



مخططات الصف الثاني عشر علمي الفصل الدراسي الثاني

صفوة معلم الكويت



التكامل

التكامل
المحدد

التكامل باستخدام
الكسور الجزئية

التكامل
بالتجزئة

الدوال الأسية
واللوغاريتمية

تكامل الدوال
المثلثية

التكامل
بالتعويض

التكامل
غير المحدد

صفوة تعليمية الكويت



التكامل غير المحدد

قسمة دالتين

*التحليل والاختصار
*قسمة الحدود على المقام اذا
كان المقام حد
* تكامل دوال لوغارتيمية
* تكامل باستخدام الكسور
الجزئية

ضرب دالتين

* ايجاد حاصل ضرب
الدالتين
* التكامل بالتعويض
* التكامل بالتجزئ

دالة واحدة

$$\int k dx = kx + c$$

حيث k
عدد
ثابت

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$$

الاولوية في اختيار ال u

Ln x
كثيرات الحدود
الدالة الأسية e^x
الدالة المثلثية

قوانين التكامل

$$\int a \, dx = ax + c : a \text{ ثابت}$$

$$\int X^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int (g(x))^n \cdot \dot{g}(x) \, dx = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1}$$

$$\int u^n \cdot \dot{u} \, dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \text{ التعويض}$$

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \, du \text{ التجزيء:}$$

$$v(t) = \int a(t) \, dt$$

$$s(t) = \int v(t) \, dt$$

الزمن $t = 0$

عند السرعة
الابتدائية
والمسافة
الابتدائية



تصل الكرة لأعلى
ارتفاع عند

$$v(t) = 0$$

تصل الكرة
للأرض

$$s(t) = 0$$

صفوة الكوئيت



التكامل بالتعويض

المشتقة ناقصة او زايدة متغير

توجد قيمة x من u وقيمة dx من du
مثال

$$\int x(x+1)^5 dx =$$

$$U = x + 1 \rightarrow x = u - 1$$
$$du = dx$$

$$\int (u - 1) u^5 du = \int (u^6 - u^5) du$$

$$\frac{1}{7} u^7 - \frac{1}{6} u^6 + c$$

المشتقة ناقصة عدد أو زايدة

نضرب بالعدد داخل التكامل
ومعكوسة الضربي خارج
التكامل

$$\int \sqrt{4x-5} du =$$

$$U = 4x - 5$$

$$Du = 4 \cdot dx$$

$$\frac{1}{4} \int 4u^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{4} \int 4u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{6} (4x - 5)^{\frac{3}{2}} + c$$

المشتقة كاملة

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

مثال

$$\int \sqrt[3]{x^2 - 5x + 2} (2x - 5) dx$$

$$U = x^2 - 5x + 2$$

$$du = (2x - 5) dx$$

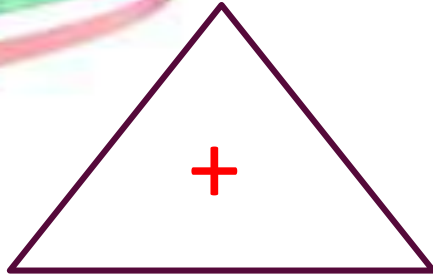
$$\frac{3}{4} (x^2 - 5x + 2)^{\frac{4}{3}} + c$$

$$\int u^{\frac{1}{3}} du = \frac{3}{4} u^{\frac{4}{3}} + c$$

ملخص إشتقاق و تكامل الدوال المثلثية



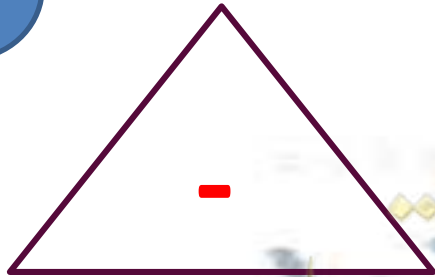
$\tan x$



$\sec x$

$\sec x$

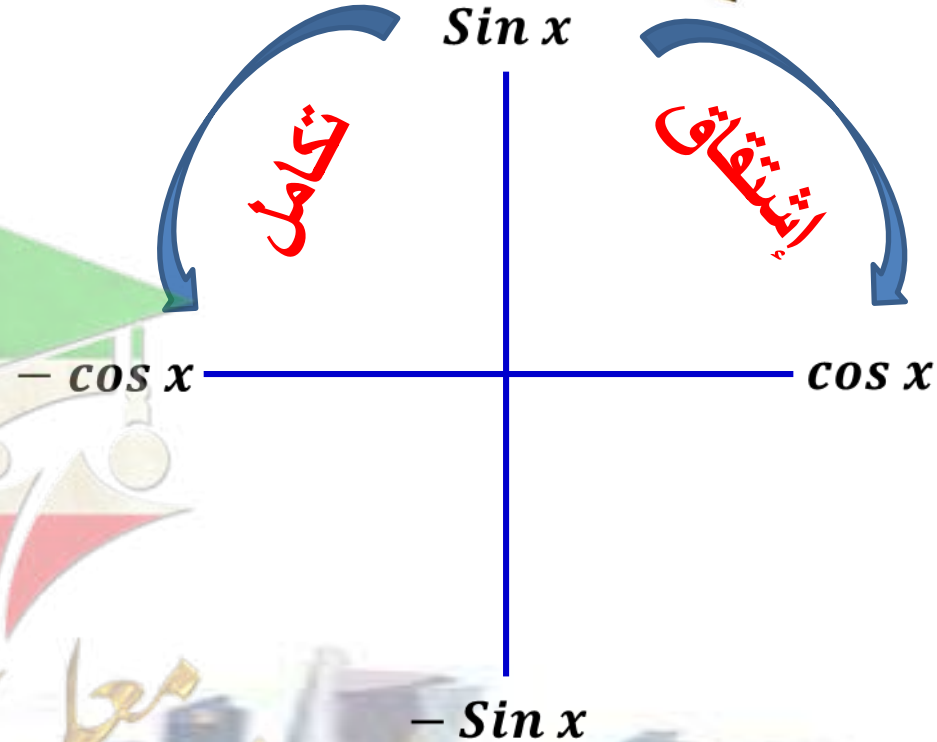
$\cot x$



$\csc x$

$\csc x$

تكامّل حاصل ضرب رأسين يعطي الرأس الثالث



$$\int \sin ax \, dx = -\frac{\cos ax}{a} + c$$

$$\int \cos ax \, dx = \frac{\sin ax}{a} + c$$

قوانين تكامل الدوال الاسية واللوغاريتمية



التكامل غير المحدد

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int u' e^u dx = e^u + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln |u| + C$$

قاعدة المشتقة

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx} = u' e^u$$

$$\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \ln |u| = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$$

صفحة من الكورس

التكامل بالتجزيء

عند إيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين ليست احدهما مشتقة الأخرى .
نلجأ الى نوع آخر من التكامل هو التكامل بالتجزيء عندما تكون u, v
دالتين في x قابلة للتفاضل

$$\int u \cdot dv = uv - \int v du$$

التكامل بالتجزيء



تكامل بالتجزيء مرتين
غير منتهية

تكامل بالتجزيء مرتين

تكامل بالتجزيء
مرة واحدة

دالة مثلثية . دالة أسية

*دالة مثلثية . حدودية من الدرجة الثانية في المتغير x
* أسية . حدودية من الدرجة الثانية في المتغير x
* $(\ln(x))^2$

*دالة مثلثية . حدودية من الدرجة الأولى في المتغير x
*دالة أسية . حدودية من الدرجة الأولى في المتغير x
* $\ln x$. حدودية من الدرجة الأولى في المتغير x

$$f(x) = \frac{r(x)}{h(x)}$$

درجة البسط \leq درجة المقام

درجة البسط $>$ درجة المقام



- قسمة البسط علي المقام قسمة مطولة

$$f(x) = q(x) + \frac{p(x)}{h(x)}$$

- حيث $p(x)$ الباقي

- $q(x)$ ناتج القسمة

- توجد

$$\int f(x) = \int q(x)dx + \int \frac{p(x)}{h(x)} dx$$

- تعاد خطوات (1)

- تحليل المقام وتحديد العوامل الخطية ل $h(x)$

وتحديد فيما اذا كانت العوامل مكررة ام لا.

تفكيك $f(x) = \frac{r(x)}{h(x)}$ إلى

كسور جزئية

- توجد قيم البسط A_1, A_2, \dots

بالتعويض عن قيم XER

ويفضل اصفار المقام

- توجد تكامل الكسور الجزئية

قانون التكامل المحدد



$$\int_a^b f(x) dx = \left[\int f(x) \cdot dx \right]_a^b = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

ايجاد قيمة
التكامل

التعويض
بالحد الأدنى

التعويض
بالحد الأعلى

نكامل الدالة

تحديد نوع
التكامل

صفوة من الكونيت

إذا كانت f, g دالتين متصلتين على $[a, b]$

$$1- f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$2- f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b] \rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq 0$$

$$3- f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$



صفوة معلم الكويت

تطبيقات التكامل

المعادلات
التفاضلية

معادلة
المنحني

المساحات
في
المستوي

حجوم
الاجسام
الدورانية

طول
القوس



صفحة معلم الكويت

المساحات في المستوي

القيم المحددة لدوال متغيرة

مساحات منطقة : محددة بمنحني دالتين ومحور السينات في الفترة $[a,b]$

مساحات منطقة : محددة بمنحني الدالة f ومحور السينات في الفترة $[a,b]$

إذا كانت منطقة محددة بأكثر من دالة واحدة ولا يوجد تكامل واحد يعطي مساحة هذه المنطقة

$A = A_1 + A_2 + \dots$
ويكمل الحل كالمعتاد

• إذا كانت كل من f, g متصلتين على الفترة $[a,b]$ حيث $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a,b]$ فان مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالتين f, g والمستقيمين $x = a, x = b$ هي :-

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

في بعض الاحيان ممكن ايجاد المساحة A باستخدام القيمة المطلقة دون الحاجة للقيمة الاختيارية

$$A = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

إذا كانت $f(x) \geq 0 \forall x \in [a,b]$

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

إذا كانت $f(x) \leq 0 \forall x \in [a,b]$

$$A = - \int_a^b f(x) dx$$

* إذا كانت الدالة f دالة متصلة على $[a,b]$ وكان $c \in (a,b)$ حيث $f(c) = 0$ ، فإن مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحني الدالة f ومحور السينات في الفترة $[a,b]$ هي :-

$$A = \left| \int_a^c f(x) dx \right| + \left| \int_c^b f(x) dx \right|$$

حجوم الاجسام الدورانية



إذا نتج مجسم عن دوران منطقة
محددة بمنحنى الدالتين f, g
والمستقيمين $x=a, x=b$ دورة
كاملة حول محور السينات بحيث
 f, g لهم الاشارة نفسها في
الفترة $[a, b]$ فإن حجم هذا
المجسم يعطي بالقاعدة
$$V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx$$

حيث $f(x) \leq g(x) \leq 0$ او
 $f(x) \geq g(x) \geq 0$

إذا نتج مجسم من دوران منطقة
محددة بمنحنى الدالة F ومحور
السينات والمستقيمين $x=a$ ، $x=b$
حيث $a < b$ دورة كاملة حول
محور السينات فان حجم المجسم
يساوي

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$



طول القوس ومعادلة المنحني

معادلة المنحني

طول القوس

$$f''(x) \xrightarrow{\text{تكامل}} \bar{f}'(x) \xrightarrow{\text{تكامل}} f(x)$$

ميل المماس معادلة المنحني

$$\bar{f}'(x) = \int f''(x) dx$$
$$F(x) = \int \bar{f}'(x) dx$$

إذا كانت الدالة f متصلة علي $[a, b]$ فإن طول القوس من منحني الدالة $y = f(x)$ في $[a, b]$ هو

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (\bar{f}'(x))^2} dx$$



حل المعادلات التفاضلية

المعادلة علي الصورة

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

حلها بطريقة فصل

المتغيرات بالصورة التالية :

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx$$

ونكمل الطرفين ليجاد y

وهو حل المعادلة التفاضلية

المعادلة علي الصورة

$$y' = ay, a \neq 0$$

حلونها

$$Y = ke^{ax}, k \in R^*$$

المعادلة من رتبة اولي
ودرجة اولي علي الصورة

$$y' = f(x)$$

الحل

$$Y = \int f(x) dx$$

المعادلة علي الصورة

$$y' = ay + b, a \neq 0,$$

$$b \neq 0$$

حلونها

$$Y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

المعادلة علي الصورة $\ddot{Y} = F(X)$

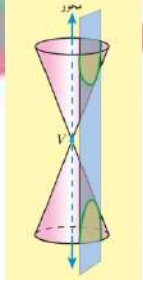
الحل بالتكامل مرتين

$$y' = \int F(X) dx = f(x) + C_1 \text{ ثم}$$

$$y = \int (F(X) + C_1) dx$$



القطوع المخروطية

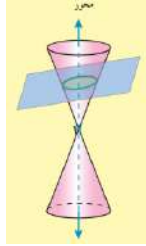


قطع زائد

المستوى مواز للمحور
ولا يحويه

تعريفه

هو مجموعة كل النقاط في
المستوى التي تكون القيمة
المطلقة للفرق بين بعدي كل
نقطة منها عن نقطتين
ثابتين في المستوى ثابت

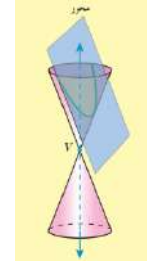


قطع ناقص

المستوى ليس عمودي على
المحور وليس موازي لأي راسم

تعريفه

هو مجموعة كل النقاط في
المستوى التي يكون مجموع
بعدي كل نقطة منها عن
نقطتين ثابتين في امستوى
ثابت



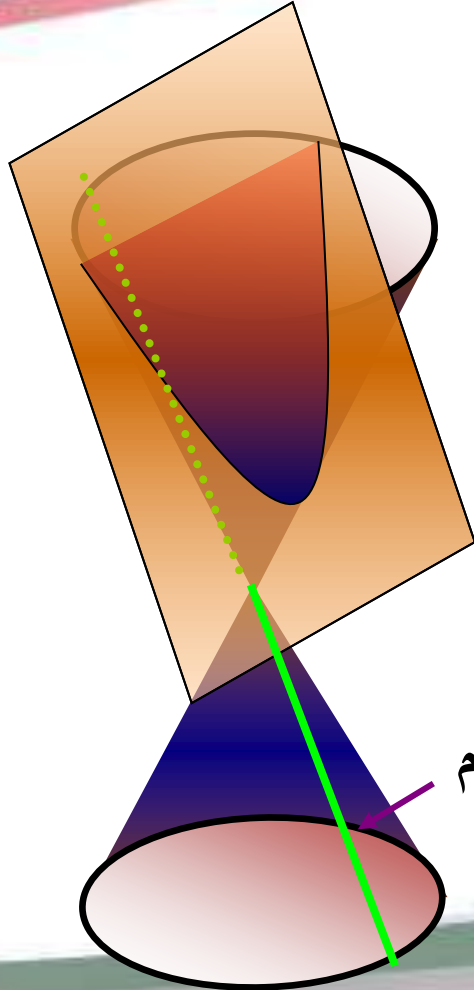
قطع مكافئ

المستوى مواز لراسم
ولا يحويه

تعريفه

هو مجموعة كل النقاط في
المستوى المتساوية البعدين
عن نقطة ثابتة معطاة
(البؤرة) وعن مستقيم ثابت
معطى (الدليل)

١) المستوى موازياً لراسم ولا يحويه القطع الناتج يكون قطعاً مكافئاً.



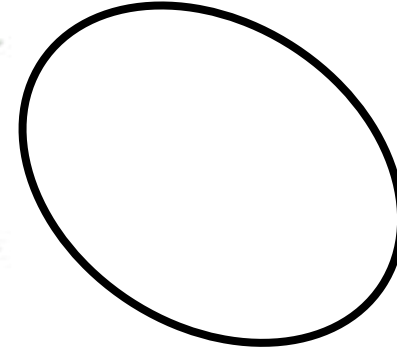
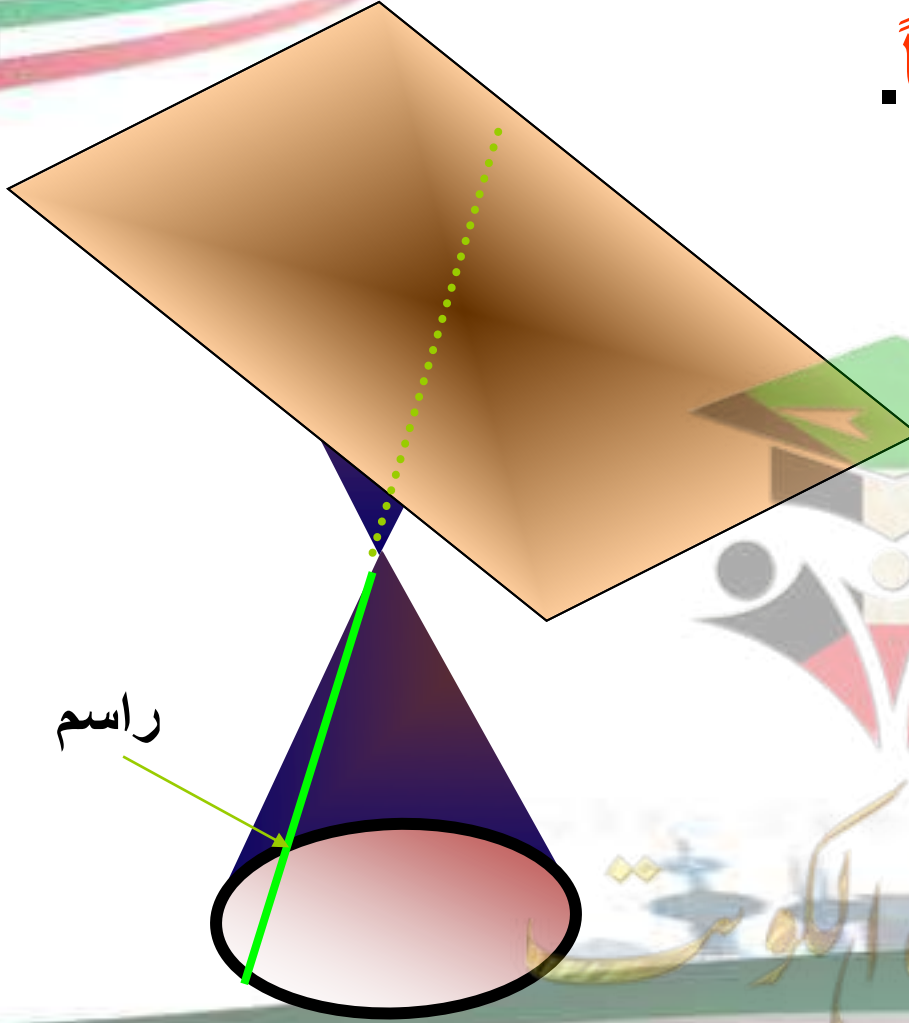
راسم

صفوة معلمي الكويت



٢) المستوى ليس عمودياً على المحور وليس موازياً لأي راسم

القطع الناتج يكون قطعاً ناقصاً.

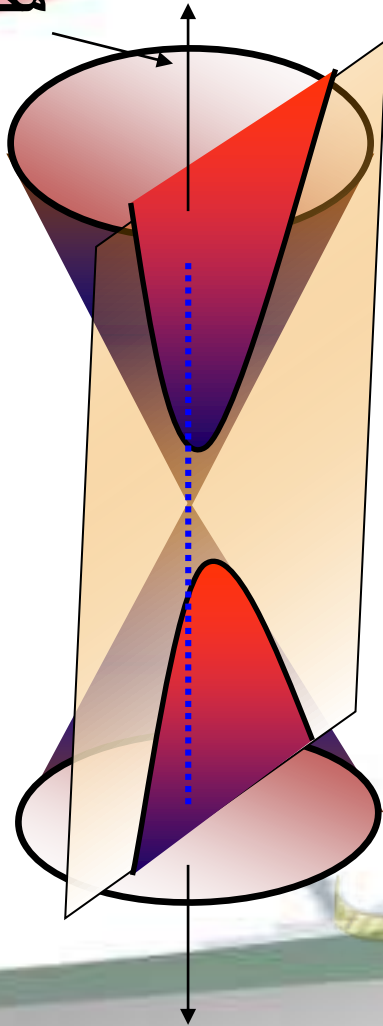


صفوة معلمي الكوثر

٣) المستوى موازياً للمحور ولا يحويه

القطع الناتج يكون قطعاً زائداً.

محور المخروط

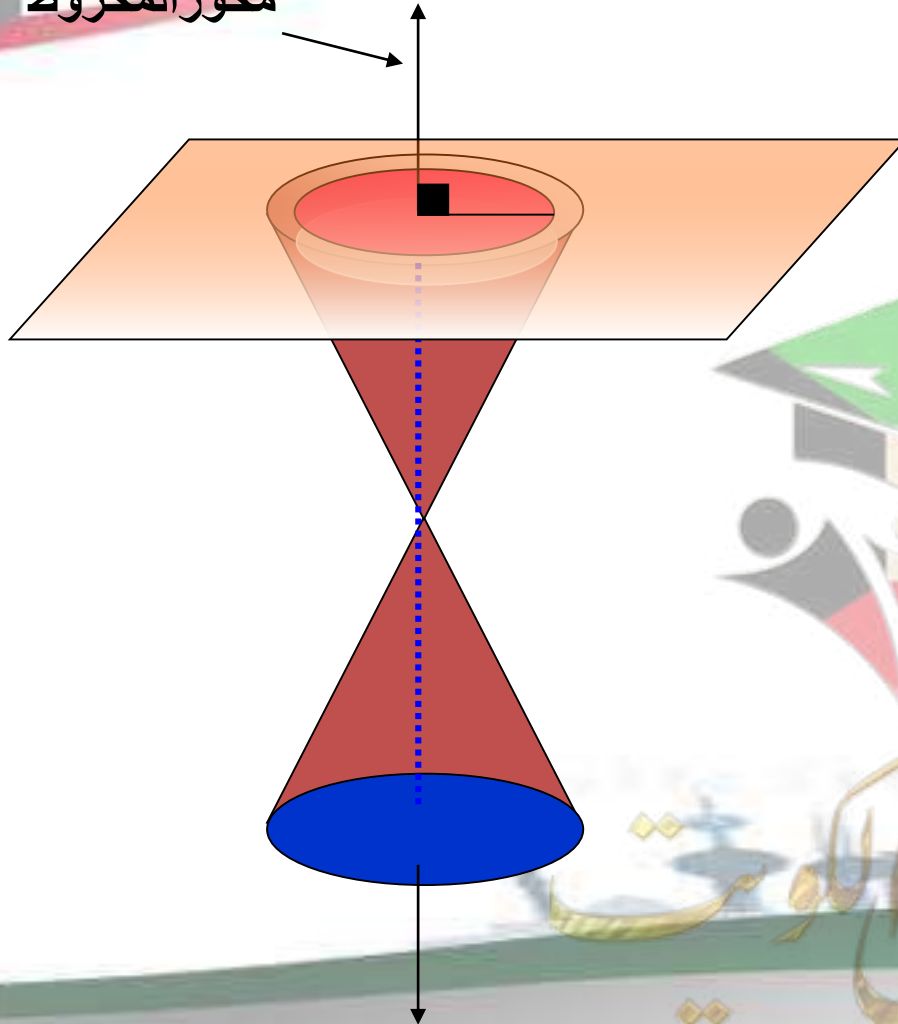


صفحة من الكورس

ملاحظة

(١) إذا كان المستوى عمودياً على المحور فإن القطع الناتج دائرة

محور المخروط

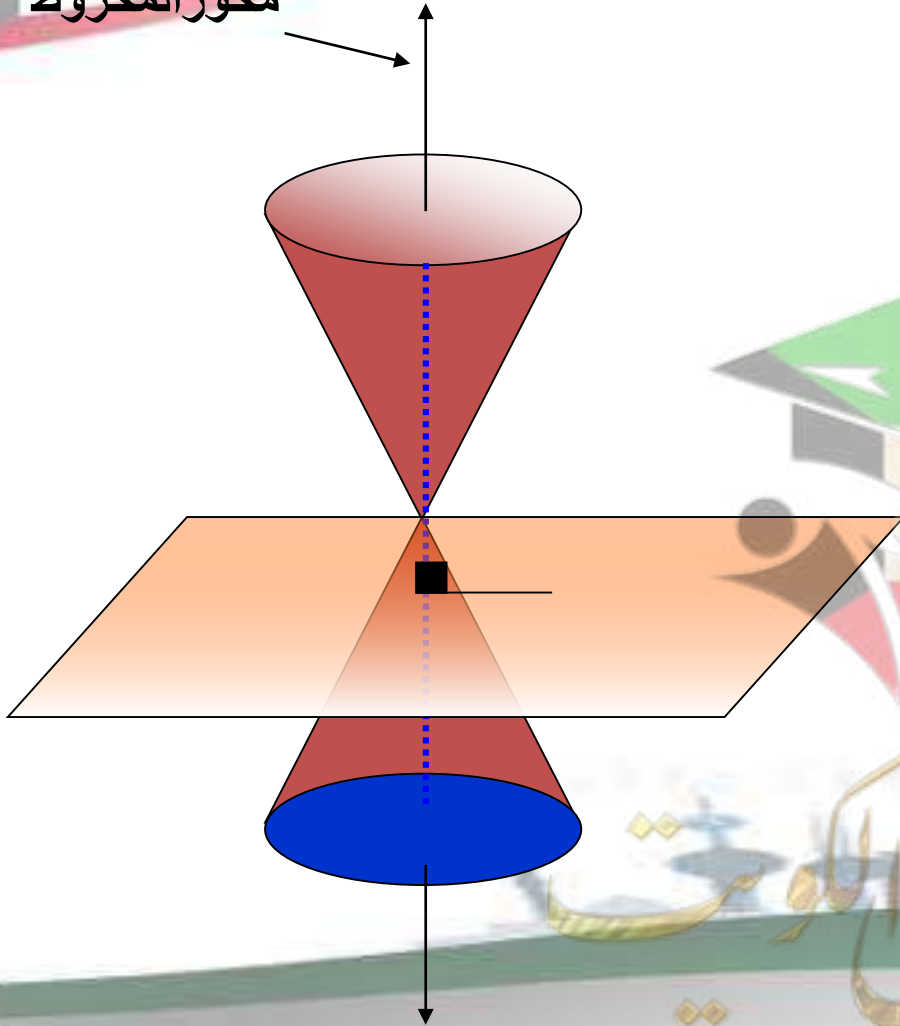


صفوة من الكوثر

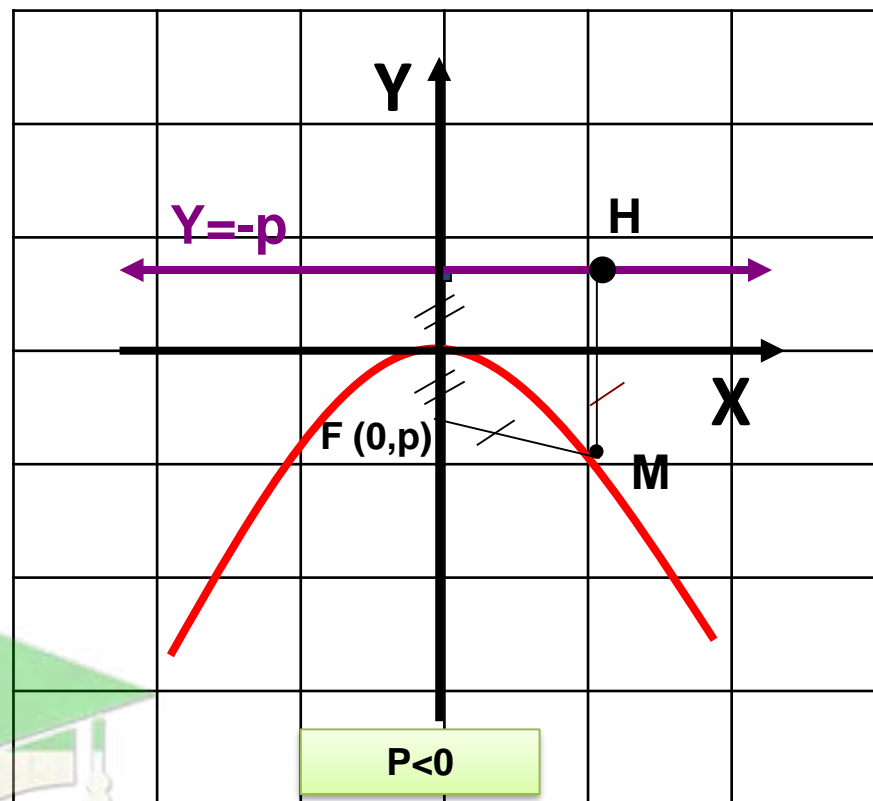
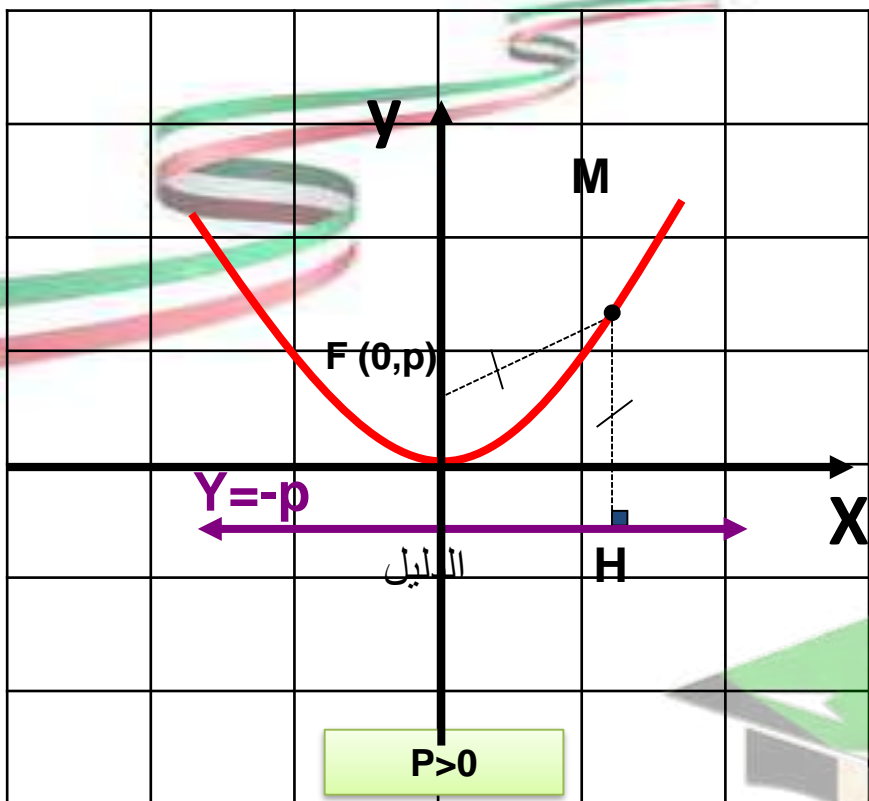
ملاحظة

(٢) إذا كان المستوى عمودياً على المحور ومار بالرأس فإن الناتج يمثل نقطة

محور المخروط



صفحة معلمي الكويت



لاحظ أن الرأس $(0,0)$ يقع في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل في كل من الحالتين

معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل و بؤرته $F(0, p)$ و معادلة دليله $y = -P$ هي: $x^2 = 4py$



قطع مكافئ رأسه نقطة الاصل (0 ,0)



$x^2 = 4py$	الصورة العامة
إلى أعلى أو أسفل	الفتحة
(0 , p)	البؤرة
$y = -p$	الدليل
محور الصادات (y-axis)	محور التناظر
$ p $	المسافة من الرأس الى الدليل
$p > 0$	إشارة p
$p < 0$	الشكل
	

صفوة

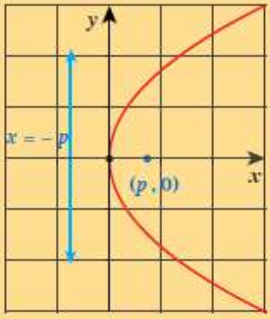
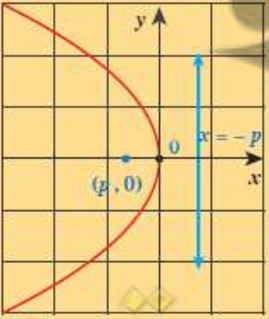
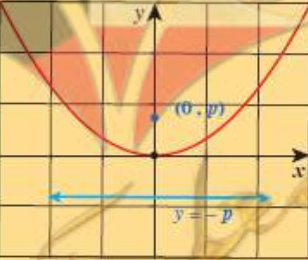
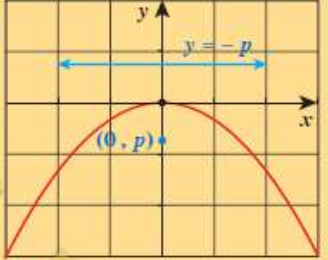
قطع مكافئ رأسه نقطة الاصل (0,0)



$y^2 = 4px$		الصورة العامة (0)
إلى اليسار أو اليمين		الفتحة
$(p, 0)$		البؤرة
$x = -p$		الدليل
محور السينات (x-axis)		محور التناظر
$ p $		المسافة من الرأس إلى الدليل
$p > 0$	$p < 0$	إشارة p
		الشكل

صفحة 17

قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل (0, 0)

$y^2 = 4px$	$x^2 = 4py$	الصورة العامة		
إلى اليمين أو إلى اليسار	إلى أعلى أو إلى أسفل	الفتحة		
$(p, 0)$	$(0, p)$	البؤرة		
$x = -p$	$y = -p$	الدليل		
محور السينات ($x - axis$)	محور الصادات ($y - axis$)	محور التناظر		
$ p $		المسافة من الرأس إلى البؤرة		
		المسافة من الرأس إلى الدليل		
$p > 0$	$p < 0$	$p > 0$	$p < 0$	إشارة p
				الشكل

الأختلاف المركزي :-

$$e = \frac{c}{a}, \quad e = 1$$

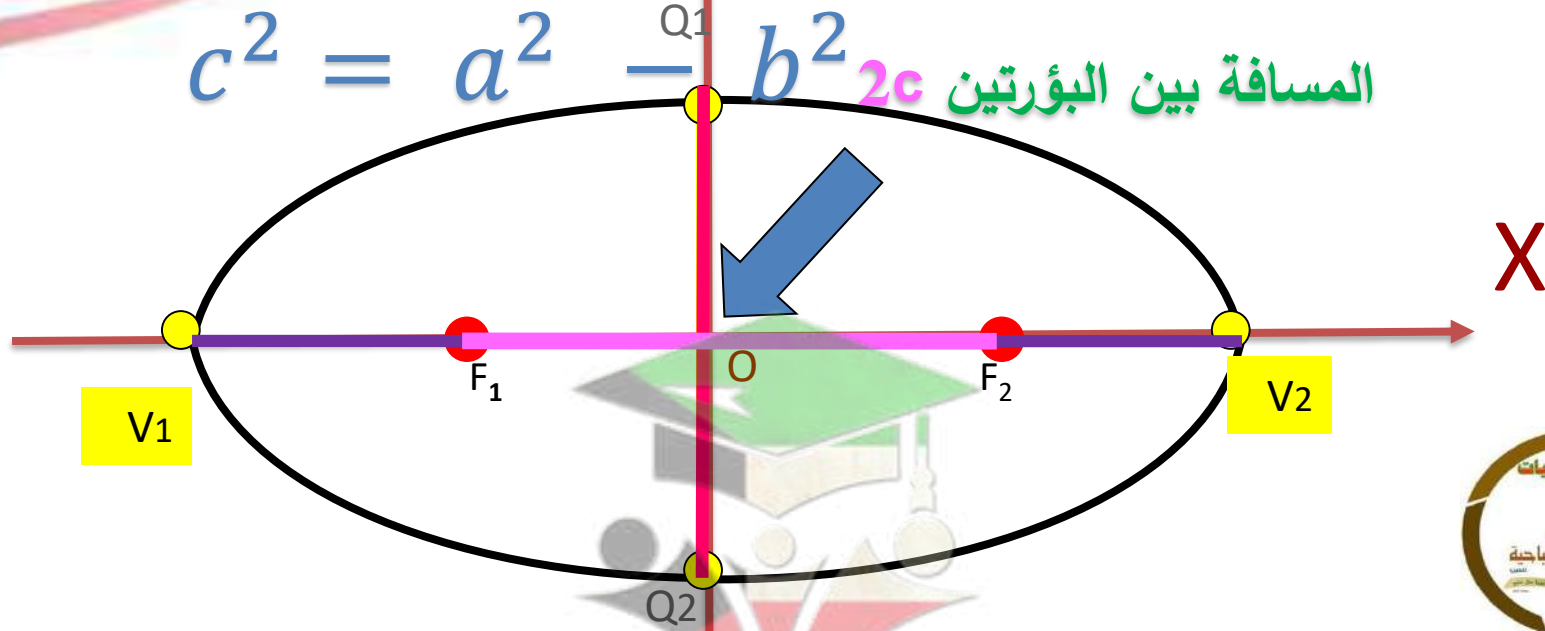
القطة المستقيمة V_1V_2 المارة بالبؤرتين وطرفاها على القطع تسمى المحور الأكبر للقطع (الرئيسي) ويسمى طرفاها رأسي القطع الناقص

طول المحور الأكبر $2a$

العلاقة بين a, b, c

$$c^2 = a^2 - b^2$$

المسافة بين البؤرتين $2c$



تسمى النقطتان الثابتتان بؤرتي القطع الناقص

تسمى نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما مركز القطع الناقص

القطة المستقيمة Q_1Q_2 المارة بالمركز والعمودية على المحور الأكبر ويقع طرفاها على القطع تسمى المحور الأصغر للقطع (الثانوي) طول المحور الأصغر $2b$



ملاحظات

• محور السينات محور الانعكاس لجميع نقاط القطع الناقص

• محاور الصادات محور الانعكاس لجميع نقاط القطع الناقص

القطع الناقص متناظر حول نقطة الاصل

• بالدوران $d(O, 90^\circ)$ او $d(O, -90^\circ)$

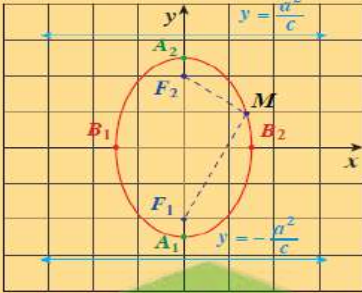
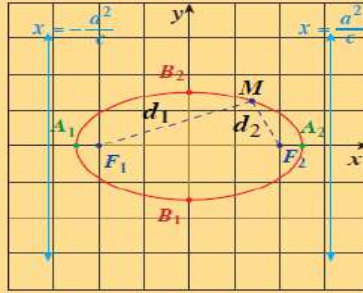
يكون للقطع الناقص صورة اخرى



صفوة طالب الكويت

معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل (0, 0) كالتالي:

الأختلاف المركزي:-
 $e = \frac{c}{a}$, $e < 1$

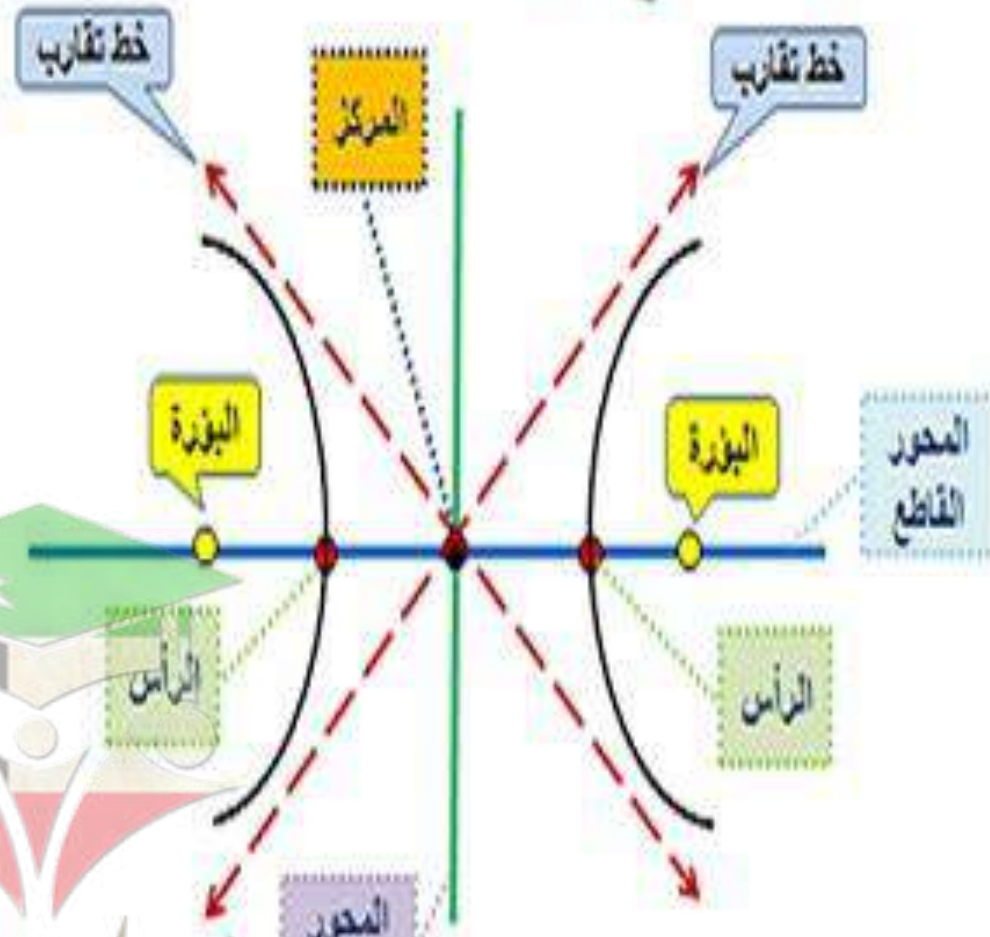
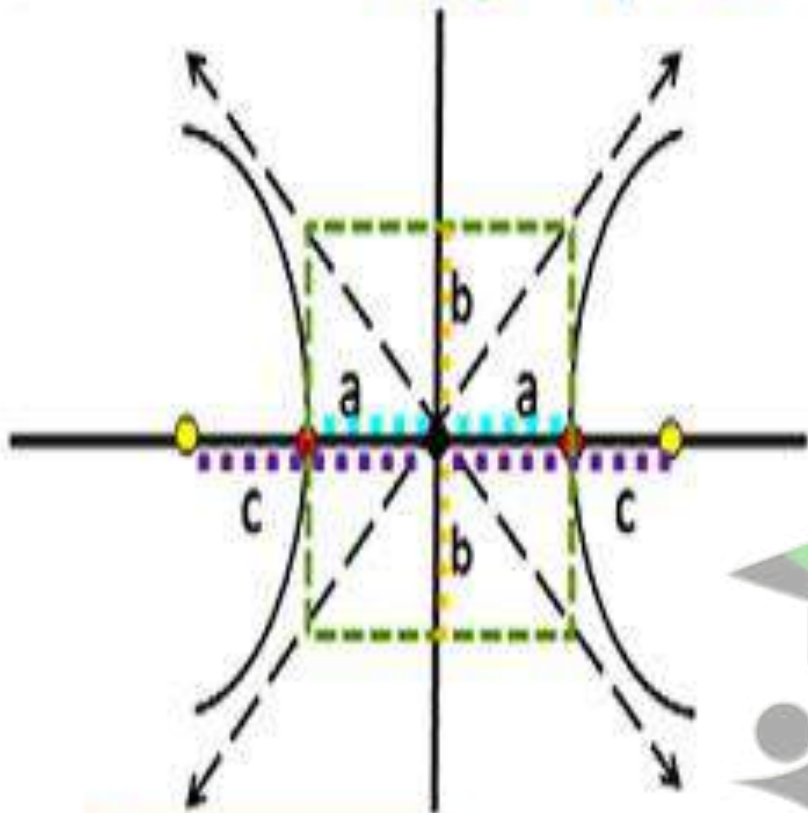
$a > b > 0$	$a > b > 0$	المعادلة
$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	بيان القطع
		المحور الأكبر
ينطبق على محور الصادات	ينطبق على محور السينات	الرأسان طرفا المحور الأكبر
$A_1(0, -a)$, $A_2(0, a)$	$A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$	طول المحور الأكبر
	$2a$	طرفا المحور الأصغر
$B_1(-b, 0)$, $B_2(b, 0)$	$B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$	طول المحور الأصغر
	$2b$	البؤرتان
$F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$	$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$	العلاقة الأساسية
	$a^2 = b^2 + c^2$	معادلتا الدليلين
$y = -\frac{a^2}{c}$, $y = \frac{a^2}{c}$	$x = -\frac{a^2}{c}$, $x = \frac{a^2}{c}$	التناظر
القطع الناقص متناظر حول كل من محوريه ومركزه		



عناصر القطع الزائد

الأطوال في القطع الزائد

c a b



a = رأس

c = بؤرة

البعد بين المركز وكل:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

العلاقة بين a, b, c



معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل كالتالي:

الأختلاف المركزي:-
 $e = \frac{c}{a}$, $e > 1$

المعادلة	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
بيان القطع		
طرفا المحور القاطع الرأسان	$A_1(0, -a) , A_2(0, a)$	$A_1(-a, 0) , A_2(a, 0)$
المحور القاطع (الأساسي)	ينطبق على محور الصادات	ينطبق على محور السينات
طول المحور القاطع	$2a$	
طرفا المحور المرافق	$B_1(-b, 0) , B_2(b, 0)$	$B_1(0, -b) , B_2(0, b)$
طول المحور المرافق	$2b$	
الؤرتان	$F_1(0, -c) , F_2(0, c)$	$F_1(-c, 0) , F_2(c, 0)$
العلاقة الأساسية	$c^2 = a^2 + b^2$	
معادلة الخطين المقاربن	$y = \pm \frac{a}{b}x$	$y = \pm \frac{b}{a}x$
معادلة الدليين	$y = \pm \frac{a^2}{c}$	$x = \pm \frac{a^2}{c}$
المناطر	القطع متناظر حول محوريه ومركزه	



الوحدة الثامنة المتغيرات العشوائية المتقطعة

دالة التوزيع التراكمي
خواص دالة التوزيع
التراكمي

$$1- P(X > a) = 1-F(a)$$
$$2- p(a < x \leq 6) = F(6)-F(a)$$

التوقع والتباين

$$\mu = \sum (x_i f(x_i))$$
$$\sigma^2 = \sum (x_i^2 \cdot f(x_i)) - \mu^2$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

دالة التوزيع
الاحتمالي

بيان دالة توزيع الاحتمال
دالة التوزيع الاحتمالي F
للمتغير العشوائي المتقطع
x تحقق الشرطين

$$0 \leq F(X) \leq 1$$

$$F(x_1) + F(x_2) + \dots = 1$$

(1) توزيع ذات الحدين

$$f(x) = n c_x p^x (1-p)^{n-x}, n \in \mathbb{Z}^+$$

او باستخدام جدول الاحتمالات في توزيع ذات

الحدين

(2) التوقع والتباين لتوزيع ذات الحدين

$$\mu = np$$

$$\sigma^2 = np(1-p)$$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

مجموع قيم دالة التوزيع
الاحتمالي f تساوي الواحد
الصحيح



المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

التوزيع الاحتمالي المنتظم
لمتغير عشوائي متصل
مستمر

خواص دالة
كثافة
الاحتمال

التوزيع الاحتمالي
الطبيعي المعياري
١- إذا كانت

$$Z \leq a \text{ أو}$$

$$Z \geq a \text{ حيث}$$

$$a \geq 0$$

نستخدم جدول رقم ٤

٢- إذا كانت

$$Z \leq a \text{ أو } Z \geq a$$

$$\text{حيث } a < 0$$

نستخدم جدول رقم ٥

التوزيع الاحتمالي
الطبيعي
تقوم بتحويل اي
توزيع طبيعي الي
توزيع طبيعي معياري
وفق للتحويل:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma^2}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} : a \leq x \leq b \\ 0 \text{ في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

التوقع للتوزيع احتمالي منتظم
هو

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

التباين للتوزيع الاحتمالي
المنتظم

متصلة $f(x)$

$$f(x) \geq 0$$

قيمة
المساحة
المحددة
تساوي
الواحد
الصحيح

$$p(X = a) = 0$$

تتعدم المساحة

