زعتر
EDUWAVE

زعتر لكل طالب فطين

12

الصف الثاني عشر

الرياضيات

العلمي

مذكرة التقوية والمتابعة

للدراسة اليومية

أ. نبيـــل الهاشمي

ادرس صح

جميع روابط التواصل

ZA3TAREDUWAV

النهايات

تعريف (1)

لتكن x كمية متغيرة، c عددًا حقيقيًا.

نقول إن x تقترب من c باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكمية $|x - c|$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب.

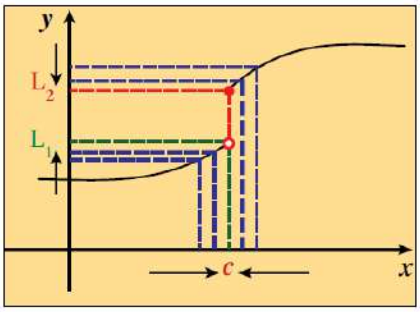
تعريف (2)

ليكن L , c عددين حقيقيين، f دالة حقيقية معرّفة في جوار أو جوار ناقص للعدد c

نكتب: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

وتعني أنه عندما تقترب x من c باطراد، $x \neq c$ فإن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L.

النهاية من جهة واحدة أو من جهتين One–Sided Limit and Two–Sided Limits



شكل (1)

أحيانًا تؤول قيم الدالة f لقيم مختلفة عندما تقترب x من عدد c من الجهتين.

إذا كانت $f(x)$ تؤول إلى العدد L_1 عندما x تؤول إلى العدد c من جهة اليسار

فإننا نعبر عن ذلك بالصورة التالية: $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L_1$

وتسمى النهاية من جهة اليسار.

وإذا كانت $f(x)$ تؤول إلى العدد L_2 عندما x تؤول إلى العدد c من جهة اليمين فإننا نعبر عن ذلك بالصورة التالية: $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L_2$

وتسمى النهاية من جهة اليمين.

نلاحظ في الشكل (1): $L_1 \neq L_2$

أي أن: $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to c^-} f(x)$

ولذا نقول أن: $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ غير موجودة

نظرية (1)

يفرض أن c , L عددين حقيقيين

يكون للدالة f نهاية عندما تقترب x من c إذا وفقط إذا كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة اليسار

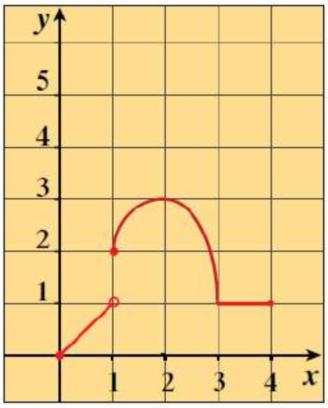
ويعبر عن ذلك: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L \iff \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L = \lim\limits_{x \to c^-} f(x)$

النهايات

تدريب (1)

الشكل المقابل يمثّل بيان الدالة: $f:[0,4]\rightarrow \mathbb{R}$

أكمل ما يلي:

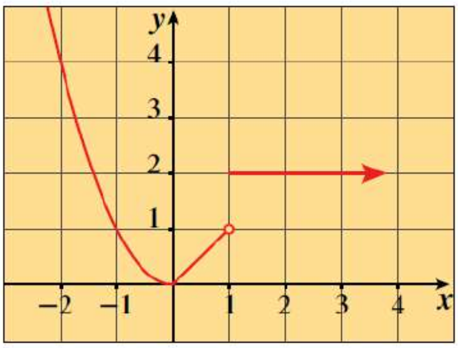


1. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\ldots$
2. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\ldots$
3. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\ldots$
4. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\ldots$
5. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\ldots$
6. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\ldots$
7. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)\ldots$
8. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)\ldots$
9. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)\ldots$
10. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\ldots$
11. $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)\ldots$

مثال (1)

الشكل المقابل، يمثّل بيان الدالة f.

أوجد إن أمكن:



1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$
4. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

الحل:

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$
2. $\because \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1 \quad , \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2 \implies \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

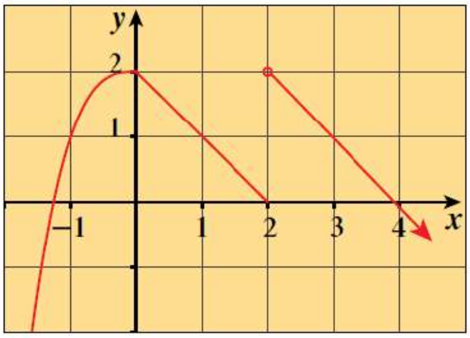
   $\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة
3. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$
4. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=4$

ادرس صح

النهايات

حاول أن تحل

1. يمثّل الشكل المقابل بيان الدالة f.



أوجد إن أمكن:

a. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

b. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

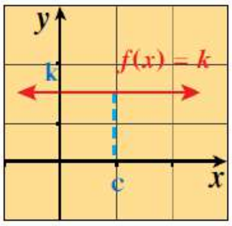
c. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

d. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

نظرية (2)

إذا كانت f دالة: $f(x) = k$ وكانا c , k عددان حقيقيان فإن:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} k = k$$

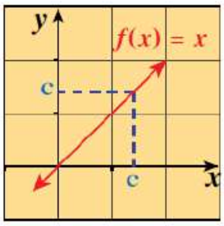


شكل (2)

نظرية (3)

إذا كانت f دالة: $f(x) = x$ وكان c عددًا حقيقيًّا فإن:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} x = c$$



شكل (3)

نظرية (4)

إذا كانت k, c, M, L أعدادًا حقيقية، $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ فإن:

a. قاعدة الجمع: $\lim\limits_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x) = L + M$

b. قاعدة الطرح: $\lim\limits_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) - \lim\limits_{x\to c} g(x) = L - M$

c. قاعدة الضرب: $\lim\limits_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to c} g(x) = L \cdot M$

d. قاعدة الضرب في ثابت: $\lim\limits_{x\to c}(k\cdot f(x)) = k \cdot \lim\limits_{x\to c} f(x) = k \cdot L$

e. قاعدة القسمة: $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)} = \dfrac{L}{M}$, $M \neq 0$

ادرس صح

النهايات

مثال (2)

بفرض أنّ: $\lim_{x\to 1} g(x) = 5$, $\lim_{x\to 1} f(x) = -2$

أوجد:

a $\lim_{x\to 1}(f(x)-g(x))$

b $\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)}{g(x)}$

c $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)+4}{f(x)\cdot g(x)}$

حاول أن تحل

2 بفرض أنّ: $\lim_{x\to 2} g(x) = -3$, $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$

أوجد:

a $\lim_{x\to 2}(f(x)+g(x))$

b $\lim_{x\to 2}(f(x)\cdot g(x))$

c $\lim_{x\to 2}\left(\frac{8f(x)\cdot g(x)}{f(x)+g(x)}\right)$

النهايات

مثال (3)

أوجد:

ⓐ $\lim_{x\to -1}(x^4-2x^3+5)$

ⓑ $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}$

ⓒ $\lim_{x\to 3}(x^2(2-x))$

حاول أن تحل

3 ⓐ هل يمكن حل ⓒ في المثال (3) بطريقة أخرى؟

ⓑ أوجد:

1 $\lim_{x\to 1}(x^3+3x^2-2x-17)$

2 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x+6}{x+2}$

النهايات

مثال (4)

إذا كانت الدالة f:

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & : x<1\\ 5 & : x=1\\ \frac{5}{x} & : x>1\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim_{x\to 1} f(x)$

حاول أن تحل

4 إذا كانت الدالة f:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3 & : x<2\\ x-1 & : x>2\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim_{x\to 2} f(x)$

النهايات

مثال (5)

إذا كانت الدالة g :

$$g(x)=\begin{cases} x^2-2 & : x\leqslant 0 \\ 1-2x & : x>0 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

حاول أن تحل

5 إذا كانت الدالة g :

$$g(x)=\begin{cases} x^3+x & : x>1 \\ \dfrac{x}{x^2+1} & : x\leqslant 1 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

النهايات

مثال (6)

لتكن: $f(x) = |x-3| + 2x$ الممثلة بالشكل.

a اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

b أوجد $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ ، $\lim_{x\to 3^-} f(x)$

c هل للدالة f نهاية عندما $x \to 3$ ؟

الحل:

حاول أن تحل

6 لتكن f : $f(x) = x^2 - |x+2|$

a اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

b أوجد: $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ ، $\lim_{x\to -2^+} f(x)$

c هل للدالة f نهاية عندما $x \to -2$ ؟

النهايات

نظرية (6)

بفرض أن $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة وكانت n عددًا صحيحًا موجبًا فإن:

a) $\lim_{x \to c} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to c} f(x)\right)^n$

b) $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$ (في حالة n عددًا زوجيًا يشترط أن يكون $c > 0$)

c) $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$ (في حالة n عددًا زوجيًا يشترط أن تكون $\lim_{x \to c} f(x) > 0$)

مثال (7)

أوجد:

a) $\lim_{x \to -1} (x^2 - 3x - 1)^5$

b) $\lim_{x \to 2} \sqrt[3]{x - 3}$

c) $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{3x^2 - 2}}{x - 2}$

النهايات

حاول أن تحل

7 أوجد:

a $\lim_{x\to 5}\sqrt{x^2-5}$

b $\lim_{x\to 4}(x+\sqrt{x})^4$

c $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x^3-4x+5}}{x-2}$

إلغاء العامل الصفري في المقام

Eliminating Zero Factor of the Denominator

إذا كان لدينا دالة نسبية وكانت نهاية مقام هذه الدالة النسبية لا تساوي الصفر عندما $x \to c$ فإننا نطبّق نظرية (4) فرع e لإيجاد نهاية هذه الدالة. أما إذا ساوت نهاية المقام الصفر، فإننا نقوم باختصار العامل الصفري المشترك بين البسط والمقام، إن وجد، ثم نستخدم الصيغة المبسطة لإيجاد النهاية.

ملاحظات:

1 عند التعويض المباشر لقيمة x في كل من البسط والمقام وحصلنا على $\frac{0}{0}$ فإنها تسمى **صيغة غير معينة (Indeterminate Form)**.

2 يمكن استخدام التحليل أو القسمة أو الضرب بالمرافق أو غيرها لإيجاد الصيغة المبسطة.

النهايات

مثال (8)

أوجد إن أمكن:

ⓐ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$

ⓑ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2+x)^3 - 8}{x}$

ⓒ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x - 1|}{x^2 - 1}$

النهايات

حاول أن تحل

8 أوجد إن أمكن:

a $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

b $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{(x+4)^2-9}{x^2+7x}$

c $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{|x+2|-7}{x^2-25}$

النهايات

مثال (9)

أوجد:

ⓐ $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$

ⓑ $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

ⓒ $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}$

النهايات

حاول أن تحل

9 أوجد إن أمكن:

c $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-9}{3-\sqrt{x}}$

b $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$

a $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$

النهايات

مثال (10)

أوجد:

ⓑ $\lim_{x \to -2} \frac{x^5 + 32}{x + 2}$

ⓐ $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 6x^2 + 2x - 3}{x + 1}$

النهايات

حاول أن تحل

10 أوجد إن أمكن:

a $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-2x^2-4x+3}{x-3}$

b $\lim_{x\to 2} \frac{-x^5+x^3+x+22}{x-2}$

نهايات تشتمل على ∞

تعريف (3)

لتكن f دالة معرّفة في الفترة $(a\,,\infty)$ فإن:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى ∞.

تعريف (4)

لتكن f دالة معرّفة في الفترة $(-\infty\,,a)$ فإن:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى $-\infty$.

نظرية (7)

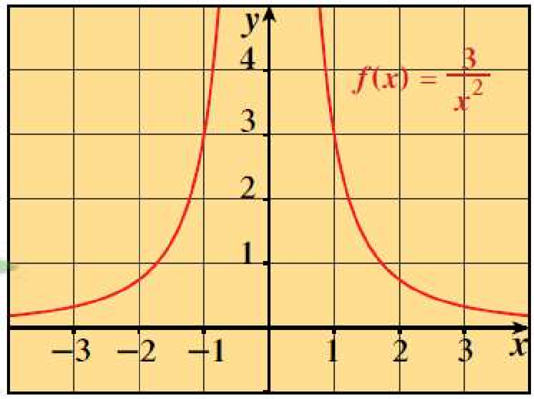
لتكن f: $f(x)=\frac{1}{x}$ فإن:

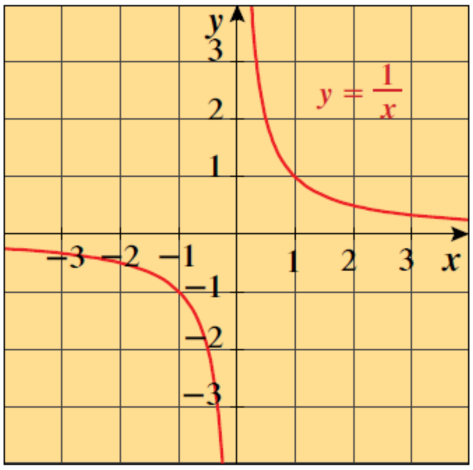
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

نظرية (8)

لتكن f : $k\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}^+$, $f(x)=\frac{k}{x^n}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{k}{x^n}=0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{k}{x^n}=0$$





1) تبقى قواعد حساب النهايات (نظرية 4) وقاعدة القوة (نظرية 6) صحيحة عند ايجاد $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$

2) تبقى نظرية 2 أيضاً صحيحة أي أن : $\lim_{x\to\pm\infty} k = k$

نهايات تشتمل على ∞

مثال (1)

أوجد النهايات التالية إن أمكن:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x+4}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+5}{x^2+25}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^3}{5-7x^3}$

نهايات تشتمل على ∞

حاول أن تحل

1 أوجد النهايات التالية إن أمكن:

a $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x-2}$

b $\lim_{x \to -\infty} \frac{x+2}{x^2+9}$

c $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3-3x+1}{x^3+5}$

صيغ غير معينة

لتكن: $f(x) = ax^n \ , n \in \mathbb{Z}^+ \ , a \in \mathbb{R}^*$:

(1) إذا كان n عدد زوجي فإن:

$$\lim_{x \to \pm\infty} ax^n = \begin{cases} \infty & : \quad a > 0 \\ -\infty & : \quad a < 0 \end{cases}$$

(2) إذا كان n عدد فردي فإن:

$$\lim_{x \to -\infty} ax^n = \begin{cases} -\infty & : \quad a > 0 \\ \infty & : \quad a < 0 \end{cases} \quad ، \quad \lim_{x \to \infty} ax^n = \begin{cases} \infty & : \quad a > 0 \\ -\infty & : \quad a < 0 \end{cases}$$

ملاحظة: إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 \quad , \quad a_n \in \mathbb{R}^*$

فإن: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$

مثال (1)

أوجد: $\lim_{x \to \infty} (2x^2 - 3x + 1)$

حاول أن تحل

1 أوجد: $\lim_{x \to \infty} (-3x^2 + 2x - 4)$

نظرية (11)

إذا كانت كل من g , f دالة حدودية حيث:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_0$$ فإن:

a $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a_n}{b_m} \ : \ n = m$

b $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \ : \ n < m$

صيغ غير معينة

مثال (2)

استخدم النظرية السابقة في حساب كل من:

a $\lim_{x\to\infty} \frac{4-3x^3}{2x^3+5}$

b $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+x-1}{3x^4-x}$

c $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-1}{7-2x^4}$

حاول أن تحل

2 استخدم النظرية السابقة في حساب كل من:

a $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2+5x+1}{6x^2-x+1}$

b $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{4x^3-2x+3}$

صيغ غير معينة

مثال (3)

إذا كانت $\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2 + bx + 3}{2x + 5} = 3$

فأوجد قيمة كل من الثابتين a , b

حاول أن تحل

3 أوجد قيمة كل من الثابتين a , b إذا كانت $\lim_{x\to\infty} \frac{x - 2}{ax^2 + bx - 3} = -1$

صيغ غير معينة

مثال (4)

أوجد: $\lim_{x \to \infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$

صيغ غير معينة

حاول أن تحل

4 أوجد:

a $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2 - x}}{x + 1}$

b $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x - 5}{\sqrt{x^2 - 9}}$

نهايات بعض الدوال المثلثية

نظرية (12)

حيث x بالراديان ، $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

نتيجة (1)

إذا كان b , a عددين حقيقيين، $b \neq 0$, $a \neq 0$ فإن:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$$

وبتطبيق تعريف النهاية على الدوال المثلثية الأساسية نجد أنّ:

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0} \tan x = 0$$

ويمكننا تطبيق نظريات النهايات من البنود السابقة في إيجاد نهايات الدوال المثلثية. يمكننا استنتاج أن: $a \in R$, $\lim_{x\to 0} \cos ax = 1$

نتيجة (2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

نتيجة (3)

إذا كان $a , b \in \mathbb{R}^*$ فإن:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

نهايات بعض الدوال المثلثية

مثال (1)

أوجد:

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{2x}$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{x-3}{\cos x}$

(c) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$

زعتـــر EDUWAVE

نهايات بعض الدوال المثلثية

حاول أن تحل

a هل يمكنك حل **c** في المثال (1) بطريقة أخرى؟

b أوجد النهاية:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x^2 - x}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x \cos x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x}{\cos x - 1}$

نهايات بعض الدوال المثلثية

مثال (2)

أوجد:

a $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

b $\lim_{x\to 0} \frac{5\tan x - 3\sin x}{4x}$

حاول أن تحل

2 أوجد:

a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\tan x}$

b $\lim_{x\to 0} \frac{3\tan x + x^2\cos x}{5x}$

نهايات بعض الدوال المثلثية

مثال (3)

أوجد:

a $\lim_{x\to 0}\frac{5x+\sin x}{x}$

b $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\tan x-2x\cos x}{3x}$

حاول أن تحل

3 أوجد:

a $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x-x^2}{3x^2}$

b $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x+3x\cos 4x}{5x}$

زعتـــر EDUWAVE

الاتصـــــال

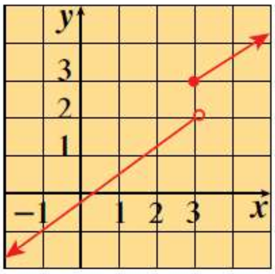
تعريف (8): الاتصال عند نقطة

تكون الدالة f متصلة عند $x = c$ في مجالها إذا كانت $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

من التعريف السابق نجد أنه لتكون f متصلة عند c يجب أن تتوافر الشروط **الثلاثة** التالية:

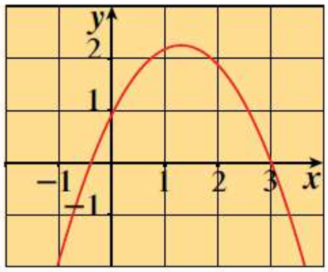
1. الدالة f معرّفة عند $x = c$ أي $f(c)$ موجودة.
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

وإذا لم يتحقق أيّ شرط من الشروط السابقة فنقول إن f **منفصلة (ليست متصلة) عند** $x = c$.

1


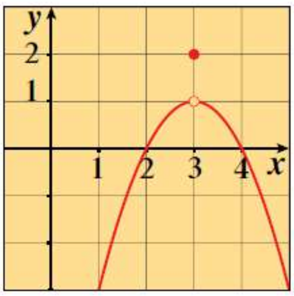
$\lim_{x \to 3} f(x)$ ....

$f(3)$ ....

2


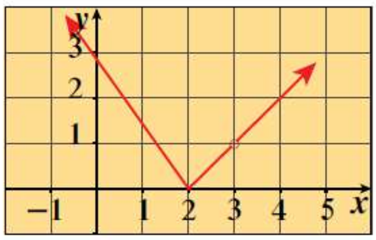
$\lim_{x \to 3} f(x)$ ....

$f(3)$ ....

3


$\lim_{x \to 3} f(x)$ ....

$f(3)$ ....

4


$\lim_{x \to 3} f(x)$ ....

$f(3)$ ....

نتائج:

١) تكون الدالة متصلة من جهة **اليسار** عند $x = c$: إذا كان $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$

٢) تكون الدالة متصلة من جهة **اليمين** عند $x = c$: إذا كان $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$

٣) تكون الدالة متصلة عند $x = c$ **إذا وفقط إذا** كانت متصلة من **اليسار** ومن **اليمين** عند $x = c$

الاتصـــال

مثال (1)

لتكن f :
$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x & : \ x\geq 1 \\ 5x-1 & : \ x<1 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x=1$.

حاول أن تحل

1 لتكن الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases} x^3+x & : \ x\leq 0 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & : \ x>0 \end{cases}$$
ابحث اتصال f عند $x=0$

الاتصــــــال

مثال (2)

لتكن f :
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & : x>3\\ 7 & : x\le 3\end{cases}$$
ابحث اتصال الدالة f عند $x=3$.

حاول أن تحل

2 ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$ حيث
$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & : x<2\\ 1 & : x=2\\ x^2+1 & : x>2\end{cases}$$

الاتصـــــال

مثال (3)

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$ حيث
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{|x-2|} & : x \neq 2 \\ 1 & : x = 2 \end{cases}$$

حاول أن تحل

3 ابحث اتصال الدالة f عند $x = -1$ حيث
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x+1} - 2x & : x \neq -1 \\ 2 & : x = -1 \end{cases}$$

نظريات الاتصـــال

نظرية (14): خواصّ الدوالّ المتّصلة

Properties of Continuous Functions

إذا كانت f, g دالتين متّصلتين عند $x = c$، فإنّ الدوال التالية هي دوالّ متّصلة عند $x = c$

1. الجمع: $f+g$
2. الطرح: $f-g$
3. الضرب في ثابت: $k \cdot f$, $k \in \mathbb{R}$
4. الضرب: $f \cdot g$
5. القسمة: $\frac{f}{g}$, $g(c) \neq 0$

دوال متّصلة Continuous Functions

1. الدالة f: $f(x) = k$ حيث k ثابت متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
2. الدالة كثيرة الحدود متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
3. الدالة الحدودية النسبية $\frac{f}{g}$ متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.
4. الدالة f: $f(x) = |x|$ متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
5. الدوال المثلثية الأساسية متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.

اتصال الدوال الجذرية عند نقطة

نظرية (15)

a. الدالة الجذرية $y = \sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x = c : c \in \mathbb{R}^+$ ، n عدد صحيح زوجي موجب،
ومتصلة عند كل $x = c : c \in \mathbb{R}$ ، n عدد صحيح فردي أكبر من 1.

b. إذا كانت g دالة متصلة عند $x = c$ وكانت $g(c) > 0$
فإن الدالة: $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x = c$

نظريات الاتصال

مثال (1)

ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي:

a $f(x) = x^2 + |x| \quad , \quad c = -1$

b $f(x) = \sin x - \cos x \quad , \quad c = \frac{\pi}{2}$

حاول أن تحل

1 ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي:

a $f(x) = x^2 - 4x + 3 + |x| \quad , \quad c = 3$

b $f(x) = \frac{\tan x}{x+1} \quad , \quad c = \frac{\pi}{4}$

نظريات الاتصـــــال

مثال (2)

ابحث اتصال الدالة f: $f(x) = \frac{x-2}{x^2+9} - \frac{1}{x}$ عند $x = 3$

حاول أن تحل

2 ابحث اتصال الدالة f: $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{2x}{x-2}$ عند $x = 1$

نظريات الاتصـــــال

مثال (3)

ابحث اتصال كل من الدالتين التاليتين عند العدد المبيّن:

b $f(x) = \sqrt{x+3} \quad , \quad x = -1$

a $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1} \quad , \quad x = 1$

حاول أن تحل

3 ابحث اتصال كل من الدالتين التاليتين عند $x = -2$

b $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

a $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+4}$

نظريات الاتصـــــال

الدالة المركبة — Composite Function

إذا كانت كل من g , f دالتين حقيقيتين وكان مدى الدالة f مجموعة جزئية من مجال الدالة g فإنه يتعين دالة مركبة h:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

مثال (4)

الدالتان g , f معرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^2 - 1$, $f(x) = 1 + x$ أوجد:

ⓐ $(g \circ f)(x)$ ⓑ $(g \circ f)(2)$ ⓒ $(f \circ g)(x)$ ⓓ $(f \circ g)(2)$

حاول أن تحل

4. إذا كانت g , f معرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 3$, $f(x) = 2x + 3$ أوجد:

ⓐ $(g \circ f)(x)$ ⓑ $(g \circ f)(-1)$ ⓒ $(f \circ g)(x)$ ⓓ $(f \circ g)(-1)$

نظريات الاتصـــــال

مثال (5)

لتكن: $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^4+2$

أوجد:

a $(f\circ g)(x)$ b $(f\circ g)(0)$ c $(g\circ f)(x)$ d $(g\circ f)(0)$

حاول أن تحل

5 لتكن: $g(x)=\frac{3}{x^2+4}$, $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ أوجد:

a $(f\circ g)(x)$ b $(g\circ f)(\sqrt{3})$

نظريات الاتصـــال

نظرية (16): اتصال الدوال المركّبة

إذا كانت f متّصلة عند c ، و g متّصلة عند $f(c)$ فإن الدالّة المركّبة $g \circ f$ متّصلة عند c.

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(f(c))$$

مثال (6)

لتكن: $f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = \sqrt{x}$. ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

حاول أن تحل

6 لتكن: $g(x) = 2x + 3$, $f(x) = \dfrac{|x|}{x+2}$. ابحث اتصال الدالة $f \circ g$ عند $x = 1$

نظريات الاتصـــــال

مثال (7)

لتكن: $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

حاول أن تحل

7 لتكن: $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

الاتصـــــال على فترة

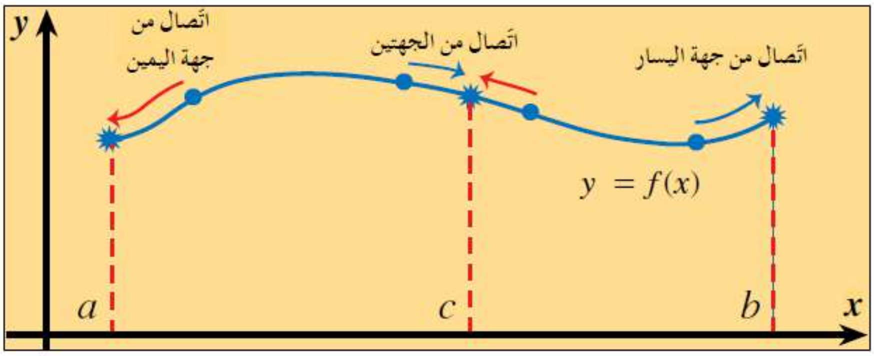
تعريف (9) الاتّصال على فترة مفتوحة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة (a , b) فإننا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة (a , b) إذا كانت f متصلة عند كل x تنتمي إلى الفترة (a , b)

تعريف (10) الاتّصال على فترة مغلقة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة $[a, b]$ فإنّنا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

1. الدالة f متّصلة على الفترة المفتوحة (a, b)
2. الدالة f متّصلة عند $x = a$ من جهة اليمين أي أن: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$
3. الدالة f متّصلة عند $x = b$ من جهة اليسار أي أن: $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$



الاتصال عند النقاط a, b, c للدالة $y = f(x)$ والمتصلة على الفترة $[a, b]$.

ملاحظات:

أوّلًا: إذا تحقق الشرطان 2 , 1 من التعريف (10) نقول إن الدالة f متصلة على $[a , b)$.

ثانيًا: إذا تحقق الشرطان 3 , 1 من التعريف (10) نقول إن الدالة f متصلة على $(a , b]$.

ثالثًا: تبقى النظرية (14) صحيحة إذا استبدلنا النقطة بفترة بحيث تكون هذه الفترة مجموعة جزئية من مجال الدالة.

رابعًا: إذا كانت الدالة متصلة على فترة ما فإنها متصلة على أي فترة جزئية منها.

خامسًا: إذا كانت الدالة متصلة على كل من الفترتين $[c , b]$, $[a , c]$ فإن الدالة متصلة على $[a , b]$.

سادسًا: يبقى التعريف (10) صحيحًا في حالة الفترات على الصورة $[a , \infty)$, $(-\infty , b]$.

الاتصـــــال على فترة

مثال (1)

ادرس اتصال الدالة f على $[1, 3]$ حيث:
$$f(x) = \begin{cases} -2 & : x = 1 \\ x^2 - 3 : & 1 < x < 3 \\ 6 & : x = 3 \end{cases}$$

الحل:

الاتصـــــال على فترة

حاول أن تحل

1 ادرس اتصال الدالة f على $[1, 5]$ حيث:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & : \quad x = 1 \\ \dfrac{x^2+1}{x} & : \quad 1 < x < 5 \\ \dfrac{26}{5} & : \quad x = 5 \end{cases}$$

ادرس صح

الاتصــــال على فترة

مثال (2)

ادرس اتصال كل من الدوال التالية على الفترة المبيّنة:

a $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $[-1, 5]$

b $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$, $[0, 5]$

حاول أن تحل

2 ادرس اتصال f على الفترة المبيّنة:

a $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+2}$, $[0, 3]$

b $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$, $[0, 2]$

الاتصــــال على فترة

مثال (3)

ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x\le -1 \\ \dfrac{4}{x+3} & : \quad x>-1 \end{cases}$$

الاتصـــــال على فترة

مثال (4)

لتكن الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases} x^2-a & : \quad x<0 \\ 2 & : \quad x=0 \\ ax+b & : \quad x>0 \end{cases}$$
متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

أوجد قيمة الثابتين $a\ ,\ b$

حاول أن تحل

4 لتكن الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases} 5 & : \quad x=1 \\ ax+b & : \quad 1<x<4 \\ b+8 & : \quad x=4 \end{cases}$$
متصلة على $[1\ ,4]$. أوجد قيم الثابتين $a\ ,\ b$

الاتصـــال على فترة

إذا كانت الدالة g متصلة على فترة ما، $g(x) \geqslant 0$ في هذه الفترة فإن الدالة $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة على هذه الفترة.

مثال (5)

لتكن f: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-5, 0]$.

حاول أن تحل

5 لتكن f: $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[6, 10]$.

الاتصـــــال على فترة

مثال (6)

لتكن f: $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

ادرس اتصال الدالة f على $[-3, 3]$.

حاول أن تحل

6 لتكن f : $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$.

ادرس اتصال الدالة f على $[1, 3]$.

الاتصـــــال على فترة

ملاحظة:

ناتج تركيب دالتين كل منهما متصلة على $\mathbb{R}$ هو دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

مثال (7)

لتكن: $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4}$. ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

حاول أن تحل

7 لتكن: $f(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x + 5}$.

ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

ادرس صح

معدلات التغير وخطوط المماس

يكون **متوسط معدل** التغير للدالة y:

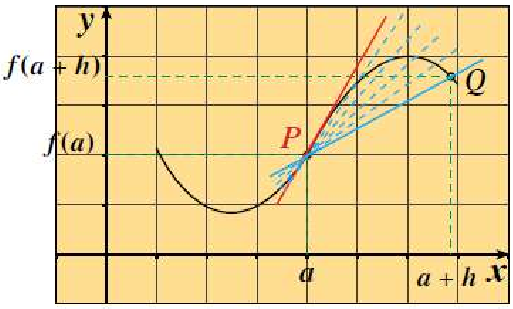
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

1 يمكننا حساب ميل القاطع للمنحنى $y=f(x)$ المار بالنقطتين

$P(a\,,f(a))\quad,\quad Q(a+h\,,\,f(a+h))$

الموجودتين على المنحنى حيث $h=\Delta x$

والميل يساوي $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.



2 نجد قيمة نهاية ميل القاطع إن وجدت عندما تقترب Q من P على المنحنى أي أن h تقترب من الصفر.

3 **نحدّد ميل المماس للمنحنى عند النقطة $P(a\,,f(a))$ بالقيمة m إن وجد:**

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

معدل التغير لدالة f عند النقطة $P(a\,,f(a))$ إن وجد هو:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

المستقيم العمودي على منحنى عند نقطة تنتمي إلى المنحنى هو المستقيم العمودي على مماس المنحنى عند تلك النقطة **ويسمى الناظم**.

معدلات التغير وخطوط المماس

مثال (1)

أوجد ميل المماسّ للقطع المكافئ $y = x^2$

عند النقطة $P(2,4)$.

حاول أن تحل

1 أوجد ميل المماس للقطع المكافئ $y = (x-2)^2 + 2$ عند النقطة $A(1,3)$

المشـــــتقة

تعريف: المشتقّة عند نقطة Derivative at a Point

مشتقة الدالة f عند $x = a$ هي $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شرط وجود النهاية.

مثال (1)

باستخدام التعريف، أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = 2x^2 + 1$ عند $x = 1$

حاول أن تحل

1 باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f: $f(x) = 3x^2$ عند $x = -2$

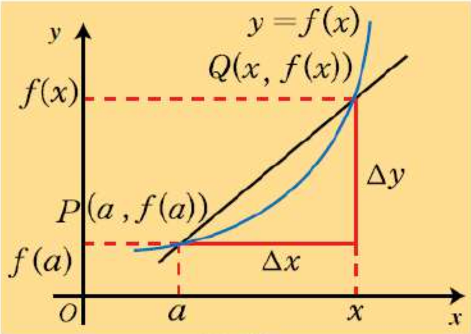
المشـــــتقة

تعريف (بديل): المشتقّة عند نقطة

مشتقّة دالّة f عند $x = a$ هي :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

شرط وجود النهاية.



شكل (2)

ميل الخط القاطع $\overleftrightarrow{PQ}$ هو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ملاحظة: التعريف البديل للمشتقة هو صورة أخرى لتعريف المشتقة.

مثال (2)

باستخدام التعريف البديل. أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = \sqrt{x}$ عند $x = a$ حيث $a > 0$

المشـــــتقة

حاول أن تحل

2 أوجد مشتقة الدالة f : $f(x)=\frac{1}{x}$ عند $b\neq 0$ ، $x=b$

المشتقّة من جهة واحدة One–Sided Derivative

مشتقة الدالة f من اليمين يرمز لها بالرمز $f'_{+}(a)$ وهي:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

ومشتقة الدالة f من اليسار يرمز لها بالرمز $f'_{-}(a)$ وهي:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

إن الدالة لها مشتقة عند نقطة إذا وفقط إذا كانت المشتقتان لجهة اليمين ولجهة اليسار موجودتين ومتساويتين عند تلك النقطة.

المشـــــتقة

مثال (3)

بيّن أن الدالة التالية لها مشتقّة لجهة اليمين ومشتقّة لجهة اليسار عند $x = 0$، لكن ليس لها مشتقّة عند $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : \quad x \leq 0 \\ 2x & : \quad x > 0 \end{cases}$$

المشـــــتقة

حاول أن تحل

3 لتكن f : $f(x) = |x-2|$ ، ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x = 2$.

- إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق عند كل x : $x \in (a , b)$، فإننا نقول إن الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a , b).
- إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق عند كل x: $x \in (-\infty , \infty)$ فإننا نقول إن الدالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ مثل كثيرة الحدود.
- إذا وضعنا x بدلًا من a في تعريف المشتقة عند النقطة نحصل على $f'(x)$ حيث $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
ويمكن أن نرمز للمشتقة بأحد الرموز التالية: y' , $f'(x)$, $\frac{d}{dx}(f(x))$, $\frac{dy}{dx}$
- لأيّ دالة f تكون f' دالة أخرى مجالها مكوّن من جميع قيم x التي يكون للدالة مشتقة عندها أي $(D_{f'} \subseteq D_f)$ أي أن f' دالة مستخلصة من f.

المشـــــتقة

مثال (5)

لتكن $f(x) = x^3$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة إن وجدت.

حاول أن تحل

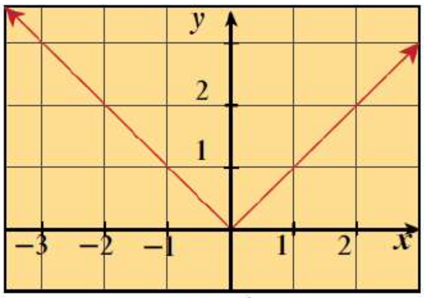
5 لتكن $f(x) = x^2 + 2$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة.

المشــــتقة

متى تكون $f'(a)$ غير موجودة؟

a ركنًا **(Corner)**: تكون المشتقّتان من جهة اليمين ومن جهة اليسار عند التقاء الشعاعين غير متساويتين.

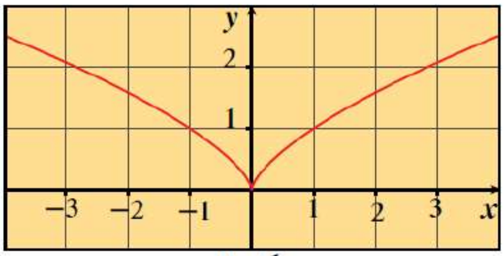
مثال: $f(x) = |x|$



شكل (3)

يوجد ركن عند $x = 0$، $f'(0)$ غير موجودة

b نابًا **(Cusp)**: يكون ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطع محددة يقترب من ∞ في إحدى الجهات ويقترب من $-\infty$ في الجهة الثانية ويوجد مماس رأسي عندها. مثال: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

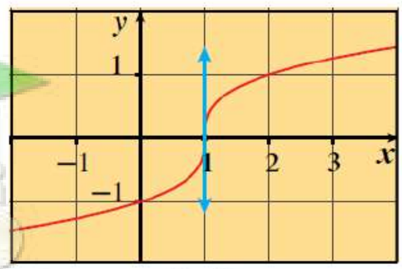


شكل (4)

يوجد ناب عند $x = 0$، $f'(0)$ غير موجودة ويوجد مماس رأسي عندها

c مماسًا رأسيًا: يكون المماس للمنحنى عند نقطة محددة رأسيًا.

مثال: $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

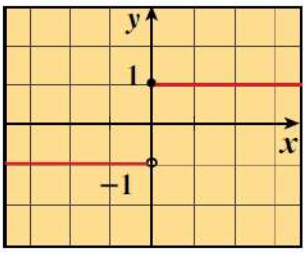


شكل (5)

يوجد مماس رأسي عند $x = 1$، $f'(1)$ غير موجودة

d عدم اتصال: تكون المشتقّة من جهة واحدة أو كلّ من الجهتين غير موجودة. مثال:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$



شكل (6)

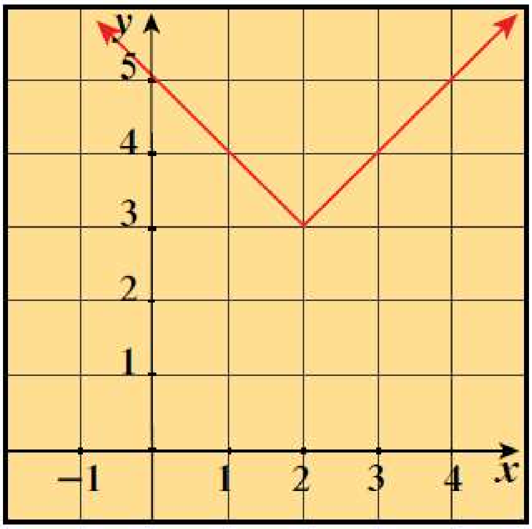
يوجد عدم اتصال عند $x = 0$، $f'(0)$ غير موجودة

المشـــــــتقة

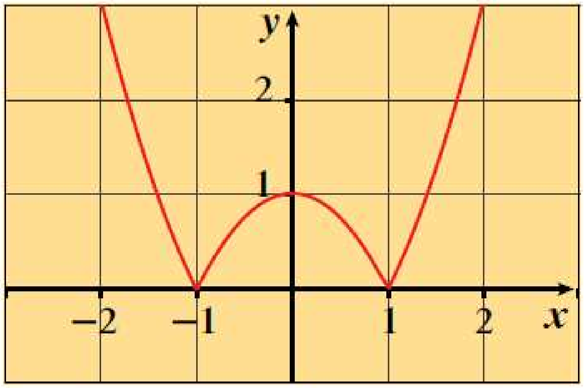
تدريب

أوجد كل النقاط في مجال الدالة حيث تكون الدالة غير قابلة للاشتقاق في كل مما يلي:

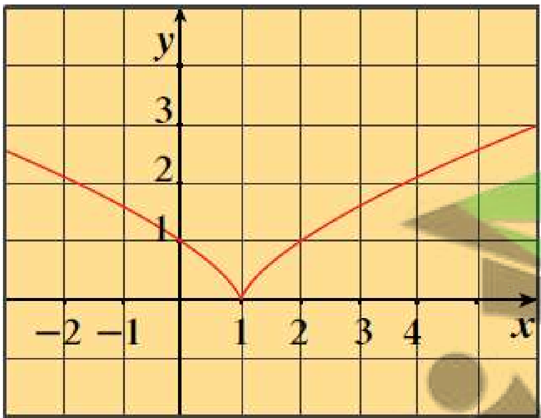
a $f(x) = |x-2| + 3$



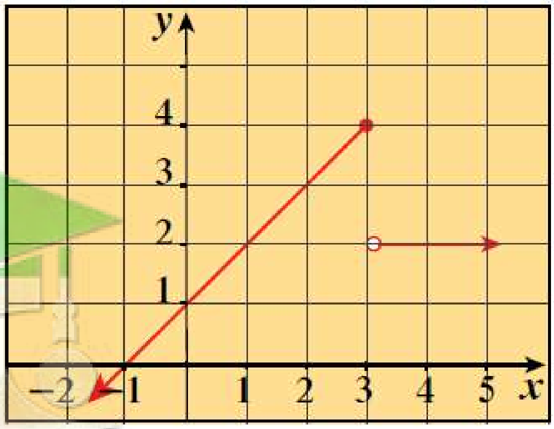
b $f(x) = |x^2 - 1|$



c $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}$



d $f(x) = \begin{cases} 2 & : x > 3 \\ x+1 & : x \le 3 \end{cases}$



المشـــــتقة

إذا كانت الدالة f ليست متصلة عند نقطة $(a \ , \ f(a))$ فإنها غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

مثال (6)

لتكن f : $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x < 2 \\ 2x - 1 & , \ x \geq 2 \end{cases}$

ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x = 2$.

حاول أن تحل

6 لتكن f : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & : \ x \leq 2 \\ 3x - 2 & : \ x > 2 \end{cases}$ ، ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x = 2$.

المشـــــتقة

نظريّة الاشتقاق والاتصال

إذا كانت الدّالة f لها مشتقّة عند نقطة، فإنّها تكون متّصلة عند هذه النقطة.

معكوس النظريّة ليس صحيحًا دائمًا كما رأينا سابقًا:

فالدالّة المتّصلة قد يكون لها ركن أو ناب أو مماسّ رأسيّ، ومن ثمّ لا تكون قابلة للاشتقاق عند نقطة معيّنة.

مثال (9)

لتكن الدالة f :
$$f(x) = \begin{cases} x+5 & : \quad x \leqslant 3 \\ x^2 - 1 & : \quad x > 3 \end{cases}$$

أوجد إن أمكن $f'(3)$

المشتقة

حاول أن تحل

9 لتكن الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & : x\leqslant -1 \\ x^2-x-2 & : x>-1 \end{cases}$$

أوجد إن أمكن $f'(-1)$.

قـــواعد الاشـــتقاق

1) $f(x) = c \Longrightarrow f'(x) = 0 \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$

2) $f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = n.x^{n-1} \quad ; \quad n \in \mathbb{Q}^* \ . \ x \neq 0$

3) $[k\,f(x)]' = k\,f'(x)$

4) $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

5) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

6) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad ; \quad g(x) \neq 0$

مثال (1)

أوجد $\frac{dy}{dt}$ حيث $y = t^3 + 6t^2 - \frac{5}{3}t + 16$

حاول أن تحل

1 أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y = 5x^3 - 4x^2 + 6$

قـــواعد الاشـــتقاق

مثال (2)

أوجد $f'(x)$ إذا كان $f(x)=(x^2+1)(x^3+3)$

حاول أن تحل

2 a هل يمكنك حل مثال 2 بطريقة أخرى؟ فسّر إجابتك.

b أوجد $f'(x)$ إذا كان:

1 $f(x)=(2x+1)(3x-2)$

2 $f(x)=4x^2(x+6)$

3 $f(x)=(x^3-4)^2$

قـــواعد الاشـــتقاق

مثال (3)

أوجد مشتقة $f(x) = \frac{x^3 - 1}{5x^2 + 1}$

حاول أن تحل

3 أوجد مشتقة $f(x) = \frac{4x^2 + 2x}{2x^3 + 5}$

قــــواعد الاشـــــتقاق

يمكننا إيجاد ميل المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة $(a, f(a))$ عن طريق إيجاد المشتقة عند هذه النقطة. وتكون معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

والمستقيم العمودي (الناظم) على منحنى الدالة عند النقطة $(a, f(a))$ هو المستقيم العمودي على مماس المنحنى عند تلك النقطة ومعادلته:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

مثال (4)

أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم عند النقطة $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ لمنحنى الدالة f حيث $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 2}$

قـــواعد الاشـــتقاق

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة f حيث $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ عند النقطة $(1,0)$

قـــواعد الاشـــــتقاق

إذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق وكانت $g(x) \neq 0$ ، k عددًا ثابتًا فإنّ:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{k}{g(x)}\right) = \frac{-k\frac{d}{dx}(g(x))}{(g(x))^2}$$

أي أن:

$$\left(\frac{k}{g(x)}\right)' = \frac{-k \cdot (g'(x))}{(g(x))^2}$$

مثال (5)

أوجد $f'(x)$ حيث $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$

حاول أن تحل

5 أوجد $f'(x)$ حيث $f(x) = \frac{-4}{x^2+2x+5}$

قـــواعد الاشــــتقاق

مثال (6)

لتكن: $y = \frac{x^2+3}{2x}$. أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$

حاول أن تحل

6 لتكن: $y = \frac{3x^2+7}{8x^2}$ ، أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = -1$

مثال (7)

أوجد مشتقة الدالة f: $x > 0$ ، $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$

حاول أن تحل

7 أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$

قــــواعد الاشـــــتقاق

مثال (8)

لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & : x\leqslant 1 \\ 2x+1 & : x>1 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها.

أوجد $f'(x)$ إن أمكن

احرس صح

قـــواعد الاشـــــتقاق

حاول أن تحل

8 أوجد المشتقة إن أمكن لكل من الدوال المتصلة التالية:

a $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & : \quad x \leqslant 2 \\ 4x-3 & : \quad x > 2 \end{cases}$

قـــواعد الاشـــــتقاق

حاول أن تحل

8 أوجد المشتقة إن أمكن لكل من الدوال المتصلة التالية:

b $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : \quad x < 1 \\ 2\sqrt{x} & : \quad x \geqslant 1 \end{cases}$

مشتقات الدوال المثلثية

1 مشتقة دالة الجيب هي موجب دالة جيب التمام

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

2 مشتقة دالة جيب التمام هي سالب دالة الجيب

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

1 $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

2 $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

3 $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

4 $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$

مثال (1)

أوجد المشتقّات للدوال التالية:

a $y = x^2 \sin x$

b $u = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$

c $f(x) = \sin^2 x$

ادرس صح

مشتقات الدوال المثلثية

حاول أن تحل

1 أوجد المشتقات للدوال التالية:

a $h(x) = \cos^2 x$

b $g(x) = \dfrac{x}{\cos x}$

c $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

مشتقات الدوال المثلثية

مثال (2)

أوجد مشتقات الدوال التالية:

a $f(x) = \tan x + \cot x$

b $g(x) = \sec x \cdot (1 + \sin x)$

c $h(x) = \csc x + \sin x \cdot \tan x$

حاول أن تحل

2 أوجد مشتقات الدوال التالية:

a $f(x) = \dfrac{1 + \tan x}{\tan x}$

b $g(x) = \sec x + \csc x$

c $h(x) = \dfrac{\sec x}{\csc x}$

مشتقات الدوال المثلثية

مثال (3)

أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \tan x$ عند النقطة $P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

حاول أن تحل

3 أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \sec x$ عند النقطة $F\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$

قاعـــدة السلسلة

$(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)).\, g'(x)$ قاعدة السلسلة (التسلسل)

- صورة أخرى لقاعدة السلسلة: $u = g(x)$ ، $y = f(u)$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

- قاعدة سلسلة القوى: $\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1} . f'(x)$

مثال (1)

إذا كان $g(x) = x^{10}$, $f(x) = 3x^2 + 1$. فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة

a) $(f \circ g)'(x)$

b) $(g \circ f)'(-1)$

قاعـــدة السلسلة

حاول أن تحل

1 a هل يمكنك حل مثال (1) a بطريقة أخرى؟ فسّر.

b لتكن: $g(x) = x^{13}$, $f(x) = -2x^3 + 4$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$ ، $(g \circ f)'(0)$

قاعـــدة السلسلة

مثال (2)

لتكن: $g(x) = x^2 + 1$, $(x \neq 0)$ $f(x) = \frac{2x+1}{x}$

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$

حاول أن تحل

2 لتكن: $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(1)$

قاعـــدة السلسلة

مثال (3)

إذا كانت: $y = u^3 - 3u + 1 \quad , \quad u = 5x^2 + 2$

فأوجد: $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل

حاول أن تحل

3 لتكن: $y = u^2 + 4u - 3 \quad , \quad u = 2x^3 + x$

أوجد: $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

قاعـــدة السلسلة

مثال (4)

يتحرّك جسيم على محور السينات بحيث إن موضعه عند أيّ لحظة $t \geq 0$ يعطى بالدالّة: $S = \cos(t^2 + 1)$. أوجد السرعة اللحظية للجسيم كدالة في t.

حاول أن تحل

4 أوجد مشتقة $y = \sin(x^2 + x)$ بالنسبة إلى المتغيّر x.

قاعـــدة السلسلة

مثال (6)

لتكن: $y=\sqrt[5]{(x^2+3x+5)^3}$ ، أوجد: y'

حاول أن تحل

6 لتكن: $y=\sqrt[4]{(2x^4-3x^2+4)^3}$ ، أوجد: y'

قاعـــدة السلسلة

مثال (7)

أوجد ميل مماس المنحنى $y = \sin^5 x$ عند $x = \frac{\pi}{3}$

حاول أن تحل

7 بيّن أن ميل أي مماس للمنحنى $y = \frac{1}{(-2x-1)^3}$ دائمًا يكون موجبًا حيث $x \neq -\frac{1}{2}$

المشتقات العليا والاشتقاق الضمني

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}\left(y^{(n-1)}\right) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

مثال (1)

أوجد المشتقات حتى الرتبة الرابعة للدالة $y = 2x^7 - 4x^2 + 3x - 5$ بدلالة المتغير x.

حاول أن تحل

1 إذا كانت: $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$

فأوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة.

المشتقات العليا والاشتقاق الضمني

مثال (2)

إذا كانت $y = \sin x$. بيّن أن $y = y^{(4)}$.

حاول أن تحل

2 لتكن الدالة: $y = \cos x$.

بيّن أن $y^{(4)} + y'' = 0$.

مثال (3)

أوجد y'' حيث $y = \frac{1}{\cos x}$

حاول أن تحل

3 أوجد y'' حيث $y = \frac{1}{\sin x}$

المشتقات العليا والاشتقاق الضمني

مثال (4)

أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ في الحالات التالية:

a $y^2 + xy = 7x$

b $y = x + x^2y^5$

حاول أن تحل

4 لتكن: $y^2 = x^2 - 2x$ ، أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$.

المشتقات العليا والاشتقاق الضمني

مثال (5)

أوجد ميل المماس للمنحنى (الدائرة) الذي معادلته $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(3, -4)$.

حاول أن تحل

5 أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1,1)$

المشتقات العليا والاشتقاق الضمني

مثال (6)

أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $2y = x^2 + \sin y$ عند النقطة $(2\sqrt{\pi} \quad , \quad 2\pi)$

حاول أن تحل

6 أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $x^2 + y^2 - 2xy = 1$ حيث $x \neq y$ عند النقطة $(2 , 1)$

المشتقات العليا والاشتقاق الضمني

مثال (7)

للمنحنى الذي معادلته $2\sqrt{y}+y=x$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(3\ ,\ 1)$

حاول أن تحل

7 للمنحنى الذي معادلته: $y^2+\sqrt{y}+x^2=3$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1\ ,\ 1)$

المشتقات العليا والاشتقاق الضمني

مثال (8)

إذا كانت $y = \sqrt{1-2x}$ فأثبت أن: $yy'' + (y')^2 = 0$

حاول أن تحل

8 إذا كانت $y = x\sin x$

فأثبت أن $y''' + y' + 2\sin x = 0$

القيم القصوى للدوال

تعريف (1): القيم القصوى المطلقة

إذا كانت f دالّة مجالها D، $c \in D$ ، فإن $f(c)$ تسمى:

a قيمة عظمى مطلقة للدالة f على D عندما:

$$f(c) \geqslant f(x) \quad , \quad \forall x \in D_f$$

b قيمة صغرى مطلقة للدالة f على D عندما:

$$f(c) \leqslant f(x) \quad , \quad \forall x \in D_f$$

شكل (2)

مثال (1)

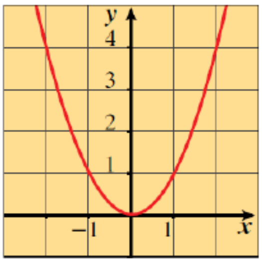
لتكن الدالة: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^2$ ، أوجد إن أمكن القيم القصوى للدالة f مع رسم بيانها عندما:

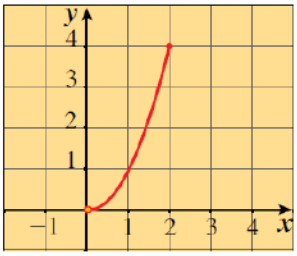
a $D = (-\infty , \infty)$

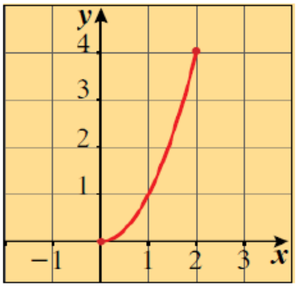
b $D = (0 , 2]$

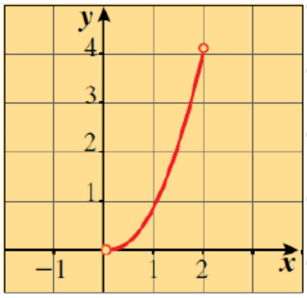
c $D = [0 , 2]$

d $D = (0 , 2)$









حاول أن تحل

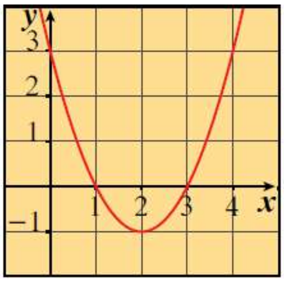
1 الشكل يمثّل بيان $y = x^2 - 4x + 3$. أوجد القيم القصوى للدالة على المجالات التالية:

a $(-\infty , \infty)$

b $[2 , 3]$

c $(1 , 3)$

d $[3 , 4)$



القيم القصوى للدوال

نظريّة (1): نظرية القيمة القصوى

إذا كانت f دالّة متصلة على فترة مغلقة $[a\,,\,b]$ فإن f تكون لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة.

ملاحظة: لتكن الدالة f معرفة على $[a\,,b]$ ، $c \in (a\,,b)$ فإننا نسمي:

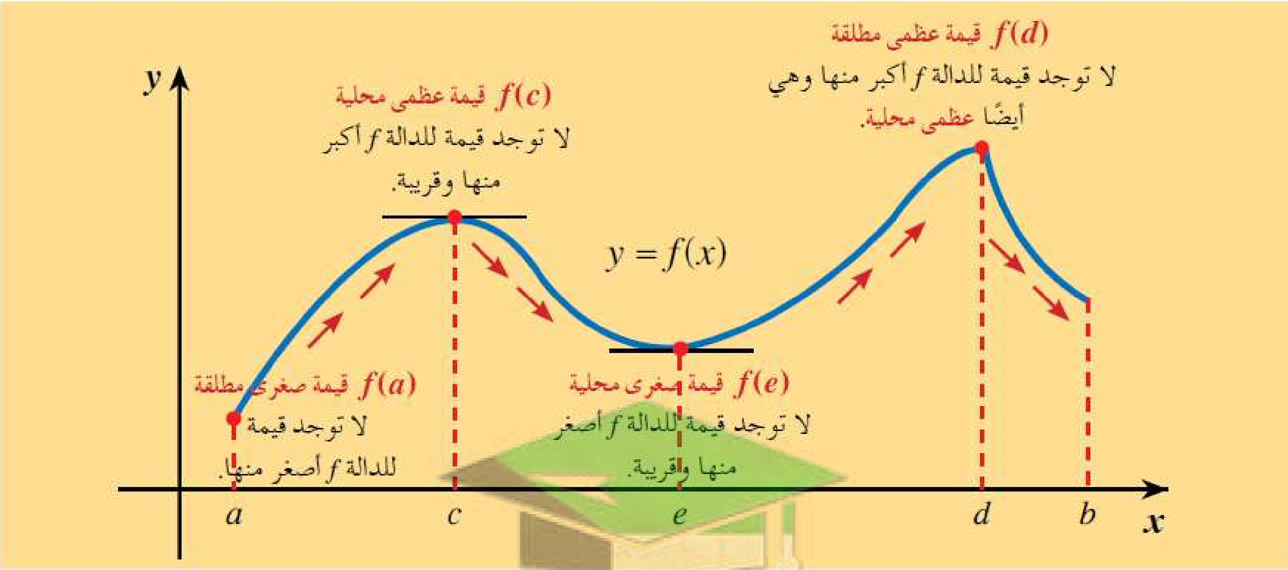
1. $(b\,,f(b))$ ، $(a\,,f(a))$ نقاط طرفية.
2. $(c\,,f(c))$ نقطة داخلية.

تعريف (2): القيم القصوى المحليّة

لتكن $(c\,,f(c))$ نقطة داخلية للدالة f ، D فترة مفتوحة تحوي c، تكون $f(c)$:

a. قيمة عظمى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D \quad , \quad f(c) \geqslant f(x)$

b. قيمة صغرى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D \quad , \quad f(c) \leqslant f(x)$



تعريف (3): النقطة الحرجة **Critical Point**

النقطة الداخليّة للدالّة f $(c\,,f(c))$ تسمى نقطة حرجة عندما $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.

ملاحظة: يسمى العدد c العدد الحرج.

القيم القصوى للدوال

مثال (2)

أوجد النقاط الحرجة لكلّ من الدوال المتصلة التالية:

a $g(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

حاول أن تحل

2 أوجد النقاط الحرجة لكل من الدوال المتصلة التالية:

a $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 10$

ادرس صح

القيم القصوى للدوال

نظريّة (2): القيم القصوى المحليّة (Fermat's Theorem)

إذا كانت للدالّة f قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محليّة عند $x = c$ فإنّ $(c\ ,\ f(c))$ نقطة حرجة.

إذا كانت $(c\ ,\ f(c))$ نقطة حرجة للدالة f فليس بالضرورة أن تكون $f(c)$ قيمة قصوى محلية

مثال (3)

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالّة المتصلة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[0, 3]$.

حاول أن تحل

3 أوجد القيم القصوى المطلقة للدالّة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[-2\ ,1]$.

القيم القصوى للدوال

مثال (4)

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ في الفترة $[-2, 3]$

حاول أن تحل

4 أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ في الفترة $[1, 3]$

تزايد وتناقص الدوال

نظريّة (3): نظريّة القيمة المتوسّطة

إذا كانت f دالة:

1 متّصلة على الفترة $[a , b]$

2 قابلة للاشتقاق على الفترة (a , b)

فإنّه يوجد على الأقل $c \in (a , b)$ بحيث $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

مثال (1)

بيّن أن الدالّة f : $f(x) = x^2$ تحقّق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 2]$، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

حاول أن تحل

1 بيّن أن الدالّة $f(x) = x^2 + 2x$ تحقّق شروط نظريّة القيمة المتوسّطة على الفترة $[-3 , 1]$،
ثم أوجد قيمة c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

تزايد وتناقص الدوال

مثال (2)

بيّن أن الدالّة f : $f(x) = x^3 + 1$ تحقّق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3, 3]$، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

حاول أن تحل

2 بيّن أن الدالّة f: $f(x) = x^3 - 3x + 2$ تحقّق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 4]$، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

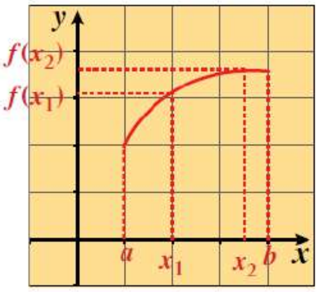
تزايد وتناقص الدوال

تعريف (4): تزايد وتناقص الدوال

لتكن f دالّة معرّفة على الفترة I . نقول إن:

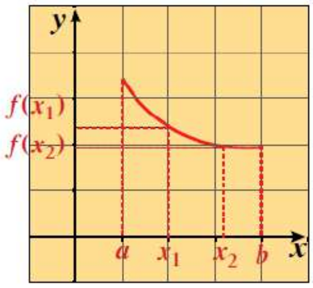
1. f دالّة متزايدة على I إذا كان: $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad , \quad \forall x_1 , x_2 \in I$
2. f دالّة متناقصة على I إذا كان: $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad , \quad \forall x_1 , x_2 \in I$

ملاحظة: تكون الدالة f ثابتة على الفترة I عندما: $\forall x_1 , x_2 \in I \ , \ f(x_1) = f(x_2)$



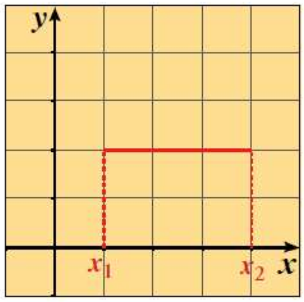
شكل (7)

دالة متزايدة



شكل (8)

دالة متناقصة



شكل (9)

دالة ثابتة

الدالّة المطّردة **Monotonic Function**

الدالّة التي تكون دائمًا متزايدة على فترة أو دائمًا متناقصة على فترة، يقال عنها إنّها دالّة مطّردة على هذه الفترة.

نظرية (4): الدوالّ المتزايدة والدوالّ المتناقصة والدوال الثابتة

لتكن f دالّة قابلة للاشتقاق على (a , b).

1. إذا كانت $f'(x) > 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a , b)، فإنّ f تتزايد على (a , b).
2. إذا كانت $f'(x) < 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a , b)، فإنّ f تتناقص على (a , b).
3. إذا كانت $f'(x) = 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a , b)، فإنّ الدالة f ثابتة على (a , b).

تزايد وتناقص الدوال

مثال (3)

أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = x^2 - 5x + 6$

حاول أن تحل

3 أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

تزايد وتناقص الدوال

مثال (4)

لتكن f: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

حدّد الفترات حيث تكون f متزايدة والفترات حيث تكون f متناقصة.

حاول أن تحل

4 إذا كانت f : $f(x) = x^3 - 6x$. حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f.

تزايد وتناقص الدوال

مثال (5)

إذا كانت f الدالة: $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

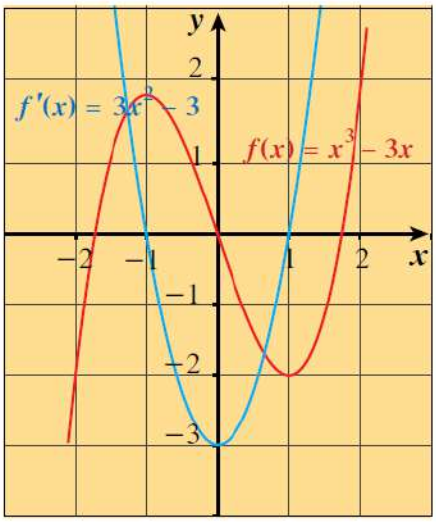
حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة.

تزايد وتناقص الدوال

حاول أن تحل

5 حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$

ربط المشتقة الأولى والثانية بمنحنى الدالة



نشاط

الشكل المقابل يوضّح بيان الدالة f وبيان مشتقتها f'

أكمل ما يلي:

في الفترة $(-\infty , -1)$ الدالة f متزايدة ومنحنى الدالة f' يقع أعلى محور السينات أي أن $f'(x)$ موجبة $\forall x \in (-\infty , -1)$

في الفترة $(-1 , 1)$ الدالة f .... ومنحنى الدالة f' يقع ....

أي أن ....

في الفترة $(1 , \infty)$ الدالة f .... ومنحنى الدالة f' يقع ....

أي أن ....

نظريّة (5): اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحليّة

لتكن f دالّة متّصلة على مجالها وكانت $(c , f(c))$ نقطة حرجة.

1. إذا كانت إشارة المشتقّة f' تتغيّر من الموجب إلى السالب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة عظمى محلية عند c.
2. إذا تغيرت إشارة f' من السالب إلى الموجب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة صغرى محلّية عند c.
3. إذا لم تتغيّر إشارة f' عند $x = c$ ، فإن f لا يكون لها قيمة قصوى محلّية عند c.

ربط المشتقة الأولى والثانية بمنحنى الدالة

مثال (1)

لتكن الدالّة f : $f(x) = x^3 - 12x - 5$

أوجد كلًّا مما يلي:

a النقاط الحرجة للدالّة.

b الفترات التي تكون الدالّة f متزايدة أو متناقصة عليها.

c القيم القصوى المحليّة.

ربط المشتقة الأولى والثانية بمنحنى الدالة

حاول أن تحل

1 لتكن الدالّة f : $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$. أوجد كلًّا مما يلي:

a النقاط الحرجة للدالة.

b الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.

c القيم القصوى المحلية.

ربط المشتقة الأولى والثانية بمنحنى الدالة

اختبار التقعر:

a) إذا كانت $\forall x \in I$ ، $f''(x) > 0$ فإن منحنى الدالة f مقعراً للأعلى على I

b) إذا كانت $\forall x \in I$ ، $f''(x) < 0$ فإن منحنى الدالة f مقعراً للأسفل على I

تعريف نقطة الانعطاف:

تسمى النقطة $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f إذا كانت f دالة متصلة عند c ، ومنحنى الدالة f يغيّر تقعّره عند هذه النقطة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى.

مثال (3)

أوجد فترات التقعّر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة f: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

ربط المشتقة الأولى والثانية بمنحنى الدالة

حاول أن تحل

3 أوجد فترات التقعّر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة f: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

ربط المشتقة الأولى والثانية بمنحنى الدالة

نظرية (6): اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحليّة

1. إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) < 0$ ، فإن f تكون لها قيمة عظمى محليّة عند $x = c$
2. إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) > 0$ ، فإن f تكون لها قيمة صغرى محليّة عند $x = c$

مثال (4)

أوجد القيم القصوى المحليّة للدالّة: $f(x) = x^3 - 12x - 5$

حاول أن تحل

4. استخدم اختبار المشتقة الثانية لتجد القيم القصوى المحلية للدالة f: $f(x) = 4x^3 - 12x^2$

رسم بيان دوال كثيرات الحدود

الخطوات اللازم اتباعها في دراسة تغير الدالة كثيرة الحدود ورسم بيانها

Steps to be Followed in Drawing the Graph of a Polynomial Function

1. عيّن مجال الدالة f.

مجال دالة كثيرة الحدود هو $\mathbb{R}$ ولكنه يقتصر أحيانًا على فترة من $\mathbb{R}$ خاصة في المسائل الحياتية.

2. أوجد النهايات عند الحدود المفتوحة لمجال الدالة f.
3. عيّن النقاط الحرجة للدالة f.
4. كوّن جدولًا لدراسة إشارة f' وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية.
5. كوّن جدولًا لدراسة إشارة f'' وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت.
6. أوجد نقاطًا إضافية.

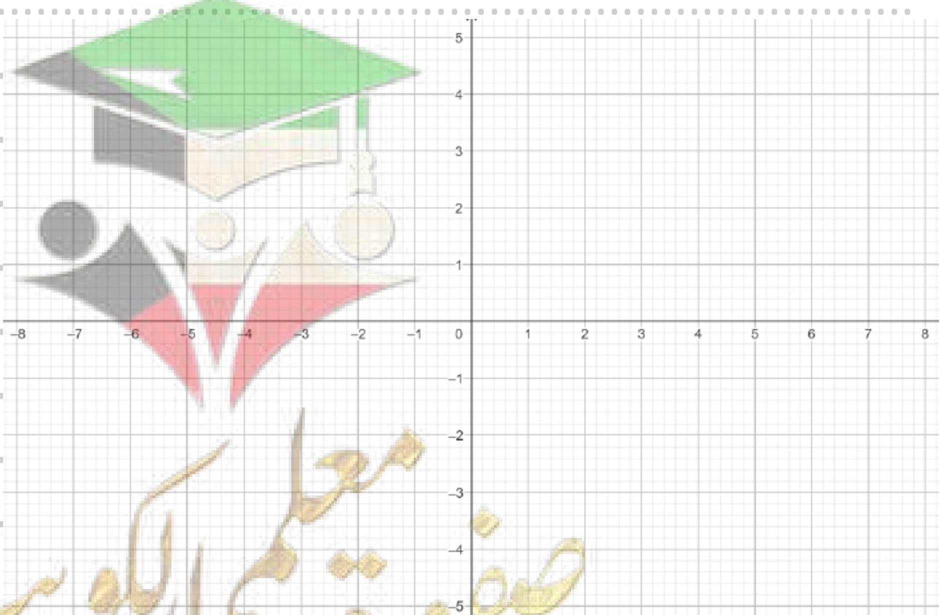
تساعد هذه النقاط على رسم بيان الدالة بدقة وأهم هذه النقاط، نقاط التقاطع مع أحد المحورين إن أمكن.

7. ارسم بيان الدالة f. استخدم نتائج الخطوات السابقة في الرسم.

رسم بيان دوال كثيرات الحدود

مثال (1)

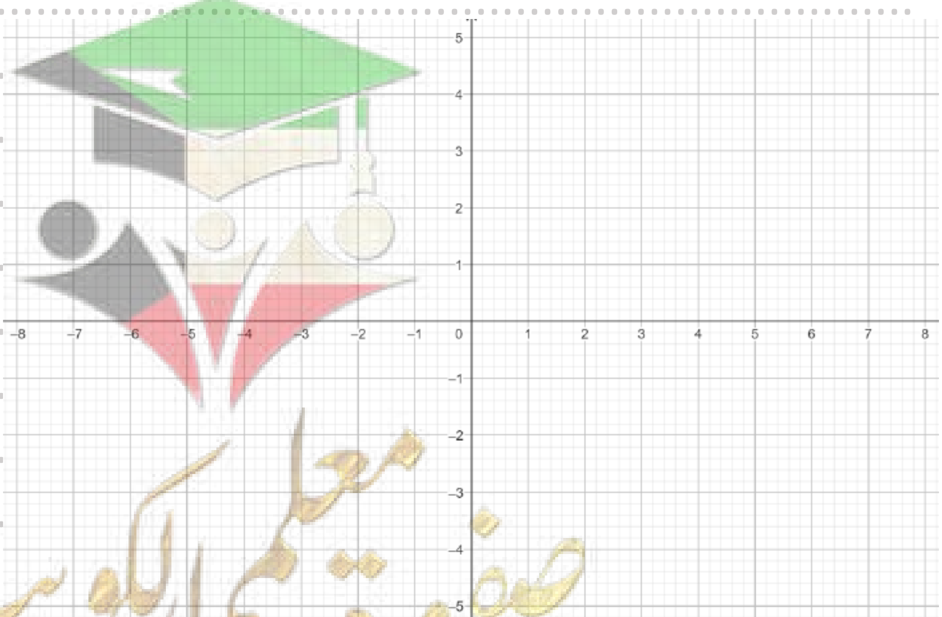
ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بيانها.



رسم بيان دوال كثيرات الحدود

حاول أن تحل

1 ادرس تغير الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها.

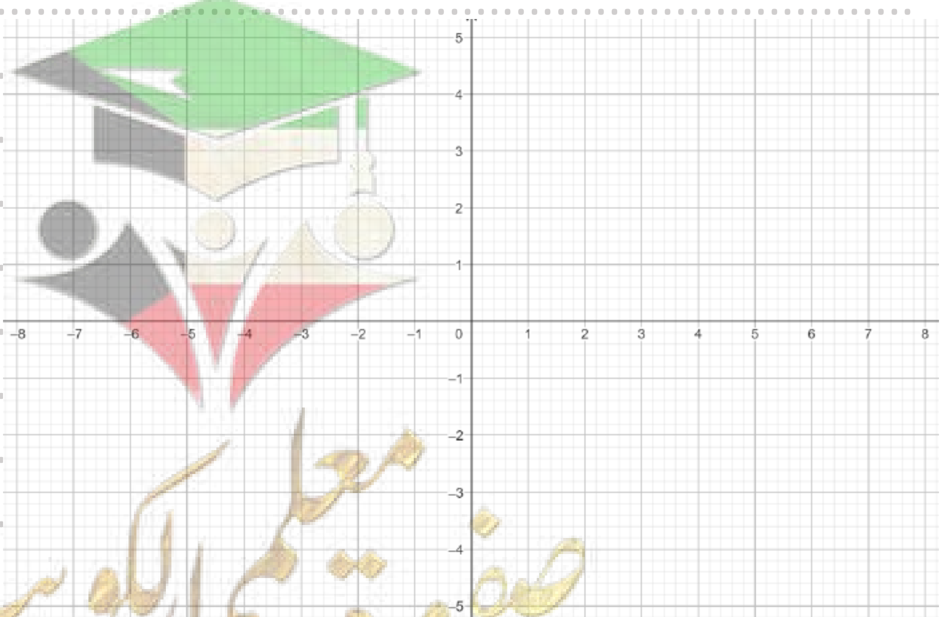


ادرس صح

رسم بيان دوال كثيرات الحدود

مثال (2)

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها.

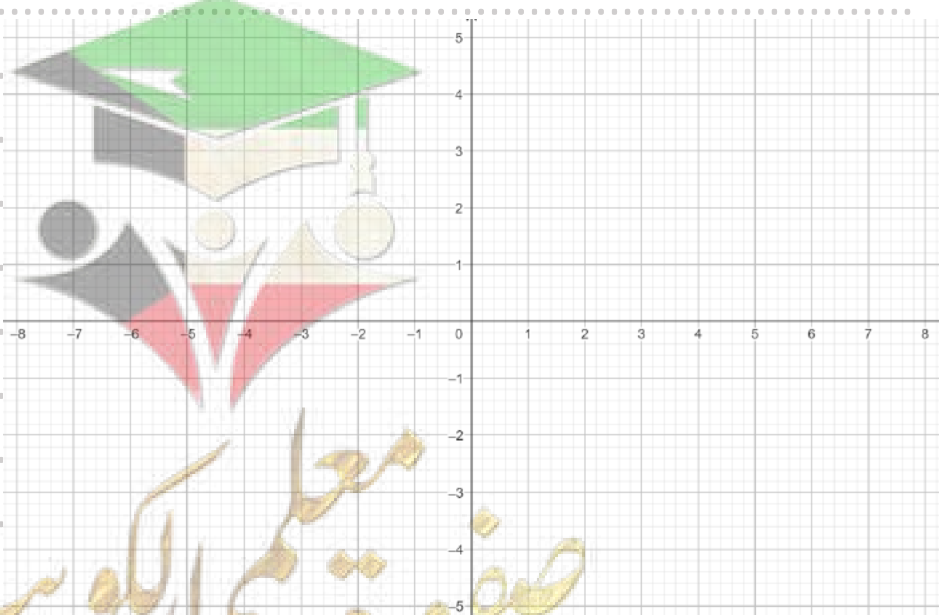


ادرس صح

رسم بيان دوال كثيرات الحدود

حاول أن تحل

2 ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها.



تطبيقات على القيم القصوى

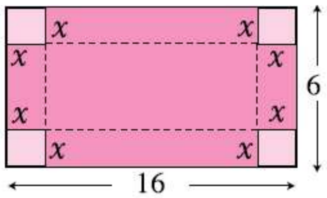
مثال (1)

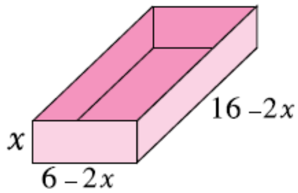
عددان موجبان مجموعهما 100 ومجموع مربعيهما أصغر ما يمكن، ما العددان؟

حاول أن تحل

1 أوجد عددين مجموعهما 14 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن.

تطبيقات على القيم القصوى





مثال (2) صنع صندوق

يراد صنع صندوق بدون غطاء بقصّ مربّعات متطابقة طول ضلع كلّ منها x من أركان طبقة صفيح أبعادها 16 cm , 6 cm وثني جوانبها إلى أعلى (انظر الشكل المقابل).

أوجد قيمة x بحيث يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن. وما هو حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة؟

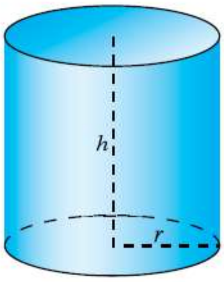
تطبيقات على القيم القصوى

حاول أن تحل

2 في مثال (2)، ما أكبر حجم للصندوق إذا كانت أبعاد طبقة الصفيح 15 cm , 8 cm؟

تطبيقات على القيم القصوى

مثال (3) تصميم علبة



طلب إليك تصميم علبة زيت تسع لترًا واحدًا تكون على شكل أسطوانة دائريّة قائمة (كما في الشكل المقابل).
ما أبعادها لتكون كمية المعدن المستخدم لصنعها أقل ما يمكن؟

تطبيقات على القيم القصوى

حاول أن تحل

3 تعطي الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h.

a أوجد الارتفاع $h(\mathrm{cm})$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة.

b ما قيمة هذا الحجم؟

تطبيقات على القيم القصوى

كراسة التمارين (2) صفحة 63 :

ما أكبر مساحة ممكنة لمثلث قائم الزاوية وطول وتره يساوي $6\ cm$ ؟ وما أبعاده ؟

تطبيقات على القيم القصوى

كراسة التمارين (3) صفحة 63 :

أثبت أن من بين المستطيلات التي محيطها $8\ cm$. واحد منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعاً.

التقديــــر

المعلمة: هي ثابت يصف المجتمع أو يصف توزيع المجتمع كالمتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ

الإحصاءة: هو اقتران تتعين قيمته من العينة كالمتوسط الحسابي $\overline{x}$ أو الانحراف المعياري S

تقدير المعلمة: هو إحصاءة تعتمد على قيم العينة وتعكس قيمة قريبة لمعلمة المجتمع ككلّ وتوزيعه.

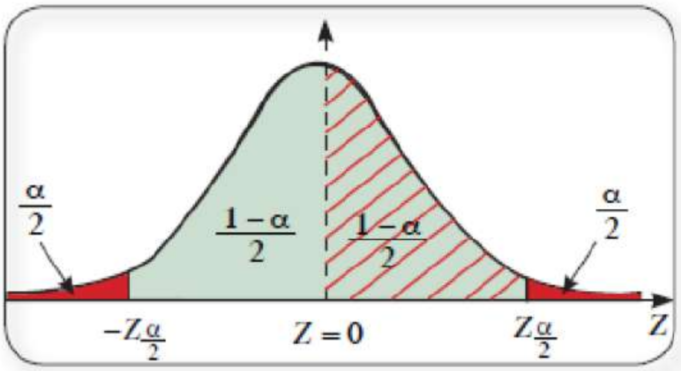
فترة الثقة: هي فترة طرفاها متغيران عشوائيان (أي أنها فترة عشوائية) تحوي إحدى معالم المجتمع بنسبة معينة تسمى درجة الثقة (مستوى الثقة).

التقدير بفترة الثقة: هو إيجاد فترة معينة يتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة أو احتمال معيّن

α: نسبة الخطأ في التقدير وتسمى **مستوى المعنوية** أو مستوى الدلالة.

$1-\alpha$: درجة الثقة أو مستوى الثقة

القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ ملاحظة: $\boxed{Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{1-\alpha}{2}}}$



	العينة	المجتمع
المتوسط الحسابي	$\overline{x}$	μ
الانحراف المعياري	s	σ
التباين	s^2	σ^2

مثال (1)

أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 95% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

حاول أن تحل

1 أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 97% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

ادرس صح

التقديـــــر

هامش الخطأ E

عند استخدام بيانات عيّنة لتقدير المتوسط الحسابي μ لمجتمع، يكون هامش الخطأ، يرمز إليه بـ E، القيمة العظمى الأكثر ترجيحًا عند درجة ثقة $(1-\alpha)$ للفرق بين المتوسط الحسابي $\overline{x}$ للعيّنة والمتوسط الحسابي μ للمجتمع.

فترة الثقة	هامش الخطأ E	حجم العينة n	الانحراف المعياري σ
$(\overline{x}-E, \overline{x}+E)$	$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$n > 30$ $n \leq 30$	معلوم
	$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{S}{\sqrt{n}}$	$n > 30$	غير معلوم
	$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{S}{\sqrt{n}}$	$n \leq 30$ درجات الحرية $(n-1)$	

ملاحظة: عند إيجاد فترة الثقة سنكتفي بدرجة الثقة 95% والتي تناظرها القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ (من جدول التوزيع الطبيعي المعياري).

تفسير فترة الثقة

عند اختيار عينات عشوائية مختلفة متساوية في الحجم (n) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95% من فترات الثقة هذه تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع (μ).

فمثلًا عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه (n) وفي كل مرة نحسب $\overline{x}$ وفترة الثقة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي μ الحقيقية و5 فترات لا تحويها.

التقديــــــر

مثال (2)

أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهن فإذا كان حجم عينة الإناث $n = 40$ والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 12.5$ والمتوسط الحسابي للعينة $\overline{x} = 76.3$. باستخدام مستوى ثقة 95%

1. أوجد هامش الخطأ.
2. أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.
3. فسّر فترة الثقة

التقديـــــر

حاول أن تحل

2 من المثال (2) إذا أجريت الدراسة على عينة أخرى من الإناث حجمها 25 والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 3.6$ والمتوسط الحسابي للعينة $\overline{x} = 18.4$

باستخدام مستوى ثقة 95%

1 أوجد هامش الخطأ.

2 أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

3 فسّر فترة الثقة.

التقديــــر

مثال (3)

عينة عشوائية حجمها 36، فإذا كان المتوسط الحسابي للعينة 60 وتباينها 16، باستخدام مستوى ثقة 95%:

1 أوجد هامش الخطأ.

2 أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

3 فسّر فترة الثقة.

التقديـــر

حاول أن تحل

3 أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 81$ ومتوسطها الحسابي $\overline{x} = 50$، وانحرافها المعياري $S = 9$، باستخدام مستوى ثقة 95%.

1 أوجد هامش الخطأ.

2 أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

3 فسّر فترة الثقة.

التقديـــــر

مثال (4)

أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 25$، فإذا كان الانحراف المعياري للعينة (S) يساوي 10 ومتوسطها الحسابي $(\overline{x})$ يساوي 15، استخدم مستوى ثقة 95% لإيجاد:

1. هامش الخطأ.
2. فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

التقديـــــر

حاول أن تحل

4 أوجد فترة ثقة 95% للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ علمًا أن العينة أخذت من مجتمع طبيعي.

إذا كان لدينا $n = 13$, $S = 0.3$, $\overline{x} = 8.4$

اختبارات الفروض الاحصائية

تعريف: الفرض الإحصائي Statistic Hypothesis

هو ادعاء معيّن مبني على حيثيات معقولة حول معلمة من معالم المجتمع مثل المتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ.

تعريف: المقياس الإحصائي

هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة تحت شروط معينة.

تعريف: اختبارات الفروض الإحصائية (اختبار المعنوية)

هي طريقة معيارية لاختبار ادعاء ما حول معلمة من معالم المجتمع.

ملاحظة: سنكتفي في هذا الموضوع بدراسة معلمة واحدة من معالم المجتمع وهي المتوسط الحسابي μ.

1. صياغة الفروض الإحصائية (فرض العدم H_0 والفرض البديل H_1).
2. التحقق من الانحراف المعياري σ للمجتمع (معلوم أم غير معلوم) وتحديد حجم العينة (n) ومن ثم إيجاد المقياس الإحصائي للاختبار (Z أو t)، (مسترشدًا بالجدول التالي):

الانحراف المعياري (σ)	المقياس الإحصائي (Z أو t)	حجم العينة (n)
معلوم	$Z = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	لا يشترط حجم معين للعينة
غير معلوم	$Z = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$n > 30$
	$t = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$n \leq 30$

3. تحديد مستوى المعنوية α وحساب القيمة الجدولية $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري أو القيمة الجدولية $t_{\frac{\alpha}{2}}$ من جدول t ذي درجات حرية.
4. تحديد منطقة القبول: $(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\ ,\ Z_{\frac{\alpha}{2}})$ أو $(-t_{\frac{\alpha}{2}}\ ,\ t_{\frac{\alpha}{2}})$ كما هو موضّح بالشكل.
5. اتخاذ القرار الإحصائي (قبول فرض العدم) أو (رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل).

اختبارات الفروض الاحصائية

مثال (1)

تزعم شركة أن متوسط رواتب موظفيها يساوي 4 000 دينار كويتي. إذا أخذت عينة من 25 موظفًا، ووجد أن متوسط رواتب العينة هو 3 950 دينارًا كويتيًّا فإذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع (دينارًا) $\sigma = 125$

وضّح كيفية إجراء الاختبار الإحصائي بمستوى ثقة 95%

اختبارات الفروض الاحصائية

حاول أن تحل

1 بيّنت الدراسة أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل أسلاك معدنية هو

$\mu = 1\,800$ kg مع انحراف معياري $\sigma = 150$ kg

ويؤكد الأخصائيون في المصنع المنتج لهذه الاسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة تحمل هذه الأسلاك، وتأكيدًا على ذلك تمّ اختبار عينة من 40 سلكًا

فتبيّن أن متوسط قوة تحمل هذه الأسلاك يساوي 1 840 kg

هل يمكن قبول مثل هذا الفرض بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$؟

اختبارات الفروض الاحصائية

مثال (2)

إذا كانت $S = 1.79$, $\overline{x} = 37.2$, $n = 80$

اختبر الفرض بأن $\mu = 37$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

اختبارات الفروض الاحصائية

حاول أن تحل

2 متوسط العمر بالساعات لعينة من 100 مصباح كهربائي مصنعة في أحد المصانع $\overline{x} = 1\,570$ بانحراف معياري $S = 120$.

يقول صاحب المصنع إنّ متوسط العمر بالساعات $\mu = 1\,600$ للمصابيح المصنعة في المصنع.

اختبر صحة الفرض $\mu = 1\,600$ مقابل الفرض $\mu \neq 1\,600$ وباختيار مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

اختبارات الفروض الاحصائية

مثال (3)

يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة يساوي 290 دينارًا كويتيًا.

فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 منازل تبيّن أن متوسطها الحسابي (دينارًا) $\overline{x} = 283$ وانحرافها المعياري (دينارًا) $S = 32$.

فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟

استخدم مستوى ثقة 95% (علمًا بأن المجتمع يتبع توزيعًا طبيعيًا).

اختبارات الفروض الاحصائية

حاول أن تحل

3 في المثال (3)، إذا أجريت دراسة إحصائية أخرى على المدينة ذاتها وتبيّن من خلالها أن $S = 5$, $\overline{x} = 296$ لعينة من 10 منازل مع استخدام درجة الثقة نفسها.

فهل يبقى افتراض المدير عند الشركة صحيحًا أم لا؟ وضّح إجابتك.

ادرس صح

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.10 وأكثر	0.4999									

جدول التوزيع t

جدول التوزيع *t*						
	$\frac{\alpha}{2}$					
درجات الحرية $(n-1)$	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.25
1	63.657	31.821	12.706	6.314	3.078	1.000
2	9.925	6.965	4.303	2.920	1.886	0.816
3	5.841	4.541	3.182	2.353	1.638	0.765
4	4.604	3.747	2.776	2.132	1.533	0.741
5	4.032	3.365	2.571	2.015	1.476	0.727
6	3.707	3.143	2.447	1.943	1.440	0.718
7	3.500	2.998	2.365	1.895	1.415	0.711
8	3.355	2.896	2.306	1.860	1.397	0.706
9	3.250	2.821	2.262	1.833	1.383	0.703
10	3.169	2.764	2.228	1.812	1.372	0.700
11	3.106	2.718	2.201	1.796	1.363	0.697
12	3.054	2.681	2.179	1.782	1.356	0.696
13	3.012	2.650	2.160	1.771	1.350	0.694
14	2.977	2.625	2.145	1.761	1.345	0.692
15	2.947	2.602	2.132	1.753	1.341	0.691
16	2.921	2.584	2.120	1.746	1.337	0.690
17	2.898	2.567	2.110	1.740	1.333	0.689
18	2.878	2.552	2.101	1.734	1.330	0.688
19	2.861	2.540	2.093	1.729	1.328	0.688
20	2.845	2.528	2.086	1.725	1.325	0.687
21	2.831	2.518	2.080	1.721	1.323	0.686
22	2.819	2.508	2.074	1.717	1.321	0.686
23	2.807	2.500	2.069	1.714	1.320	0.685
24	2.797	2.492	2.064	1.711	1.318	0.685
25	2.787	2.485	2.060	1.708	1.316	0.684
26	2.779	2.479	2.056	1.706	1.315	0.684
27	2.771	2.473	2.052	1.703	1.314	0.684
28	2.763	2.467	2.048	1.701	1.313	0.683
29	2.756	2.462	2.045	1.699	1.311	0.683
30 وأكثر	2.575	2.327	1.960	1.645	1.282	0.675

زعتر
EDUWAVE

ZA3TAREDUWAV

جميع روابط التواصل

140