تجميع لأهم أفكار المسائل المتوقعة و الأكثر تكرارا فى أختبارت السنوات السابقة

الاختبار الفاينال 8 مسائل مقالى

الوحدة الأولى (التكامل):

3 مسائل مقالى.

الوحدة الثانية (تطبيقات التكامل):

2 مسائل مقالى.

الوحدة الثالثة (القطوع):

2 مسائل مقالى.

الوحدة الرابعة (الأحصاء):

1 سؤال مقالى.

مسائل الموضوعى من كراسه التمارين بنفس الارقام

صفوة معلمي الكويت

(1)

a

أثبت أن $F(x) = x^3 + 5x + 3$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = 3x^2 + 5$ ثم اكتب الصورة العامة للمشتقة العكسية

$$F(x) = x^3 + 5x + 3$$

$$F'(x) = 3x^2 + 5 = f(x)$$

$\therefore$ F هي مشتقة عكسية للدالة f

الصورة العامة للمشتقة العكسية هي

$$H(x) = x^3 + 5x + C$$ حيث c ثابت

b

$$\int \frac{x^4 - 27x}{x^2 - 3x}\, dx$$

$$\int \frac{x(x^3 - 27)}{x(x-3)}\, dx = \int \frac{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+9)}{\cancel{(x-3)}}\, dx$$

$$= \int (x^2 + 3x + 9)\, dx$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 9x + c$$

(2)

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx = \int \frac{\cancel{(\sqrt[3]{x}+1)}\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-\sqrt[3]{x}+1\right]}{\cancel{\sqrt[3]{x}+1}}\,dx =$$

$$\int\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-\sqrt[3]{x}+1\right]dx = \int\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1\right)dx =$$

$$= \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+x+C$$

$$= \frac{3}{5}\,x\,\sqrt[3]{x^2}+\frac{3}{4}\,x\,\sqrt[3]{x}+x+C$$

(3)

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$$

$$= \int \frac{(x-1)}{\sqrt{x}+1}\times\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}\,dx$$

$$= \int \frac{(x-1)\left(\sqrt{x}-1\right)}{(x-1)}\,dx$$

$$= \int\left(\sqrt{x}-1\right)dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+c$$

صفوة معلمي الكويت

(4)

$$\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx$$

الحل :

بفرض $u = x^2+4x-1$

$du = (2x+4)dx \quad , \quad \frac{1}{2}du = (x+2)dx$

$$\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx = \int u^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}\,du\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}\,u^{\frac{4}{3}}\right] + C$$

$$\therefore \int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx = \frac{3}{8}(x^2+4x-1)^{\frac{4}{3}} + C$$

صفوة معلمي الكويت

(5)

أوجد :

$$\int \frac{5}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^3}\,dx$$

$$\int \frac{5}{x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+2)^3}\,dx =$$

$$= \int 5\,x^{\frac{-1}{2}}\,(x^{\frac{1}{2}}+2)^{-3}\,dx = 5\int (x^{\frac{1}{2}}+2)^{-3}\,x^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

نفرض أن $u = x^{\frac{1}{2}} + 2$ تفاضل $du = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\,dx$

$$2\,du = x^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

$$5\int (x^{\frac{1}{2}}+2)^{-3}\,x^{\frac{-1}{2}}\,dx = 5\int u^{-3}.\,2\,du = 10\int u^{-3}\,du$$

$$= 10.\frac{u^{-2}}{-2} + C = \frac{-5}{u^2} + C = \frac{-5}{(\sqrt{x}+2)^2} + C$$

(6)

$$\int x(2x-1)^3\,dx$$

الحل:

$$u = 2x-1 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow \frac{du}{2} = dx$$

$$u = 2x-1 \Rightarrow 2x = u+1 \Rightarrow x = \frac{u+1}{2}$$

$$\int x(2x-1)^3\,dx = \int \left(\frac{u+1}{2}\right)u^3\frac{du}{2} = \frac{1}{4}\int (u^4+u^3)du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{u^5}{5}+\frac{u^4}{4}+C\right) = \frac{1}{20}(2x-1)^5 + \frac{1}{16}(2x-1)^4 + C$$

(7)

$$\int x^5\sqrt{3+x^2}\,dx$$

الحل:

$$u=3+x^2 \Rightarrow du=2xdx \Rightarrow \frac{du}{2}=xdx$$

$$\int x^5\sqrt{3+x^2}\,dx=\int \sqrt{3+x^2}\,(x^4)(xdx)$$

$$u=3+x^2 \Rightarrow x^2=u-3 \Rightarrow x^4=(u-3)^2$$

$$\int x^5\sqrt{3+x^2}\,dx=\int \sqrt{3+x^2}\,(x^4)(xdx)$$

$$=\int \sqrt{u}\,(u-3)^2\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}(u^2-6u+9)du=\frac{1}{2}\int\left(u^{\frac{5}{2}}-6u^{\frac{3}{2}}+9u^{\frac{1}{2}}\right)du$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}-\frac{6u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{9u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C\right)=\frac{1}{7}u^{\frac{7}{2}}-\frac{6}{5}u^{\frac{5}{2}}+3u^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{7}(3+x^2)^{\frac{7}{2}}-\frac{6}{5}(3+x^2)^{\frac{5}{2}}+3(3+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

صفوة معلمي الكويت

(8)

$$\int x\sec^2(x^2+2)\,dx$$

الحل:

$$u = x^2 + 2 \Longrightarrow du = 2xdx \Longrightarrow \frac{1}{2}du = xdx$$

$$\int xsec^2(x^2+2)dx = \int sec^2u\left(\frac{1}{2}du\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int sec^2u\,du = \frac{1}{2}tan\,u + C = \frac{1}{2}tan\,(x^2+2) + C$$

(9)

$$\int \csc^5 x\ \cot x\,dx$$

الحل:

$$u = \csc x \Rightarrow du = -\csc x\cot x\,dx \Rightarrow -du = \csc x\cot x\,dx$$

$$\int \csc^5 x.\cot x\,dx = \int \csc^4 x\,.\csc x\,.\cot x\,dx = \int u^4(-du)$$

$$= -\int u^4\,du = -\frac{u^5}{5} + C = -\frac{1}{5}\csc^5 x + C$$

صفوة معلمي الكويت

(10)

$$\int \cot x \, dx$$

الحل:

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x \, dx$$

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C$$

(11)

اوجد قيمة التكامل : $\int (3+\sin 2x)^5 \cos 2x dx$

الحل

$$u = (3+\sin 2x)$$

$$du = 2\cos 2x du$$

$$\frac{1}{2} du = \cos 2x du$$

$$\int (3+\sin 2x)^5 \cos 2x dx$$

$$= \int \frac{1}{2} u^5 du$$

$$= \frac{u^6}{12} + c$$

$$= \frac{(3+\sin 2x)^6}{12} + c$$

صفوة معلمي الكويت

(12)

$$\int \frac{dx}{(\sin^2 x)\sqrt{1+\cot x}}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1+\cot x}} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}\, dx$$

$$= \int (1+\cot x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \csc^2 x\, dx$$

بفرض أن

$$u = 1 + \cot x$$

$$du = -\csc^2 x\, dx$$

$$\therefore -\int (1+\cot x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -\csc^2 x\, dx$$

بالتعويض

$$= -\int u^{-\frac{1}{2}}\, du$$

$$= -\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= -2\sqrt{u} + c$$

$$= -2\sqrt{1+\cot x} + c$$

صفوة معلمي الكويت

(13)

$$\int \frac{3t^2-6t}{t^3-3t^2+8}dt$$

نفرض أن $u = t^3 - 3t^2 + 8 \longrightarrow du = (3t^2 - 6t)\ dt$

$$\int \frac{3t^2-6t}{t^3-3t^2+8}dx = \int \frac{1}{u}du = ln\,|u| + C$$

$$= ln\left|t^3-3t^2+8\right| + C$$

$$\int \frac{x^3+4}{x}dx$$

$$= \int \left(\frac{x^3}{x}+\frac{4}{x}\right)dx$$

$$= \int \left(x^2+\frac{4}{x}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + 4\,ln\,|x| + C$$

صفوة معلمي الكويت

(14)

أوجد: $\int (x^2-2)e^{x^3-6x}\,dx$

الحل

$$I = \int e^{x^3-6x}\cdot\underline{(x^2-2)\,dx}$$

$$u = \underline{x^3-6x}$$

$$du = (3x^2-6)\,dx$$

$$du = 3(x^2-2)\,dx$$

$$\frac{1}{3}du = \underline{(x^2-2)\,dx}$$

$$= \int e^u \cdot \frac{1}{3}\,du$$

$$= \frac{1}{3}e^u + c$$

$$= \frac{1}{3}e^{x^3-6x} + c$$

(15)

أوجد: $\int \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,dx$

الحل

$$I = \int e^{\frac{1}{x}}\cdot\underline{\frac{1}{x^2}\,dx}$$

$$u = \frac{1}{x}$$

$$du = -\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$-du = \underline{\frac{1}{x^2}\,dx}$$

$$= -\int e^u\cdot du$$

$$= -e^u + c = -e^{\frac{1}{x}} + c$$

صفوة معلمي الكويت

(16)

أوجد:

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

الحل

$u = e^x + 1$

$du = e^x\,dx$

$$I = \int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \ln|u| + c$$

$$= \ln|e^x + 1| + c$$

(17)

$$\int (2\tan x - \csc^2 x)\,dx$$

$u = \cos x$

$du = -\sin x\,dx$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$= -\int \frac{du}{u}$$

$$= -\ln|u| + C$$

$$= -\ln|\cos x| + C$$

$$\therefore I = -2\ln|\cos x| + \cot x + C$$

صفوة معلمي الكويت

(18)

أوجد: $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\,dx$

حلل المقام

$$2x^3-5x^2-3x = x(2x^2-5x-3) = x(2x+1)(x-3)$$

اصفار المقام 0 ، $-\frac{1}{2}$ ، 3

بالضرب في $x(2x+1)(x-3)$

$$\frac{x^2-2}{x(2x+1)(x-3)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(2x+1)}+\frac{C}{(x-3)}$$

$$x^2-2 = A(2x+1)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(2x+1) \quad (1)$$

التعويض بأصفار المقام

بالتعويض في 1 بـ $x=0$

$$-2 = A(2(0)+1)(0-3)+\cancel{B(0)}+\cancel{C(0)} \qquad A=\frac{2}{3}$$

بالتعويض في 1 بـ $x=-0.5$

$$(-0.5)^2-2 = \cancel{A(0)}+B(-0.5)(-0.5-3)+\cancel{C(0)} \qquad B=-1$$

بالتعويض في 1 بـ $x=3$

$$(3)^2-2 = \cancel{A(0)}+\cancel{B(0)}+C(3)(2(3)+1) \qquad C=\frac{1}{3}$$

تابع الحل

أوجد: $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\,dx$

$$\frac{x^2-2}{x(2x+1)(x-3)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(2x+1)}+\frac{C}{(x-3)}$$

$A=\frac{2}{3}$

$B=-1$

$C=\frac{1}{3}$

$$\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\,dx = \int\left(\frac{\frac{2}{3}}{x}+\frac{-1}{2x+1}+\frac{\frac{1}{3}}{x-3}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-3| + C$$

صفوة معلمي الكويت

(19)

أوجد: $\int \frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}dx$

حلل المقام $x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1) = x\,(x-1)^2$

اصفار المقام 0 مكرر1

الأصفار: 0 | 1 | 1

المقامات: x | $x-1$ | $(x-1)^2$

بالضرب في $x(x-1)^2$

$$\frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$4x^2-4x+1 = A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx \quad (1)$$

التعويض بأصفار المقام

بالتعويض في 1 بـ $x=0$

$$1 = A(0-1)^2+\cancel{B(0)}+\cancel{C(0)} \qquad A=1$$

بالتعويض في 1 بـ $x=1$

$$4(1)^2-4(1)+1 = \cancel{A(0)}+\cancel{B(0)}+C(1) \qquad C=1$$

بالتعويض في 1 بـ $x=2, A=1, C=1$

x قيمة اختيارية لا تساوي أصفار المقام و A, C من الحل

$$4(2)^2-4(2)+1 = (1)(2-1)^2+B(2)(2-1)+(1)(2) \qquad B=3$$

تابع الحل

أوجد: $\int \frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}dx$

$$\frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

A = 1

B = 3

C = 1

$$\frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x}+\frac{3}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\int \frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2}dx = \int \frac{1}{x}+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}dx$$

$$= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{3}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx =$$

$$= \ln|x| + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

صفوة معلمي الكويت

(20)

حلل المقام

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2}\,dx$$

$$x^3+4x^2 = x^2(x+4)$$

اصفار المقام: 0 مكرر ، -4

الأصفار	0	0	-4
المقامات	x	x^2	$x+4$

بالضرب في $x^2(x+4)$

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+4}$$

$$x^2+1 = Ax(x+4) + B(x+4) + Cx^2$$

1 التعويض بأصفار المقام

بالتعويض في 1 بـ $x=0$

$$0^2+1 = \cancel{A(0)} + B(0+4) \cancel{+C(0)} \qquad B = \frac{1}{4}$$

بالتعويض في 1 بـ $x=-4$

$$(-4)^2+1 = \cancel{A(0)} \cancel{+B(0)} + C(-4)^2 \qquad C = \frac{17}{16}$$

بالتعويض في 1 بـ $x=1, B=\frac{1}{4}, C=\frac{17}{16}$

x قيمة اختيارية لا تساوي اصفار المقام و B, C من الحل

$$(1)^2+1 = A(1)(1+4) + \frac{1}{4}(1+4) + \frac{17}{16}(1)^2 \qquad A = \frac{-1}{16}$$

تابع الحل

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+4}$$

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+4)} = \frac{\frac{-1}{16}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{\frac{17}{16}}{x+4}$$

$A = \frac{-1}{16}$

$B = \frac{1}{4}$

$C = \frac{17}{16}$

$$\int \frac{x^2+1}{x(x+4)^2}\,dx = \int \frac{\frac{-1}{16}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{\frac{17}{16}}{x+4}\,dx =$$

$$= \int \frac{\frac{-1}{16}}{x}\,dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{x^2}\,dx + \int \frac{\frac{17}{16}}{x+4}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{4x} + \frac{17}{16}\ln|x+4| + C$$

(21)

$$\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}\,dx$$

$\because$ درجة البسط = درجة المقام

$\therefore$ نبدأ بقسمة البسط على المقام باستخدام القسمة المطولة

ناتج القسمة ⟵ 1

$$\begin{array}{r|l} x^2-4x+4 & x^2-3x+7 \\ & -\ (x^2-4x+4) \\ \hline & x+3 \end{array}$$

الباقي ⟵ $x+3$

$$\frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4} = 1 + \frac{x+3}{(x-2)^2}$$

الحدودية النسبية

$$\frac{x+3}{(x-2)^2} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2}$$

نضرب كلًا من طرفي المعادلة في $(x-2)^2$ ثم نبسّط

$$x+3 = A_1(x-2) + A_2$$

عوّض عن x بـ 2

$$2+3 = A_1(0) + A_2$$

$$\therefore\ A_2 = 5$$

نعوّض في المعادلة عن $A_2 = 5$ وإحدى قيم x ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_1 .

$$1+3 = -A_1 + 5$$

$$\therefore\ A_1 = 1$$

$$\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}\right) dx$$

$$= x + \ln|x-2| - \frac{5}{x-2} + C$$

صفوة معلمي الكويت

(22)

بأستخدام القسمه المطولة:

A)

$$\frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2} = 1 + \frac{9x-7}{(x-3)^2}$$

$$\frac{9x-7}{(x-3)^2} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{(x-3)^2}$$

$$9x-7 = A_1(x-3) + A_2$$

عوّض عن x بـ 3 $\therefore \quad A_2 = 20$

عوّض عن A_2 بـ 20 ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_1.

$$\therefore \quad A_1 = 9$$

$$\frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2} = 1 + \frac{9}{x-3} + \frac{20}{(x-3)^2}$$

$$\int \frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}dx = x + 9\ln|x-3| - \frac{20}{x-3} + C$$

B)

$$\frac{2x^2+x+3}{x^2-1} = 2 + \frac{x+5}{x^2-1}$$

$$\frac{x+5}{x^2-1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1}$$

$$x+5 = A_1(x+1) + A_2(x-1)$$

عوّض عن x بـ 1 $\therefore \quad A_1 = 3$

عوّض عن x بـ -1 $\therefore \quad A_2 = -2$

$$\frac{2x^2+x+3}{x^2-1} = 2 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1}$$

$$\int \frac{2x^2+x+3}{x^2-1}dx = \int \left(2 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$= 2x + 3\ln|x-1| - 2\ln|x+1| + C$$

صفوة معلمي الكويت

(23)

$$\int x\cos x\,dx$$

الحل:

$$u = x \qquad dv = \cos x\,dx$$
$$du = dx \qquad v = \sin x$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$
$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$$
$$= x\sin x + \cos x + C$$

(24)

$$\int (4x-1)\ln x\;dx$$

الحل :

$$u = \ln x \qquad dv = (4x-1)dx$$
$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = 2x^2 - x = x(2x-1)$$

$$\int u\,dv = u.v - \int v\,du$$

$$\int (4x-1)\ln x\;dx$$
$$= x(2x-1)\ln x - \int \frac{1}{x}.x(2x-1)dx$$
$$= x(2x-1)\ln x - \int (2x-1)dx$$
$$= x(2x-1)\ln x - (x^2 - x) + c$$
$$= x(2x-1)\ln x - x^2 + x + c$$

(25)

$$\int 4xe^{-5x}\,dx$$

الحل :

$$u = 4x \qquad dv = e^{-5x}dx$$

$$du = 4dx \longleftarrow v = -\frac{1}{5}e^{-5x}$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int 4xe^{-5x}\,dx = 4x\left(-\frac{1}{5}e^{-5x}\right) - \int -\frac{4}{5}e^{-5x}dx$$

$$= -\frac{4}{5}x\,e^{-5x} - \frac{4}{25}e^{-5x} + C$$

(26)

$$\int \ln x\;dx$$

الحل :

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \longleftarrow v = x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int \ln x\;dx = x\,ln\,x - \int x.\frac{1}{x}dx$$

$$= x\,ln\,x - \int dx = x\,ln\,(x) - x + C$$

صفوة معلمي الكويت

(27)

$$\int x^2 \sin x \; dx$$

الحل :

$u = x^2 \qquad dv = \sin x \, dx$

$du = 2x dx \qquad v = -cos x$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x^2 \sin x \; dx = -x^2 \cos x + \int 2x\cos x \, dx$$

$u = 2x \qquad dv = \cos x \, dx$

$du = 2 \, dx \qquad v = \sin x$

$$\int 2x\cos x \; dx = 2x\sin x \; - \int 2 \sin x \, dx$$

$$= 2x\sin x + 2\cos x + C$$

$$\therefore \int x^2 \sin x \; dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

(28)

$$\int x \sin(5x) dx$$

$u = x \qquad dv = \sin(5x) dx$

$du = dx \qquad v = \frac{-\cos(5x)}{5}$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x \sin(5x) dx$$

$$= \frac{-1}{5} x \cos(5x) - \int \frac{-\cos(5x)}{5} dx$$

$$= \frac{-1}{5} x \cos(5x) + \frac{1}{5} \int \cos(5x) \, dx$$

$$= \frac{-1}{5} x \cos(5x) + \frac{1}{5}\left(\frac{\sin(5x)}{5}\right) + c$$

$$= \frac{-1}{5} x \cos(5x) + \frac{1}{25}(\sin(5x)) + c$$

صفوة معلمي الكويت

(29)

أوجد: $\int x^2 \ln x^2 \, dx$

الحل

$I = \int 2x^2 \cdot \ln x \, dx$

$u = \ln x \qquad dv = 2x^2 \, dx$

$du = \frac{1}{x} dx \qquad \int v = \frac{2}{3} x^3$

$\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$I = \ln x \cdot \frac{2}{3} x^3 - \int \frac{2}{3} x^{\cancel{3}\,2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \, dx$

$I = \frac{2}{3} x^3 \cdot \ln x - \frac{2}{3} \int x^2 \, dx$

$I = \frac{2}{3} x^3 \cdot \ln x - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} x^3 + C$

$I = \frac{2}{3} x^3 \cdot \ln x - \frac{2}{9} x^3 + C$

صفوة معلمي الكويت

(30)

$$\int x^2 e^{2x-3} dx$$

$u = x^2 \qquad dv = e^{2x-3}\,dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x-3}$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x^2 e^{2x-3} dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x-3}$$

$$-\int x e^{2x-3} dx \ldots\ldots\ldots (1)$$

نستخدم قاعدة التجزيء مرة أخرى لإيجاد تكامل

$$\int x e^{2x-3}\, dx$$

$u = x \qquad dv = e^{2x-3}\,dx$

$du = dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x-3}$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x e^{2x-3} dx = \frac{1}{2}x e^{2x-3} - \frac{1}{2}\int e^{2x-3} dx$$

$$= \frac{1}{2}x e^{2x-3} - \frac{1}{4}e^{2x-3} + c \qquad (2)$$

من (2) ، (1) نحصل على

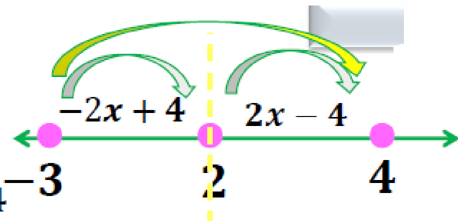
$$\therefore \int x^2 e^{2x-3} dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{2x-3} - \frac{1}{2}x e^{2x-3} + \frac{1}{4}e^{2x-3} + c$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{2x-3} + c$$

(31)

$$\int_{-3}^{4} |2x-4|\,dx$$



$$2x-4=0$$
$$2x=4$$
$$x=2$$

$$\int_{-3}^{2} |2x-4|\ dx + \int_{2}^{4} |2x-4|\ dx =$$

$$\int_{-3}^{2} (-2x+4)\ dx + \int_{2}^{4} (2x-4)\ dx =$$

$$= \left[-\frac{2x^2}{2}+4x\right]_{-3}^{2} + \left[\frac{2x^2}{2}-4x\right]_{2}^{4} =$$

$$= \left[-x^2+4x\right]_{-3}^{2} + \left[x^2-4x\right]_{2}^{4} =$$

$$[-(2)^2+4(2)] - [-(-3)^2+4(-3)] + [4^2-4(4)] - [2^2-4(2)]$$

$$= 29$$

صفوة معلمي الكويت

(32)

$$\boxed{\int_{-2}^{3} (x|x|+3)\,dx}$$

$$= \int_{-2}^{0} (x|x|+3)\ dx + \int_{0}^{3} (x|x|+3)\ dx$$

$$= \int_{-2}^{0} (-x^2+3)dx \ + \int_{0}^{3} (x^2+3)dx$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} + 3x\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{+x^3}{3} + 3x\right]_{0}^{3}$$

$$= -\left[\frac{8}{3} - 6\right] + [9+9-0]$$

$$= \frac{10}{3} + 18 = \frac{64}{3} = 21,3333$$

صفوة معلمي الكويت

(33)

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_3^5 (x^2+x)dx \geqslant 0$

الحل:

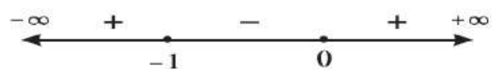
بفرض $f(x) = x^2 + x$

وهي دالة متصلة على $[3,5]$

نضع

$x^2 + x = 0$

$x(x+1) = 0$



$f(x) \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$

$\because \quad [3,5] \subseteq [0, \infty)$

$\therefore \quad x^2 + x \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in [3,5]$

$\int_3^5 (x^2+x)dx \geqslant 0$

(34)

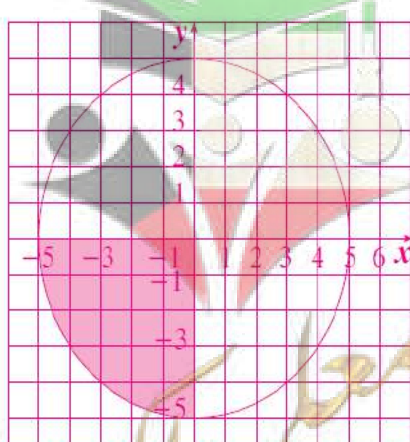
$y = -\sqrt{25-x^2} \quad \therefore \quad y^2 = 25 - x^2 \quad \therefore \quad y^2 + x^2 = 25$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 5 وحدات.

والدالة $y = -\sqrt{25-x^2}$ تمثل معادلة النصف السفلي للدائرة.

$\int_{-5}^{0} -\sqrt{25-x^2}\,dx = -A$

$= \frac{-1}{4}\pi(5)^2 = \frac{-25}{4}\pi$



(35)

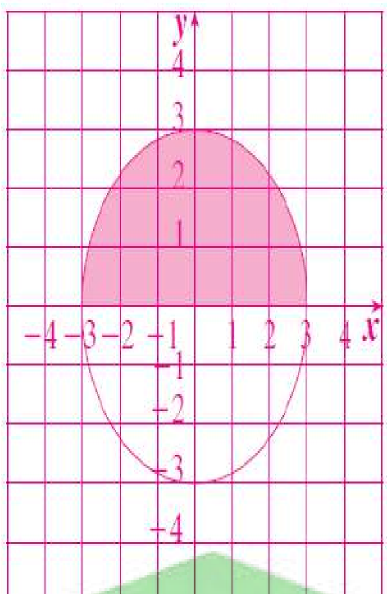
$y=\sqrt{9-x^2} \quad \therefore \quad y^2=9-x^2 \quad \therefore \quad y^2+x^2=9$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 3 وحدات.

والدالة $y=\sqrt{9-x^2}$ تمثل معادلة النصف العلوي للدائرة.

$\therefore$ مساحة المنطقة المظللة تساوي: $\therefore \int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$

$= \frac{1}{2}\pi(3)^2 = \frac{9}{2}\pi$



(36)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \;\; dx$$

$u = \tan x \;\; \Rightarrow du = \;\sec^2 x \;\; dx$

$u = \tan(0) = 0 \qquad \Leftarrow \quad x = 0$ عندما

$u = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \qquad \Leftarrow \quad x = \frac{\pi}{4}$ عندما

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \;\; dx = \int_0^1 u \;\; du$$

$$= \quad \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0$$

$$= \;\; \frac{1}{2}$$

صفوة معلمي الكويت

(37)

بأستخدام الكسور الجزئيه:

$$\boxed{\int_{-2}^{0} \frac{5x-1}{x^2+2x-3}\,dx}$$

$$\frac{5x-1}{x^2+2x-3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+3)}$$

$$5x-1 = A(x+3) + B(x-1)$$

عوض عن $\xrightarrow{x=1}$ $4 = 4A \xrightarrow{\text{ينتج}} A = 1$

عوض عن $\xrightarrow{x=-3}$ $-16 = -4B \xrightarrow{\text{ينتج}} B = 4$

$$= \int_{-2}^{0} \left(\frac{1}{(x-1)} + \frac{4}{(x+3)} \right) dx$$

$$= [\ln|x-1|]_{-2}^{0} + 4ln[|x+3|]_{-2}^{0}$$

$$= 3\ln 3$$

صفوة معلمي الكويت

(38)

$$\boxed{\int_1^e \frac{\ln^6 x}{x} dx}$$

$$\int_1^e \frac{\ln^6 x}{x} \quad dx = \int_1^e \frac{(\ln \ x)^6}{x} \ dx$$

$$u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x} \ dx$$

$$x \xrightarrow{=} e \qquad u \xrightarrow{=\ln e} 1$$

$$x \xrightarrow{=} 1 \qquad u \xrightarrow{=\ln 1} 0$$

$$\int_0^1 u^6 \ du$$

$$\left[\frac{u^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{7}$$

صفوة معلمي الكويت

(39)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \overset{u}{x}\ \overset{dv}{sec^2x\ dx} =$$

نحل كتكامل غير محدد بالتجزيء
ثم وضع حدود التكامل بعد الحصول على الحل النهائي

تفاضل نفرض أن تكامل

$u = x \qquad dv = sec^2x\ dx$

$du = dx \qquad v = tan\,x$

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

$$\int x\ sec^2x\ dx = x\tan x - \int \tan x\,dx$$

$$= x\tan x + \ln|\cos x| + C$$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$u = \cos x$

$du = -\sin x\,dx$

$-du = \sin x\,dx$

$$\int \tan x\,dx = \int -\frac{1}{u}du$$

$$= -\ln|u| + C$$

$$= -\ln|\cos x| + C$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\ sec^2x\ dx = [x\tan x + \ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left[\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4} + \ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right|\right] - [(0)\tan(0) + \ln|\cos(0)|]$$

$$= \left[\frac{\pi}{4}(1) + \ln\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\right] - [\cancel{(0)(0)} + \cancel{\ln|1|}] = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

صفوة معلمي الكويت

(40)

الحل : نوجد قيم x بحيث :

$$f(x)=x^3-9x \quad , \quad [-2\ ,\ 1]$$

$$f(x)=0$$

$$x^3-9x=0$$

$$x(x^2-9)=0$$

$$x(x-3)(x+3)=0$$

$$x=0 \qquad x=3 \qquad x=-3$$

$$0\in(-2,1) \qquad 3\notin(-2,1) \qquad -3\notin(-2,1)$$

$$A=\left|\int_{-2}^{0} f(x)dx\right|+\left|\int_{0}^{1} f(x)dx\right|$$

$$A=\left|\int_{-2}^{0} (x^3-9x)dx\right|+\left|\int_{0}^{1} (x^3-9x)dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{9}{2}x^2\right]_{-2}^{0}\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{9}{2}x^2\right]_{0}^{1}\right|$$

$$=\left|\left[\frac{(0)^4}{4}-\frac{9}{2}(0)^2\right]-\left[\frac{(-2)^4}{4}-\frac{9}{2}(-2)^2\right]\right|+\left|\left[\frac{(1)^4}{4}-\frac{9}{2}(1)^2\right]-\left[\frac{(0)^4}{4}-\frac{9}{2}(0)^2\right]\right|=\frac{73}{4}\ \text{square units}$$

صفوة معلمي الكويت

(41)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

$f(x) = \cos x \quad , \quad [0 , \pi]$

الحل :

نلاحظ أنه في الفترة $[0, \pi]$

تنقسم المنطقة المطلوبة إلى منطقتين حيث $f(x) = 0$ **عند** $x = \frac{\pi}{2}$

فتكون المساحة المطلوبة كما يلي :

$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx \right|$$

$$= \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos x)dx \right|$$

$$= \left| [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \right| + \left| (\sin x)_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right|$$

$$= \left| \left[\sin(\frac{\pi}{2})\right] - [\sin(0)] \right| + \left| [\sin(\pi)] - \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \right| = 2 \quad \textit{square units}$$

صفوة معلمي الكويت

(42)

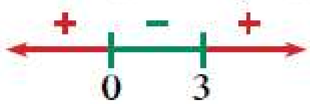
أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 3x$ ومحور السينات.

الحل:

نوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات بوضع

$$f(x) = 0$$
$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x-3) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{أو} \quad x = 3$$

نبحث هل $f(x) \leqslant 0$ أو $f(x) \geqslant 0$ في $[0\,,3]$



$$\because \quad f(x) \leqslant 0 \qquad \forall\, x \in [0\,,3]$$

$\therefore$ المساحة:

$$A = -\int_0^3 f(x)\,dx$$
$$= -\int_0^3 (x^2 - 3x)\,dx$$
$$= -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_0^3$$
$$= -\left[\left(9 - \frac{27}{2}\right) - (0)\right]$$
$$= -\left(-\frac{9}{2}\right)$$
$$= \frac{9}{2} \quad \text{units square}$$

ملاحظه:

يمكن حل السؤال بطريقه المطلق دون الاحتياج لخطوه اختبار الداله موجبه ولا سالبه.

(43)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي: $f(x)=x^2+1 \quad , \quad g(x)=-x^2+9$

الحل:

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنيين نضع $f(x)=g(x)$

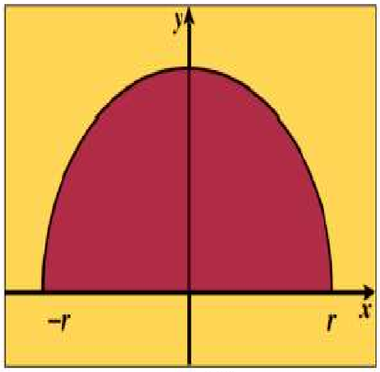
$$x^2+1=-x^2+9$$
$$2x^2=8$$
$$x^2=4$$
$$x=\pm 2$$

يكون التكامل من $x=-2$ إلى $x=2$ ومساحة المنطقة هي:

$$A=\left|\int_{-2}^{2}(f(x)-g(x))dx\right|$$
$$=\left|\int_{-2}^{2}(x^2+1+x^2-9)dx\right|=\left|\int_{-2}^{2}(2x^2-8)dx\right|$$
$$=\left|\left[\frac{2x^3}{3}-8x\right]_{-2}^{2}\right|$$
$$=\left|\left[\frac{2(2)^3}{3}-8(2)\right]-\left[\frac{2(-2)^3}{3}-8(-2)\right]\right|$$
$$=\frac{64}{3}$$ (وحدة مربعة)

(44)

باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بنصف الدائرة $y=\sqrt{r^2-x^2}$



شكل توضيحي

الحل :

$$y=\sqrt{r^2-x^2}$$

تمثل معادلة نصف دائرة مركزها $(0,0)$ و طول نصف قطرها r

المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات هو كرة

$$V=\pi\int_{-r}^{r} y^2\,dx=\pi\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx$$

$$=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx$$

$$=\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r}$$

$$=\pi\left(\left[r^2(r)-\frac{1}{3}(r)^3\right]-\left[r^2(-r)-\frac{1}{3}(-r)^3\right]\right)$$

$$=\frac{4}{3}\pi r^3 \text{ cubic units}$$

(45)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f:

$f(x) = \sqrt{x-1}$ ومحور السينات في الفترة $[1,5]$.

الحل :

$$V = \pi \int_1^5 (f(x))^2 dx$$

$$= \pi \int_1^5 (\sqrt{x-1})^2 dx$$

$$= \pi \int_1^5 (x-1) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^5$$

$$= \pi\left(\left[\frac{(5)^2}{2} - (5)\right] - \left[\frac{(1)^2}{2} - (1)\right]\right)$$

$$= 8\pi \quad cubic\ units$$

صفوة معلمي الكويت

(46)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين $f(x) = x^2 \ , \ g(x) = \sqrt{x}$: g

الحل:

المنطقة المستوية محددة بمنحنيي الدالتين

نجد التقاطع بوضع:

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 = \sqrt{x} \qquad (x \geqslant 0)$$

بتربيع الطرفين

$$x^4 = x$$
$$x^4 - x = 0$$
$$x(x^3 - 1) = 0$$
$$x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

نحصل على: $x = 0 \ , \ x = 1$

وبالنسبة إلى المعادلة $x^2 + x + 1 = 0$

نوجد المميز Δ :

$$\Delta = 1 - 4(1)(1) = -3 \ , \ -3 < 0$$

$\therefore$ المعادلة ليس لها حلول في $\mathbb{R}$ فيكون التكامل على $[0,1]$

نأخذ قيمة اختيارية في $(0,1)$ ولتكن $x = \frac{1}{4}$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} \quad , \quad g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad g(x) \geqslant f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

$\therefore$ حجم المجسم الناتج عن الدوران: $V = \pi \int_0^1 [(g(x))^2 - (f(x))^2]dx$

$$V = \pi \int_0^1 [(\sqrt{(x)})^2 - (x^2)^2]dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4)dx$$

$$= \pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - (0)\right]$$

$$= \frac{3}{10}\pi \quad \text{units cube}$$

صفوة معلمي الكويت

(47)

اوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بين منحنيي الدالتين

$$f(x)=\frac{x^2}{2}+1 \quad , \quad g(x)=\frac{x}{2}+2$$

الحل : نوجد نقاط التقاطع

$$f(x)=g(x)$$

$$\frac{x^2}{2}+1=\frac{x}{2}+2$$

$$\frac{x^2}{2}+1-\frac{x}{2}-2=0$$

$$\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}-1=0$$

$$x=2 \quad , \quad x=-1$$

نأخذ نقطة اختيارية في الفترة $(-1,2)$ و لتكن $x=0$

$$f(0)=\frac{(0)^2}{2}+1=1$$

$$g(0)=\frac{(0)}{2}+2=2$$

$$g(x)\geq f(x)\geq o \quad \forall\, x\in[-1,2]$$

$$V=\pi\int_{-1}^{2}\left((g(x))^2-(f(x))^2\right)dx=\pi\int_{-1}^{2}\left(\left(\frac{x}{2}+2\right)^2-\left(\frac{x^2}{2}+1\right)^2\right)dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{2}\left(\left(\frac{x^2}{4}+2x+4\right)-\left(\frac{x^4}{4}+x^2+1\right)\right)dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{2}\left(\frac{x^2}{4}+2x+4-\frac{x^4}{4}-x^2-1\right)dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{2}\left(-\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{4}+2x+3\right)dx$$

$$=\pi\left[-\frac{x^5}{20}-\frac{x^3}{4}+x^2+3x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\pi\left(\left[-\frac{32}{20}-2+4+6\right]-\left[\frac{1}{20}+\frac{1}{4}+1-3\right]\right)$$

$$=\frac{81}{10}\pi \text{ cubic units}$$

(48)

حاله خاصة :

تمتد المنطقة المظلّلة من $x = -1$ إلى $x = 2$ ويتقاطعا عند النقطة $x = \frac{1}{2}$.

$$V = \pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}[(-x+3)^2-(x+2)^2]dx+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}[(x+2)^2-(-x+3)^2]dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}}(5-10x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}(-5+10x)dx$$

$$=[5x-5x^2]_{-1}^{\frac{1}{2}}+[-5x+5x^2]_{\frac{1}{2}}^{2} = \text{ 22.5 unit cub}$$

(49)

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x)=\frac{2}{9}(9+3x)^{\frac{3}{2}}$

في الفترة $[2,5]$

الحل

$$f'(x)=\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{3}{2}\right)(9+3x)^{\frac{1}{2}}(3)$$

$$=(9+3x)^{\frac{1}{2}}$$

$$L=\int_{2}^{5}\sqrt{1+(f'(x))^{2}}\,dx$$

$$=\int_{2}^{5}\sqrt{1+9+3x}\,dx=\int_{2}^{5}\sqrt{10+3x}\,dx$$

$$=\int_{2}^{5}(10+3x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_{2}^{5}3(10+3x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left[(10+3x)^{\frac{3}{2}}\right]_{2}^{5}$$

$$=\left(\frac{2}{9}\right)\left[(25)^{\frac{3}{2}}-(16)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$=\frac{122}{9}\ \text{units}$$

صفوة معلمي الكويت

(50)

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f :

$f(x) = 5 + 2\sqrt{x^3}$ في الفترة $\left[0\,,\frac{1}{3}\right]$

الحل :

$$f(x) = 5 + 2x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = 3x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + 9x}\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} (1 + 9x)^{\frac{1}{2}}\ dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^{\frac{1}{3}} 9\ (1 + 9x)^{\frac{1}{2}}\ dx$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}(1 + 9x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{2}{3}\left[(4)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$\therefore L = \frac{14}{27}\ (\text{وحدة طول})$$

صفوة معلمي الكويت

(51)

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي $3x^2 + x$ ويمر بالنقطة $(2, 2)$

الحل :

$$f'(x) = 3x^2 + x$$

$$f(x) = \int (3x^2 + x)dx$$

$$= \frac{3x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$= x^3 + \frac{x^2}{2} + C$$

لإيجاد قيمة الثابت C نعوض بالنقطة $(2,2)$ في المعادلة السابقة فنجد :

$$2 = (2)^3 + \frac{(2)^2}{2} + C$$

$$2 = 8 + 2 + C$$

$$C = -8$$

معادلة منحنى الدالة f المطلوب هو :

$$f(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - 8$$

صفوة معلمي الكويت

(52)

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه $(x\ ,\ y)$ يساوي $\sqrt{5-4x}$ فأوجد معادلة المنحنى عندما يمر بالنقطة $A(-5\ ,\ 3)$

الحل : ميل العمودي $= \dfrac{-1}{f'(x)}$ $\qquad f'(x) \neq 0$

$$\frac{-1}{f'(x)} = \sqrt{5-4x}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{5-4x}}$$

$$f(x) = \int \frac{-1}{\sqrt{5-4x}}\,dx$$

$$= -\int (5-4x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int -4(5-4x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{4} \times [\frac{2}{1}(5-4x)^{\frac{1}{2}} + C]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{5-4x} + \frac{1}{4}C$$

تابع للحل :

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5-4x} + \frac{1}{4}C$$

لإيجاد قيمة الثابت C نعوض بالنقطة $A(-5,3)$ في المعادلة السابقة فنجد :

$$3 = \frac{1}{2}\sqrt{5-4(-5)} + \frac{1}{4}C$$

$$3 = \frac{5}{2} + \frac{1}{4}C$$

$$C = 2$$

معادلة منحنى الدالة f المطلوب هو :

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5-4x} + \frac{1}{2}$$

صفوة معلمي الكويت

(53)

إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x, y) هو $2x-1$

فأوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة $B(1, 0)$

الحل : ميل العمودي $= \dfrac{-1}{f'(x)}$ $\quad f'(x) \neq 0$

$$\frac{-1}{f'(x)} = 2x-1$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2x-1}$$

$$f(x) = \int \frac{-1}{2x-1}\,dx$$

$$= \frac{-1}{2} ln\,|2x-1| + C$$

لإيجاد قيمة الثابت C نعوض بالنقطة $B(1,0)$ في المعادلة السابقة فنجد :

$$0 = \frac{-1}{2} ln\,|2(1)-1| + C$$

$$C = 0$$

معادلة منحنى الدالة f المطلوب هو :

$$f(x) = \frac{-1}{2} ln\,|2x-1|$$

(54)

حل المعادلات التفاضلية التالية:

$y' - 2xy = 0$

الحل:

$$y' - 2xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0 \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

فصل المتغيرات

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx$$

كامل الطرفين $\int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx$$

$$\ln|y| = x^2 + C$$

$$|y| = e^{x^2+C} = e^{x^2} \cdot e^C \qquad \ln y = x \Rightarrow y = e^x$$

$$y = \pm e^C \cdot e^{x^2}$$

$$y = ke^{x^2} \qquad \pm e^C = k$$

(55)

حل المعادلة التفاضلية:

a) $$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + C$$

$$y = \pm\, e^{2\ln|x|+C}$$

$$y = ke^{2\ln|x|} \quad , \quad k = \pm\, e^{C}$$

b) $y' = -2y$ إذا كان $y = 3$ عند $x = 0$

كتابة المعادلة على الصورة: $y' = ay$

$$y = ke^{ax}$$

$$y = ke^{-2x}$$

$$3 = ke^{0}$$

$$k = 3$$

ومنه:

$$y = 3e^{-2x}$$

صفوة معلمي الكويت

(56)

المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay + b$ حيث $a \neq 0$, $b \neq 0$ تكون حلولها: $y = k\,e^{ax} - \frac{b}{a}$

a حلّ المعادلة: $2y' + y = 1$

b أوجد الحل الذي يحقق $y = 2$ عند $x = -1$

الحل:

اكتب المعادلة على الشكل $y' = ay + b$

a $2y' + y = 1$

$$y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

طبّق القاعدة

$$y = k\,e^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

عوّض x , y بقيمتيهما

b $k\,e^{\frac{1}{2}} + 1 = 2$

$$k = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} + 1$$

صفوة معلمي الكويت

(57)

أوجد معادلة المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و بؤرته $F(-4,0)$

الحل

الرأس نقطة الأصل

$\because$ البؤرة $F(-4,0)$ تنتمي إلى الجزء السالب من محور السينات

$p = -4$ ، معادلة الدليل : $x = 4$ (مستقيم رأسي)

محور تماثل القطع هو محور السينات (فتحة القطع لليسار)

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4px$

معادلة القطع المكافئ هي: $y^2 = -16x$

صفوة معلمي الكويت

(58)

أوجد البؤرة و الدليل لقطع مكافئ ، ثم إرسم شكلا تقريبا لهذا القطع في كل مما يلي :

المعادلة : $y = \frac{x^2}{4}$

الحل

نضع المعادلة على الصورة $x^2 = 4y$

المعادلة في الصورة $x^2 = 4py$

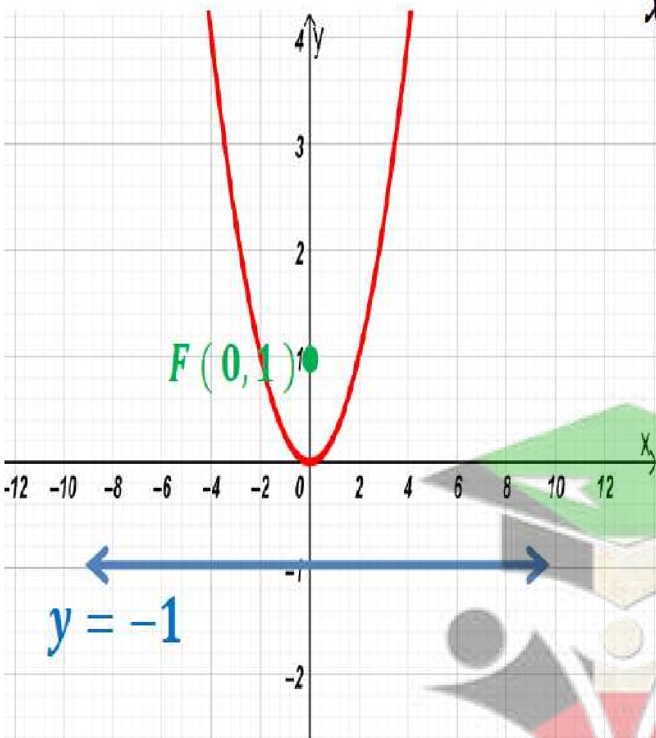
محور التماثل هو محور الصادات

$\therefore \; 4p = 4 \Rightarrow p = 1$

$\therefore$ البؤرة $F(0,p) = F(0,1)$

معادلة الدليل :

$y = -p \Rightarrow y = -1$



(59)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و يمر بالنقطة $A(1,2)$
و خط تماثله $x\text{-}axis$

الحل

رأس القطع المكافئ نقطة الأصل ، و خط تماثله $x\text{-}axis$

المعادلة في الصورة $y^2 = 4px$

القطع المكافئ يمر بالنقطة $A(1,2)$

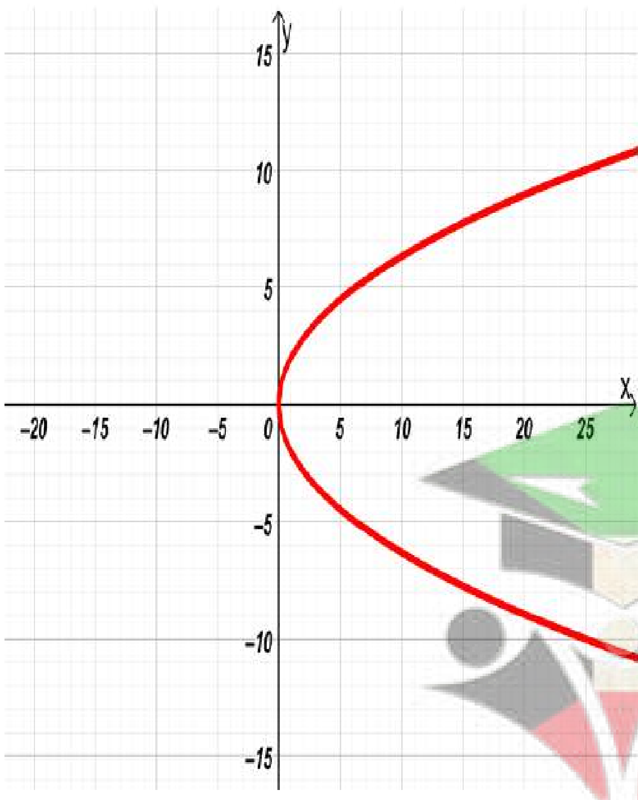
تحقق المعادلة أي أن :

$$(2)^2 = 4p(1)$$

$$\therefore \; 4 = 4p \;\Rightarrow p = 1$$

المعادلة هي : $y^2 = 4(1)x$

$$y^2 = 4x$$



صفوة معلمي الكويت

(60)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و معادلة دليله $y = 1$

الحل

معادلة الدليل $y = 1$ (مستقيم أفقي)

و الدليل متعامد مع خط التماثل

خط التماثل رأسي $(y - axis)$

معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $x^2 = 4py$

معادلة الدليل هي على الصورة $y = -p$

$$y = 1 \Rightarrow \quad p = -1$$

المعادلة $x^2 = 4py$

$$x^2 = 4(-1)y$$

$$x^2 = -4y$$

صفوة معلمي الكويت

(61)

إذا كانت: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ معادلة قطع ناقص فأوجد :

(a) رأسي القطع وطرفي المحور الأصغر.

(b) البؤرتين.

(c) معادلتي دليلي القطع.

(d) طول كل من المحورين ثم ارسم شكلا تقريبيا للقطع.

الحل:

(a) معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ومن معادلة القطع الناقص نجد أن :

$$a^2=9 \Rightarrow a=3$$

$$b^2=4 \Rightarrow b=2$$

والمحور الاكبر ينطبق علي محور الصادات

رأسا القطع الناقص هما : $A_1(0,-3)\,,A_2\,(0,3)$

طرفا المحور الاصغر هما : $B_1(-2,0)\,,B_2(2,0\,)$

(b) البؤرتين:

$$C^2=a^2-b^2 \quad \Rightarrow C^2=9-4=5$$

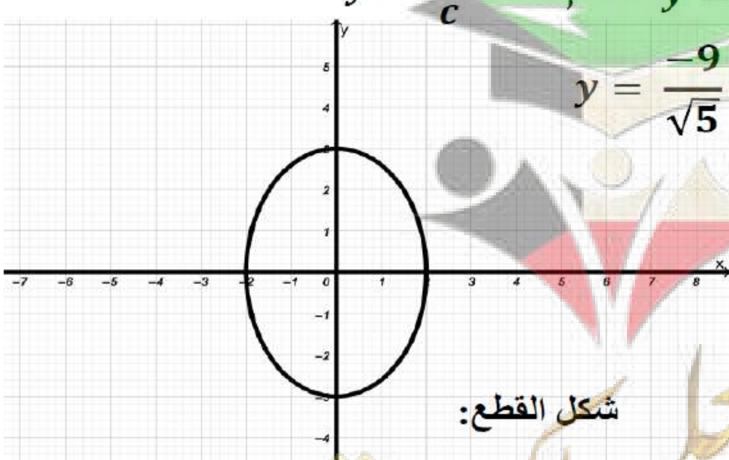
$$C=\sqrt{5}$$

$$F_1(0,-\sqrt{5}\,)\,,F_2(0,\sqrt{5}\,)$$

(c) معادلة الدليلين:

$$y=\frac{a^2}{c} \quad , \quad y=-\frac{a^2}{c}$$

$$y=\frac{-9}{\sqrt{5}} \quad , \quad y=\frac{9}{\sqrt{5}}$$



شكل القطع:

(d) طول المحور الاكبر:

$2a = 6$

طول المحور الأصغر:

$2b = 4$

(62)

أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(-2,0),F_2(2,0)$ وطول محوره الاكبر 6 . ثم ارسم شكلا تقريبيا لهذا القطع.

الحل:

تقع البؤرتان على محور السينات فتكون معادلة القطع علي الصورة:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ وتكون $c=2$

$\because$ طول المحور الاكبر $= 6$

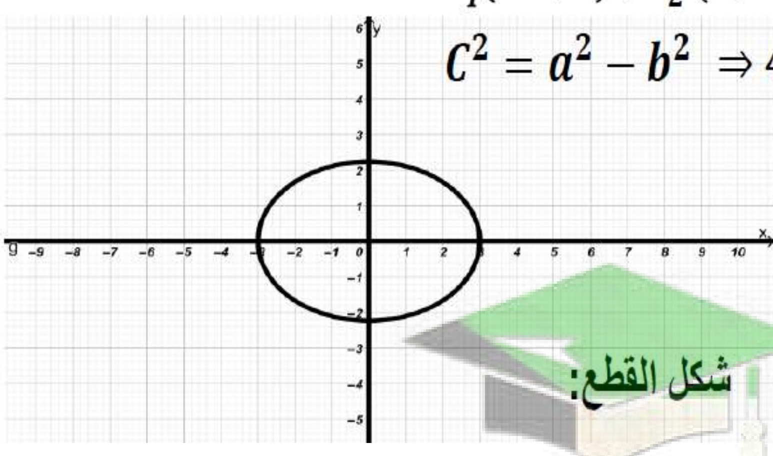
$$\therefore 2a=6 \Rightarrow a=3 \Rightarrow a^2=9$$

$\therefore$ طرفا المحور الاكبر هما : $A_1(-3,0)\ ,A_2(3,0)$

$$C^2=a^2-b^2 \Rightarrow 4=9-b^2 \Rightarrow b^2=5$$

$\therefore$ معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$



شكل القطع:

صفوة معلمي الكويت

(63)

أوجد البؤرتين والرأسين وطول المحور الاكبر للقطع الناقص الذي معادلته $x^2 + 4y^2 = 16$:

الحل:

$$x^2 + 4y^2 = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{4y^2}{16} = \frac{16}{16} \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \text{ ، } b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$C^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow C^2 = 16 - 4$$

$$C^2 = 12 \Rightarrow C = \sqrt{12} \Rightarrow C = 2\sqrt{3}$$

تقع البؤرتان على محور السينات : $F_1\left(-2\sqrt{3}, 0\right), F_2\left(2\sqrt{3}, 0\right)$

تقع الرأسان على محور السينات : $A_1(-4, 0), A_2(4, 0)$

طول المحور الاكبر: $2a = 2 \times 4 \Rightarrow a = 8$

صفوة معلمي الكويت

(64)

اكتب معادلة القطع الناقص الذي فيه:

$V_1F_1+V_1F_2=10$، حيث إنّ V_1 هو نقطة على القطع الناقص، F_2 و F_1 هما البؤرتين، علمًا أنّ $F_1(3,0)$، $F_2(-3,0)$.

الحل: تقع البؤرتان على محور السينات فتكون المعادلة علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ وتكون $c=3$

$$V_1F_1+V_2F_2=10 \Rightarrow 2a=10 \Rightarrow a=5 \Rightarrow a^2=25$$

$$C^2=a^2-b^2 \Rightarrow 9=25-b^2 \Rightarrow b^2=16$$

معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

صفوة معلمي الكويت

(65)

إذا كانت: $9y^2 - 25x^2 = 225$ معادلة قطع زائد فأوجد :

١- رأسي القطع الزائد.

٢- البؤرتين.

٣- معادلتي دليلي القطع.

٤- طول كل من المحورين

٥- معادلة كلا من الخطين التقاربين ثم ارسم شكلا تخطيطيا للقطع.

الحل:

$$9y^2 - 25x^2 = 225 \xrightarrow{\div 225} \frac{9y^2}{225} - \frac{25x^2}{225} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$$

ومن معادلة القطع الزائد نجد أن : $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$, $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$$C^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow C^2 = 25 + 9 = 34 \Rightarrow C = \sqrt{34}$$

والمحور القاطع ينطبق علي محور الصادات

(1) رأسا القطع الزائد هما : $A_1(0, -5)$, $A_2(0, 5)$

(2) البؤرتين: $F_1(0, -\sqrt{34})$, $F_2(0, \sqrt{34})$

(3) معادلتا الدليلين:

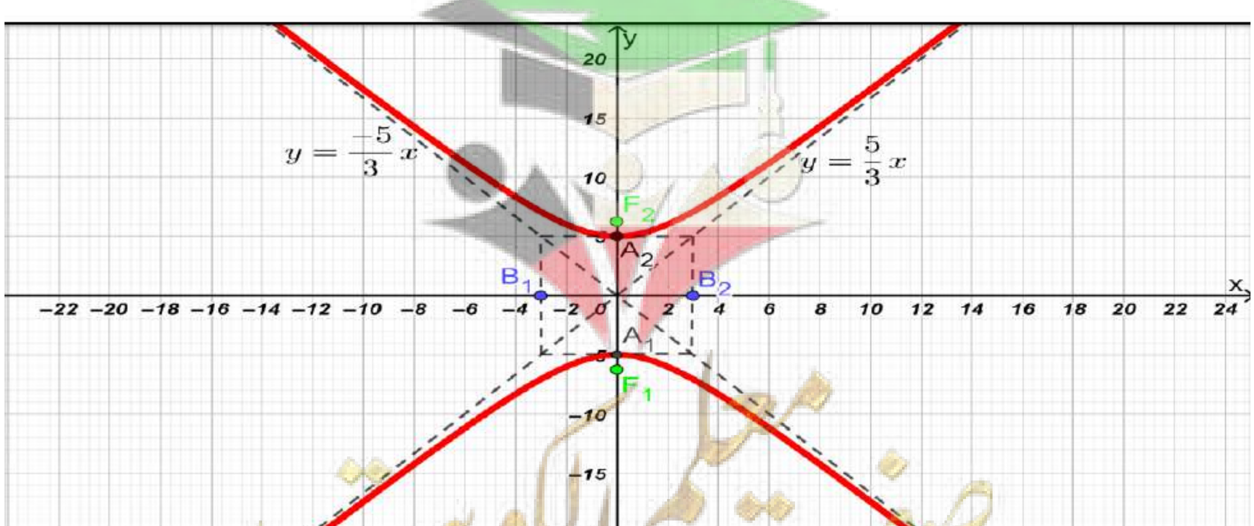
$$y = \frac{a^2}{c} \quad , \quad y = -\frac{a^2}{c} \Rightarrow y = \frac{-25}{\sqrt{34}} \quad , \quad y = \frac{25}{\sqrt{34}}$$

(4) طول المحور القاطع يساوي $2a$: $2a = 2 \times 5 = 10$

طول المحور المرافق يساوي $2b$: $2b = 2 \times 3 = 6$

(5) معادلتا كل من الخطين المقاربين :

$$y = \pm \frac{a}{b}x \Rightarrow y = \pm \frac{5}{3}x$$



(66)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_1(-4,0),F_2(4,0)$ ورأساه $A_1(-2,0),A_2(2,0)$ ثم أوجد معادلة كل من خطيه المقاربين وارسم شكلا تقريبيا لهذا القطع.

الحل:

تقع البؤرتان على محور السينات فتكون المعادلة علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

احدي البؤرتين $F_2(4,0)$ ومنها تكون $C = 4$

احدي الرأسين $A_2(2,0)$ ومنها تكون $a = 2$

ولكن

$$C^2=a^2+b^2 \Rightarrow 4^2=2^2+b^2$$

$$b^2=16-4=12 \quad \Rightarrow b=2\sqrt{3}$$

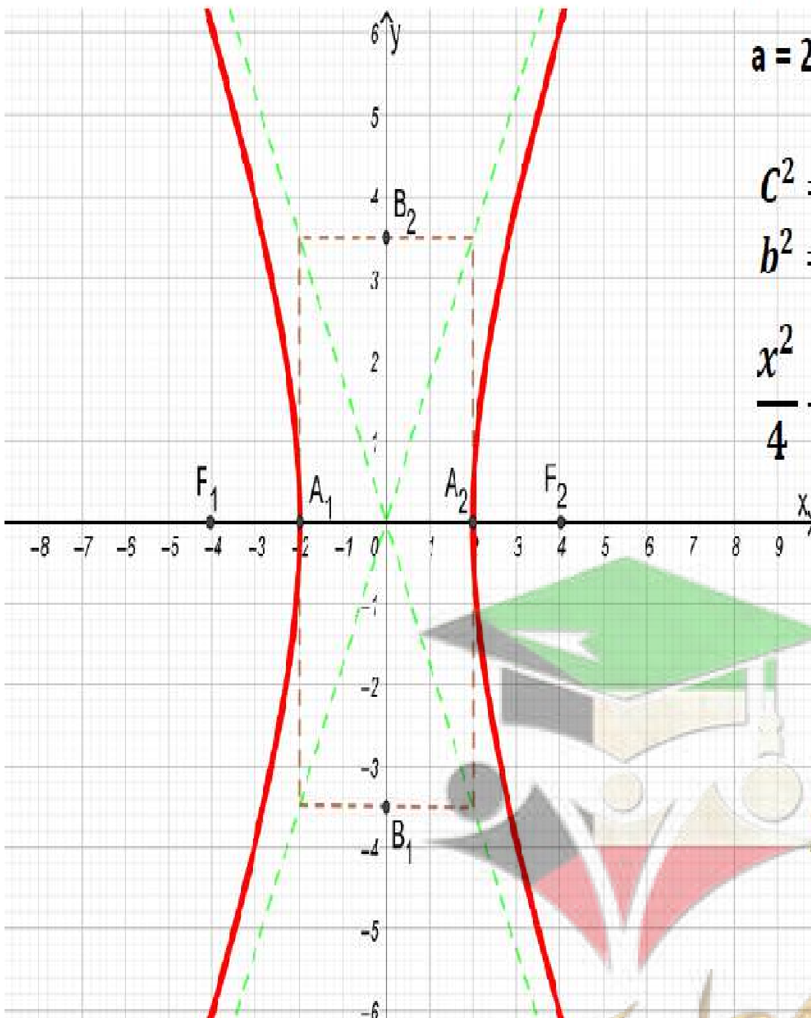
معادلة القطع الزائد هي: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

معادلة كل من الخطين المقاربين :

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

$$y=\pm\frac{\sqrt{12}}{2}x \Rightarrow y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$y=\pm\sqrt{3}$$



صفوة معلمي الكويت

(67)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي أحد رأسيه $\left(0, \frac{5}{4}\right)$ ويمر بالنقطة $\left(-\sqrt{3}, -\frac{5}{2}\right)$

$\because$ رأس القطع $\left(0, \frac{5}{4}\right)$ $\therefore$ رأس القطع على محور الصادات

$a = \frac{5}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{25}{16}$

ومعادلة القطع من الشكل $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ، وبالتعويض

$\frac{16y^2}{25} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

$\because \left(-\sqrt{3}, -\frac{5}{2}\right) \in$ للقطع

$\therefore \frac{16 \times \frac{25}{4}}{25} - \frac{3}{b^2} = 1 \Rightarrow 4 - 1 = \frac{3}{b^2} \Rightarrow b^2 = 1$

$\therefore$ معادلة القطع الزائد $\frac{16y^2}{25} - \frac{x^2}{1} = 1$

صفوة معلمي الكويت

(68)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0\,,0)$ وإحدى بؤرتيه $F(0\,,\sqrt{34})$ ومعادلة أحد خطيه المقاربين هي: $y=\frac{3}{5}x$

الحل:

$\because$ إحدى البورتين $F(0\,,\sqrt{34})$

$\therefore$ المحور القاطع ينطبق على محور الصادات ومعادلته: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

$\because\ c^2=a^2+b^2$

$\therefore\ 34=a^2+b^2 \quad (1)$

معادلة المقارب: $y=\frac{a}{b}x$ حيث من المعطى $y=\frac{3}{5}x$

$\therefore\ \frac{3}{5}=\frac{a}{b}$

$\therefore\ a=\frac{3b}{5}$

بالتعويض في المعادلة (1):

$$34=\left(\frac{3b}{5}\right)^2+b^2$$

$$34=\frac{9b^2}{25}+b^2$$

$$850=9b^2+25b^2$$

$$b^2=\frac{850}{34}$$

$$b^2=25 \quad \Longrightarrow \quad b=5$$

لإيجاد قيمة a نستخدم:

$$a=\frac{3b}{5}$$

$$a=\frac{3\times 5}{5}=3$$

ومعادلة القطع الزائد هي:

$$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{25}=1$$

صفوة معلمي الكويت

(69)

أوجد الاختلاف المركزي للقطع الذي معادلته

$$x^2 - 25y^2 = 1$$

الحل :

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{25}} = 1$$

بالمقارنة قطع زائد معادلته: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$a^2 = 1 \quad \to a = 1$$

$$b^2 = \frac{1}{25} \quad \to b = \frac{1}{5}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 1 + \frac{1}{25}$$

$$c^2 = \frac{26}{25}$$

$$c = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

الاختلاف المركزي : $e = \frac{c}{a}$

$$e = \frac{\frac{\sqrt{26}}{5}}{1}$$

$$e = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

صفوة معلمي الكويت

(70)

حدد نوع القطع في كل مما يلي ثم أوجد معادلته.

اختلافه المركزي $(e = 2)$ ومعادلة أحد دليليه: $x = 1$

$\because\ e = 2\ ,\ 2 > 1$

$\therefore$ القطع هو قطع زائد

$\because$ معادلة أحد دليليه $x = 1$

$\therefore$ المحور القاطع (الأساسي) ينطبق على محور السينات ومركزه $(0, 0)$

معادلة الدليل هي:

$$x = \frac{a^2}{c}$$

$$1 = \frac{a^2}{c}$$

$$c = a^2 \qquad (1)$$

$$\because\ e = \frac{c}{a}$$

$$\therefore\ 2 = \frac{c}{a}$$

$$c = 2a \qquad (2)$$

بحل المعادلتين $(1)\ ,\ (2)$

$$a^2 = 2a$$

$$a(a-2) = 0$$

$\therefore\ a = 0$ مرفوضة أو $a = 2$ قيمة مقبولة

$$\therefore\ e = a = 2$$

$$c = (2)^2 = 4$$

$$\because\ c^2 = a^2 + b^2$$

$$\because\ c^2 = a^2 + b^2$$

$$16 = 4 + b^2 \implies b^2 = 12$$

$\because$ معادلة القطع هي:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

صفوة معلمي الكويت

(71)

أوجد طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي اختلافه المركزي $\left(e = \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ وطول محوره الأصغر 4 وحدات.

الحل:

$$\because \quad e = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \quad \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

أي: $c = \frac{a\sqrt{5}}{3}$

طول المحور الأصغر 4 أي $2b = 4$

$$b = 2$$

في القطع الناقص:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$\frac{5a^2}{9} = a^2 - 4$$

$$a^2 = 4 + \frac{5a^2}{9}$$

$$9a^2 = 36 + 5a^2$$

$$4a^2 = 36$$

$$a^2 = 9$$

$$a = 3$$

$$2a = 2(3) = 6$$

طول المحور الأكبر = 6 وحدات.

(72)

عند رمي حجر نرد مرة واحدة ، إذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن :
((مربع العدد الظاهر مطروحًا منه 1 عندما يكون العدد الظاهر أصغر من 4 ، و2- لغير ذلك))
فأوجد :

1) فضاء العينة (S) وعدد عناصر $n(s)$
2) مدى المتغير العشوائي X
3) احتمال وقوع كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X
4) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X

الحل :

1) فضاء العينة : S = {1 , 2 , 3 , 4 , 5 ,6 }
، عدد عناصر فضاء العينة (S) : $n(s) = 6$

2)

عناصر مدى المتغير العشوائي	عناصر فضاء العينة
0	1
3	2
8	3
-2	4
-2	5
-2	6

مدى المتغير العشوائي: X= {-2 , 0 , 3 , 8 }

3)

$$P(X=-2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \quad , \quad P(X=0)=\frac{1}{6}$$

$$P(X=3)=\frac{1}{6} \quad , \quad P(X=8)=\frac{1}{6}$$

4) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X :

x	-2	0	3	8
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

صفوة معلمي الكويت

(73)

لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & : 0\le x\le 3\\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك}\end{cases}$$

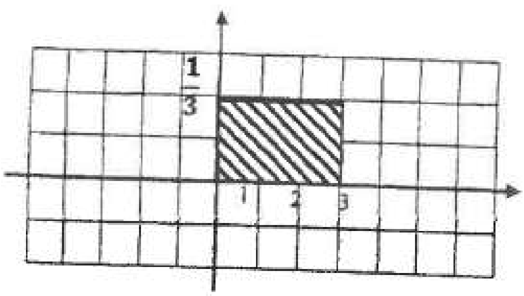
a) اثبت أن f هي دالة كثافة احتمال

b) اثبت أن f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم

c) أوجد التوقع والتباين للدالة f

الحل :

نرسم بيان الدلة f :



1) المساحة تحت المنحنى من الشكل هي

مساحة المنطقة المستطيلة = الطول × العرض

$$=3\times\frac{1}{3}=1$$

$\therefore$ الدالة f هي دالة كثافة احتمال

2) لإثبات أن الدالة تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم يجب أن تكون الدالة على الصورة :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & : a\le x\le b\\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك}\end{cases}$$

$$\because\ a=0\ ,b=3\rightarrow b-a=3$$

$$\therefore \frac{1}{b-a}=\frac{1}{3}\rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & : 0\le x\le 3\\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك}\end{cases}$$

$\therefore$ الدالة f هي دالة تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم

3) التوقع : $\mu=\frac{a+b}{2}=\frac{0+3}{2}=\frac{3}{2}$

التباين : $\sigma^2=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(3-0)^2}{12}=\frac{3}{4}$

صفوة معلمي الكويت

(74)

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلا ودالة كثافة الاحتمال له هي :

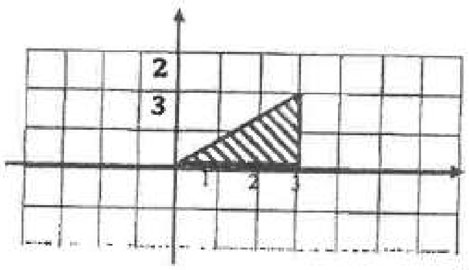
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}x & : 0 \le x \le 3 \\ 0 : & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد :

3) $P(X = 1)$ 2) $p(X \ge 2)$ 1) $p(0 < X \le 3)$

الحل :

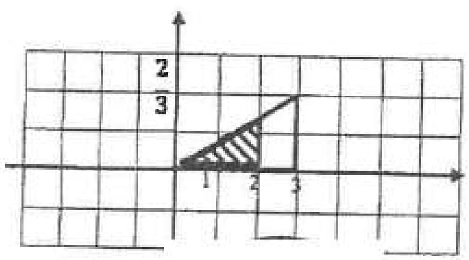
نرسم بيان الدلة f :



1) مساحة المنطقة المظللة :

$$p(0 < X \le 3) = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{2}{3}$$

$$= 1$$



2) مساحة المنطقة غير المظللة من المثلث :

$$p(X \ge 2) = 1 - p(X < 2)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4}{9}$$

$$= \frac{5}{9}$$

3) $p(X = 2) = 0$

(75)

يبين الجدول التالي دالة التوزيع الإحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.2	0.1	0.3	0.1	0.3

أوجد :

1) التوقع μ
2) التباين σ^2
3) الإنحراف المعياري σ

الحل

1) التوقع (μ) :

$$\mu = \sum x_i f(x_i)$$

$$\mu = (1)(0.2) + (2)(0.1) + (3)(0.3) + (4)(0.1) + (5)(0.3)$$

$$= 0.2 + 0.2 + 0.9 + 0.4 + 1.5$$

$$= 3.2$$

2) التباين (σ^2) :

$$\sigma^2 = \sum (x_i)^2 f(x_i) - \mu^2$$

$$= (1)^2(0.2) + (2)^2(0.1) + (3)^2(0.3) + (4)^2(0.1) + (5)^2(0.3) - (3.2)^2$$

$$= 12.4 - 10.24$$

$$= 2.16$$

3) الإنحراف المعياري (σ) :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$= \sqrt{2.16} \approx 1.47$$

صفوة معلمي الكويت

(76)

عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائي X يعبّر عن «عدد الكتابات».

فأوجد ما يلي:

a فضاء العينة (S) وعدد عناصره $n(S)$.

b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

الحل:

a فضاء العينة:

$$S = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$$

$n(S) = 8$

b

عدد الكتابات في كل عنصر	عناصر فضاء العينة S
0	(H,H,H)
1	(H,H,T)
1	(H,T,H)
1	(T,H,H)
2	(H,T,T)
2	(T,H,T)
2	(T,T,H)
3	(T,T,T)

$\therefore$ مدى المتغير العشوائي: $X = \{0, 1, 2, 3\}$

c

$P(X=0) = \frac{1}{8}$

$P(X=1) = \frac{3}{8}$

$P(X=2) = \frac{3}{8}$

$P(X=3) = \frac{1}{8}$

d دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

صفوة معلمي الكويت

(77)

الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	3	4	5
$f(x)$	0.5	0.3	0.2

إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X.

فأوجد: $F(2)\ ,\ F(3)\ ,\ F(4)\ ,\ F(4.5)\ ,\ F(5)\ ,\ F(7)$

الحل:

$$F(2) = P(X \leq 2) = 0$$

$$\begin{aligned} F(3) &= P(X \leq 3) = P(X < 3) + P(X = 3) \\ &= 0 + 0.5 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(4) &= P(X \leq 4) \\ &= P(X < 4) + P(X = 4) \\ &= P(3) + P(4) \\ &= 0.5 + 0.3 \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(4.5) &= P(X \leq 4.5) \\ &= P(X < 4.5) + P(X = 4.5) \\ &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 4.5) \\ &= 0.5 + 0.3 + 0 \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(5) &= P(X \leq 5) \\ &= P(X < 5) + P(X = 5) \\ &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= 0.5 + 0.3 + 0.2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(7) &= P(X \leq 7) \\ &= P(X < 7) + P(X = 7) \\ &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 7) \\ &= 0.5 + 0.3 + 0.2 + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

صفوة معلمي الكويت

(78)

الجدول التالي يبيّن بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	1	2	3	5
$F(x)$	0.15	0.2	0.6	1

أوجد:

a) $P(1 < X \leqslant 3)$

b) $P(2 < X \leqslant 5)$

c) $P(X > 2)$

الحل:

a) $P(1 < X \leq 3) = F(3) - F(1)$
$= 0.6 - 0.15$
$= 0.45$

b) $P(2 < X \leqslant 5) = F(5) - F(2)$
$= 1 - 0.2$
$= 0.8$

c) $P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2)$
$= 1 - F(2)$
$= 1 - 0.2$
$= 0.8$

صفوة معلمي الكويت

(79)

إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

a $P(z \le -0.12)$ b $P(-3.2 \le z \le -0.1)$ c $P(-5.26 \le z \le 0.69)$

(a) $P(z \le -0.12) = 0.45224$

(b) $P(-3.2 \leqslant z \leqslant -0.1)$

$= P(z \le -0.1) - P(z \le -3.2)$

$= 0.46017 - 0.00069$

$= 0.45948$

(c) $P(-5.26 \leqslant z \leqslant 0.69)$

$= P(z \le 0.69) - P(z \le -5.26)$

$= 0.75490 - 0$

$= 0.7549$

صفوة معلمي الكويت

(80)

حالة خاصه :

يمثّل المتغير X درجات الطلاب في مادة الرياضيات. إذا كان توزيع هذه الدرجات يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه $\mu = 40$ وانحرافه المعياري $\sigma = 8$ فأوجد:

(a) $P(30 < X < 65)$ **(b)** $P(X \geq 45)$

(a) $x_1 = 30 \quad \therefore \quad z_1 = \dfrac{x_1 - \mu}{\sigma} = \dfrac{30 - 40}{8} = -\dfrac{5}{4} = -1.25$

$x_2 = 65 \quad \therefore \quad z_2 = \dfrac{x_2 - \mu}{\sigma} = \dfrac{65 - 40}{8} = \dfrac{25}{8} = 3.125$

$$P(30 < X < 65) = P(-0.125 < z < 3.125) = P(z < 3.125) - P(z < -1.25)$$

$$= \frac{0.99910 + 0.99913}{2} - 0.10565 = 0.893465$$

(b) $X = 45 \quad \therefore \quad z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} = \dfrac{45 - 40}{8} = \dfrac{5}{8} = 0.625$

$$P(X \geq 45) = 1 - P(X < 45) = 1 - P(z < 0.625) = 1 - \frac{0.73237 + 0.73565}{2}$$

$$= 1 - 0.73401 = 0.26599$$

صفوة معلمي الكويت