة القبول

$$(-1.96\,, 1.96)$$

⑤ $-3.5 \notin (-1.96\,, 1.96)$ نقبل H_1 $\mu \neq 300$

3. في عينة من مجتمع إحصائي إذا كانت قيمة $\bar{x} = 40$ والانحراف المعياري $s = 7$ ، اختبر الفرض البديل $\mu \neq 35$ عند مستوى المعنوية 0.05 في الحالات التالية.

ⓐ حجم العينة $n = 50$

① صياغة الفروض

$H_0 \quad \mu = 35$

$H_1 \quad \mu \neq 35$

② σ غير معلومة $n > 30$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{40 - 35}{\frac{7}{\sqrt{50}}} \approx 5.0508$$

③ مستوى الثقة 95% $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

④ منطقة القبول $(-1.96\,, 1.96)$

⑤ $5.0508 \notin (-1.96\,, 1.96)$ نقبل $H_1 \quad \mu \neq 35$

ⓑ حجم العينة $n = 20$

① صياغة الفروض

$H_0 \quad \mu = 35$

$H_1 \quad \mu \neq 35$

② σ غير معلومة $n \leq 30$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{40 - 35}{\frac{7}{\sqrt{20}}} \approx 3.1944$$

③ مستوى الثقة 95% $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.093$

④ منطقة القبول $(-2.093\,, 2.093)$

⑤ $3.1944 \notin (-2.262\,, 2.062)$ نقبل $H_1 \quad \mu \neq 35$

4. في دراسة لعدد ساعات استخدام الحاسوب، أخذت عينة من 100 شخص يعملون في مختلف المجالات، فوجد أن المتوسط الحسابي لعدد ساعات استخدام الحاسوب هو $\bar{x} = 4.5$ ، والانحراف المعياري $s = 1$ اختبر الفرض إذا كان متوسط عدد الساعات للمجتمع هو $\mu = 5$ مقابل الفرض البديل $\mu \neq 5$ عند مستوى المعنوية $\propto = 5\%$.

① صياغة الفروض $H_0 \quad \mu = 5$

$H_1 \quad \mu \neq 5$

② σغير معلومة $n > 30$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{4.5 - 5}{\frac{1}{\sqrt{100}}} = -5$$

③ مستوى الثقة 95% $Z_{\frac{\propto}{2}} = 1.96$

④ منطقة القبول $(-1.96\,, 1.96)$

⑤ $-5 \notin (-1.96\,,1.96)$ ∴ نقبل $H_1 \quad \mu \neq 5$

5. أخذت عينة عشوائية من مجتمع قيد الدراسة حجمها $n = 150$ ، فوجد أن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 30.3$ مع انحراف معياري $s = 6.5$. اختبر الفرض إذا كان المتوسط الحسابي للمجتمع هو $\mu = 30$ ، مقابل الفرض البديل $\mu \neq 30$ عند مستوى المعنوية $\propto = 5\%$.

① صياغة الفروض $H_0 \quad \mu = 30$

$H_1 \quad \mu \neq 30$

② σغير معلومة $n > 30$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{30.3 - 30}{\frac{6.5}{\sqrt{150}}} \approx 0.565$$

③ مستوى الثقة 95% $Z_{\frac{\propto}{2}} = 1.96$

④ منطقة القبول $(-1.96\,, 1.96)$

⑤ $0.565 \in (-1.96\,,1.96)$ ∴ نقبل $H_0 \quad \mu = 30$

6. المتوسط الحسابي للراتب السنوي لموظف حكومي في دولة الكويت هو 9600 دينار، أما المتوسط الحسابي لعينة من 64 موظفاً حكومياً في إحدى الدول الخليجية المجاورة (دينار) $\bar{x} = 9480$ مع انحراف معياري (دينار) s=640 . اختبر إذا كان بالإمكان اعتبار الراتب السنوي في إحدى الدول الخليجية المجاورة للموظف الحكومي هو الراتب ذاته الذي يحصل عليه الموظف الحكومي في الكويت، مستخدماً درجة الثقة 95% .

① صياغة الفروض $H_0 \quad \mu = 9600$

$H_1 \quad \mu \neq 9600$

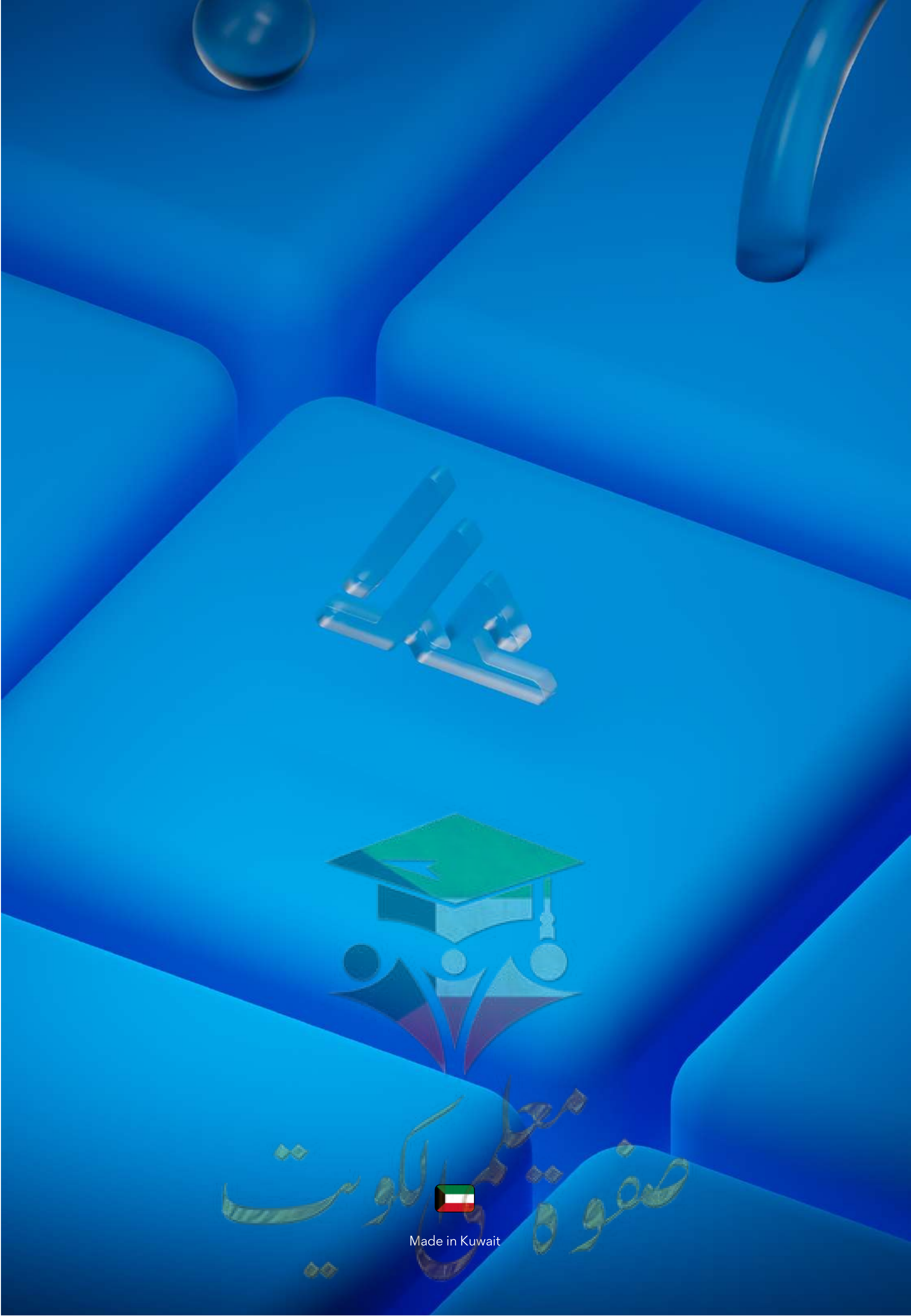
② σغير معلومة $n > 30$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{9480 - 9600}{\frac{640}{\sqrt{64}}} = 1.5$$

③ مستوى الثقة 95% $Z_{\frac{\propto}{2}} = 1.96$

④ منطقة القبول $(-1.96\,, 1.96)$

∵ ⑤ $-1.5 \in (-1.96\,,1.96)$ ∴ نقبل $H_0 \quad \mu = 9600$


Made in Kuwait