

الرياضيات

الكورس الثاني

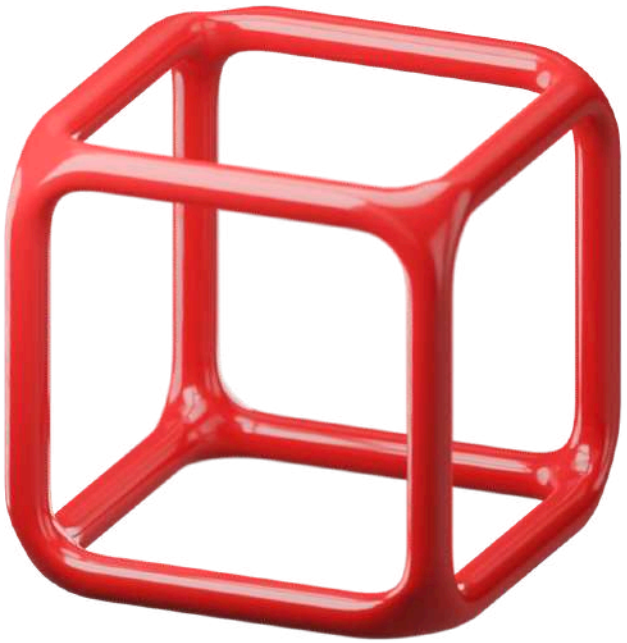
10

UULA

2024 - 2023

UULA.COM

صفوة معلمي الكويت



الرياضيات

الكورس الثاني

10

2024 - 2023

UULA.COM

UULA

صفوة معلمي الكويت

حقق هدفك الدراسي

ريح بالك وارفع مستوى دراستك مع المذكرة الشاملة والفيديوهات
اللي تشرحها والاختبارات اللي تدربك في منصة علا



دروس يشرحها أقوى معلمي الكويت

فيديوهات مبسطة قصيرة تشرح لك كل شيء خطوة بخطوة

نخبة المعلمين يجاوبونك بأسرع وقت

ما فهمت؟ تواصل مع أقوى المعلمين واحصل على شرح لسؤالك

تفوق في القصير والفاينل مع نماذج اختبارات سابقة

نماذج اختبارات سابقة مشروحة بالكامل تجهزك لاختباراتك

اكتشف عالم التفوق مع منصة علا

لتشترك بالمادة وتستمتع بالشرح المميز صور
أو اضغط على رمز QR

المعلق

هذه المذكرة تغطي المادة كاملة.

في حال وجود أي تغيير للمنهج أو تعليق جزء منه يمكنكم مسح رمز QR للتأكد من المقرر.

المنقذ

أول ما تحتاج مساعدة بالمادة ، المنقذ موجود!

صور الQR بكاميرا التلفون أو اضغط عليه إذا كنت تستخدم المذكرة من جهازك و يطلع لك فيديو يشرح لك.



قائمة المحتوى

06 **هندسة الدائرة**

٦ - ١ الدائرة - مماس الدائرة 5
٦ - ٢ الأوتار والأقواس 12
٦ - ٣ الزوايا المركزية والزوايا المحيطية 17
٦ - ٤ الدائرة :الأوتار المتقاطعة ، المماس 27

07 **المصفوفات**

٧ - ١ تنظيم البيانات في مصفوفات 32
٧ - ٢ جمع وطرح المصفوفات 34
٧ - ٣ ضرب المصفوفات 37
٧ - ٤ مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات) 40
٧ - ٥ حل نظام من معادلتين خطيتين 44

08 **حساب المثلثات**

٨ - ١ دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية) 46
٨ - ٢ العلاقات بين الدوال المثلثية (١) 49
٨ - ٣ العلاقات بين الدوال المثلثية (٢) 55

09 **الهندسة التحليلية**

٩ - ١ المستوى الاحداثي 60
٩ - ٢ تقسيم قطعة مستقيمة 62
٩ - ٣ - أ ميل الخط المستقيم 65
٩ - ٣ - ب معادلة الخط المستقيم 68
٩ - ٤ البعد بين نقطة ومستقيم 71
٩ - ٥ معادلة الدائرة 74

10 **الإحصاء والاحتمال**

١٠ - ٣ الانحراف المعياري 80
١٠ - ٤ طرائق العد 83
١٠ - ٥ الاحتمال المشروط 87

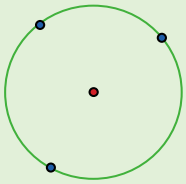
صفوة معلمي الكويت

UULA.COM © جميع الحقوق محفوظة

الدائرة - مماس الدائرة

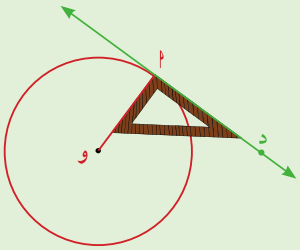
نظرية (١) :

كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.

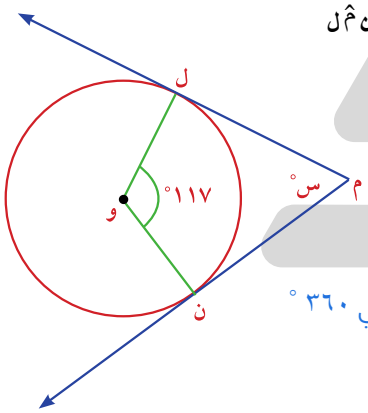


نظرية (٢) :

المماس عمودي على نصف قطر التماس إذا كان مستقيم مماس لدائرة فإنه يكون متعامدا مع نصف القطر المار بنقطة التماس أي أن $\overleftrightarrow{أو} \perp \overleftrightarrow{أد}$



Q في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{مل}$، $\overleftrightarrow{من}$ مماسان للدائرة التي مركزها و ، أوجد قياس $ق(\angle لمن)$



∵ $\overleftrightarrow{مل}$ مماس، $\overline{لو}$ نصف قطر التماس

∴ $ق(\angle ل) = ٩٠°$ (نظرية)

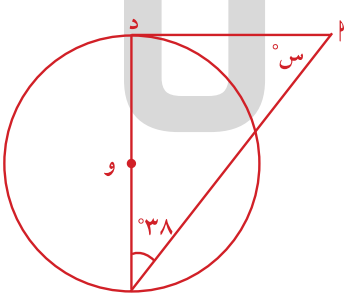
∵ $\overleftrightarrow{نم}$ مماس، $\overline{نو}$ نصف قطر التماس

∴ $ق(\angle ن) = ٩٠°$ (نظرية)

س = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ١١٧) = ٦٣° مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي ٣٦٠°

∴ $ق(\angle لمن) = ٦٣°$

Q في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{أد}$ مماس للدائرة التي مركزها و ، أوجد قيمة س



∵ $\overleftrightarrow{أد}$ مماس، $\overline{ود}$ نصف قطر التماس

∴ $ق(\angle د) = ٩٠°$ نظرية

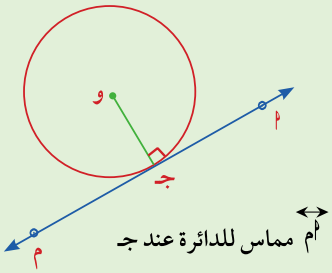
س = ١٨٠° − (٩٠ + ٣٨) = ٥٢° مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°

∴ $ق(\angle أ) = ٥٢°$

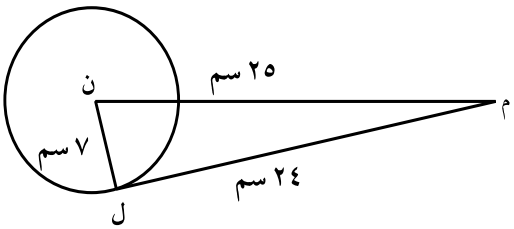
صفوة معلمي الكويت

نظرية (٣) :

المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماسا لهذه الدائرة عند هذه النقطة.



Q أثبت أن $\overleftrightarrow{ل م}$ مماس للدائرة التي مركزها ن



في المثلث م ل ن :

$(ن م)^{٢} = ٢٥^{٢} = ٦٢٥$

$(م ل)^{٢} + (ل ن)^{٢} = ٢٤^{٢} + ٧^{٢} = ٦٢٥$

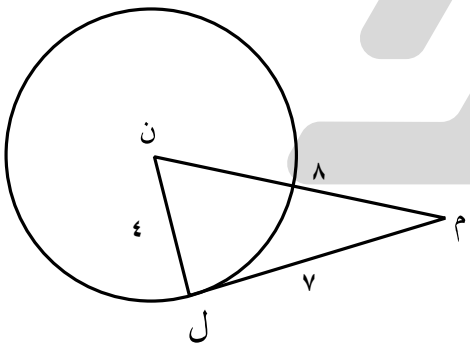
$\therefore$ Δ م ل ن مثلث قائم في $\hat{ل}$ (عكس فيثاغورث)

$\therefore$ $\overline{م ل} \perp \overline{ل ن}$

$\therefore$ $\overline{م ل}$ مماس للدائرة (نظرية)

Q في الشكل المقابل:

هل $\overleftrightarrow{ل م}$ مماس للدائرة؟ فسر إجابتك



في المثلث م ل ن :

$(ن م)^{٢} = ٨^{٢} = ٦٤$

$(م ل)^{٢} + (ل ن)^{٢} = ٧^{٢} + ٤^{٢} = ٦٥$

$\therefore$ Δ م ل ن مثلث غير قائم (عكس فيثاغورث)

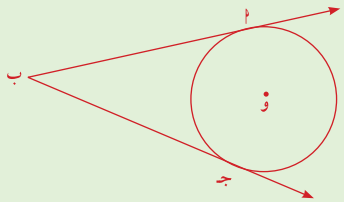
$ق(\hat{ل}) \neq ٩٠^{\circ}$

$\therefore$ $\overline{م ل}$ ليس مماسا للدائرة (نظرية)

صفوة معلمي الكويت

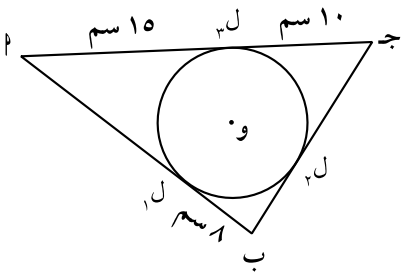
نظرية (٤) :

القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.



مثال ١

في الشكل المجاور أوجد محيط المثلث أ ب جـ



∵ $\overleftrightarrow{أ ب}$ مماس للدائرة في ل١ ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$ مماس للدائرة في ل٢ ، $\overleftrightarrow{جـ أ}$ مماس للدائرة في ل٣

∴ أ ل١ = أ ل٣ = ١٥ سم (نظرية)

ب ل١ = ب ل٢ = ٨ سم (نظرية)

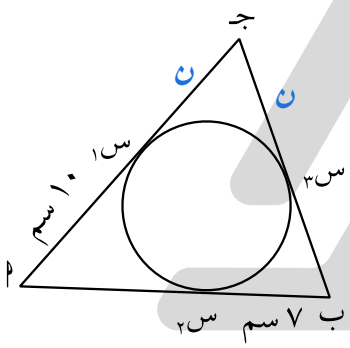
جـ ل٢ = جـ ل٣ = ١٠ سم (نظرية)

محيط المثلث أ ب جـ = أ ب + ب جـ + أ جـ

= ١٥ + ١٥ + ٨ + ٨ + ١٠ + ١٠ = ٦٦ سم

مثال ٢

في الشكل المجاور إذا كان محيط المثلث أ ب جـ يساوي (٥٠) سم فاحسب جـ ب .



∵ $\overleftrightarrow{أ ب}$ مماس للدائرة في س٢ ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$ مماس للدائرة في س٣ ، $\overleftrightarrow{جـ أ}$ مماس للدائرة في س١

∴ أ س١ = أ س٢ = ١٠ سم (نظرية)

ب س٢ = ب س٣ = ٧ سم (نظرية)

جـ س١ = جـ س٣ = ن (نظرية)

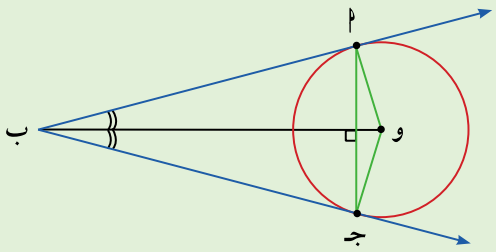
محيط المثلث أ ب جـ = ٥٠ سم ⇐ ن + ن + ١٠ + ١٠ + ٧ + ٧ = ٥٠

٢ن + ٣٤ = ٥٠ ⇐ ٢ن = ٥٠ - ٣٤ = ١٦ ⇐ ن = $\frac{١٦}{٢}$ = ٨

∴ طول $\overline{ب جـ}$ = ٧ + ٨ = ١٥ سم

صفوة معلمي الكويت

نتائج على نظرية (٤) :



- $\overline{ب أ} \cong \overline{ب جـ}$
- $\overline{ب و}$ منصف للزاوية $(\angle أ ب جـ)$
- $\overline{ب و}$ منصف للزاوية $(\angle أ و جـ)$
- $\overline{ب و} \perp \overline{أ جـ}$

في الشكل المجاور أوجد $ق(\angle أ ل جـ)$ ، $ق(\angle هـ أ ل)$ إذا كانت $\overline{ل و}$ ، $\overline{ل هـ}$ تمسان الدائرة حيث $\overline{و أ}$ قطر للدائرة.

$\overline{ل و}$ مماس ، $\overline{و أ}$ نصف قطر التماس $\therefore ق(\angle و) = ٩٠°$ (نظرية)

$\overline{ل هـ}$ مماس ، $\overline{هـ أ}$ نصف قطر التماس $\therefore ق(\angle هـ) = ٩٠°$ (نظرية)

$ق(\angle ١) = ٢٥°$ (نتيجة) ، $ق(\angle ٢) = ق(\angle ٣) = ١٨٠ - (٩٠ + ٢٥) = ٦٥°$

$ق(\angle ٥) = ق(٢) = ٦٥°$ (تقابل بالرأس)

$\therefore ق(\angle ٤) = ق(\angle هـ أ د) = ١٨٠ - (٦٥ + ٦٥) = ٥٠°$

$ق(\angle ٦) = ق(\angle ٧) = \frac{١٨٠° - ٦٥°}{٢} = ٥٧,٥°$ ($\Delta أ جـ د$ متطابق الضلعين)

$\therefore ق(\angle أ جـ ل) = ٥٧,٥°$

في الشكل المقابل $\overline{هـ ل}$ ، $\overline{و ل}$ مماسان للدائرة $\overline{ب جـ}$ مماس للدائرة عند النقطة د أثبت أن المثلث ل ب جـ متطابق الضلعين.

معلق

في المثلث $\Delta ل ب جـ$

$\because \overline{ل و}$ ، $\overline{ل هـ}$ مماسان للدائرة

$\therefore \angle ل د$ منصف الزاوية (نتيجة) (١)

$\overline{ب جـ}$ مماس، $\overline{أ د}$ نصف قطر التماس $\therefore \overline{ب جـ} \perp \overline{أ ل}$

$\therefore ل د$ ارتفاع المثلث $\Delta ل ب جـ$ (٢)

من (١) و (٢) نجد أن: المثلث $\Delta ل ب جـ$ متطابق الضلعين

في الشكل المجاور القطعتان هـ جـ ، هـ ف مماستان لكل من الدائرتين، برهن أن: ب جـ = أ ف



$\because \overline{هـ جـ}$ ، $\overline{هـ ف}$ مماسان للدائرة

$\therefore هـ جـ = هـ ف$ (نظرية)

$\because \overline{هـ ب}$ ، $\overline{هـ أ}$ مماسان للدائرة

$\therefore هـ ب = هـ أ$ (نظرية)

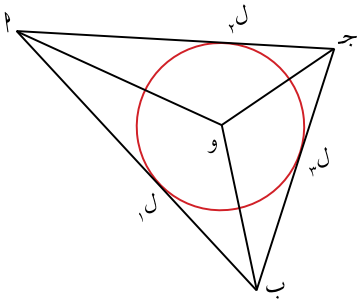
$هـ جـ - هـ ب = هـ ف - هـ أ$

$ب جـ = أ ف$

صفوة معلمي الكويت

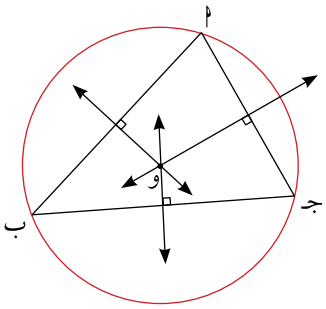
UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة)



هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل.
مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث.

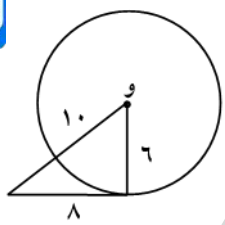
الدائرة المحيطة بمثلث (الخارجة)



هي دائرة تمر برؤوس المثلث الثلاثة.
مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث
(نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع المثلث).

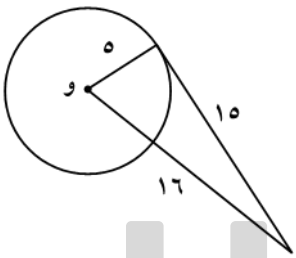
التمارين الموضوعية - مماس الدائرة

١. في الشكل المجاور ، المستقيم مماس للدائرة



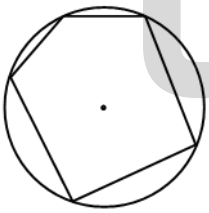
(أ) (ب)

٢. في الشكل المجاور ، المستقيم مماس للدائرة



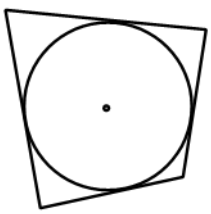
(أ) (ب)

٣. في الشكل المجاور ، الدائرة محاطة بالمضلع



(أ) (ب)

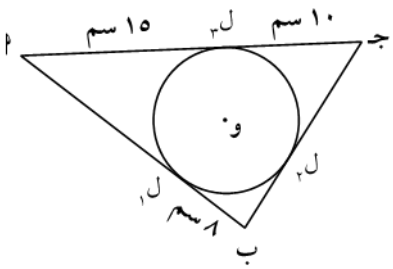
٤. في الشكل المجاور ، الدائرة محاطة بالمضلع



(أ) (ب)

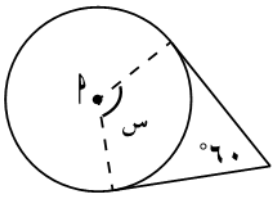
صفوة معلمي الكويت

٥. في الشكل المقابل، أوجد محيط المثلث ﺃ ب جـ



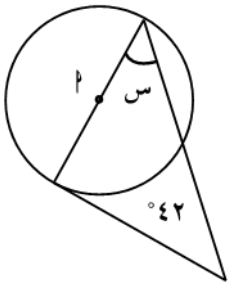
- ○ ٣٣ سم
- ○ ٤٤ سم
- ○ ٥٥ سم
- ● ٦٦ سم

٦. في الشكل المقابل، قيمة س تساوي:



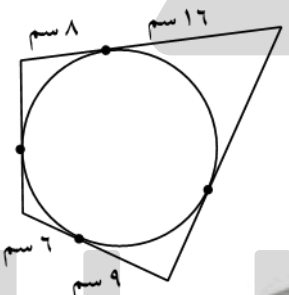
- ○ ٦٠
- ○ ٩٠
- ● ١٢٠
- ○ ١٨٠

٧. في الشكل المجاور قيمة س تساوي:



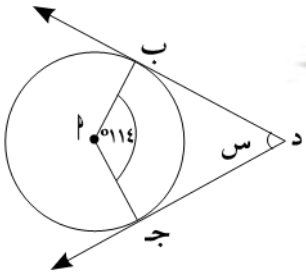
- ○ ٣٠
- ○ ٤٢
- ● ٤٨
- ○ ٩٠

٨. يحيط المضلع بدائرة. فإن محيط المضلع يساوي:



- ○ ٧٧ سم
- ○ ٨٨ سم
- ● ٧٨ سم
- ○ ٧٠ سم

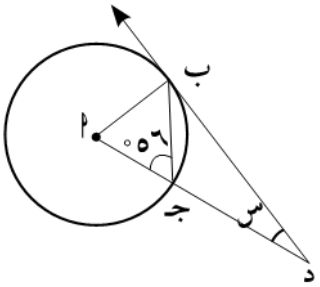
٩. إذا كان $\overleftrightarrow{دب}$، $\overleftrightarrow{دجـ}$ ماسين للدائرة. فإن س =



- ○ ٢٦°
- ○ ٥٧°
- ● ٦٦°
- ○ ١١٤°

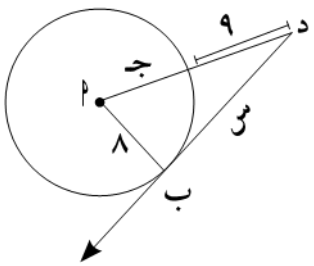
صفوة معلمي الكويت

٣٠. إذا كان $\overline{دب}$ ماسا للدائرة. فإن س =



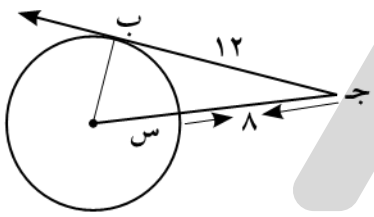
- ● ٢٢°
- ○ ٢٨°
- ○ ٣٤°
- ○ ٤٠°

٣١. إذا كان $\overline{دب}$ ماسا للدائرة. فإن س =



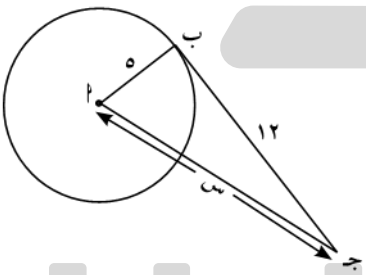
- ○ ٨
- ○ ٩
- ● ١٥
- ○ ١٧

٣٢. إذا كان $\overline{جب}$ ماسا للدائرة. فإن س =



- ○ ٥
- ○ ٣
- ○ ٤
- ● ٥

٣٣. إذا كان $\overline{جب}$ ماسا للدائرة. فإن س =



- ○ ٥
- ○ ١٢
- ● ١٣
- ○ ١٥

تـدرب و تـفـوق

اختبارات ألكترونية ذكية

UULA

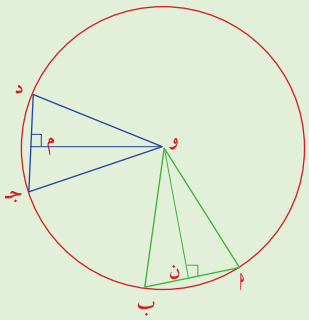
صفوة معلمي الكويت

الأوتار والأقواس

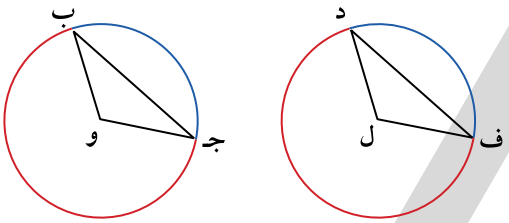
نظرية (١) :

في دائرة أو دوائر متطابقة

- للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة
- الأوتار المتطابقة تقابل أقواسا" متطابقة
- للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة



Q في الشكل المقابل الدائرتان متطابقتان، $\overset{\frown}{بجـ} \cong \overset{\frown}{رف}$. ماذا تستنتج؟



$\because \overset{\frown}{بجـ} \cong \overset{\frown}{رف}$

$\therefore \overline{بجـ} \cong \overline{رف}$

$\therefore$ ق(∠ر ل ف) = ق(∠ب و جـ) (نظرية)

Q في الرسم أعلاه، إذا كان $\overline{بجـ} \cong \overline{رف}$ ، فماذا تستنتج؟

$\because \overline{بجـ} \cong \overline{رف}$

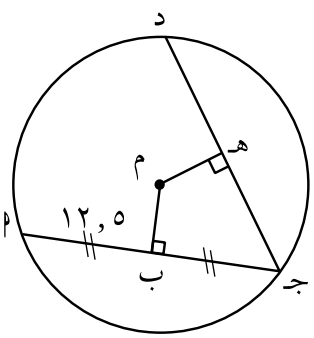
$\therefore \overset{\frown}{بجـ} \cong \overset{\frown}{رف}$

$\therefore$ ق(∠ر ل ف) = ق(∠ب و جـ) (نظرية)

نظرية (٢) :

- الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.
- الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.

Q في الشكل المقابل ليكن م مركز الدائرة.
م ب = م هـ أوجد طول جـ د



$\because$ م أ = م هـ ، $\overline{مهـ} \perp \overline{رجـ}$ ، $\overline{مب} \perp \overline{أجـ}$

$\therefore رجـ = أجـ$ (نظرية)

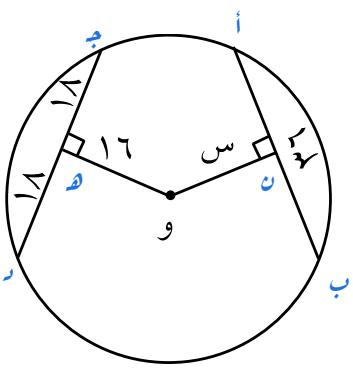
$= جـ ب + ب أ$

$= ١٢,٥ + ١٢,٥$ (بجـ = ب أ)

$= ٢٥$

صفوة معلمي الكويت

Q دائرة مركزها (و) أوجد قيمة س في الشكل المقابل، وفسر إجابتك.



$\overline{\text{ون}} \perp \overline{\text{اب}}$ ، $\overline{\text{وهـ}} \perp \overline{\text{جـد}}$ (معطي)

اب = ٣٦

جد = ١٨ + ١٨ = ٣٦

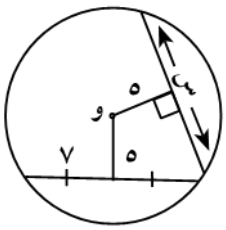
∵ اب = جد

∴ ون = وهـ (نظرية)

س = ١٦

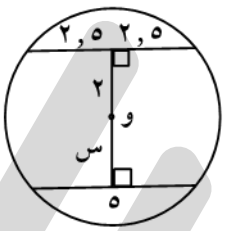
أوجد قيمة (س) في الأشكال التالية:

Q



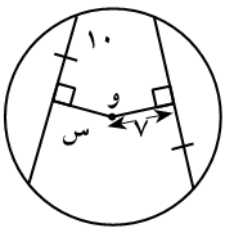
س = ٧ + ٧ = ١٤

Q



س = ٢

Q

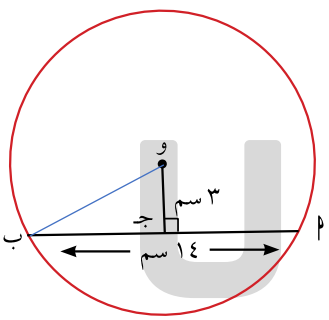


س = ٧

نظرية (٣) :

- القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلا من قوسيه
- القطر الذي ينصف وترا (ليس قطرا) في دائرة يكون عموديا على هذا الوتر
- العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة

Q في الشكل المقابل، أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و .



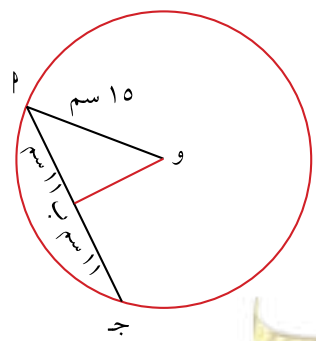
∵ وجـ $\perp$ $\overline{\text{اب}}$ (معطى)

∴ اجـ = جـب = $\frac{١٤}{٢}$ = ٧ سم (نظرية)

وب = $\sqrt{٧^٢ + ٣^٢}$

= $\sqrt{٥٨}$ ≃ ٧,٦ سم (فيثاغورث)

Q في الشكل المقابل أوجد البعد بين مركز الدائرة والوتر.



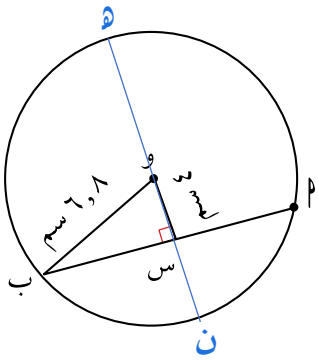
∵ اب = جـب = ١١ (معطى)

∴ $\overline{\text{وب}} \perp \overline{\text{اجـ}}$ (نظرية)

وب = $\sqrt{١٥^٢ - ١١^٢}$ = ٢ $\sqrt{٢٦}$ (فيثاغورث)

≃ ١٠,٢ سم

استخدم الشكل:



Q أوجد طول الوتر $\overline{ب ا}$

$\because \overline{و س} \perp \overline{ا ب}$ $\therefore ا س = س ب$ (نظرية)

$س ب = \sqrt{(٦,٨)^{٢} - ٤^{٢}} \simeq ٥,٤٩$ سم (فيثاغورث)

$ا ب = س ب + س ا$

$= ٥,٤٩ + ٥,٤٩ = ١٠,٩٨$ سم

Q المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر $\overset{\frown}{ا ب}$.

$س ن = و ن - و س$

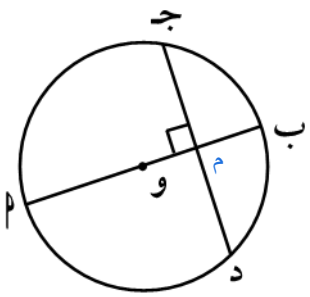
$= ٦,٨ - ٤ = ٢,٨$ سم

Q المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأكبر $\overset{\frown}{ا ب}$.

$س هـ = س و + و هـ$

$= ٤ + ٦,٨ = ١٠,٨$ سم

Q في الشكل المقابل إذا كان: $\overline{ا ب}$ قطر الدائرة، $\overline{ا ب} \perp \overline{ج د}$. ماذا تستنتج؟



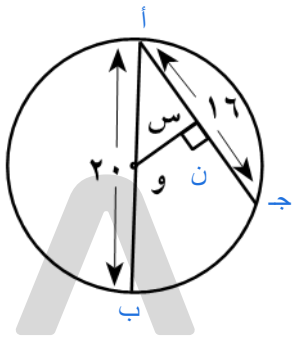
$\overline{ج م} \cong \overline{د م}$

$\overset{\frown}{ج ب} \cong \overset{\frown}{د ب}$

$\overset{\frown}{ج ا} \cong \overset{\frown}{د ا}$

أوجد قيمة (س) في الأشكال التالية:

Q



$ا و = و ب = ١٠$ سم

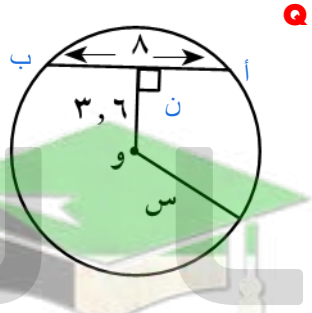
$\because و ن \perp \overline{ا ج}$

$\therefore ا ن = ن ج = ٨$ (نظرية)

$س = \sqrt{١٠^{٢} - ٨^{٢}}$

$= ٦$ (نظرية فيثاغورث)

Q



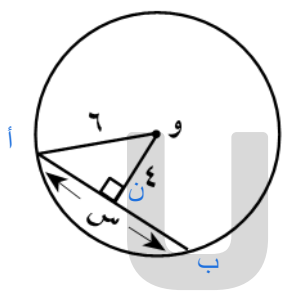
$\because و ن \perp \overline{ا ب}$

$\therefore ا ن = ن ب = \frac{٨}{٢} = ٤$ (نظرية)

$س = \sqrt{(٣,٦)^{٢} + ٤^{٢}}$

$= ٥,٣٨$ (نظرية فيثاغورث)

Q



$\because و ن \perp \overline{ا ب}$

$\therefore ا ن = ن ب$ (نظرية)

$ا ن = \sqrt{٦^{٢} - ٤^{٢}}$

$= ٢\sqrt{٥}$ (فيثاغورث)

$\therefore ا ن = ن ب = ٢\sqrt{٥}$

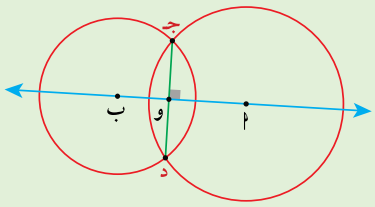
$س = ٢\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٥}$

$= ٤\sqrt{٥}$

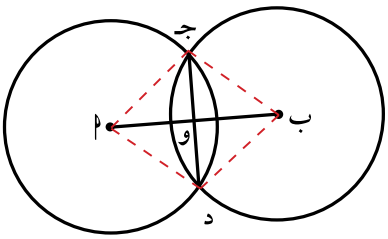
صفوة معلمي الكويت

نتيجة:

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديا على الوتر المشترك بينهما وينصفه.



Q يمثل الشكل المجاور دائرتين متطابقتين $\overline{جـ د}$ وتر مشترك إذا كان:
أ ب = ٢٤ سم ، نق = ١٣ سم ، أحسب جـ د .



∵ الدائرتان متطابقتان

∴ أجـ = أد = بجـ = بد = نق = ١٣ سم

∴ بدأجـ معين

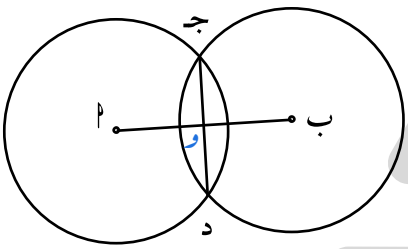
$\overline{ب أ} \perp \overline{جـ د}$

∴ ب و = و أ = ١٢ سم ، جـ و = و د

وجـ = $\sqrt{١٣^{٢} - ١٢^{٢}}$ = ٥ سم (فيثاغورث)

∴ جـ د = ٥ + ٥ = ١٠ سم

Q أ ، ب مركزا دائرتين متطابقتين. $\overline{جـ د}$ وتر مشترك للدائرتين.
إذا كان أ ب = ٨ سم، جـ د = ٦ سم. فما طول نصف القطر؟



∵ الدائرتان متطابقتان

∴ أجـ = أد = بجـ = بد = نق

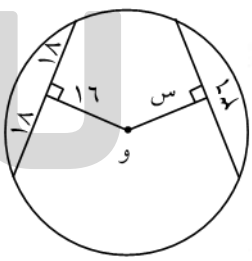
بدأجـ معين $\overline{ب أ} \perp \overline{جـ د}$

ب و = و أ = ٤ سم ، جـ و = و ر = ٣ سم

نق = $\sqrt{٤^{٢} + ٣^{٢}}$ = ٥ سم (فيثاغورث)

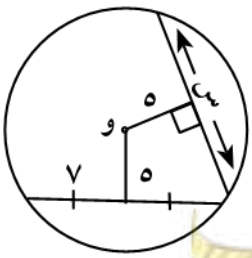
موضوعي - الأوتار والأقواس

١. في الشكل المجاور:



- ○ س = ٨
- ○ س = ٩
- ● س = ١٦
- ○ س = ١٨

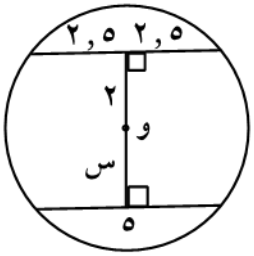
٢. في الشكل المجاور:



- ○ س = ٥
- ○ س = ٧
- ○ س = ١٠
- ● س = ١٤

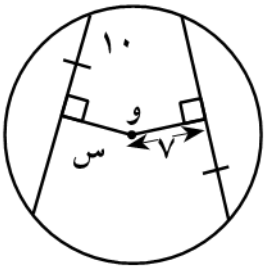
صفوة معلمي الكويت

٣. في الشكل المجاور:



- ● س = ٢
- ○ س = ٤
- ○ س = ٥
- ○ س = ١٠

٤. في الشكل المجاور:

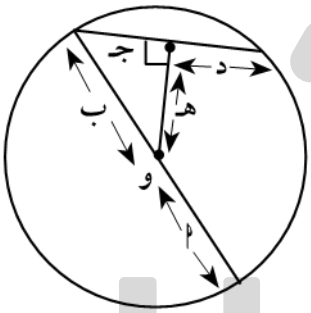


- ○ س = ٢
- ● س = ٧
- ○ س = ١٠
- ○ س = ١٤

٥. إذا كان طول قطر دائرة يساوي ٢٥ سم وطول أحد أوتارها ١٦ سم فإن البعد بين مركز الدائرة والوتر هو تقريباً:

- ○ ٨ سم
- ● ٩,٦ سم
- ○ ١٨سم
- ○ ١٩,٢ سم

٦. في الشكل المقابل العبارة الخاطئة فيما يلي هي:



- ○ جـ^{٢} + هـ^{٢} = ب^{٢}
- ○ أ = ب
- ○ جـ = د
- ● هـ = د

تـدرب و تـفـوق
اختبارات ألكترونية ذكية
UULA
صفوة معلمي الكويت

الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

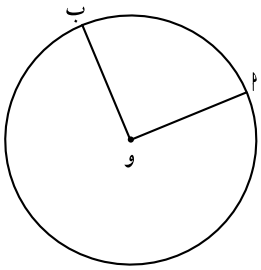
تعريف

- الزاوية التي رأسها مركز الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمي بالزاوية المركزية.
- الزاوية التي رأسها إحدى نقاط الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمي بالزاوية المحيطة.

نظرية (١) :

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة

Q في الشكل المقابل دائرة مركزها و . إذا كان ق(أب) = ٩٠° فأوجد ق(أوب)



ق(أوب) = ق(أب) = ٩٠°

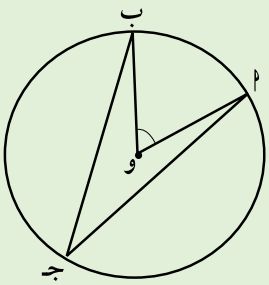
(أوب) زاوية مركزية تقابل (أب) (نظرية)

Q إذا كان قياس زاوية مركزية ٣٥° فأوجد قياس القوس على الدائرة المحصور بين ضلعيها

قياس القوس = قياس الزاوية المركزية = ٣٥° (نظرية)

نظرية (٢) :

في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها

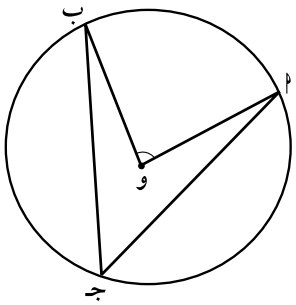


ق(أجب) = $\frac{1}{2}$ ق(أب)

ق(أجب) = $\frac{1}{2}$ ق(أوب)

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه.

Q في الشكل المجاور: إذا كان ق(أب) = ٨٠° فأوجد ق(بجأ)



ق(أجب) = $\frac{1}{2}$ ق(أب) (نظرية) (أجب) زاوية محيطية

= $\frac{1}{2}$ × ٨٠°

= ٤٠°

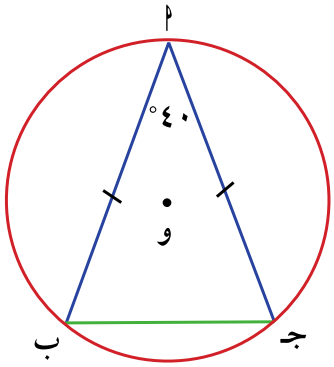
صفوة معلمي الكويت

Q إذا كان قياس زاوية محيطية في دائرة يساوي ٥٤° فأوجد قياس القوس المحصور بين ضلعيها

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها (نظرية)

قياس القوس = ٢ × ٥٤° = ١٠٨°

Q في الشكل المقابل: Δ أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين حيث:
أ، ب، جـ نقاط على الدائرة التي مركزها و ، ق(∠ب أ جـ) = ٤٠°
المطلوب: أوجد قياس كل من الأقواس: $\overset{\frown}{أب}$ ، $\overset{\frown}{ب جـ}$ ، $\overset{\frown}{أ جـ}$



ق$\left(\overset{\frown}{ب جـ}\right)$ = ق(ب) = ق(جـ) = $\frac{١٨٠° - ٤٠°}{٢}$ = ٧٠°

(Δ أ ب جـ متطابق الضلعين ، مجموع قياسات زواياه ١٨٠°)

ق(أ) = $\frac{١}{٢}$ ق$\left(\overset{\frown}{ب جـ}\right)$ ⇐ ق$\left(\overset{\frown}{ب جـ}\right)$ = ٨٠°

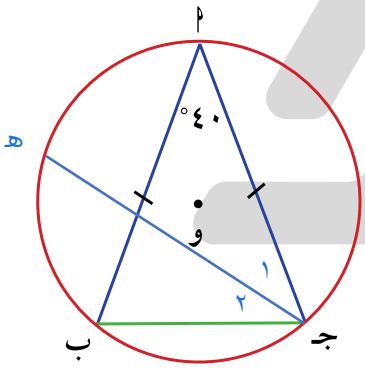
ق(جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق$\left(\overset{\frown}{أ ب}\right)$ ⇐ ق$\left(\overset{\frown}{أ ب}\right)$ = ١٤٠°

ق(ب) = $\frac{١}{٢}$ ق$\left(\overset{\frown}{أ جـ}\right)$ ⇐ ق$\left(\overset{\frown}{أ جـ}\right)$ = ١٤٠°

Q إذا كان $\overleftarrow{هـ جـ}$، منصف الزاوية الداخلية ∠أ جـ ب ويقطع الدائرة في النقطة هـ . ما قياس القوس الأصغر $\overset{\frown}{أ هـ}$ ؟

ق(ب) = ق(جـ) = $\frac{١٨٠° - ٤٠°}{٢}$ = ٧٠°

(Δ أ ب جـ متطابق الضلعين ، مجموع قياسات زواياه ١٨٠°)



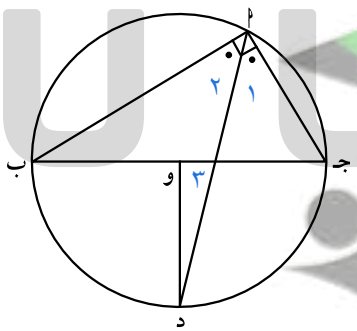
لدينا $\overleftarrow{هـ جـ}$ منصف الزاوية ∠أ جـ ب بالتالي:

ق(١) = ق(٢) = $\frac{٧٠°}{٢}$ = ٣٥°

ق(١) = $\frac{١}{٢}$ ق$\left(\overset{\frown}{أ هـ}\right)$ (نظرية)

ق$\left(\overset{\frown}{أ هـ}\right)$ = ٢ × ٣٥° = ٧٠°

Q في الشكل المقابل دائرة مركزها و أثبت أن: $\overline{و ر} \perp \overline{ب جـ}$



∵ ق(∠ب أ جـ) = ٩٠° (معطى)

∴ ق(١) = ق(٢) = $\frac{٩٠°}{٢}$ = ٤٥°

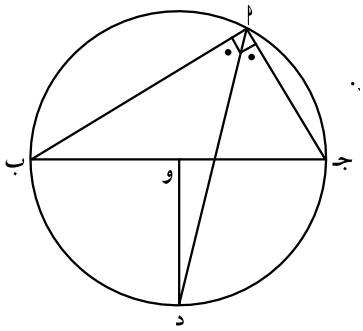
ق(١) = $\frac{١}{٢}$ ق$\left(\overset{\frown}{جـ ر}\right)$ (نظرية) ⇐ ق$\left(\overset{\frown}{جـ ر}\right)$ = ٩٠°

ق(٣) = ق$\left(\overset{\frown}{جـ ر}\right)$ = ٩٠° (نظرية)

∴ $\overline{و ر} \perp \overline{ب جـ}$

صفوة معلمي الكويت

Q إذا كان ق(أبجـ) = ٣٠°، أوجد ق(أ د ب)



في Δأبجـ

ق(جـ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٩٠°) = ٦٠°

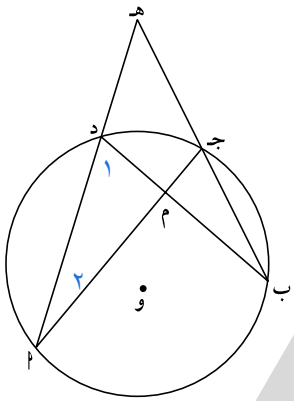
ق(جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(أب) (نظرية)

∴ ق(أب) = ٢ × ٦٠° = ١٢٠°

ق(أدب) = $\frac{1}{2}$ ق(أب) (نظرية)

= $\frac{1}{2}$ × ١٢٠ = ٦٠°

Q أثبت أن ق(أ م ب) = $\frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{د جـ}}) + \text{ق}(\overset{\frown}{\text{أ ب}})}{2}$

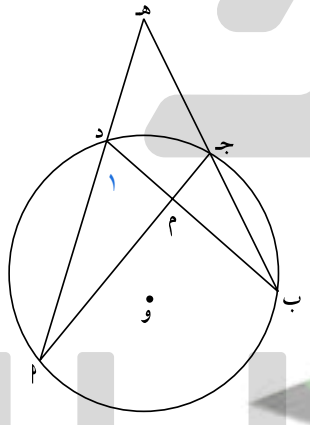


ق(أ م ب) = ق(١) + ق(٢) زاوية خارجة من مثلث

= $\frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{أ ب}})}{2} + \frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{د جـ}})}{2}$ (نظرية)

= $\frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{أ ب}}) + \text{ق}(\overset{\frown}{\text{د جـ}})}{2}$

Q أثبت أن ق(ب هـ أ) = $\frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{د جـ}}) - \text{ق}(\overset{\frown}{\text{أ ب}})}{2}$



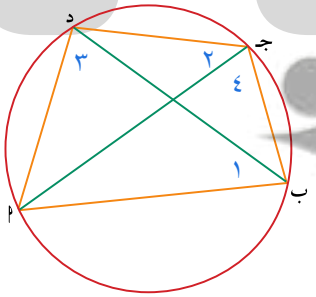
ق(١) = ق(ب) + ق(هـ) زاوية خارجة

ق(هـ) = ق(١) − ق(ب)

ق(ب هـ أ) = $\frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{أ ب}})}{2} - \frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{د جـ}})}{2}$ (نظرية)

= $\frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{أ ب}}) - \text{ق}(\overset{\frown}{\text{د جـ}})}{2}$

Q أ ب جـ د شكل رباعي دائري. أثبت أن ق(أ ب د) = ق(أ جـ د)



ك(١) = ك(أ ب د) = $\frac{1}{2}$ ك(أ د) (نظرية)

ك(٢) = ك(أ جـ د) = $\frac{1}{2}$ ك(أ د) (نظرية)

∴ ك(أ ب د) = ك(أ جـ د)

- أثبت أن ق(أ د ب) = ق(أ جـ ب)

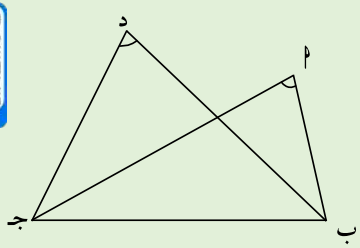
ك(٣) = ك(أ د ب) = $\frac{1}{2}$ ك(أ ب) (نظرية)

ك(٤) = ك(أ جـ ب) = $\frac{1}{2}$ ك(أ ب) (نظرية)

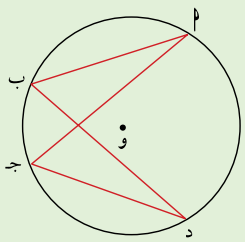
∴ ك(أ د ب) = ك(أ جـ ب)

معلمي الكويت
UULA
UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

نتائج:

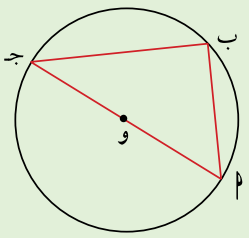


- كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.
- كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.
- كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة)، تكون زواياه المتقابلة متكاملة.
- في الشكل إذا تطابقت الزاويتان $\hat{أ}$ ، $\hat{د}$ المرسومات على القاعدة $\overline{بجـ}$ وفي جهة واحدة منها. كان الشكل أبجـد رباعيا دائريا.



$\widehat{جـبد}$ ، $\widehat{أجـد}$ تحصران $\widehat{أد}$

$\therefore$ ق$(\widehat{أبد})$ = ق$(\widehat{أجـد})$



$\widehat{أبجـ}$ تحصر $\widehat{أجـ}$

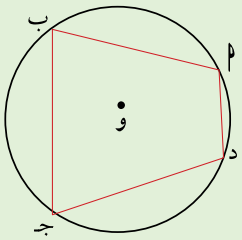
(نصف دائرة)

$\therefore$ ق$(\widehat{أبجـ})$ = ٩٠

$(\widehat{أبجـ})$ زاوية محيطية

مرسومة على قطر الدائرة

وهي زاوية قائمة



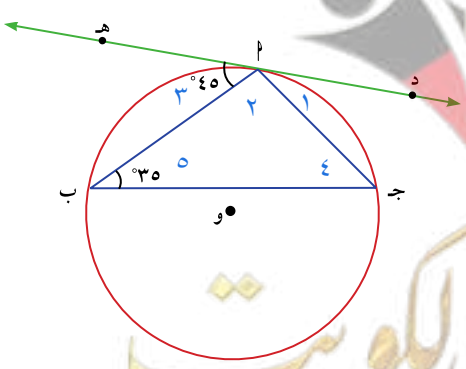
ق$(\hat{أ})$ + ق$(\hat{جـ})$ = ١٨٠°

ق$(\hat{ب})$ + ق$(\hat{د})$ = ١٨٠°

نظرية (٣) :

- قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.
- قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

Q إذا كان $\overleftrightarrow{هـد}$ مماسا للدائرة عند النقطة أ فأوجد: ق$(\widehat{بأجـ})$



ق$(\hat{١})$ = ق$(\hat{٥})$ = ٣٥° (نظرية)

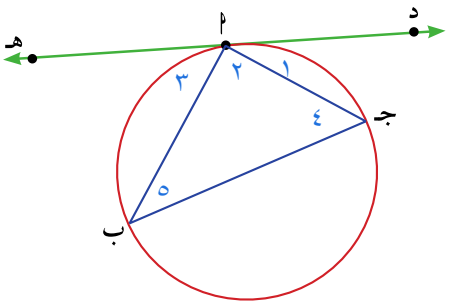
ق$(\hat{٣})$ = ق$(\hat{٤})$ = ٤٥° (نظرية)

ق$(\hat{٢})$ = ١٨٠° − (٤٥° + ٣٥°)

= ١٠٠° مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

$\therefore$ ق$(\widehat{جـأب})$ = ١٠٠°

Q في الشكل المقابل: ق(د أ̂ جـ) = ٤٠°، ق(هـ أ̂ ب) = ٥٠°
أوجد قياسات زوايا المثلث Δ أ ب جـ



ق(١̂) = ق(٥̂) = ٤٠°
ق(٣̂) = ق(٤̂) = ٥٠°
ق(٢̂) = ١٨٠° − (٤٠° + ٥٠°) = ٩٠°
مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

- أثبت أن $\overline{\text{ب جـ}}$ قطر للدائرة.

∵ جـ أ̂ ب زاوية محيطيه قياسها ٩٠°
∴ جـ أ̂ ب مرسومة على قطر الدائرة
∴ $\overline{\text{جـ ب}}$ قطر للدائرة.

Q $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في دائرة مركزها و. نرسم $\overline{\text{أ جـ}}$ مماساً للدائرة بحيث يكون أ جـ = ٢ نق تقطع الدائرة في د.
أثبت أن أ د = جـ د

Δ أ ب جـ فيه
(أ̂) = ٩٠°
أ ب = أ جـ = ٢ نق
∴ Δ أ ب جـ قائم متطابق الضلعين
ق(ب̂) = ق(جـ̂) = ٤٥° (نظرية)
ق(٢̂) = ق(ب̂) = ٤٥°
∴ Δ أ د جـ متطابق الضلعين
∴ أ د = جـ د

Q $\overline{\text{م ت}}$ مماس لدائرة مركزها و. $\overline{\text{م ن}}$ وتر في الدائرة بحيث يكون م ن = م ت. (م نقطة التماس) $\overline{\text{ت ن}}$ تقطع الدائرة في ل.
أثبت أن Δ ت ل م متطابق الضلعين (ل ت = م ل)

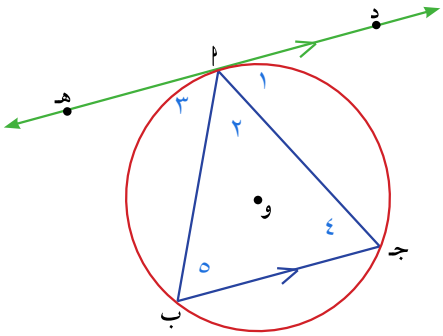
معلق



∵ م ن = م ت
Δ م ت ن متطابق الضلعين
ق(ت̂) = ق(ن̂)
ق(ن̂) = ق(١̂) (نظرية)
ق(ت̂) = ق(١̂)
∴ Δ ت ل م متطابق الضلعين (ل ت = ل م)

صفوة معلمي الكويت

Q في الشكل المجاور $\overleftrightarrow{هـ د}$ مماس للدائرة عند ا ، $\overline{ج ب}$ وتر في الدائرة ويوازي المماس $\overleftrightarrow{ر هـ}$ أثبت أن المثلث ابجـ متطابق الضلعين.



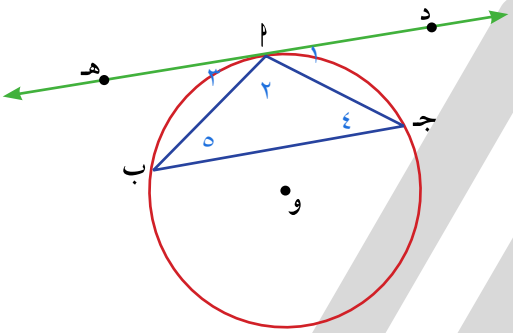
ق(١) = ق(٥) (نظرية)

ق(١) = ق(٤) (تبادل وتوازي)

∴ ق(٤) = ق(٥)

∴ المثلث ابجـ متطابق الضلعين

Q إذا كان لدينا $\overleftrightarrow{هـ د}$ مماس للدائرة عند النقطة ا ، المثلث ابجـ متطابق الضلعين (اب = اجـ)
أثبت أن $\overline{ج ب}$ // $\overleftrightarrow{هـ د}$



ق(١) = ق(٥) (نظرية)

ق(٤) = ق(٥) (△ابجـ متطابق الضلعين)

∴ ق(١) = ق(٤) وهما في وضع التبادل

∴ $\overleftrightarrow{ر هـ}$ // $\overline{ب جـ}$

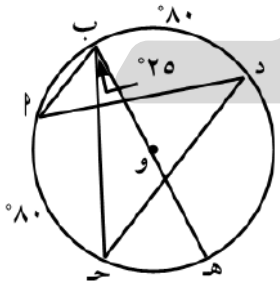
من كراسة التمارين:

Q ق(ا) $= \frac{١}{٢} \times ٨٠° = ٤٠°$

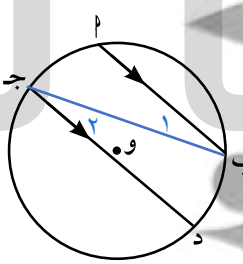
Q ق($\overset{\frown}{هـجـ}$) $= ٢ \times ٢٥° = ٥٠°$

Q ق(جـ) $= \frac{١}{٢} \times ٨٠° = ٤٠°$

Q ق(ا$\overset{\frown}{بـ}$هـ) $= \frac{١}{٢} \times ١٣٠° = ٦٥°$



Q في الشكل المقابل أثبت أن: $\overset{\frown}{اجـ} \cong \overset{\frown}{بـد}$



نرسم $\overline{ب جـ}$

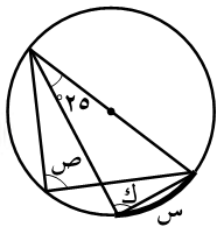
ق(١) = ق(٢) (بالتبادل والتوازي)

$\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{اجـ}$) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{بـد}$)

ق($\overset{\frown}{اجـ}$) = ق($\overset{\frown}{بـد}$)

∴ $\overset{\frown}{اجـ} \cong \overset{\frown}{بـد}$

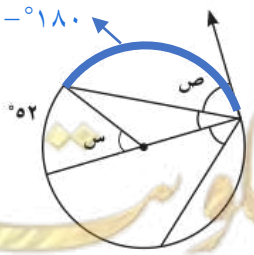
Q



س = ٥٠°

ك = ص = ٩٠°

Q

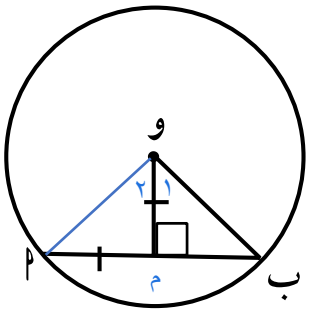


١٨٠° − ٥٢° = ١٢٨°

س = ٥٢°

ص = $\frac{١٢٨}{٢}$ = ٦٤

Q أوجد قياس القوس الأصغر $\overset{\frown}{أب}$



$\overline{وم} \perp \overline{أب}$
$\therefore ب م = م أ$ (نظرية)
$\therefore و م = أ م = ب م$
$\therefore \Delta و م ب$ قائم متطابق الضلعين
$\therefore ق(\hat{١}) = ٤٥°$
$\Delta و م أ$ قائم متطابق الضلعين
$\therefore ق(\hat{٢}) = ٤٥°$
$ق(ب \hat{و} أ) = ٤٥° + ٤٥° = ٩٠°$
$\therefore ق(\overset{\frown}{أب}) = ق(ب \hat{و} أ) = ٩٠°$ (نظرية)

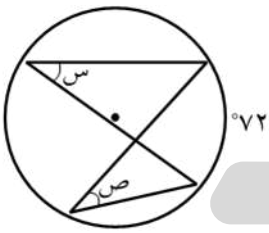
موضوعي - الزوايا المركزية والزوايا المحيطة

إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

Q قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطة المشتركة معها في القوس نفسه. (أ) (ب)

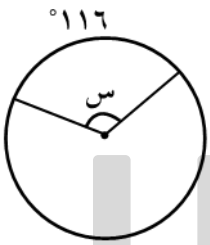
Q قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر. (أ) (ب)

Q في الشكل المجاور: س = ص = ٧٢° (أ) (ب)



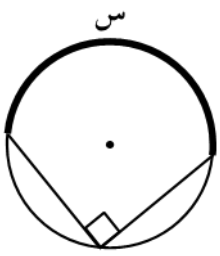
ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

١. في الشكل المجاور قياس س =



- ○ س = ٥٨°
- ○ س = ٩٠°
- ● س = ١١٦°
- ○ س = ٢٣٢°

٢. في الشكل المجاور قياس س =



- ○ س = ٤٥°
- ○ س = ٩٠°
- ● س = ١٨٠°
- ○ س = ٣٦٠°

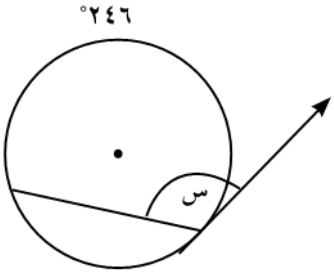
UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

٣. في الشكل المجاور قياس ص =



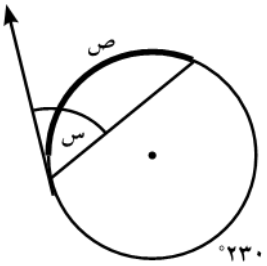
- ○ ص = ٦٠ °
- ○ ص = ٨٢ °
- ● ص = ١٠٩ °
- ○ ص =٢١٨ °

٤. في الشكل المجاور قياس ص =



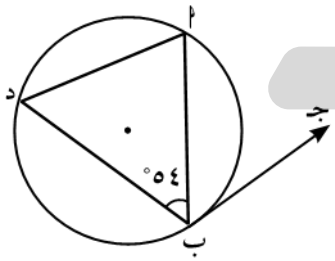
- ● س = ١٢٣ °
- ○ س = ٢٤٦ °
- ○ س = ٢٧٠ °
- ○ س = ١٨٠ °

٥. في الشكل المجاور قياس س =



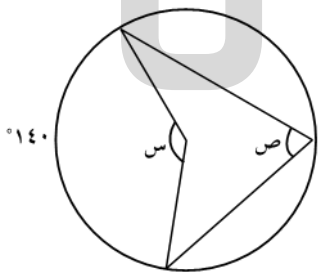
- ● س = ٦٥ °
- ○ س = ١٣٠ °
- ○ س = ٢٣٠ °
- ○ س = ١١٥ °

٦. في الشكل المقابل، إذا كان ق$(\overset{\frown}{\text{ب د}})$ = ١٤٠° فإن ق$(\widehat{\text{أ ب جـ}})$ =



- ○ ٥٠ °
- ● ٥٦ °
- ○ ٧٠ °
- ○ ١٢٤°

٧. في الشكل المقابل، قيمة كل من س، ص على الترتيب هما:



- ○ ٧٠ ° , ١٤٠°
- ● ١٤٠° , ٧٠ °
- ○ ٧٠ ° , ٣٥ °
- ○ ٣٥ ° , ٧٠ °

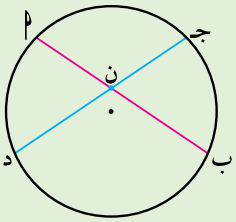
تـدرب و تـفـوق
اختبارات ألكترونية ذكية
UULA
صفوة معلمي الكويت

الدائرة :الأوتار المتقاطعة ، المماس

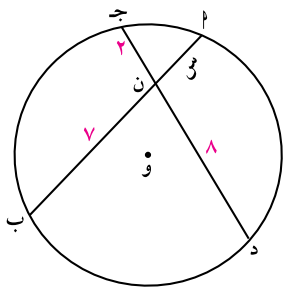
نظرية (١) :

إذا تقاطع وترين داخل دائرة فإن ناتج ضرب طولي جزأي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزأي الوتر الآخر.

$أن \times نب = جن \times ند$



Q في الشكل المجاور أوجد قيمة س



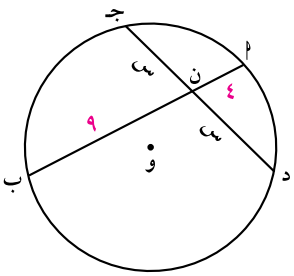
$أن \times نب = جن \times نس$

$س \times ٧ = ٢ \times ٨$

$٧س = ١٦$

$س = \frac{١٦}{٧}$

Q في الشكل المجاور أوجد قيمة س



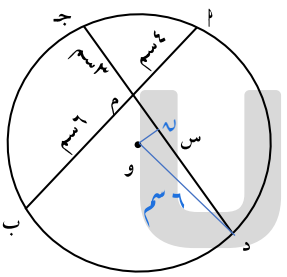
$جن \times نس = أن \times نب$

$س \times س = ٤ \times ٩$

$س^{٢} = ٣٦$

$س = \sqrt{٣٦} = ٦$

Q في الشكل المجاور أوجد قيمة س وأوجد البعد بين المركز والوتر $\overline{جد}$
إذا علمت أن طول نصف قطر الدائرة يساوي ٦ سم



$مجـ \times مد = مأ \times مب$ (نظرية)

$٣س \times ٤ = ٦ \times ٦$

$٣س = ٢٤ \Leftarrow س = \frac{٢٤}{٣} = ٨$ سم

$\because \overline{ون} \perp \overline{جد}$ (ن منتصف $\overline{جـد}$)

$جد = ٣ + ٨ = ١١$ سم

$\therefore جن = ند = \frac{١١}{٢} = ٥,٥$ (نظرية)

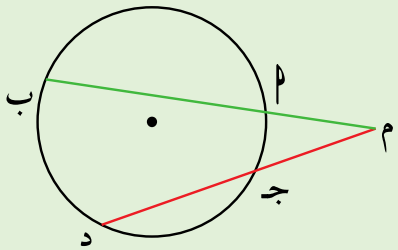
$\therefore ون = \sqrt{٦^{٢} - (٥,٥)^{٢}} \simeq ٢,٤$ (فيثاغورث)

صفوة معلمي الكويت

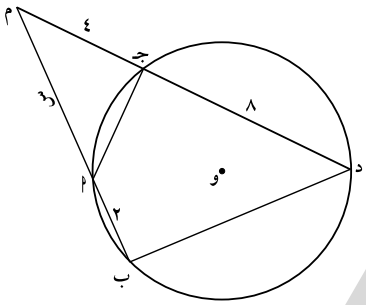
نتيجة:

إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.

م أ × م ب = م جـ × م د



Q في الشكل المجاور أوجد قيمة س



م أ × م ب = م جـ × م د (نظرية)

س × (س + ٢) = ٤ × (٤ + ٨)

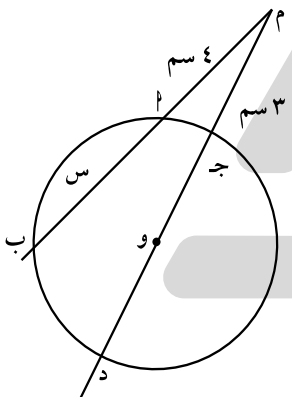
$س^{٢}$ + ٢س = ٤٨

$س^{٢}$ + ٢س − ٤٨ = ٠

س = ٦

س = −٨ مرفوض

Q في الشكل المجاور دائرة مركزها و . طول نصف قطرها ٤ سم أوجد قيمة س



م أ × م ب = م جـ × م د (نظرية)

٤ × (٤ + س) = ٣ × (٣ + ٤ + ٤)

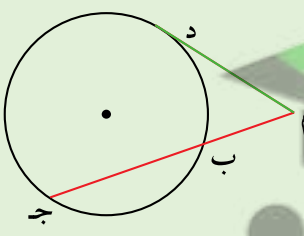
١٦ + ٤س = ٣٣

٤س = ٣٣ − ١٦

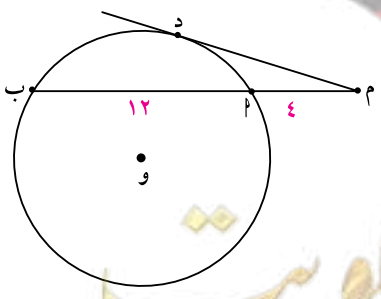
$س = \frac{١٧}{٤}$ = ٤,٢٥ سم

نتيجة:

إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.



Q في الشكل المجاور احسب طول القطعة المماسية م د



$(م د)^{٢}$ = م أ × م ب (نظرية)

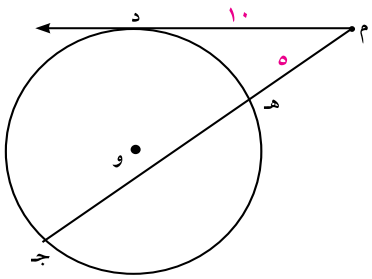
= ٤ × (٤ + ١٢)

= ٦٤

∴ م د = $\sqrt{٦٤}$ = ٨ سم

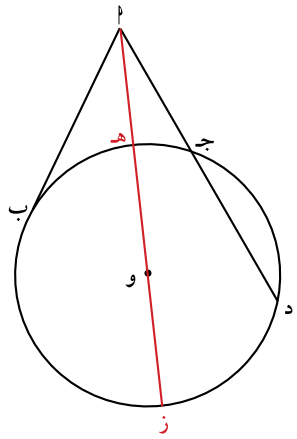
صفوة معلمي الكويت

Q أوجد طول $\overline{هـ جـ}$



(م ر)^{٢} = م هـ × م جـ (نظرية)
١٠^{٢} = ٥ × (٥ + س)
١٠٠ = ٢٥ + ٥س
١٠٠ − ٢٥ = ٥س
٧٥ = ٥س
∴ س = $\frac{٧٥}{٥}$ = ١٥

Q ا جـ = ٤ سم، ا ر = ٩سم ما طول القطعة المماسية $\overline{ا ب}$

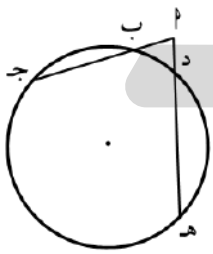


(ا ب)^{٢} = ا جـ × ا ر (نظرية)
= ٤ × ٩
= ٣٦
∴ ا ب = $\sqrt{٣٦}$ = ٦ سم

Q أوجد طول نصف قطر الدائرة إذا كانت: ا هـ = ٢ سم

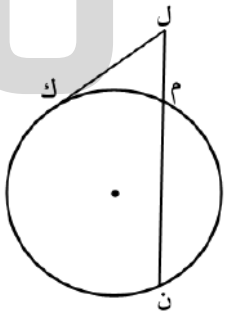
ا جـ × ا د = ا هـ × ا ز (نظرية)
٩ × ٤ = ٢ × (٢ + س)
٣٦ = ٤ + ٢س
٣٦ − ٤ = ٢س
٣٢ = ٢س ⟸ س = $\frac{٣٢}{٢}$ = ١٦
∴ نق = $\frac{١٦}{٢}$ = ٨ سم

Q في الشكل المقابل: ا جـ = ٢٠ ، ب جـ = ١٥ ، ا هـ = ٢٥ . أوجد: هـ ر



ا ب × ا جـ = ا ر × ا هـ (نظرية)
٢٠ × ٥ = ا ر × ٢٥
١٠٠ = ٢٥ (ا ر)
⟸ ا ر = $\frac{١٠٠}{٢٥}$ = ٤
⟸ ر هـ = ٢٥ − ٤ = ٢١ سم

Q في الشكل المجاور: $\overline{ل ك}$ مماس للدائرة ل ك = ٨ ، ل م = ٤ أوجد: م ن

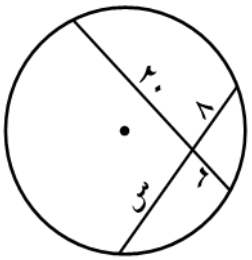


(ل ك)^{٢} = ل م × ل ن (نظرية)
٨^{٢} = ٤ × (٤ + س)
٦٤ = ١٦ + ٤س
٦٤ − ١٦ = ٤س
٤٨ = ٤س
س = $\frac{٤٨}{٤}$ = ١٢
∴ م ن = ١٢ سم

UULA
صفوة معلمي الكويت

في التمرينين التاليين أوجد قيمة كل متغير :

Q

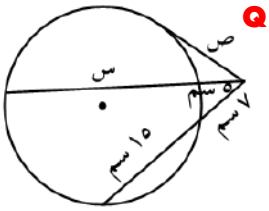


٨س = ٦ × ٢٠ (نظرية)

٨س = ١٢٠

س = $\frac{١٢٠}{٨}$ = ١٥

Q



ص^{٢} = ٧ × (١٥ + ٧) = ١٥٤

ص = $\sqrt{١٥٤}$ ≃ ١٢,٤ سم

٧ × (١٥ + ٧) = ٥ × (٥ + س)

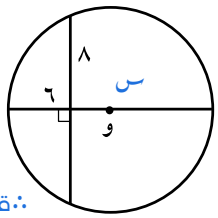
٢٥ + ٥س = ١٥٤

٥س = ١٥٤ − ٢٥ = ١٢٩

س = $\frac{١٢٩}{٥}$ = ٢٥,٨ سم

في التمرينين التاليين أوجد طول قطر كل دائرة:

Q



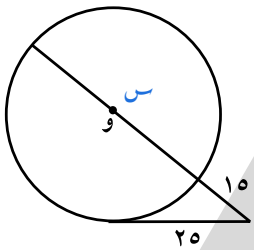
٦س = ٨ × ٨

٦س = ٦٤

س = $\frac{٦٤}{٦}$ = $\frac{٣٢}{٣}$

∴قطر الدائرة = $\frac{٣٢}{٣}$ + ٦ = $\frac{٥٠}{٣}$

Q



(س + ١٥)١٥ = (٢٥)^{٢}

١٥س + ٢٢٥ = ٦٢٥

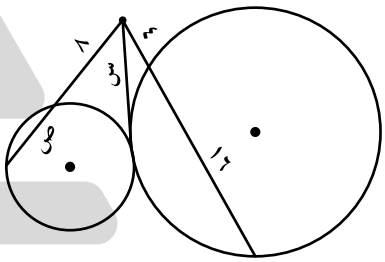
١٥س = ٦٢٥ − ٢٢٥

١٥س = ٤٠٠

س = $\frac{٤٠٠}{١٥}$ = $\frac{٨٠}{٣}$ ⇐

في التمرينين التاليين استخدم معطيات الشكل لإيجاد قيمة كل من س ، ص.

Q



س^{٢} = ٤ × (٤ + ١٦)

س^{٢} = ٨٠

س = $\sqrt{٨٠}$ = ٤$\sqrt{٥}$

س^{٢} = ٨ × (٨ + ص)

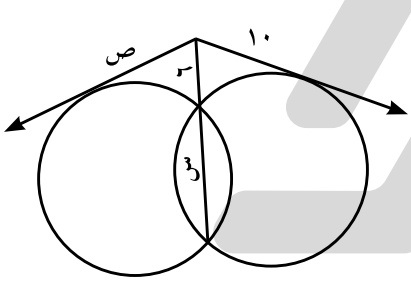
٨٠ = ٦٤ + ٨ص

٨٠ − ٦٤ = ٨ص

١٦ = ٨ص

ص = $\frac{١٦}{٨}$ = ٢

Q



١٠^{٢} = ٦ × (٦ + س)

١٠٠ = ٣٦ + ٦س

١٠٠ − ٣٦ = ٦س

٦٤ = ٦س

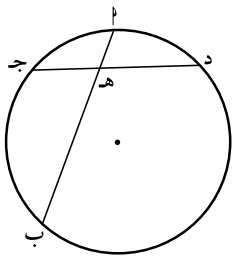
س = $\frac{٦٤}{٦}$ = $\frac{٣٢}{٣}$

ص^{٢} = ٦ × $\left(\frac{٣٢}{٣} + ٦\right)$

ص^{٢} = ١٠٠

ص = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠

Q في الشكل أدناه : أهـ = ١٩ ، هـ د = ٤٠ ، هـ جـ = ٣٨ . أوجد هـ ب



أهـ × هـ ب = هـ جـ × هـ د (نظرية)

١٩س = ٣٨ × ٤٠

١٩س = ١٥٢٠

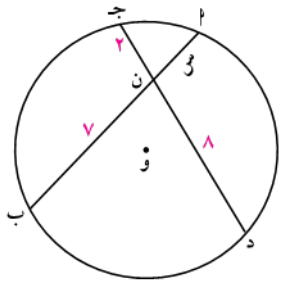
س = $\frac{١٥٢٠}{١٩}$ = ٨٠

صفوة معلمي الكويت

موضوعي - الأوتار المتقاطعة والمماس

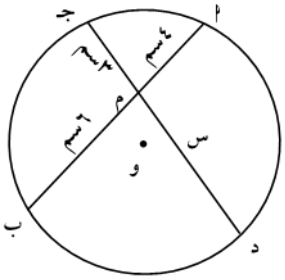
ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة

١. في الشكل المقابل قيمة س تساوي:



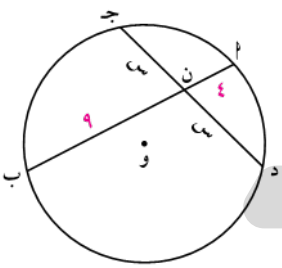
- ○ ٢
- ○ ٧
- ○ ٨
- ● $\frac{١٦}{٧}$

٢. في الشكل المقابل قيمة س تساوي:



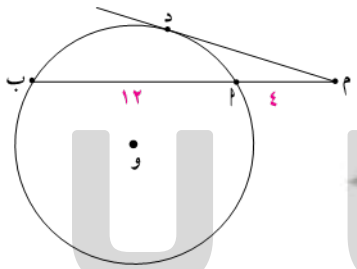
- ○ ٤
- ○ ٥
- ○ ٦
- ● ٨

٣. في الشكل المقابل قيمة س تساوي:



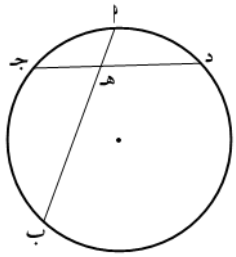
- ○ ٤
- ● ٦
- ○ ٩
- ○ ٣٦

٤. أوجد طول القطعة المماسية $\overline{مر}$



- ● ٨
- ○ ١٢
- ○ ١٦
- ○ ١٠

٥. في الشكل المقابل، أهـ = ١٩ ، هـر = ٤٠ ، هـجـ = ٣٨ . أوجد هـب



- ○ ٤٠
- ● ٨٠
- ○ ١٠٠
- ○ ١٢٠

تـدرب و تـفـوق

اختبارات ألكترونية ذكية

صفوة معلمي الكويت

تنظيم البيانات في مصفوفات

اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

Q $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٥ \\ ٧- & ٣- & ٢ \\ ١ & ٠ & ٩ \end{bmatrix}$ ٣×٣

Q $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٤- & \frac{٢}{٣} & ٣- \end{bmatrix}$ ١×٣

Q $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ٠ \\ ٢- & ٠,٥ & ٧ \end{bmatrix}$ ٣×٢

Q $\underline{ج} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ١ & ٥- \\ ٠,٦ & ٩ \end{bmatrix}$ ٢×٣

Q $\underline{ج} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \\ ٠,٥ \end{bmatrix}$ ١×٤

Q $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٨- & ٣ & ١٠ \end{bmatrix}$ ١×٣

Q إذا كانت المصفوفة $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١٢ & ١ & ٥ & ٤ \\ ٢ & ٦ & ٢ & ٣,٥ \\ ١ & ٠ & ١ & ٤- \end{bmatrix}$ أوجد:

- $ب_{٢٢} = ٦$
- $ب_{١٣} = ١$
- $ب_{١١} = ١٢$
- $ب_{٣١} = ٥$
- $ب_{٤٣} = ٤-$
- $ب_{٣٣} = ١$

المصفوفات: المربعة ، الأفقية ، العمودية

- المصفوفة المربعة: هي مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة. وفيما عدا ذلك، تسمي المصفوفة: مصفوفة مستطيلة.
- المصفوفة الأفقية: هي مصفوفة مكونة من صف واحد.
- المصفوفة العمودية: هي مصفوفة مكونة من عمود واحد.

صنّف كلا من المصفوفات التالية:

Q $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٥- & ٠ \\ ٤ & ٠ & ٧ \\ ٢ & ٣ & ٨ \end{bmatrix}$ مربعة

Q $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٠,٢ \end{bmatrix}$ عمودية

Q $\underline{ج} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ٥- \end{bmatrix}$ أفقية

Q $\underline{د} = \begin{bmatrix} ٢- & ٣ & ١,٤ \\ ١٢ & ٨ & ٥ \end{bmatrix}$ مستطيلة

المصفوفات المتساوية:

تكون مصفوفتان متساويتين إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها، وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية والعكس صحيح.

صفوة معلمي الكويت

إذاكانت: $\begin{bmatrix} ٢س-٥ & ٤ \\ ٣ & ٣ص+١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٤ \\ ٣ & ص+١٨ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س ، ص

$٢س-٥=٢٥ \Leftarrow ٢س=٢٥+٥ \Leftarrow \frac{٢س}{٢}=\frac{٣٠}{٢} \Leftarrow س=١٥$

$٣ص+١٢=ص+١٨ \Leftarrow ٣ص-ص=-١٢+١٨ \Leftarrow \frac{٢ص}{٢}=\frac{٦}{٢} \Leftarrow ص=٣$

إذا كانت: $\begin{bmatrix} ٣٨ & ٥ \\ ٣ & ٤ص-١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س+٨ & ٥ \\ -ص & ٣ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س ، ص

$س+٨=٣٨ \Leftarrow س=٣٨-٨ \Leftarrow س=٣٠$

$٤ص-١٠=-ص \Leftarrow ٤ص+ص=١٠ \Leftarrow \frac{٥ص}{٥}=\frac{١٠}{٥} \Leftarrow ص=٢$

إذا كانت: $[٣س \quad س+ص \quad س-ص] = [-٩ \quad ٤ \quad -١٠]$ فأوجد قيمة كل من س ، ص

$٣س=-٩ \Leftarrow س=\frac{-٩}{٣} \Leftarrow س=-٣$

$س+ص=٤ \Leftarrow -٣+ص=٤ \Leftarrow ص=٤+٣=٧$

موضوعي - تنظيم البيانات في المصفوفات

إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

١. المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٦ & ٧ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ من الرتبة ٢×٣ (أ) (ب)

٢. في المصفوفة ب $= \begin{bmatrix} ١٢ & ٥١ & ٤ \\ ١٢ & ٢٦ & ٣,٥ \\ ١ & ١٠ & -٤ \end{bmatrix}$ فإن قيمة العنصر ب$_{٢١}$ = ١٢ (أ) (ب)

٣. المصفوفة الأفقية: هي مصفوفة مكونة من عمود واحد فقط (أ) (ب)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

٤. إذا كانت $\begin{bmatrix} ٢س-٥ & ٤ \\ ٣ & ٣ص+١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٤ \\ ٣ & ص+١٨ \end{bmatrix}$ فإن قيمتي س ، ص هما:

- ● س = ١٥ ، ص = ٣
- ○ س = ١٥ ، ص = -٣
- ○ س = -١٥ ، ص = ٣
- ○ س = -١٥ ، ص = -٣

٥. إذا كانت $[٣س \quad س+ص \quad س-ص] = [-٩ \quad ٤ \quad -١٠]$ فإن قيمتي س ، ص هما:

- ○ س = -٣ ، ص = -٧
- ○ س = ٣ ، ص = ٧
- ● س = -٣ ، ص = ٧
- ○ س = ٣ ، ص = -٧

تـدرب و تـفـوق
اختبارات الكترونية ذكية
صفوة معلمي الكويت

جمع وطرح المصفوفات

Q أوجد ناتج ما يلي: $\begin{bmatrix} -١٢ & ٢٤ \\ -٣ & ٥ \\ -١ & ١٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ -٥ & ٤ \\ ١ & -٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٥ & ٢٣ \\ -٨ & ٩ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$

Q إذا كانت: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$ $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix}$ أوجد:

- $\underline{جـ} + \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ -٣ & ٧ \end{bmatrix}$
- $\underline{أ} + (\underline{ب} + \underline{جـ}) = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ -٣ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١٠ & ٥ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$

خواص جمع المصفوفات:

إذا كان $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ ، $\underline{جـ}$ مصفوفات من الرتبة م×ن فإن:

- $\underline{أ} + \underline{ب}$ هي من الرتبة م×ن — خاصية الإقفال (الانغلاق)
- $\underline{أ} + \underline{ب} = \underline{ب} + \underline{أ}$ — خاصية الإبدال
- $(\underline{أ} + \underline{ب}) + \underline{جـ} = \underline{أ} + (\underline{ب} + \underline{جـ})$ — خاصية التجميع
- $\underline{أ} + \underline{٠}_{م\times ن} = \underline{أ} = \underline{٠}_{م\times ن} + \underline{أ}$ — المصفوفة الصفرية هي العنصر المحايد الجمعي من الرتبة م×ن
- $\underline{أ} + (-\underline{أ}) = \underline{٠}_{م\times ن}$ — خاصية المعكوس الجمعي (النظير الجمعي)

أوجد ناتج كل مما يلي:

Q $\begin{bmatrix} ٦ & -٩ \\ -٢ & ١ \\ ٨ & ٧ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٤ & ٣ & ٠ \\ ٦ & ٥ & ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & -١٢ & ٧ \\ -٨ & -٤ & -٢ \end{bmatrix}$

Q $\begin{bmatrix} -٣ & ٣ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ -٣ & ١٤ \end{bmatrix}$

Q $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \\ ٦ & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ -٣ & ٦ \\ -٥ & ٧ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ ٣ & -٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ -١ & ١٠ \\ ١٤ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ -٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ & ٠ \\ -٤ & ١٢ \\ -٢ & ١٠ \end{bmatrix}$

UULA
صفوة معلمي الكويت

أوجد قيمة س حيث:

Q $\underline{س} - \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٧ \\ -٤ & ٤ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \underline{س} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٧ \\ -٤ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٧ \\ -٢ & ٩ \end{bmatrix}$

Q $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{bmatrix} + \underline{س} = \begin{bmatrix} ٥ & ١ & ٨ \\ -٦ & ٠ & ٥ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \underline{س} = \begin{bmatrix} ٥ & ١ & ٨ \\ -٦ & ٠ & ٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -١ & ١١ \\ -٨ & -١ & ٢ \end{bmatrix}$

Q $\underline{س} - \begin{bmatrix} ٤ & ١٢ \\ ٧٥ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٥٠ \\ ٥٠ & -١٠ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \underline{س} = \begin{bmatrix} ٥ & ٥٠ \\ ٥٠ & -١٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ١٢ \\ ٧٥ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٦٢ \\ ١٢٥ & -١١ \end{bmatrix}$

Q $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٤ & -٢٤ \end{bmatrix} - \underline{س} = \begin{bmatrix} ١٣ & ٢٤ & ٥ \\ -٦ & -١٧ & ١ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٤ & -٢٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٦ & -١٧ & ١ \end{bmatrix} = \underline{س} \Leftarrow \underline{س} = \begin{bmatrix} -٤ & -١٣ & -٢٣ \end{bmatrix}$

Q $-\underline{س} + \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٩ & ٥ & ٠ \\ -٣ & ٨ & ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ -٣ & ٥ & ٠ \end{bmatrix}$

$-\underline{س} = \begin{bmatrix} -٥ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ -٣ & ٥ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٩ & ٥ & ٠ \\ -٣ & ٨ & ١٢ \end{bmatrix} \Leftarrow -\underline{س} = \begin{bmatrix} -١ & -٢ & -٨ \\ -٧ & -٥ & ٢ \\ ٠ & -٣ & -١٢ \end{bmatrix} \Leftarrow \underline{س} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٨ \\ ٧ & ٥ & -٢ \\ ٠ & ٣ & ١٢ \end{bmatrix}$

صفوة معلمي الكويت

موضوعي - جمع وطرح المصفوفات

إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

١. لجمع مصفوفتين يجب أن يكونا من الرتبة نفسها — (أ) (ب)

٢. جمع المصفوفات هو عملية غير إبدالية — (أ) (ب)

٣. جمع المصفوفات هو عملية تجميعية — (أ) (ب)

٤. طرح المصفوفات هو عملية إبدالية — (أ) (ب)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة

٥. $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢- & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ٢- \\ ١- & ٠ \end{bmatrix} =$

○ $\begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ ٣ & ٧ \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} ٨ & ٣- \\ ٣- & ٧- \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ ٣- & ٧ \end{bmatrix}$ ● $\begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ٣- & ٧ \end{bmatrix}$

٦. $\begin{bmatrix} ٣- & ٥ \\ ١- & ١٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣- & ١ \\ ٢ & ٤- \end{bmatrix} =$

○ $\begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ٣ & ١٤ \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} ٠ & ٤- \\ ٣- & ١٤- \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} ٠ & ٤- \\ ٣- & ١٤ \end{bmatrix}$ ● $\begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ٣- & ١٤ \end{bmatrix}$

٧. $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \\ ٦ & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٣- & ٦ \\ ٥- & ٧ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ ٣ & ٢- \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} =$

○ $\begin{bmatrix} ٦- & ٠ \\ ٤- & ١٢ \\ ٢ & ١٠ \end{bmatrix}$ ● $\begin{bmatrix} ٦- & ٠ \\ ٤- & ١٢ \\ ٢- & ١٠ \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} ٦- & ٠ \\ ٤ & ١٢ \\ ٢- & ١٠ \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} ٦- & ٠ \\ ٤- & ١٢ \\ ٢- & ١٠ \end{bmatrix}$

تـدرب و تـفـوق

اختبارات ألكترونية ذكية

صفوة معلمي الكويت

ضرب المصفوفات

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -٤ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ -٢ & -١ & ٣ \end{bmatrix}$ **فأوجد:**

Q $٥\underline{ب} - ٤\underline{أ}$

$$= ٥\begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ -٢ & -١ & ٣ \end{bmatrix} - ٤\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -٤ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٠ & ٥ & ١٠ \\ -١٠ & -٥ & ١٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٨ & ١٢ & -١٦ \\ ٢٠ & ١٦ & ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٨ & -٧ & ٢٦ \\ -٣٠ & -٢١ & ٣ \end{bmatrix}$$

Q $\underline{أ} + ٦\underline{ب}$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -٤ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix} + ٦\begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ -٢ & -١ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -٤ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٦ & ١٢ \\ -١٢ & -٦ & ١٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٩ & ٨ \\ -٧ & -٢ & ٢١ \end{bmatrix}$$

حل كل معادلة مما يلي:

Q $٢\underline{س} = \begin{bmatrix} ٤ & ١٢ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$

$$٢\underline{س} = \begin{bmatrix} ٢ & ١٢ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} \Leftarrow \underline{س} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} ٢ & ١٢ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

Q $-٣\underline{س} + \begin{bmatrix} ٧ & ٠ & -١ \\ ٢ & -٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ & ٨ \\ -١٩ & -١٨ & ١٠ \end{bmatrix}$

$$-٣\underline{س} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ & ٨ \\ -١٩ & -١٨ & ١٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & ٠ & -١ \\ ٢ & -٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ & ٩ \\ -٢١ & -١٥ & ٦ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \underline{س} = \frac{-١}{٣} \times \begin{bmatrix} ٣ & ٠ & ٩ \\ -٢١ & -١٥ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ & -٣ \\ ٧ & ٥ & -٢ \end{bmatrix}$$

UULA
صفوة معلمي الكويت

Q أوجد ناتج $أ \times ب$: $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٤- & ١- \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix}$

$$أ \times ب = \begin{bmatrix} (١)(٣)+(٠)(٠) & (٢-)(٣)+(٤)(٠) \\ (١)(٤-)+(٠)(١-) & (٢-)(٤-)+(٤)(١-) \\ (١)(٢)+(٠)(١) & (٢-)(٢)+(٤)(١) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٦- \\ ٤- & ٤ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

Q أوجد ناتج الضرب: $\begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٣ & ٤- \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣- & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٣ & ٤- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣- & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (١-)(٣-)+(٠)(٥) & (١-)(٣)+(٠)(٠) \\ (٣)(٣-)+(٤-)(٥) & (٣)(٣)+(٤-)(٠) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٣- \\ ٢٩- & ٩ \end{bmatrix}$$

Q بفرض $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٥ & ٤- \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٨ & ٠ & ١- & ٠ \\ ٢ & ٥- & ١ & ٨ \end{bmatrix}$

حدد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب $أ \times ب$ ، $ب \times أ$ معرفة أو غير معرفة

$أ \times ب$ معرفة لأن عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية

$$أ \times ب = \begin{bmatrix} (٨)(٤)+(٢-)(٢) & (٤)(٠)+(٢-)(٥-) & (٤)(١-)+(١-)(٥-) & (٢-)(١)+(٠)(٤) \\ (٨)(٥)+(٤-)(٢) & (٥)(٠)+(٤-)(٥-) & (٥)(١-)+(١-)(٥-) & (٤-)(١)+(٠)(٨) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢٨ & ١٠ & ٦- & ١٦- \\ ٣٢ & ٢٠ & ٩- & ٣٢- \end{bmatrix}_{٤ \times ٢}$$

$ب \times أ$ غير معرفة لأن عدد أعمدة المصفوفة الأولى لا يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية

مربع المصفوفة

Q إذا كانت $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١- & ٤ \end{bmatrix}$ فأوجد: $ب^٢$، $ب^٣$

$$ب^٢ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١- & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١- & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (٢)(٢)+(١)(١-) & (٢)(١)+(١)(٤) \\ (١-)(٢)+(٤)(١-) & (١-)(١)+(٤)(٤) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٦- & ١٥ \end{bmatrix}$$

$$ب^٣ = ب^٢ \times ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٦- & ١٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١- & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (٣)(٢)+(٦)(١-) & (٣)(١)+(٦)(٤) \\ (٦-)(٢)+(١٥)(١-) & (٦-)(١)+(١٥)(٤) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٢٧ \\ ٢٧- & ٥٤ \end{bmatrix}$$

Q إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ فأوجد: $أ^٢$، $أ^٣$

$$أ^٢ = \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (٢)(٢)+(١-)(١) & (٢)(١-)+(١-)(٠) \\ (١)(٢)+(٠)(١) & (١)(١-)+(٠)(٠) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٢ & ١- \end{bmatrix}$$

$$أ^٣ = أ^٢ \times أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٢ & ١- \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (٣)(٢)+(٢-)(١) & (٣)(١-)+(٢-)(٠) \\ (٢)(٢)+(١-)(١) & (٢)(١-)+(١-)(٠) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣- \\ ٣ & ٢- \end{bmatrix}$$

موضوعي - ضرب المصفوفات

إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

١. $٣\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٤ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ١٥ \\ ١٢ & -٩ \end{bmatrix}$ (أ) (ب)

٢. ضرب المصفوفات المربعة هو عملية إبدالية (أ) (ب)

٣. ضرب المصفوفات المربعة هو عملية تجميعية (أ) (ب)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

٤. حل المعادلة المصفوفية: $٢\underline{س} = \begin{bmatrix} ٤ & ١٢ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ هو:

○ $\underline{س} = \begin{bmatrix} ١ & -٦ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ● $\underline{س} = \begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ○ $\underline{س} = \begin{bmatrix} -١ & -٦ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ○ $\underline{س} = \begin{bmatrix} -١ & -٦ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix}$

٥. إذا كانت المصفوفة $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$ فإن $\underline{ب}^{٢} =$

● $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ -٦ & ١٥ \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ -٦ & -١٥ \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} ٣ & -٦ \\ -٦ & ١٥ \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ -٦ & ١٥ \end{bmatrix}$

٦. أي ضرب مما يلي غير معرف؟

○ $\begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix} \times [-١ \quad ٢]$

● $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} \times [-١ \quad ٢]$

○ $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$

○ $[-١ \quad ١] \times \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$

٧. بفرض المصفوفة $\underline{ب}$ من الرتبة ٢×٣ والمصفوفة $\underline{جـ}$ من الرتبة ٣×٢ فإن رتبة المصفوفة $\underline{ب} \times \underline{جـ}$ هي من الرتبة:

● ٢×٢ ○ ٢×٣ ○ ٣×٣ ○ ٢×٣

تـدرب و تـفـوق

اختبارات ألكترونية ذكية

صفوة معلمي الكويت

مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات)

مصفوفة الوحدة المصفوفة المربعة التي عناصر قطرها الرئيسي (١) وبقية العناصر (صفرا)

$$\underline{و}_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} ، \underline{و}_{٣\times٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

النظير الضربي

$$\underline{أ} \times \underline{أ}^{-١} = \underline{أ}^{-١} \times \underline{أ} = \underline{و}$$

Q أثبت أن المصفوفة: $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢,٥ & ١ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢,٥ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (٢)(١)+(-٢)(٢) & (٥)(١)+(-٢)(٢) \\ (٢,٥)(٢)+(-٤)(١) & (٢,٥)(-٢)+(-٤)(٥) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \underline{و}_{٢\times٢}$$

∴المصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢,٥ & ١ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي لـ $\begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix}$

Q أثبت أن : $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

$$\underline{أ} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (٢)(٢)+(-١)(٣) & (-١)(٣)+(٢)(٢) \\ (٢)(١)+(-١)(٣) & (-١)(٢)+(٢)(٢) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \underline{و}_{٢\times٢}$$

∴المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي لـ $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية

محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{bmatrix}$ هو $|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{vmatrix} = أ د - ب جـ$

ملاحظة

المصفوفة التي محددها الصفر ليس لها نظير ضربي وتسمى (مصفوفة منفردة).

صفوة معلمي الكويت

تمرن: أوجد محدد كل من المصفوفات التالية:

Q $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

$|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ٢ \times ٤ - ٢ \times ٤ = ٠$ صفرا

$\therefore \underline{أ}$ منفردة

Q $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٨ & ٧ \\ ٢ & ١٠ \end{bmatrix}$

$|\underline{ب}| = \begin{vmatrix} ٨ & ٧ \\ ٢ & ١٠ \end{vmatrix} = ٨ \times ١٠ - ٢ \times ٧ = ٦٦$

Q $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ك & ٣ \\ (٣-ك) & ٣- \end{bmatrix}$

$|\underline{جـ}| = \begin{vmatrix} ك & ٣ \\ (٣-ك) & ٣- \end{vmatrix} = -٣ك - ٣(٣-ك)$

$= -٣ك - ٩ + ٣ك$

$= -٩$

Q إذا كانت المصفوفة $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ ٤- & ٢س \end{bmatrix}$ منفردة فأوجد قيمة س

$\because \underline{ب}$ منفردة $\therefore |\underline{ب}| =$ صفرا

$\begin{vmatrix} ٥ & ١٠ \\ ٤- & ٢س \end{vmatrix} =$ صفرا

$٥ \times ٢س - (٤-) \times ١٠ = ٠$

$١٠س + ٤٠ = ٠$

$١٠س = -٤٠$

$\Leftarrow س = -٤$

Q $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣- \\ ٥- & ٢ \end{bmatrix}$

$|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} ٤ & ٣- \\ ٥- & ٢ \end{vmatrix} = ٢ \times ٤ - (٥-) \times (٣-) = ٧$

Q $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix}$

$|\underline{ب}| = \begin{vmatrix} ٢ & ٣- \\ ٣- & ٢ \end{vmatrix} = (٢) \times (٢) - (٣-) \times (٣-) = ٥$

Q $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} س & ٠ \\ ٠ & س \end{bmatrix}$

$|\underline{جـ}| = \begin{vmatrix} س & ٠ \\ ٠ & س \end{vmatrix} = س^٢ - ٠ = س^٢$

Q إذا كانت المصفوفة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} س & ٤ \\ ٦ & ١٢ \end{bmatrix}$ منفردة فأوجد قيمة س

$\because \underline{أ}$ منفردة $\therefore |\underline{أ}| = ٠$

$\begin{vmatrix} س & ٤ \\ ٦ & ١٢ \end{vmatrix} = ٠$

$س \times ١٢ - ٦ \times ٤ = ٠$

$٦س - ٤٨ = ٠$

$٦س = ٤٨$

$\Leftarrow س = \frac{٤٨}{٦} = ٨$

صفوة معلمي الكويت

خاصية:

بفرض أن: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$ إذا كان $أد - بجـ \neq 0$، فإن لها نظيرا ضربيا $\underline{أ}^{-1}$

حيث: $\underline{أ}^{-1} = \frac{1}{|\underline{أ}|}\begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{bmatrix}$

Q هل $\underline{ب} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسر.

$|\underline{ب}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times4 - 2\times3 = -2$ $\because -2 \neq 0$ ∴يوجد نظير ضربي

Q هل $\underline{ب} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسر.

$|\underline{ب}| = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 6\times(-4) - 8\times(-3) =$ صفرا $\therefore \underline{ب}$ منفردة ليس لها نظير ضربي

Q هل للمصفوفة: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$ نظير (معكوس) ضربي؟ في حالة الإيجاب أوجده.

$|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\times(-2) - 8\times0 = 2$ ، $\frac{2}{1} = 2 \neq 0$

∴يوجد نظير ضربي هو: $\underline{أ}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -8 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

حدد أي من المصفوفات التالية لها نظير ضربي (معكوس) ، ثم أوجده.

Q $\underline{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\times3 - 1\times4 = 2$

$\because 2 \neq 0$ $\therefore \underline{أ}^{-1}$ موجود

$\underline{أ}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Q $\underline{ب} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 2{,}3 \\ 3 & 7{,}2 \end{bmatrix}$

$|\underline{ب}| = \begin{vmatrix} 0{,}5 & 2{,}3 \\ 3 & 7{,}2 \end{vmatrix} = 0{,}5\times7{,}2 - 3\times2{,}3 = \frac{-33}{10}$

$\because |\underline{ب}| \neq$ صفرا $\therefore \underline{ب}^{-1}$ موجودة

$\underline{ب}^{-1} = -\frac{10}{33}\begin{bmatrix} 3 & -7{,}2 \\ -0{,}5 & 2{,}3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{11} & \frac{-24}{11} \\ \frac{-5}{33} & \frac{23}{33} \end{bmatrix}$

صفوة معلمي الكويت

موضوعي - مصفوفة الوحدة والنظير الضربي

إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

١. المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ٢- \\ ١- & ٣ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ (أ) (ب)

٢. للمصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ نظير ضربي (أ) (ب)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

٣. قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$ =

○ ٠ ○ ٨- ○ ٨ ● ٤

٤. إذا كانت المصفوفية $\begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ ٤- & ٢س \end{bmatrix}$ منفردة، فإن قيمة س تساوي.

● ٤- ○ ٤ ○ ١ ○ ٠

٥. النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ هو:

○ $\begin{bmatrix} ٢- & ٤- \\ ١- & ٣- \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} ١ & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٤} & ١ \end{bmatrix}$ ● $\begin{bmatrix} \frac{٣}{٢} & ٢- \\ \frac{١-}{٢} & ١ \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} \frac{١-}{٢} & \frac{١-}{٤} \\ ١- & \frac{١-}{٣} \end{bmatrix}$

٦. أي مصفوفة مما يلي ليس لها نظير ضربي؟

○ $\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ٨- \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٢- & ٨ \end{bmatrix}$ ● $\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{١}{٤} \\ ٨ & ٤ \end{bmatrix}$ ○ $\begin{bmatrix} ١ & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٤} & ٨ \\ ٤- & \end{bmatrix}$

تـدرب و تـفـوق
اختبارات ألكترونية ذكية

صفوة معلمي الكويت

حل نظام من معادلتين خطيتين

أولاً: باستخدام النظير الضربي:

Q حل النظام: $\begin{cases} ٥س + ٣ص = ٧ \\ ٣س + ٢ص = ٥ \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix} \quad (ا)$$

$$أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$$ مصفوفة المعاملات

$$|أ| = ٣ \times ٣ - ٢ \times ٥ = ١ \neq ٠$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{١} \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$$

نضرب كلا من طرفي المعادلة (ا) من جهة اليمين في $أ^{-١}$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٧ \times ٣ + (-٥) \times ٢ \\ ٧ \times (-٢) + ٣ \times ٥ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -١ \\ ٤ \end{bmatrix}$$

∴ الحل $س = -١$

$ص = ٤$

Q حل النظام: $\begin{cases} س + ص = ٣ \\ س - ص = ٧ \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

$$\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٧ \end{bmatrix} \quad (ا)$$

$$أ = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$$ مصفوفة المعاملات

$$|أ| = ١ \times (-١) - ١ \times ١ = -٢ \neq ٠$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} -١ & -١ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠,٥ & ٠,٥ \\ ٠,٥ & -٠,٥ \end{bmatrix}$$

نضرب كلا من طرفي المعادلة (ا) من جهة اليمين في $أ^{-١}$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠,٥ & ٠,٥ \\ ٠,٥ & -٠,٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ \\ ٧ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٣ \times ٠,٥ + ٧ \times ٠,٥ \\ ٣ \times ٠,٥ + (-٠,٥) \times ٧ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٥ \\ -٢ \end{bmatrix}$$

∴ الحل $س = ٥$

$ص = -٢$

UULA
صفوة معلمي الكويت

ثانياً: باستخدام المحددات (طريقة كرامر)

Q استخدم قاعدة كرامر لحل النظام:

$$\left.\begin{array}{l} ٣س + ٢ص = -٦ \\ -(٤س - ٣ص - ٧ = ٠) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} ٣س + ٢ص = -٦ \\ -٤س - ٣ص = ٧ \end{array}\right\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ -٤ & -٣ \end{vmatrix} = ٣ \times (-٣) - ٢ \times (-٤)$$

$$= -١ \square -١ = -١ \neq ٠$$

$$\Delta س = \begin{vmatrix} -٦ & ٢ \\ ٧ & -٣ \end{vmatrix}$$

$$= (-٦) \times (-٣) - ٢ \times ٧ = ٤$$

$$\Delta ص = \begin{vmatrix} ٣ & -٦ \\ -٤ & ٧ \end{vmatrix}$$

$$= ٣ \times ٧ - (-٦) \times (-٤) = -٣$$

$$س = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{٤}{-١} = -٤$$

$$ص = \frac{\Delta ص}{\Delta} = \frac{-٣}{-١} = ٣$$

Q استخدم قاعدة كرامر لحل النظام:

$$\left.\begin{array}{l} ٤س - ٥ص + ٧ = ٠ \\ ٣ص - ٦س + ٣ = ٠ \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} ٤س - ٥ص = -٧ \\ -٦س + ٣ص = -٣ \end{array}\right\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٤ & -٥ \\ -٦ & ٣ \end{vmatrix} = ٤ \times ٣ - (-٥) \times (-٦)$$

$$= -١٨ \square -١٨ = ٠ \neq$$

$$\Delta س = \begin{vmatrix} -٧ & -٥ \\ -٣ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= (-٧) \times ٣ - (-٥) \times (-٣) = -٣٦$$

$$\Delta ص = \begin{vmatrix} ٤ & -٧ \\ -٦ & -٣ \end{vmatrix}$$

$$= ٤ \times (-٣) - (-٦) \times (-٧) = -٥٤$$

$$س = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{-٣٦}{-١٨} = ٢$$

$$ص = \frac{\Delta ص}{\Delta} = \frac{-٥٤}{-١٨} = ٣$$

موضوعي - حل نظام معادلتين

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

Q حل النظام $\left.\begin{array}{l} ٣س + ٣ص = -٣ \\ -(٤س - ٣ص - ٧ = ٠) \end{array}\right\}$ هو :

- ○ س=٤ ، ص=٣
- ● س=-٤ ، ص=٣
- ○ س=-٤ ، ص=-٣
- ○ س=٤ ص=-٣

Q حل النظام $\left.\begin{array}{l} ٤س - ٥ص + ٧ = ٠ \\ -(٤س - ٣ص + ١٧ = ٠) \end{array}\right\}$ هو :

- ○ س=-٢ ، ص=-٣
- ○ س=٢ ، ص=-٣
- ○ س=-٢ ، ص=-٣
- ● س=٢ ، ص=٣

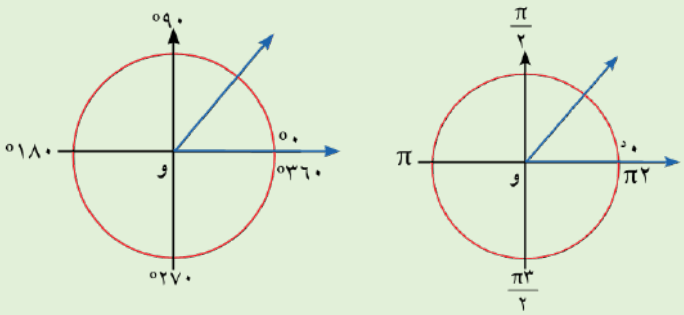
تـدرب و تـفـوق

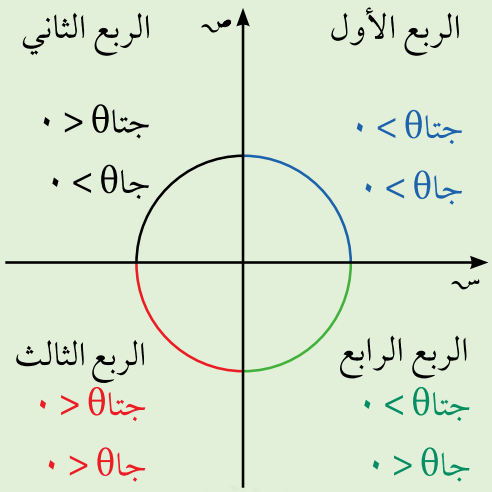
اختبارات ألكترونية ذكية

صفوة معلمي الكويت

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)

دائرة الوحدة هي دائرة مركزها نقطة الأصل (و) وطول نصف قطرها واحد وحدة





تمرين: حدّد إشارة جتا θ، جا θ في كل مما يلي:

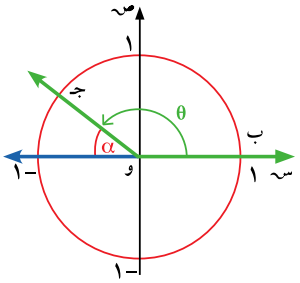
- $\theta = ١٣٥°$ θ في الربع ٢ جا θ > ٠ جتا θ < ٠
- $\theta = \frac{\pi ٧}{٦}$ $\theta = \frac{١٨٠ \times ٧}{٦} = ٢١٠°$ θ في الربع ٣ جا θ < ٠ جتا θ < ٠
- $\theta = ٣٠٥°$ θ في الربع ٤ جا θ < ٠ جتا θ > ٠

إذا كانت $٩٠° < \theta < ٢٧٠°$ فما هي إشارة جا(θ)؟
θ في الربع ٢ أو في الربع ٣
جتا θ < ٠

إذا كانت $\frac{\pi}{٢} < \theta < \pi$ فما هي إشارة جا(θ)؟
θ في الربع ١ أو في الربع ٢
جا θ > ٠

صفوة معلمي الكويت

حدد زاوية الإسناد للزاوية θ في كل مما يلي:



عندما θ تقع في الربع الثاني

$$\alpha^\circ = 180^\circ - \theta^\circ$$

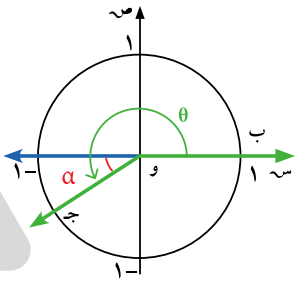
$$\alpha' = \pi - \theta'$$

$\theta = 120^\circ$ تقع في الربع ٢

$\alpha = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$\theta = \frac{5\pi}{6}$ تقع في الربع ٢

$\alpha = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$



عندما θ تقع في الربع الثالث

$$\alpha^\circ = \theta^\circ - 180^\circ$$

$$\alpha' = \theta' - \pi$$

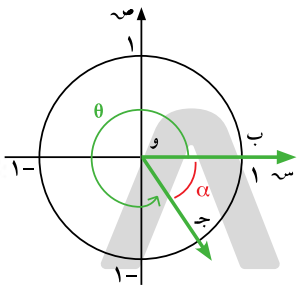
$\theta = 200^\circ$ تقع في الربع ٣

$\alpha = 200^\circ - 180^\circ = 20^\circ$

$\theta = \frac{5\pi}{4}$ تقع في الربع ٣

$\alpha = \theta - \pi$

$= \frac{5\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{4}$



عندما θ تقع في الربع الرابع

$$\alpha^\circ = 360^\circ - \theta^\circ$$

$$\alpha' = 2\pi - \theta'$$

$\theta = 320^\circ$ تقع في الربع ٤

$\alpha = 360^\circ - 320^\circ = 40^\circ$

$\theta = \frac{5\pi}{3}$ تقع في الربع ٤

$\alpha = 2\pi - \theta$

$= 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

صفوة معلمي الكويت

موضوعي - دائرة الوحدة والنسب المثلثية

إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

١. $\text{جتا}(-٣٠٠^\circ) = \frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

٢. $\text{جا}(١٢٠^\circ) = \frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

٣. $\text{ظا}(-١٥٠^\circ) = \frac{\sqrt{٣}}{٣} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ (أ) (ب)

٤. $\text{قا}(٣١٥^\circ) = \sqrt{٢}$ (أ) (ب)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

٥. أفترض أن جتاθ سالبة جاθ موجبة. يقع الضلع النهائي للزاوية θ في:

○ الربع الأول ● الربع الثاني ○ الربع الثالث ○ الربع الرابع

٦. الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها تختلف عن الزوايا الأخرى هي:

○ ١٩٠° ○ ١٧٠° ○ ٣٥٠° ● ١١٠°

٧. الزاوية التي في الوضع القياسي وضلعها النهائي يمر بالنقطة م $\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}، \frac{-\sqrt{٢}}{٢}\right)$ التي تقع على دائرة الوحدة هي:

○ ٤٥° ○ ٢٢٥° ● ١٣٥° ○ ٣٣٥°

٨. الزاوية التي يقع ضلعها النهائي في الربع الرابع فيما يلي هي:

○ -٣٢٠° ○ -٢٧٠° ● $\frac{\pi ٥}{٣}$ ○ $\frac{\pi ١٣}{٩}$

٩. الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها يختلف عن الزوايا الأخرى هي:

○ $\frac{\pi ٧}{٤}$ ○ ١٣٥° ○ $\frac{\pi ٣}{٤}$ ● ٢١٥°

١٠. الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها $\frac{\pi}{٣}$ هي:

○ $\frac{\pi ١١}{٦}$ ○ ٢٥٥° ○ $\frac{\pi ٧}{٨}$ ● $\frac{\pi ٥}{٣}$

١١. زاوية في الوضع القياسي قياسها يساوي -٢٢٥°. فإن النقطة المثلثية التي يمكن أن تقع على الضلع النهائي لهذه الزاوية هي:

○ $\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}، \frac{-\sqrt{٢}}{٢}\right)$ ● $\left(\frac{-\sqrt{٢}}{٢}، \frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$ ○ $\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}، \frac{-\sqrt{٢}}{٢}\right)$ ○ (-١ ، ١)

٢١. $[\text{جا}(-١٣٥^\circ)]^٢ + [\text{جتا}(-١٣٥^\circ)]^٢ =$

● ١ ○ $\frac{١}{٢}$ ○ $\frac{١}{٤}$ ○ صفرا

صفوة معلمي الكويت

حساب المثلثات

العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

النسب المثلثية للزاويتين θ، $-\theta$

$$\text{جتا}(-\theta)=\text{جتا}(\theta)\ ،\ \text{جا}(-\theta)=-\text{جا}(\theta)\ ،\ \text{ظا}(-\theta)=-\text{ظا}(\theta)$$

- إذا كان $\text{جتا}\left(\frac{\pi ٣}{٨}\right)=\frac{\sqrt{٢-\sqrt{٢}}}{٢}$ فأوجد $\text{جتا}\left(-\frac{\pi ٣}{٨}\right)$

  $\text{جتا}\left(-\frac{\pi ٣}{٨}\right)=\text{جتا}\left(\frac{\pi ٣}{٨}\right)=\frac{\sqrt{٢-\sqrt{٢}}}{٢}$

- إذا كان $\text{جا}(٣٦^\circ)=٠,٥٨٧٨$، فأوجد $\text{جا}(-٣٦^\circ)$

  $\text{جا}(-٣٦)=-\text{جا}٣٦=-٠,٥٨٧٨$

- إذا كان $\text{ظا}(٤٥^\circ)=١$، فأوجد $\text{ظا}(-٤٥^\circ)$

  $\text{ظا}(-٤٥)=-\text{ظا}٤٥=-١$

- إذا كان $\text{جا}(م)=٠,٣$، فأوجد $\text{جا}(-م)$

  $\text{جا}(-م)=-\text{جا}م=-٠,٣$

- إذا كان $\text{جتا}(ل)=٠,٣٨$، فأوجد $\text{جتا}(-ل)$

  $\text{جتا}(-ل)=\text{جتا}ل=٠,٣٨$

- إذا كان $\text{ظا}(س)=٣,١٤$، فأوجد $\text{ظا}(-س)$

  $\text{ظا}(-س)=-\text{ظا}س=-٣,١٤$

- إذا كان $\text{جتا}(-ص)=\frac{١}{٤}$ فأوجد $\text{جتا}ص$

  $\text{جتا}ص=\frac{١}{٤}$

النسب المثلثية للزاويتين θ، $(\theta-\pi)$

$$\text{جا}(\theta-\pi)=-\text{جا}(\theta)\ ،\ \text{جا}(\theta-\pi)=\text{جا}(\theta)\ ،\ \text{ظا}(\theta-\pi)=\text{ظا}(\theta)$$

- $\text{جا}(٣٠^\circ)=\frac{١}{٢}$، فإن $\text{جا}(١٥٠^\circ)=\text{جا}(١٨٠-٣٠)=\text{جا}٣٠=\frac{١}{٢}$

- $\text{جا}س=\frac{٤}{٥}$، فإن $\text{جا}(\pi-س)=-\text{جتا}س=-\frac{٤}{٥}$

- $\text{ظا}\frac{\pi}{١٢}=٢-\sqrt{٣}$، فإن $\text{ظا}\frac{\pi ١١}{١٢}=\text{ظا}\left(\frac{\pi}{١٢}-\pi\right)=-\text{ظا}\frac{\pi}{١٢}=-(٢-\sqrt{٣})=-٢+\sqrt{٣}$

- $\text{جتا}٦٠^\circ=\frac{١}{٢}$، أوجد $\text{جتا}١٢٠^\circ=\text{جتا}(١٨٠-٦٠)=-\text{جتا}٦٠=-\frac{١}{٢}$

- $\text{جا}\frac{\pi}{٤}=\frac{\sqrt{٢}}{٢}$، أوجد $\text{جا}\frac{\pi ٣}{٤}=\text{جا}\left(\frac{\pi}{٤}-\pi\right)=+\text{جا}\frac{\pi}{٤}=\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

- $\text{ظا}\theta=\frac{٣}{٥}$، أوجد $\text{ظا}(\theta-\pi)=-\text{ظا}\theta=-\frac{٣}{٥}$

النسب المثلثية للزاويتين θ، $(\theta+\pi)$

$$\text{جتا}(\theta+\pi)=-\text{جتا}(\theta)\ ،\ \text{جا}(\theta+\pi)=-\text{جا}(\theta)\ ،\ \text{ظا}(\theta+\pi)=\text{ظا}(\theta)$$

Q بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان جتا ٤٠° ≃ ٠,٧٦٦ فأوجد جتا ٢٢٠°

جتا ٢٢٠° = جتا(١٨٠° + ٤٠°) = −جتا ٤٠° = −٠,٧٦٦

Q جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ فأوجد جا ٢١٠°

جا ٢١٠° = جا(١٨٠° + ٣٠°) = −جا ٣٠° = $-\frac{١}{٢}$

Q ظا $\frac{\pi}{٨}$ = −١ + $\sqrt{٢}$ فأوجد ظا $\frac{٩\pi}{٨}$

ظا $\frac{٩\pi}{٨}$ = ظا$\left(\frac{\pi}{٨}+\pi\right)$ = ظا $\frac{\pi}{٨}$ = −١ + $\sqrt{٢}$

Q إذا كان جا ٥٦° ≃ ٠,٨٢٩ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جا ٢٣٦°

جا ٢٣٦° = جا(١٨٠° + ٥٦°) = −جا ٥٦° = −٠,٨٢٩

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\theta-\frac{\pi}{٢}\right)$

$$\text{جتا}\left(\theta-\frac{\pi}{٢}\right)=\text{جا}(\theta)\ ،\ \text{جا}\left(\theta-\frac{\pi}{٢}\right)=\text{جتا}(\theta)\ ،\ \text{ظا}\left(\theta-\frac{\pi}{٢}\right)=\text{ظتا}(\theta)$$

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\theta+\frac{\pi}{٢}\right)$

$$\text{جتا}\left(\theta+\frac{\pi}{٢}\right)=-\text{جا}(\theta)\ ،\ \text{جا}\left(\theta+\frac{\pi}{٢}\right)=\text{جتا}(\theta)\ ،\ \text{ظا}\left(\theta+\frac{\pi}{٢}\right)=-\text{ظتا}(\theta)$$

الدوال المثلثية (الدائرية) على ع

$\text{جا}(\theta+٣٦٠°ك)=\text{جا}\theta$	$\text{جا}(\theta+٢\pi ك)=\text{جا}\theta$
$\text{جتا}(\theta+٣٦٠°ك)=\text{جتا}\theta$	$\text{جتا}(\theta+٢\pi ك)=\text{جتا}\theta$
$\text{ظا}(\theta+١٨٠°ك)=\text{ظا}\theta$	$\text{ظا}(\theta+\pi ك)=\text{ظا}\theta$ (حيث ك عدد صحيح)

بسط التعبيرات التالية لأبسط شكل:

Q جتا$(\theta+٩\pi)$ = جتا$(\theta+\pi+٨\pi)$ = جتا$(\pi+\theta)$ = −جتا$(\theta+\pi)$ = −جتاθ

Q جتا$\left(\theta-\frac{\pi}{٢}\right)$ = جتا$\left(-\left(\frac{\pi}{٢}-\theta\right)\right)$ = جتا$\left(\theta+\frac{\pi}{٢}\right)$ = −جاθ

Q جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٢٧٠° − س) = جاس + جتاس − جاس + جتاس = ٢جتاس

حل المعادلات المثلثية

بفرض الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن:

حل المعادلة: جتاس = جتاθ هو:

س = θ + ٢كπ ، س = − θ + ٢كπ ك ∈ ص

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجباً عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع

حل كلا من المعادلات التالية:

Q جتا(س) = $\frac{١}{٢}$

جتاس = جتا$\frac{\pi}{٣}$

∴ جتاس > ٠

∴ $\hat{س}$ تقع في الربع الأول أو الرابع

س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢كπ | س = − $\frac{\pi}{٣}$ + ٢كπ

ك ∈ ص

Q ٢جتاس − $\sqrt{٣}$ = ٠

٢جتاس = $\sqrt{٣}$

جتاس = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتاس = جتا$\frac{\pi}{٦}$

∴ جتاس > ٠

∴ $\hat{س}$ تقع في الربع الأول أو الرابع

س = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢كπ | س = − $\frac{\pi}{٦}$ + ٢كπ

ك ∈ ص

Q $\sqrt{٢}$جتاس = ١

جتاس = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

جتاس = جتا$\frac{\pi}{٤}$

∴ جتاس > ٠

∴ $\hat{س}$ تقع في الربع الأول أو الرابع

س = $\frac{\pi}{٤}$ + ٢كπ | س = − $\frac{\pi}{٤}$ + ٢كπ

ك ∈ ص

صفوة معلمي الكويت

بفرض الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن:

حل المعادلة: جاس = جاθ هو:

$س = \theta + ٢ك\pi$ ، $س = \pi - \theta + ٢ك\pi$: ك ∋ ص

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجباً عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني

حل كلا من المعادلات التالية:

Q جاس $= \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جاس = جا$\frac{\pi}{٣}$

∴ جاس > ٠

∴ $\overset{\frown}{س}$ تقع في الربع الأول أو الثاني

$س = \frac{\pi}{٣} + ٢ك\pi$

$س = \pi - \frac{\pi}{٣} + ٢ك\pi$

$= \frac{\pi ٢}{٣} + ٢ك\pi$

ك ∋ ص

Q ٢جاس $= \sqrt{٢}$

جاس $= \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

جاس = جا$\frac{\pi}{٤}$

∴ جاس > ٠

∴ $\overset{\frown}{س}$ تقع في الربع الأول أو الثاني

$س = \frac{\pi}{٤} + ٢ك\pi$

$س = \pi - \frac{\pi}{٤} + ٢ك\pi$

$س = \frac{\pi ٣}{٤} + ٢ك\pi$

ك ∋ ص

Q ٢جا(س) − ١ = ٠

٢جاس = ١ ، جاس = $\frac{١}{٢}$

جاس = جا$\frac{\pi}{٦}$

∴ جاس > ٠

∴ $\overset{\frown}{س}$ تقع في الربع الأول أو الثاني

$س = \frac{\pi}{٦} + ٢ك\pi$

$س = \pi - \frac{\pi}{٦} + ٢ك\pi$

$= \frac{\pi ٥}{٦} + ٢ك\pi$

ك ∋ ص

UULA
صفوة معلمي الكويت

بفرض الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن:

حل المعادلة: ظاس = ظاθ هو:

$س = \theta + ٢ك\pi$ ، $س = \pi + \theta + ٢ك\pi$:ك ∈ ص أو يمكن الحل بهذه الطريقة: $س = \theta + ك\pi$:ك ∈ ص

لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجباً عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث

حل كلا من المعادلات التالية:

Q ظا(س) = $\sqrt{٣}$

ظاس = ظا$\frac{\pi}{٣}$

∴ ظاس > ٠ ∴ س تقع في الربع الأول

$س = \frac{\pi}{٣} + ٢ك\pi$

ك ∈ ص

أو الثالث

$س = \pi + \frac{\pi}{٣} + ٢ك\pi$

$= \frac{\pi ٤}{٣} + ٢ك\pi$

ك ∈ ص

حل آخر:

ظاس = ظا$\frac{\pi}{٣}$

∴ ظاس > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو الثالث

$س = \frac{\pi}{٣} + ك\pi$

ك ∈ ص

Q ظا(س) − ١ = ٠

ظاس = ١

ظاس = ظا$\frac{\pi}{٤}$

∴ ظاس > ٠ ∴ س تقع في الربع الأول

$س = \frac{\pi}{٤} + ٢ك\pi$

ك ∈ ص

أو الثالث

$س = \pi + \frac{\pi}{٤} + ٢ك\pi$

$= \frac{\pi ٥}{٤} + ك\pi$

ك ∈ ص

حل آخر:

ظاس = ١

ظاس = ظا$\frac{\pi}{٤}$

∴ ظاس > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو الثالث

$س = \frac{\pi}{٤} + ك\pi$

ك ∈ ص

Q حل المعادلة $\sqrt{٣}$ظا(س) = ١

ظاس = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

ظاس = ظا$\frac{\pi}{٦}$

∴ ظاس > ٠ ∴ س تقع في الربع الأول

$س = \frac{\pi}{٦} + ٢ك\pi$

ك ∈ ص

أو الثالث

$س = \pi + \frac{\pi}{٦} + ٢ك\pi$

$= \frac{\pi ٧}{٦} + ٢ك\pi$

ك ∈ ص

حل آخر:

ظاس = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

ظاس = ظا$\frac{\pi}{٦}$

∴ ظاس > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو الثالث

$س = \frac{\pi}{٦} + ك\pi$

ك ∈ ص

صفوة معلمي الكويت

موضوعي - العلاقات بين الدوال المثلثية ١

إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

١. إذا كانت جاθ = ٠,٢ فإن جا$(\theta+\pi)$ = ٠,٢ — أ ● ب ○

٢. إذا كانت جتا$\theta = \frac{٣}{٢}$ فإن قا$\theta = \frac{٣}{٢}$ — أ ● ب ○

٣. إذا كانت ظاθ = ٣ فإن ظتا$(\theta+\pi)$ = ٣ — أ ○ ب ●

٤. إذا كانت جا$\theta = \frac{١}{٥}$ فإن قتا$(\theta+\pi)$ = −٥ — أ ● ب ○

٥. ظا٢٢° − ٣جا١٢٣° + ٢جتا(−٩٦٠°) = $-\frac{٣}{٢}$ — أ ● ب ○

٦. قتا$\frac{١٩\pi}{٦}$ − ٢قا$\frac{١٣\pi}{٦}$ + جا$\left(-\frac{٨\pi}{٣}\right)$ − جتا$\left(\frac{١٧\pi}{٦}\right)$ = ٢ — أ ● ب ○

٧. ظتا$\frac{١٩\pi}{٤}$ − ٣ظا$\left(-\frac{١١\pi}{٦}\right)$ + جتا$\left(\frac{٢٤\pi}{٣}\right)$ − ٢جا$\left(\frac{٤٥\pi}{٦}\right)$ = ١ — أ ○ ب ●

٨. قا(−٣١٥°) + ٢قتا٥٨° − ٢جتا٨٥° = $\sqrt{٢}$ — أ ● ب ○

٩. إذا كان جاس = $\sqrt{٣}$ فإن مجموعة الحل = ∅ — أ ● ب ○

١٠. إذا كان جاس = $\frac{١}{٢}$ فإن س = $\frac{\pi}{٣}$ — أ ○ ب ●

١١. إذا كان س = $\frac{\pi}{٦}$ فإن جاس = $\frac{١}{٢}$ — أ ● ب ○

١٢. مجموعة حل قاس = ٠,٣ هي ∅ — أ ● ب ○

١٣. ظا$(\pi١٥)$ = صفرا — أ ● ب ○

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

١٦. اختر الإجابة الصحيحة: النسبة المثلثية فيما يلي التي قيمتها $\frac{١}{٢}$ هي:

● جا(−٣٣٠°) ○ جتا(−٢٤٠°) ○ ظتا(−١٥٠٠°) ○ ظا٧٦°

١٧. النسبة المثلثية فيما يلي التي قيمتها $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هي:

● جتا$\frac{٣١\pi}{٦}$ ○ جا$\left(-\frac{٣٥\pi}{٣}\right)$ ○ ظا$\frac{١٧\pi}{٦}$ ○ قا$\frac{١٣\pi}{٣}$

تـدرب و تـفـوق

اختبارات الكترونية ذكية

صفوة معلمي الكويت

العلاقات بين الدوال المثلثية (2)

قوانين مهمة

$$\text{ظا}\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} \qquad \text{ظتا}\theta = \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta} \qquad \text{قا}\theta = \frac{1}{\text{جتا}\theta} \qquad \text{قتا}\theta = \frac{1}{\text{جا}\theta}$$

$$\text{جا}^2(\theta) + \text{جتا}^2(\theta) = 1 \qquad 1 + \text{ظا}^2(\theta) = \text{قا}^2(\theta) \qquad 1 + \text{ظتا}^2(\theta) = \text{قتا}^2(\theta)$$

س بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان $\text{جا}\theta = \frac{3}{5}$ ، $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ فأوجد جتاθ ، ظاθ

$\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta = 1$

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \text{جتا}^2\theta = 1$

$\text{جتا}^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$

$\text{جتا}\theta = \mp\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\frac{4}{5}$

θ في الربع الأول : $\text{جتا}\theta = \frac{4}{5}$

$\text{ظا}\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)}{\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$

س بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان جتا$(\theta) = 0{,}4$ ، $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ فأوجد جا(θ) ، ظا(θ)

$\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta = 1$

$\text{جا}^2\theta + (0{,}4)^2 = 1$

$\text{جا}^2\theta = 1 - (0{,}4)^2$

$\text{جا}\theta = \mp\sqrt{1 - (0{,}4)^2} = \mp\frac{\sqrt{21}}{5}$

θ في الربع الأول : $\text{جا}\theta = \frac{\sqrt{21}}{5}$

$\text{ظا}\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} = \frac{\left(\frac{\sqrt{21}}{5}\right)}{0{,}4} = \frac{\sqrt{21}}{2}$

س بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان ظا$\theta = \frac{3}{4}$ ، جا$\theta > 0$ فأوجد جاθ ، جتاθ

θ في الربع الثالث

$1 + \text{ظا}^2\theta = \text{قا}^2\theta$

$1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \text{قا}^2\theta$

$\text{قا}^2\theta = \frac{25}{16}$

$\text{جتا}^2\theta = \frac{16}{25} \Leftarrow \text{جتا}\theta = \mp\sqrt{\frac{16}{25}} = \mp\frac{4}{5}$

θ في الربع الثالث $\Leftarrow \text{جتا}\theta = -\frac{4}{5}$

$\text{ظا}\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

$\frac{3}{4} = \frac{\text{جا}\theta}{\left(-\frac{4}{5}\right)} \Leftarrow \text{جا}\theta = \frac{3 \times \left(-\frac{4}{5}\right)}{4} = -\frac{3}{5}$

س بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان ظا$\theta = 2\sqrt{2}$ ، جتا$\theta > 0$ فأوجد جا(θ) ، جتا(θ)

θ في الربع الثالث

$1 + \text{ظا}^2\theta = \text{قا}^2\theta$

$1 + (2\sqrt{2})^2 = \text{قا}^2\theta$

$\text{قا}^2\theta = 9$

$\text{جتا}^2\theta = \frac{1}{9} \Leftarrow \text{جتا}\theta = \mp\sqrt{\frac{1}{9}} = \mp\frac{1}{3}$

θ في الربع الثالث $\Leftarrow \text{جتا}\theta = -\frac{1}{3}$

$\text{ظا}\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

$2\sqrt{2} = \frac{\text{جا}\theta}{\left(-\frac{1}{3}\right)} \Leftarrow \text{جا}\theta = \frac{2\sqrt{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)}{1} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

صفوة تعلمي الكويت

Q بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان $\text{ظا}(\theta)=\frac{٥}{٨}$ ، $\text{جتا}(\theta)>٠$ فأوجد $\text{جا}(\theta)$

θ في الربع الأول

$١+\text{ظا}^{٢}\theta=\text{قتا}^{٢}\theta$

$١+\left(\frac{٥}{٨}\right)^{٢}=\text{قتا}^{٢}\theta$

$\text{قتا}^{٢}\theta=\frac{٨٩}{٦٤}$

$\text{جا}^{٢}\theta=\frac{٦٤}{٨٩}$

$\text{جا}\theta=\mp\sqrt{\frac{٦٤}{٨٩}}$ θ في الربع الأول

$\Leftarrow \text{جا}\theta=+\frac{٨\sqrt{٨٩}}{٨٩}\simeq ٠,٨٤٨$

Q بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان $\text{جا}\theta=\frac{٣}{٧}$ ، $\text{جتا}\theta<٠$ فأوجد $\text{ظتا}(\theta)$ ، $\text{ظا}(\theta)$

θ في الربع الأول

$\text{جا}^{٢}\theta+\text{جتا}^{٢}\theta=١$

$\left(\frac{٣}{٧}\right)^{٢}+\text{جتا}^{٢}\theta=١$

$\text{جتا}^{٢}\theta=١-\left(\frac{٣}{٧}\right)^{٢}$

$\text{جتا}\theta=\mp\sqrt{١-\left(\frac{٣}{٧}\right)^{٢}}=\pm\frac{٢\sqrt{١٠}}{٧}$

$\text{جتا}\theta<٠\Leftarrow \text{جتا}\theta=\frac{٢\sqrt{١٠}}{٧}$

$\text{ظا}\theta=\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}=\frac{\frac{٣}{٧}}{\frac{٢\sqrt{١٠}}{٧}}=\frac{٣\sqrt{١٠}}{٢٠}$

$\text{ظتا}\theta=\frac{١}{\text{ظا}\theta}=\frac{٢٠}{٣\sqrt{١٠}}=\frac{٢\sqrt{١٠}}{٣}$

Q بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان $\text{ظا}(\theta)=\frac{٢٤}{٧}$ ، $\text{جتا}(\theta)>٠$ فأوجد $\text{جا}(\theta)$ ، $\text{جتا}(\theta)$

θ في الربع الأول

$١+\text{ظا}^{٢}\theta=\text{قا}^{٢}\theta$

$١+\left(\frac{٢٤}{٧}\right)^{٢}=\text{قا}^{٢}\theta$

$\text{قا}^{٢}\theta=\frac{٦٢٥}{٤٩}$

$\text{جتا}^{٢}\theta=\frac{٤٩}{٦٢٥}$ $\Leftarrow \text{جتا}\theta=\mp\sqrt{\frac{٤٩}{٦٢٥}}$

$\text{جتا}\theta=+\frac{٧}{٢٥}$ θ في الربع الأول

$\text{ظا}\theta=\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

$\frac{\text{جا}\theta}{\left(\frac{٧}{٢٥}\right)}=\frac{٢٤}{٧}$ $\Leftarrow \text{جا}\theta=\frac{٢٤\times\left(\frac{٧}{٢٥}\right)}{٧}=\frac{٢٤}{٢٥}$

صفوة معلمي الكويت

قوانين مهمة يلزم حفظها:

$$\text{ظا}\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} \qquad \text{ظتا}\theta = \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta} \qquad \text{قا}\theta = \frac{1}{\text{جتا}\theta} \qquad \text{قتا}\theta = \frac{1}{\text{جا}\theta}$$

$$\text{جا}^2(\theta) + \text{جتا}^2(\theta) = 1 \qquad 1 + \text{ظا}^2(\theta) = \text{قا}^2(\theta) \qquad 1 + \text{ظتا}^2(\theta) = \text{قتا}^2(\theta)$$

أثبت صحة المطابقة التالية:

Q $\text{جا}^3(س) + \text{جا}(س)\times\text{جتا}^2(س) = \text{جا}(س)$

الطرف الأيمن $= \text{جا}^3 س + \text{جاس}\times\text{جتا}^2 س$

$= \text{جاس}(\text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س)$

$= \text{جاس} \times (1)$

$= \text{جاس}$

= الطرف الأيسر

Q $\frac{(\text{قا}\theta + 1)(\text{قا}\theta - 1)}{(\theta)^2\text{جا}} = \text{قا}^2(\theta)$

الطرف الأيمن $= \frac{(\text{قا}\theta + 1)(\text{قا}\theta - 1)}{\theta^2\text{جا}}$

$= \frac{\text{قا}^2\theta - 1}{\theta^2\text{جا}} = \frac{\text{ظا}^2\theta}{\theta^2\text{جا}}$

$= \frac{\left(\frac{\theta^2\text{جا}}{\theta^2\text{جتا}}\right)}{\left(\frac{\theta^2\text{جا}}{1}\right)} = \frac{\theta^2\text{جا}}{\theta^2\text{جتا}} \times \frac{1}{\theta^2\text{جا}}$

$= \frac{1}{\theta^2\text{جتا}} = \text{قا}^2\theta$

= الطرف الأيسر

Q $\text{جتا}^4(س) + \text{جا}^2(س)\times\text{جتا}^2(س) = \text{جتا}^2(س)$

الطرف الأيمن $= \text{جتا}^4 س + \text{جا}^2 س \times \text{جتا}^2 س$

$= \text{جتا}^2 س\left(\text{جتا}^2 س + \text{جا}^2 س\right)$

$= \text{جتا}^2 س \times (1)$

$= \text{جتا}^2 س$

= الطرف الأيسر

Q $\left((\theta)^2\text{قتا} + (\theta)^2\text{ظا}\right) - \left((\theta)^2\text{ظتا} + (\theta)^2\text{ظا}\right) = 2$

الطرف الأيمن=

$= \left(\theta^2\text{قتا} + \theta^2\text{قا}\right) - \left(\theta^2\text{ظتا} + \theta^2\text{ظا}\right)$

$= \theta^2\text{قتا} + \theta^2\text{قا} - \theta^2\text{ظتا} - \theta^2\text{ظا}$

$= 1 + \cancel{\theta^2\text{ظا}} + \cancel{\theta^2\text{ظتا}} + 1 - \cancel{\theta^2\text{ظا}} - \cancel{\theta^2\text{ظتا}}$

$= 2$

= الطرف الأيسر

صفوة معلمي الكويت

موضوعي - العلاقات بين الدول المثلثية ٢

إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

١. $\text{قتا}\theta \times \text{جتا}\theta - \text{ظتا}\theta = ٠$ (أ) (ب)

٢. $\text{ظتا}^{٢}(-\theta) - \text{قتا}^{٢}\theta = -١$ (أ) (ب)

٣. $(\text{قا}\theta + \text{ظا}\theta)(\text{قا}\theta - \text{ظا}\theta) = ١$ (أ) (ب)

٤. $\text{جا}\theta\,\text{قتا}\theta - \text{جتا}^{٢}\theta - \text{جا}^{٢}\theta = ٠$ (أ) (ب)

٥. $\frac{\text{جا}^{٢}\theta}{١ - \text{جتا}\theta} - \text{جتا}\theta = -١$ (أ) (ب)

٦. $\text{ظا}\theta + \text{ظتا}\theta - \text{قا}\theta\,\text{قتا}\theta = ٠$ (أ) (ب)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

٧. $\text{جا}^{٢}\theta + \text{جتا}^{٢}\theta =$

● ١ ○ ١- ○ صفرا ○ θ

٨. $\text{ظا}^{٢}\theta + ١ =$

○ $\text{ظتا}^{٢}\theta$ ○ $\text{قتا}^{٢}\theta$ ● $\text{قا}^{٢}\theta$ ○ $\text{جا}^{٢}\theta$

٩. $\text{ظتا}^{٢}\theta + ١ =$

○ $\text{ظتا}^{٢}\theta$ ● $\text{قتا}^{٢}\theta$ ○ $\text{قا}^{٢}\theta$ ○ $\text{جا}^{٢}\theta$

١٠. إذا كانت $\text{جتا}\theta = -\frac{٥}{٧}$، θ تقع في الربع الثالث فإن $\text{جا}\theta =$

○ $\frac{-٧}{٢\sqrt{٦}}$ ○ $\frac{٢\sqrt{٦}}{٧}$ ● $\frac{-٢\sqrt{٦}}{٧}$ ○ $\frac{٧}{٢\sqrt{٦}}$

١١. إذا كانت $\text{قا}\theta = \frac{٣}{٢}$، θ تقع في الربع الرابع فإن $\text{ظا}\theta =$

○ $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ ○ $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ ○ $\frac{-٢}{\sqrt{٥}}$ ● $\frac{-\sqrt{٥}}{٢}$

تـدرب و تـفـوق

اختبارات الكترونية ذكية

صفوة معلمي الكويت

المستوى الاحداثي

قانون المسافة بين أي نقطتين أ(س١، ص١)، ب(س٢، ص٢) = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

Q أوجد المسافة بين ك(١، −٥) ، ل(٣، −٢)

ك ل = $\sqrt{(-٢ - ٥-)^٢ + (١ - ٣)^٢}$ = $\sqrt{١٣}$ ≃ ٣,٦ وحدة طول

Q أوجد المسافة بين م(−٢ ، ١) ، ن(−٧ ، ٤)

م ن = $\sqrt{(٤ - ١)^٢ + (-٧ - -٢)^٢}$ = $\sqrt{٣٤}$ ≃ ٥,٨ وحدة طول

قانون نقطة المنتصف

إذا كانت أ(س١، ص١) ، ب(س٢، ص٢) ، فإن إحداثيات نقطة المنتصف هي م $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

Q أوجد نقطة منتصف $\overline{جـ د}$ حيث: جـ(−١ ، ٥) ، د(٣ ، ٠)

م $\left(\frac{-١ + ٣}{٢}، \frac{٥ + ٠}{٢}\right)$

م(١، ٢,٥)

Q أوجد نقطة منتصف $\overline{ك ل}$ حيث: ك(−٣ ، −١) ، ل(١ ، ٢)

م $\left(\frac{-٣ + ١}{٢}، \frac{-١ + ٢}{٢}\right)$

م $\left(-١، \frac{١}{٢}\right)$

موضوعي- المستوي الإحداثي

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

١. المسافة بين النقطة (١،-٥) والنقطة (٣،-٢) هي:

● $\sqrt{١٣}$ وحدة طول ○ $\sqrt{١١}$ وحدة طول ○ $\sqrt{١٥}$ وحدة طول ○ $\sqrt{١٠}$ وحدة طول

٢. المسافة بين النقطة م(−١،٢) والنقطة ن(٣،٤) هي:

○ $\sqrt{١٣}$ وحدة طول ● $\sqrt{٣٤}$ وحدة طول ○ $\sqrt{٤٣}$ وحدة طول ○ $\sqrt{٣١}$ وحدة طول

٣. منتصف القطعة المستقيمة $\overline{جـ د}$ حيث جـ(−١ ، ٥) ، د(٣ ، ٠) هي النقطة:

● (١ ، ٢,٥) ○ (٢ ، ١,٥) ○ (١ ، ٣) ○ (٤ ، ١)

٤. نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{ك ل}$ حيث ك(−٣ ، −١) ، ل(٥، ٢) هي:

○ $\left(١، -\frac{١}{٢}\right)$ ○ $\left(-١، \frac{١}{٢}\right)$ ● $\left(١، \frac{١}{٢}\right)$ ○ $\left(-١، -\frac{١}{٢}\right)$

تـدرب و تـفـوق

اختبارات الكترونية ذكية

صفوة معلمي الكويت

تقسيم قطعة مستقيمة

التقسيم من الداخل

إذا كانت $\overline{أب}$ قطعة مستقيمة بحيث أ$(س_١، ص_١)$ ، ب$(س_٢، ص_٢)$ ويراد تقسيمها من جهة أ بنسبة م:ن من الداخل وكانت نقطة التقسيم جـ$(س، ص)$ فإن:

$$جـ\left(\frac{م س_٢ + ن س_١}{م + ن}، \frac{م ص_٢ + ن ص_١}{م + ن}\right)$$

Q إذا كان أ$(-٥، ٣)$ ، ب$(٧، -٤)$ فأوجد نقطة تقسيم $\overline{أب}$ من جهة أ بنسبة ٣:١ من الداخل.

$س_١$	$ص_١$	$س_٢$	$ص_٢$
أ$(-٥$	$٣)$	ب$(٧$	$-٤)$

م = ١ ، ن = ٣

نقطة التقسيم

$$جـ\left(\frac{م س_٢ + ن س_١}{م + ن}، \frac{م ص_٢ + ن ص_١}{م + ن}\right)$$

$$\left(\frac{١ \times ٧ + ٣ \times (-٥)}{١ + ٣}، \frac{١ \times (-٤) + ٣ \times ٣}{١ + ٣}\right)$$

$$\left(-٢، \frac{٥}{٤}\right)$$

Q إذا كان أ$(٣، -٤)$ ، ب$(-٢، ٣)$ فأوجد جـ حيث ٢أجـ = جـب ، جـ $\in \overline{أب}$ من الداخل (أجـ : جـب = ١:٢)

٢أجـ = جـب $\Leftarrow$ أجـ $= \frac{١}{٢}$ جـب

$\Leftarrow \frac{أجـ}{جـب} = \frac{١}{٢}$

$س_١$	$ص_١$	$س_٢$	$ص_٢$
أ$(٣$	$-٤)$	ب$(-٢$	$٣)$

م = ١ ، ن = ٢

نقطة التقسيم

$$جـ\left(\frac{م س_٢ + ن س_١}{م + ن}، \frac{م ص_٢ + ن ص_١}{م + ن}\right)$$

$$جـ\left(\frac{١ \times (-٢) + ٢ \times ٣}{١ + ٢}، \frac{١ \times ٣ + ٢ \times (-٤)}{١ + ٢}\right)$$

$$جـ\left(\frac{٤}{٣}، \frac{-٥}{٣}\right)$$

Q إذا كان أ$(٢، ٤)$ ، ب$(٥، ٩)$ ويراد تقسيم $\overline{أب}$ من الداخل من جهة ب في نقطة جـ بنسبة ٣:٥ أوجد إحداثيات النقطة.

$س_١$	$ص_١$	$س_٢$	$ص_٢$
أ$(٢$	$٤)$	ب$(٥$	$٩)$

م = ٥ ، ن = ٣

نقطة التقسيم

$$جـ\left(\frac{م س_٢ + ن س_١}{م + ن}، \frac{م ص_٢ + ن ص_١}{م + ن}\right)$$

$$جـ\left(\frac{٥ \times ٥ + ٣ \times ٢}{٣ + ٥}، \frac{٥ \times ٩ + ٣ \times ٤}{٣ + ٥}\right)$$

$$جـ\left(\frac{٣١}{٨}، \frac{٥٧}{٨}\right)$$

صفوة معلمي الكويت

لتكن أ(٢ ، −٣) ، ب(−٤ ، ٧) أوجد إحداثيات النقطة جـ على $\overline{أب}$ بحيث: ٧ جـب = ٢ جـأ

$$٧ جـب = ٢ جـأ$$

$$جـب = \frac{٢}{٧} جـأ$$

$$\frac{جـب}{جـأ} = \frac{٢}{٧}$$

$س_١$	$ص_١$	$س_٢$	$ص_٢$
أ(٢ ، −٣)		ب(−٤ ، ٧)	

٧ ، م ، ٢ ، ن ، +

نقطة التقسيم

$$جـ\left(\frac{م.س_٢ + ن.س_١}{م + ن} ، \frac{م.ص_٢ + ن.ص_١}{م + ن}\right)$$

$$جـ\left(\frac{٧ \times ٢ + ٢ \times (-٤)}{٧ + ٢} ، \frac{٧ \times ٢ + ٧ \times (-٣)}{٧ + ٢}\right)$$

$$جـ\left(\frac{٤٣}{٩} ، \frac{-٨}{٣}\right)$$

التقسيم من الخارج

إذا كانت أ($س_١$، $ص_١$) ، ب($س_٢$، $ص_٢$) فإن النقطة جـ(س ، ص) التي تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بنسبة ن:م من جهة ب تكون إحداثياتها:

أ($س_١$، $ص_١$) ، ب($س_٢$، $ص_٢$)

م - ن

$$\left(\frac{س_٢.م - ن.س_١}{م - ن} ، \frac{ص_٢.م - ن.ص_١}{م - ن}\right)$$

إذا كان أ(١ ، ٤) ، ب(−٢ ، ١) ويراد تقسيم $\overline{أب}$ من الخارج من جهة جـ في نقطة بنسبة ٣:٢ أوجد إحداثيات النقطة.

$س_١$	$ص_١$	$س_٢$	$ص_٢$
أ(١ ، ٤)		ب(−٢ ، ١)	

٢ ، م ، ٣ ، ن ، -

نقطة التقسيم

$$جـ\left(\frac{س_٢.م - ن.س_١}{م - ن} ، \frac{ص_٢.م - ن.ص_١}{م - ن}\right)$$

$$جـ\left(\frac{٤ \times ٣ - ٢ \times ١}{٣ - ٢} ، \frac{١ \times ٣ - ٢ \times (-٢)}{٣ - ٢}\right)$$

$$جـ(١٠ ، ٧)$$

لتكن أ(−٢ ، ٢) ، ب(٣ ، ١) أوجد إحداثيات النقطة جـ التي تقسم $\overline{أب}$ من الخارج من جهة ب بنسبة ٨:٣

$س_١$	$ص_١$	$س_٢$	$ص_٢$
أ(−٢ ، ٢)		ب(٣ ، ١)	

٨ ، م ، ٣ ، ن ، -

نقطة التقسيم

$$جـ\left(\frac{س_٢.م - ن.س_١}{م - ن} ، \frac{ص_٢.م - ن.ص_١}{م - ن}\right)$$

$$جـ\left(\frac{٢ \times ٣ - ٨ \times ١}{٣ - ٨} ، \frac{١ \times ٣ - ٨ \times (-٢)}{٣ - ٨}\right)$$

$$جـ\left(\frac{٢}{٥} ، ٦\right)$$

معلق
صفوة معلمي الكويت
UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

موضوعي- تقسيم قطعة مستقيمة

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

١. إذا كان أ(–٥ ، ٣) ، ب(٧ ، –٤) فإن نقطة تقسيم القطعة المستقيمة أب من جهة أ بنسبة ٣:١ من الداخل هي النقطة:

○ $\left(\frac{٥}{٤}، ٢\right)$ ○ $\left(\frac{٥}{٤}-، ٢-\right)$ ● $\left(\frac{٥}{٤}، ٢-\right)$ ○ $\left(\frac{٥}{٤}-، ٢\right)$

٢. إذا كان أ(٢ ، ٤) ، ب(٥ ، ٩) ويراد تقسيم القطعة المستقيمة أب من الداخل من جهة ب بنسبة ٣:٥ فإن إحداثيات نقطة التقسيم هي:

● $\left(\frac{٥٧}{٨}، \frac{٣١}{٨}\right)$ ○ $\left(\frac{٥٧}{٨}، \frac{٣١-}{٨}\right)$ ○ $\left(\frac{٥٧-}{٨}، \frac{٣١}{٨}\right)$ ○ $\left(\frac{٥٧-}{٨}، \frac{٣١-}{٨}\right)$

٣. لتكن أ(٢ ، –٣) ، ب(–٤ ، ٧) فإن إحداثيات النقطة جـ على القطعة المستقيمة أب بحيث: ٧جـب = ٢جـأ هي:

○ $\left(\frac{٤٣}{٩}، \frac{٨}{٣}\right)$ ○ $\left(\frac{٤٣-}{٩}، \frac{٨}{٣}\right)$ ○ $\left(\frac{٤٣-}{٩}، \frac{٨-}{٣}\right)$ ● $\left(\frac{٤٣}{٩}، \frac{٨-}{٣}\right)$

٤. لتكن ب(١ ، ٤) ، جـ(–٢ ، ١) ويراد تقسيم القطعة المستقيمة بجـ من الخارج من جهة ب بنسبة ٢ : ٣ فإن إحداثيات نقطة التقسيم ن هي:

⚠ معلق

○ ن(١ ، -١٤) ○ ن(-١ ، -١٤) ○ ن(-٧ ، ١٠) ● ن(٧ ، ١٠)

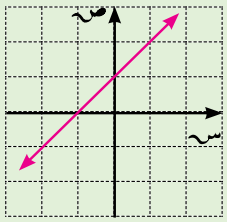
تـدرب و تـفـوق

اختبارات الكترونية ذكية

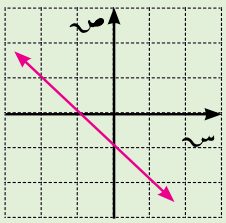
صفوة معلمي الكويت

ميل الخط المستقيم

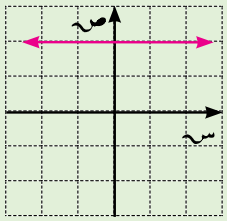
ميل المستقيم موجب



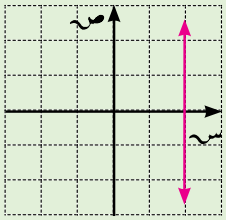
ميل المستقيم سالب



ميل المستقيم الأفقي يساوي صفرًا



المستقيم الرأسي ليس له ميل



$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$

أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بكل زوج من النقاط:

Q أ(−٢ ، ١) ، ب(٥ ، ٧)

الميل $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{(١) - (٧)}{(-٢) - (٥)} = \frac{٦}{٧}$

Q جـ(٢ ، ٥) ، د(٤ ، ٧)

الميل $= \frac{(٥) - (٧)}{(٢) - (٤)} = ١$

Q ق(−١ ، ٤) ، ك(٣ ، −٢)

الميل $= \frac{(-٢) - (٤)}{(٣) - (-١)} = \frac{-٣}{٢}$

Q م(٤ ، ٣) ، ن(−٧ ، ٣)

الميل $= \frac{(٣) - (٣)}{(٤) - (-٧)} =$ صفرا (مستقيم أفقي)

Q أثبت أن النقاط أ(٢ ، −١) ، ب(−١ ، ٥) ، جـ(٣ ، −٣) على استقامة واحدة.

$م_١ =$ ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{(-١) - (٥)}{(٢) - (-١)} = -٢$

$م_٢ =$ ميل $\overleftrightarrow{أجـ} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{(-١) - (-٣)}{(٢) - (٣)} = -٢$

$\because م_٢ = م_١ \Leftarrow \overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{أجـ}$

$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مشتركان في النقطة أ

$\therefore$ أ، ب، جـ على استقامة واحدة.

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

Q أ(١ ، −١) ، ب(٢ ، ٢) ، جـ(−١ ، −٧) أثبت أن النقاط أ، ب، جـ تقع على استقامة واحدة.

$$م_{١} = \text{ميل } \overleftrightarrow{أب} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{٢ - (-١)}{٢ - ١} = ٣$$

$$م_{٢} = \text{ميل } \overleftrightarrow{أجـ} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{-٧ - (-١)}{-١ - ١} = \frac{-٦}{-٢} = ٣$$

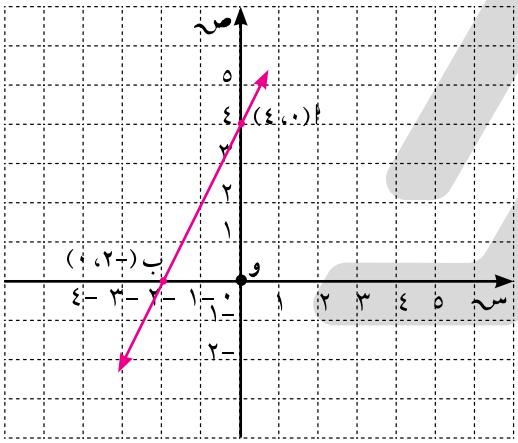
$م_{١} = م_{٢} \Leftarrow \overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{أجـ}$ ، ولكنهما يشتركان في النقطة أ

∴ تكون النقاط أ، ب، جـ على استقامة واحدة.

تذكر أن

العلاقة بين ظل الزاوية θ التي يصنعها مستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وميل هذا المستقيم م هي:
$م = ظا\theta$

Q أوجد ميل $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ(٠ ، ٤) ، ب(−٢ ، ٠) وقارنه بظل الزاوية $\hat{ب}$ في المثلث قائم الزاوية ب و أ

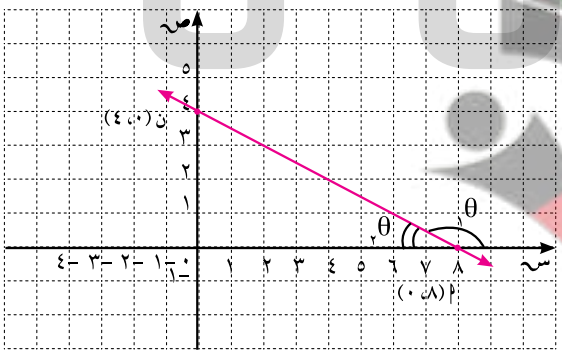


$$م_{\overleftrightarrow{أب}} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{٤ - ٠}{٠ - (-٢)} = ٢$$

$$ظا = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

ظا = الميل = ٢

Q أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أن}$ وقارنه بظل الزاوية الحادة التي قياسها $\theta_{٢}$ وظل الزاوية المنفرجة التي قياسها $\theta_{١}$



$$م_{\overleftrightarrow{أن}} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{٤ - ٠}{٠ - ٨} = \frac{-١}{٢}$$

$$ظا\theta_{٢} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$$

$$\theta_{١} + \theta_{٢} = ١٨٠$$

$$\theta_{١} = ١٨٠ - \theta_{٢}$$

$$ظا\theta_{١} = ظا(١٨٠ - \theta_{٢}) = -ظا\theta_{٢} = -\frac{١}{٢}$$

صفوة معلمي الكويت

موضوعي- ميل خط مستقيم

إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

١. من الممكن أن يكون لمستقيمين مختلفين الميل نفسه. (أ) (ب)

٢. إن ميل المستقيم الذي يمر بالربع الثالث ونقطة الأصل هو دائماً سالب. (أ) (ب)

٣. لا يمر المستقيم الذي ميله يساوي صفراً بنقطة الأصل. (أ) (ب)

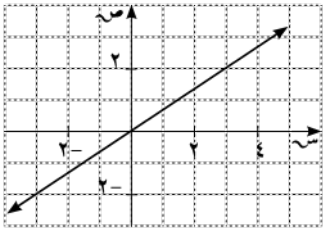
٤. نقطتان لديهما الإحداثي السيني نفسه، فإنهما ينتميان إلى المستقيم الرأسي نفسه. (أ) (ب)

٥. كل المستقيمات الأفقية لها الميل نفسه. (أ) (ب)

٦. المستقيم الذي ميله يساوي ١ دائماً يمر بنقطة الأصل. (أ) (ب)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

٧. ميل المستقيم في الشكل المجاور يساوي:



- ○ $\frac{-٢}{٣}$
- ● $\frac{٢}{٣}$
- ○ $\frac{-٣}{٢}$
- ○ $\frac{٣}{٢}$

٨. ميل المستقيم المار بالنقطتين (-٤ ، ٤) ، (٢ ، -٥) هو:

- ● $\frac{-٣}{٢}$
- ○ $\frac{٣}{٢}$
- ○ $\frac{٢}{٣}$
- ○ $\frac{-٢}{٣}$

٩. المستقيم الرأسي يكون ميله:

- ○ موجب
- ○ سالب
- ○ صفر
- ● ليس له ميل

١٠. المستقيم الأفقي يكون ميله:

- ○ موجب
- ○ سالب
- ● صفر
- ○ ليس له ميل

تـدرب و تـفـوق

اختبارات الكترونية ذكية

صفوة معلمي الكويت

معادلة الخط المستقيم

معادلة الخط المستقيم

معادلة الخط المستقيم الذي ميله (م) ويمر بالنقطة $(س_١ ، ص_١)$

$ص - ص_١ = م (س - س_١)$

Q اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{٣}{٢}$ ويمر بالنقطة $(٤ ، -١)$

$ص - ص_١ = م (س - س_١)$

$ص - (-١) = \frac{٣}{٢} (س - ٤)$

$ص + ١ = \frac{٣}{٢} س - ٦$

$ص = \frac{٣}{٢} س - ٦ - ١$

$ص = \frac{٣}{٢} س - ٧$

Q اكتب معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين: أ$(١ ، ٣)$ ، ب$(-٢ ، ٠)$

$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{(٣) - (٠)}{(١) - (-٢)} = ١$

$ص - ص_١ = م (س - س_١)$

$ص - ٣ = س - ١$

$ص = س - ١ + ٣$

$ص = س + ٢$

Q اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{-٢}{٣}$ ويمر بالنقطة $(-٦ ، ٥)$

$ص - ص_١ = م (س - س_١)$

$ص - ٥ = \frac{-٢}{٣} (س - (-٦))$

$ص - ٥ = \frac{-٢}{٣} س - ٤$

$ص = \frac{-٢}{٣} س - ٤ + ٥$

$ص = \frac{-٢}{٣} س + ١$

Q اكتب معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين: جـ$(٣ ، -١)$ ، د$(٢ ، -٢)$

$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{(-٢) - (-١)}{(٢) - (٣)} = ١$

$ص - ص_١ = م (س - س_١)$

$ص + ١ = س - ٣$

$ص = س - ٣ - ١$

$ص = س - ٤$

صفوة معلمي الكويت

Q إذا كان المستقيم ل: ص = ٢س + ١ فأوجد: معادلة المستقيم هـ الموازي للمستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٢ ، − ٣)

ميل المستقيم ل = م١ = ٢

∵ المستقيمان متوازيان ∴ م٢ = م١ = ٢

بالتالي معادلة المستقيم هـ المطلوبة هي:

ص − ص١ = م٢ (س − س١)

ص − − ٣ = ٢ (س − ٢)

ص + ٣ = ٢س − ٤ − ٣

ص = ٢س − ٧

Q إذا كان المستقيم ك: ٣ص + س + ٣ = ٠ فأوجد: معادلة المستقيم أ الموازي للمستقيم ك والذي يمر بالنقطة: (−٣ ، ٢)

ميل المستقيم ك = م١ = $\frac{-١}{٣}$

∵ المستقيمان متوازيان م٢ = م١ = $\frac{-١}{٣}$

معادلة المستقيم أ ص − ص١ = م٢ (س − س١)

ص − ٢ = $\frac{-١}{٣}$ (س − − ٣)

ص = $\frac{-١}{٣}$ (س + ٣) + ٢

ص = $-\frac{١}{٣}$ س − ١ + ٢

ص = $\frac{-١}{٣}$ س + ١

Q إذا كان المستقيم ل: ص = ٢س + ١ فأوجد: معادلة المستقيم هـ العمودي على المستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٤ ، − ٣)

ميل المستقيم ل = م١ = ٢

∵ المستقيمان متعامدان ∴ م٢ × م١ = − ١

⇐ م٢ = $\frac{-١}{م١}$ = $\frac{-١}{٢}$

بالتالي معادلة المستقيم ف المطلوبة هي:

ص − ص١ = م٢ (س − س١)

ص − − ٣ = $\frac{-١}{٢}$ (س − ٤)

ص = $-\frac{١}{٢}$ س + ٢ − ٣

ص = $-\frac{١}{٢}$ س − ١

Q إذا كان المستقيم ك: ٣ص + س + ٣ = ٠ فأوجد: معادلة المستقيم ز العمودي على المستقيم ك والذي يمر بالنقطة: (١ ، ٤)

ميل المستقيم ك = م١ = $\frac{-١}{٣}$

∵ المستقيمان متعامدان ∴ م١ × م٢ = − ١

م٢ = $\frac{-١}{م١}$ = $\frac{-١}{\left(\frac{١}{٣}-\right)}$ = ٣

معادلة المستقيم ز ص − ص١ = م٢ (س − س١)

ص − ٤ = ٣ (س − ١)

ص = ٣ (س − ١) + ٤

ص = ٣س − ٣ + ٤

ص = ٣س + ١

UULA
صفوة معلمي الكويت

موضوعي- معادلة الخط المستقيم

إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

١. المستقيم الذي معادلته ص = ٤س يمر من نقطة الأصل (أ) (ب)

٢. المستقيم الذي معادلته ص = ٧ هو مستقيم رأسي (أ) (ب)

٣. لأي مستقيمين غير رأسيين ومتوازيين الميل نفسه (أ) (ب)

٤. المستقيمان المتعامدان وليس أحدهما رأسياً، يكون حاصل ضرب ميليهما -١ (أ) (ب)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

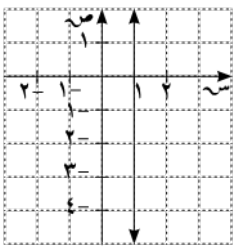
٥. معادلة المستقيم الذي ميله ٣ ويمر بالنقطة (٤ ، -١) هو:

○ ص = ٣س + ٧ ○ ص = ٣س + ١٣ ● ص = ٣س - ١٣ ○ ص =٣ س

٦. معادلة المستقيم المار بالنقطتين جـ (١ ، ٣) ، ب (-٢ ، ٠) هي:

○ ص = س + ٣ ○ ص = س - ٣ ○ ص = س - ٢ ● ص = س + ٢

٧. معادلة المستقيم في الشكل المجاور هي:



○ ص = ١
● س = ١
○ ص = س
○ ص = ٠

٨. معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وميله = ٤ هي:

○ ص = -٤ س
● ص = ٤ س
○ س = ٤ ص
○ س = -٤ ص

تـدرب و تـفـوق

اختبارات الكترونية ذكية

صفوة معلمي الكويت

البعد بين نقطة ومستقيم

إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة ل: أ س + ب ص + جـ = ٠
فإن البعد ف بين النقطة $(س_١ ، ص_١)$ والمستقيم ل

$$ف = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$$

Q أوجد البعد بين المستقيم ل: ص = ٣س − ٤ والنقطة هـ (٢ ، ١)

نكتب معادلة المستقيم على الصورة

أ س + ب ص + جـ = ٠

ص = ٣س − ٤

٣س − ص − ٤ = ٠ ⇐ أ = ٣ ب = −١ جـ = −٤

$س_١ = ٢$ $ص_١ = ١$

$$ف = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}} \Leftarrow$$

$$ف = \frac{|٣(٢) - (١) - ٤|}{\sqrt{(٣)^٢ + (-١)^٢}}$$

$$= \frac{\sqrt{١٠}}{١٠} \simeq ٠,٣١٦ \text{ وحدة طول}$$

Q أوجد البعد بين المستقيم ل: ٢ص = ٣س − ٧ والنقطة د (−٤ ، −٣)

نكتب معادلة المستقيم على الصورة

أ س + ب ص + جـ = ٠

٢ص = ٣س − ٧

٣س − ٢ص − ٧ = ٠

⇐ أ = ٣ ب = −٢ جـ = −٧

$س_١ = -٤$ $ص_١ = -٣$

$$ف = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}} \Leftarrow$$

$$ف = \frac{|٣(-٤) - ٢(-٣) - ٧|}{\sqrt{(٣)^٢ + (-٢)^٢}} = \sqrt{١٣} \text{ وحدة طول}$$

Q أوجد البعد بين المستقيم ل: ص = −س + ٣ والنقطة د (٢ ، ٥)

نكتب معادلة المستقيم على الصورة

أ س + ب ص + جـ = ٠

ص = −س + ٣

−س − ص + ٣ = ٠ ⇐ أ = −١ ب = −١ جـ = ٣

$س_١ = ٢$ $ص_١ = ٥$

$$ف = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}} \Leftarrow$$

$$ف = \frac{|-(٢) - (٥) + ٣|}{\sqrt{(-١)^٢ + (-١)^٢}} = ٢\sqrt{٢} \text{ وحدة طول}$$

Q أوجد البعد بين المستقيم ل: $ص = -\frac{٤}{٣} + \frac{س}{٦}$ والنقطة ط (٣ ، −٤)

نكتب معادلة المستقيم على الصورة

أ س + ب ص + جـ = ٠

$ص = -\frac{٤}{٣} + \frac{س}{٦}$ (×٦)

٦ص = −٨ + س

س − ٦ص − ٨ = ٠ ⇐ أ = ١ ب = −٦ جـ = −٨

$س_١ = ٣$ $ص_١ = -٤$

$$ف = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}} \Leftarrow$$

$$ف = \frac{|(٣) - ٦(-٤) - ٨|}{\sqrt{(١)^٢ + (-٦)^٢}} \simeq ٣,١٢٤ \text{ وحدة طول}$$

Q أوجد البعد بين نقطة الأصل والمستقيم: ٢ص = ٣س + ٤

نكتب معادلة المستقيم على الصورة

أ س + ب ص + جـ = ٠

٢ص = ٣س + ٤

٣س − ٢ص + ٤ = ٠ ⇐ أ = ٣ ب = −٢ جـ = ٤

س١ = ٠ ص١ = ٠

$$ف = \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}} \Leftarrow$$

$$ف = \frac{|٤ + (٠)٢ - (٠)٣|}{\sqrt{(٢-)^2 + (٣)^2}} \simeq ١,١٠٩$$ وحدة طول

Q أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، -٣) على المستقيم : -٢س + ص - ٤=٠

-٢س + ص - ٤=٠ ⇐ أ = -٢ ب = ١ جـ = -٤

س١ = ٢ ص١ = -٣

$$ف = \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}} \Leftarrow$$

$$ف = \frac{|-٤ - (-٣) + (٢)٢|}{\sqrt{(٢-)^2 + (١)^2}} \simeq ٤,٩٢$$ وحدة طول

Q أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و(٢ ، − ١) إذا كان المستقيم: ٣س − ٤ص + ٧ = ٠ مماسا لها.

طول نصف القطر يساوي بعد المماس عن مركز الدائرة بالتالي:

٣س − ٤ص + ٧ = ٠ ش ⇐ أ = ٣، ب = −٤ ، جـ = ٧

س١ = ٢ ص١ = −١

$$ف = نق = \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}} \Leftarrow$$

$$نق = \frac{|٧ + (-١)٤ - (٢)٣|}{\sqrt{(٤-)^2 + (٣)^2}} = \frac{١٧}{٥}$$ وحدة طول

Q أوجد طول العمود المرسوم من نقطة (-٤ ، ٧) على المستقيم: ص = -٥س + ١

نكتب معادلة المستقيم على الصورة

أ س + ب ص + جـ = ٠

ص = −٥س + ١

−٥س − ص + ١ = ٠ ⇐ أ = −٥ ب = −١ جـ = ١

س١ = −٤ ص١ = ٧

$$ف = \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}} \Leftarrow$$

$$ف = \frac{|١ + (٧) - (٤-)٥|}{\sqrt{(١-)^2 + (٥-)^2}} \simeq ٢,٧٥$$ وحدة طول

UULA
صفوة معلمي الكويت

موضوعي - البعد بين نقطة ومستقيم

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

١. البعد بين المستقيم ل: ص = ٣س – ٤ والنقطة (١،٢) يساوي:

- ● $\frac{\sqrt{١٠}}{١٠}$ وحدة طول
- ○ $\sqrt{١٠}$ وحدة طول
- ○ ١٠ وحدة طول
- ○ $\sqrt{٥}$ وحدة طول

٢. البعد بين المستقيم ل: ٢ص = ٣س – ٧ والنقطة (-٤،-٣) يساوي:

- ○ $\sqrt{١١}$
- ● $\sqrt{١٣}$
- ○ $\sqrt{٧}$
- ○ $\sqrt{٥}$

٣. البعد بين نقطة الأصل والمستقيم ٢ص = ٣س + ٤ يساوي تقريباً:

- ● ١,١٠٩
- ○ ٢,٢١٣
- ○ ٤,٠٢١
- ○ ٦,٠٠١

٤. طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و (٢ ، -١) إذا كان ٣س – ٤ص + ٧ = ٠ مماس لها:

- ● $\frac{١٧}{٥}$
- ○ $\frac{١٣}{٥}$
- ○ $\frac{١١}{٥}$
- ○ $\frac{٩}{٥}$

تـدرب و تـفـوق

اختبارات الكترونية ذكية

صفوة معلمي الكويت

معادلة الدائرة

$(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نـ هـ^{٢}$

وتسمى هذه الصورة القياسية لمعادلة الدائرة بمعلومية المركز م(د ، هـ) وطول نصف القطر نـ هـ

Q أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣ ، − ٢) وطول نصف قطرها (٧) وحدات

$(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نـ هـ^{٢}$

$(س - ٣)^{٢} + (ص - (-٢))^{٢} = ٧^{٢}$

$(س - ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٤٩$

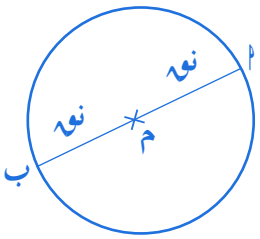
Q أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٥ ، − ٣) وطول نصف قطرها (٥) وحدات

$(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نـ هـ^{٢}$

$(س - ٥)^{٢} + (ص - (-٣))^{٢} = ٥^{٢}$

$(س - ٥)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٢٥$

Q أوجد معادلة الدائرة التي قطرها $\overline{أب}$ حيث أ(−٣ ، ٦) ، ب(١ ، − ٢)



مركز الدائرة هو منتصف $\overline{أب}$

م$\left(\frac{-٣+١}{٢} ، \frac{٦+(-٢)}{٢}\right)$ ← م(−١ ، ٢) (د ، هـ)

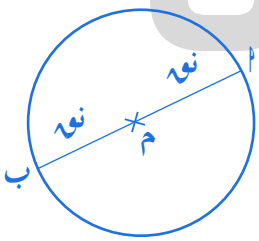
نـ هـ = $أم = \sqrt{((-١)-(-٣))^{٢} + ((٢)-(٦))^{٢}} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول

معادلة الدائرة $(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نـ هـ^{٢}$

$(س - (-١))^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = (٢\sqrt{٥})^{٢}$

$(س + ١)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٢٠$

Q أوجد معادلة الدائرة التي قطره $\overline{أب}$ حيث أ(٤ ، − ٢) ، ب(٢ ، ٤)



مركز الدائرة هو منتصف $\overline{أب}$

م$\left(\frac{٤+٢}{٢} ، \frac{-٢+٤}{٢}\right)$ ← م(٣ ، ١)

نـ هـ = $أم = \sqrt{((٣)-(٤))^{٢} + ((١)-(-٢))^{٢}} = \sqrt{١٠}$ وحدة طول

معادلة الدائرة $(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نـ هـ^{٢}$

$(س - ٣)^{٢} + (ص - ١)^{٢} = (\sqrt{١٠})^{٢}$

$(س - ٣)^{٢} + (ص - ١)^{٢} = ١٠$

صفوة تعلمي الكويت

Q أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٤ وحدات.

$س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}$

$س^{٢} + ص^{٢} = ١٦$

Q أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول قطرها ٦ سم

القطر = ٦ وبالتالي $نق = ٣$ سم

$س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}$

$س^{٢} + ص^{٢} = ٩$

Q أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣ ، ٤) وتمس محور الصادات.

$(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نق^{٢}$ $نق = |ر| = |٣| = ٣$

$(س - ٣)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ٣^{٢}$

$(س - ٣)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ٩$

معلق

Q أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣ ، ٤) وتمس محور السينات.

$(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نق^{٢}$ $نق = |هـ| = |٤| = ٤$

$(س - ٣)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ٤^{٢}$

$(س - ٣)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ١٦$

أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:

Q $(س + ٢)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ٩$

$(س + ٢)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = نق^{٢}$

$-د = ٢ \Leftarrow د = -٢$

$-هـ = -٣ \Leftarrow هـ = ٣$ مركز الدائرة $(-٢ ، ٣)$

$نق^{٢} = ٩ \Leftarrow نق = \sqrt{٩} = ٣$

Q $س^{٢} + ص^{٢} = ٤٩$

$د = ٠$

$هـ = ٠$ مركز الدائرة $(٠ ، ٠)$

$نق = \sqrt{٤٩} = ٧$

Q $(س - ٤)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٣٦$

$(س - ر)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نق^{٢}$

$ر = ٤$ $هـ = -٥ \Leftarrow$ مركز الدائرة $(٤ ، -٥)$

$نق = \sqrt{٣٦} = ٦$

صفوة معلمي الكويت

الصورة العاملة لمعادلة الدائرة:

$س^{٢} + ص^{٢} + ل س + ك ص + ب = ٠$

حيث $ل ، ك ، ب$ ثوابت

مركز الدائرة $\left(\frac{-ل}{٢} ، \frac{-ك}{٢}\right)$

نصف القطر $نق = \frac{١}{٢}\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب}$ حيث $ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب > ٠$

Q عين مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة: $٢س^{٢} + ٢ص^{٢} - ١٢س - ٤ص - ٣٠ = ٠$

بالقسمة على ٢ : $س^{٢} + ص^{٢} - ٦س - ٢ص - ١٥ = ٠$

$ل \quad ك \quad ب$

مركز الدائرة $\left(\frac{-ل}{٢} ، \frac{-ك}{٢}\right) = \left(\frac{٦}{٢} ، \frac{٢}{٢}\right) = (٣ ، ١)$

$نق = \frac{١}{٢}\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب} = \frac{١}{٢}\sqrt{(-٦)^{٢} + (-٢)^{٢} - ٤(-١٥)} = ٥$

Q عين مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة: $٣س^{٢} + ٣ص^{٢} - ٦س + ٩ص - ١٢ = ٠$

بالقسمة على ٣ : $س^{٢} + ص^{٢} - ٢س + ٣ص - ٤ = ٠$

$ل \quad ك \quad ب$

مركز الدائرة $\left(\frac{-ل}{٢} ، \frac{-ك}{٢}\right) = \left(\frac{٢}{٢} ، \frac{-٣}{٢}\right) = \left(١ ، \frac{-٣}{٢}\right)$

$نق = \frac{١}{٢}\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب} = \frac{١}{٢}\sqrt{(-٢)^{٢} + (٣)^{٢} - ٤(-٤)} = \frac{\sqrt{٢٩}}{٢}$

- الصورة العامة لمعادلة دائرة: $س^{٢} + ص^{٢} + ل س + ك ص + ب = ٠$

حيث $ل ، ك ، ب$ ثوابت

- عندما $ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب > ٠$ فإن المعادلة لا تمثل دائرة.
- عندما $ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب = ٠$ فإن المعادلة تمثل نقطة.
- عندما $ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب < ٠$ فإن المعادلة تمثل دائرة.

صفوة معلمي الكويت

هل كل معادلة مما يلي تمثل معادلة دائرة؟ فسر.

Q $س^{٢} + ص^{٢} - ٤س + ٧ص + ١٧ = ٠$

$ل = -٦ \quad ك = -٢ \quad جـ = -١٥$

$ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب = (-٤)^{٢} + (٧)^{٢} - ٤(١٧) = -٣$

$\because -٣ <$ صفرا $\quad \therefore$ ليست دائرة.

Q $س^{٢} + ص^{٢} + ٥س - ٦ص - ٤ = ٠$

$ل = ٥ \quad ك = -٦ \quad جـ = -٤$

$ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب = (٥)^{٢} + (-٦)^{٢} - ٤(-٤) = ٧٧$

$\because ٧٧ >$ صفرا $\quad \therefore$ معادلة دائرة.

مركزها $\left(\frac{-ل}{٢}، \frac{-ك}{٢}\right) = \left(\frac{٦}{٢}، \frac{-٥}{٢}\right) = \left(٣، \frac{-٥}{٢}\right)$

نق $= \frac{١}{٢}\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب} = \frac{١}{٢}\sqrt{٧٧}$

Q $س^{٢} + ص^{٢} - ٢س + ٢ص + ٢ = ٠$

$ل = -٢ \quad ك = ٢ \quad جـ = ٢$

$ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب = (-٢)^{٢} + (٢)^{٢} - ٤(٢) =$ صفرا

$\therefore$ تمثل نقطة. $\left(\frac{-ل}{٢}، \frac{-ك}{٢}\right)$

$= \left(\frac{٢}{٢}، \frac{٢}{٢}\right) = (١، ١)$

Q $س^{٢} + ص^{٢} + ٤س - ٧ص + ٢٠ = ٠$

$ل = ٤ \quad ك = -٧ \quad جـ = ٢٠$

$ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب = ١٦ + ٤٩ - ٤ \times ٢٠ = -١٥ < ٠$

$\therefore$ المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.

Q $س^{٢} + ص^{٢} - ٣س + ٥ص - \frac{١٥}{٤} = ٠$

$ل = -٣ \quad ك = ٥ \quad جـ = -\frac{١٥}{٤}$

$ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب = ٩ + ٢٥ - ٤\left(\frac{-١٥}{٤}\right) = ٤٩ > ٠$

$\because ٤٩ > ٠ \quad \therefore$ المعادلة تمثل معادلة دائرة.

مركزها $\left(\frac{-ل}{٢}، \frac{-ك}{٢}\right) = \left(\frac{٣}{٢}، \frac{-٥}{٢}\right)$

نق $= \frac{١}{٢}\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب} = \frac{١}{٢}\sqrt{٤٩} = \frac{٧}{٢}$

Q $س^{٢} + ص^{٢} - ٦س + ٨ص + ٢٥ = ٠$

$ل = -٦ \quad ك = ٨ \quad جـ = ٢٥$

$ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب = ٣٦ + ٦٤ - ٤ \times ٢٥ = ٠$

$\therefore$ تمثل نقطة. $\left(\frac{-ل}{٢}، \frac{-ك}{٢}\right)$

$= \left(\frac{٦}{٢}، \frac{-٨}{٢}\right) = (٣، -٤)$

معادلة مماس لدائرة بالصورة القياسية:

Q أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها $(س - ٢)^{٢} + (ص - ١)^{٢} = ٢٥$ عند نقطة التماس (٦، ٤)

المركز (٢، ١)

ميل نصف القطر $= \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{٤ - ١}{٦ - ٢} = \frac{٣}{٤}$

$\because$ المماس $\perp$ نصف القطر

$\therefore$ ميل المماس $\times$ ميل نصف القطر $= -١$

$\therefore$ ميل المماس $= \frac{-١}{\left(\frac{٣}{٤}\right)} = \frac{-٤}{٣}$

معادلة المماس :

$ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص - ٤ = \frac{-٤}{٣}(س - ٦)$

$ص = \frac{-٤}{٣}س + ٨ + ٤$

$ص = \frac{-٤}{٣}س + ١٢$

صفوة معلمي الكويت

أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها $(س - ١)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٥$ عند نقطة التماس أ$(٣ ، ١)$

المركز $(١ ، ٢)$

ميل نصف القطر $= \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{١ - ٢}{٣ - ١} = \frac{-١}{٢}$

∵ المماس ⊥ نصف القطر

∴ ميل المماس × ميل نصف القطر = -١

∴ميل المماس $= \frac{-١}{\left(\frac{-١}{٢}\right)} = ٢$

معادلة المماس:

$ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص - ١ = ٢(س - ٣)$

$ص = ٢س - ٦ + ١$

$ص = ٢س - ٥$

معادلة مماس لدائرة بالصورة العامة:

أثبت أن النقطة أ$(١ ، ١)$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها (و) ومعادلتها:

$س^{٢} + ص^{٢} + ٦س + ٨ص - ١٦ = ٠$ ، ثم أوجد معادلة المماس لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

بالتعويض: $(١)^{٢} + (١)^{٢} + ٦(١) + ٨(١) - ١٦ = ٠$

∴ أ$(١ ، ١)$ تنتمي إلى الدائرة المعادلة على شكل الصورة العامة حيث:

$ل = ٦ \quad ك = ٨ \quad جـ = -١٦$

مركزها $\left(\frac{-ل}{٢} ، \frac{-ك}{٢}\right) = \left(\frac{-٦}{٢} ، \frac{-٨}{٢}\right) = (-٣ ، -٤)$

نق $= \frac{١}{٢}\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - ٤جـ} = \frac{١}{٢}\sqrt{٦^{٢} + ٨^{٢} - ٤(-١٦)} = \sqrt{٤١}$

ميل نصف القطر $= \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{-٤ - ١}{-٣ - ١} = \frac{-٥}{-٤} = \frac{٥}{٤}$

∵ المماس ⊥ نصف القطر

∴ ميل المماس × ميل نصف القطر = -١

بالتالي ميل المماس $= \frac{-١}{\left(\frac{٥}{٤}\right)} = \frac{-٤}{٥}$

معادلة المماس: $ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص - ١ = \frac{-٤}{٥}(س - ١)$

$ص = \frac{-٤}{٥}س + \frac{٩}{٥}$

أثبت أن النقطة أ$(٦ ، -٤)$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها (و) ومعادلتها:

$س^{٢} + ص^{٢} - ٤س + ٢ص - ٢٠ = ٠$ ، ثم أوجد معادلة المماس لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

بالتعويض: $(٦)^{٢} + (-٤)^{٢} - ٤(٦) + ٢(-٤) - ٢٠ = ٠$

∴ أ$(٦ ، -٤)$ تنتمي إلى الدائرة المعادلة على شكل الصورة العامة حيث:

$ل = -٤ \quad ك = ٢ \quad جـ = -٢٠$

مركزها $\left(\frac{-ل}{٢} ، \frac{-ك}{٢}\right) = \left(\frac{٤}{٢} ، \frac{-٢}{٢}\right) = (٢ ، -١)$

نق $= \frac{١}{٢}\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - ٤جـ} = \frac{١}{٢}\sqrt{(-٤)^{٢} + ٢^{٢} - ٤(-٢٠)} = ٥$

ميل نصف القطر $= \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{-١ - (-٤)}{٦ - ٢} = \frac{٣}{٤}$

∵ المماس ⊥ نصف القطر

∴ ميل المماس × ميل نصف القطر = -١

بالتالي ميل المماس $= \frac{-١}{\left(\frac{٣}{٤}\right)} = \frac{-٤}{٣}$

معادلة المماس: $ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص - (-٤) = \frac{-٤}{٣}(س - ٦)$

$ص = \frac{-٤}{٣}س + ١٢$

معلق

صفوة معلمي الكويت

موضوعي- معادلة الدائرة

١. الصورة القياسية لمعادلة دائرة مركزها م(د، هـ) وطول نصف قطرها نـ هي:

- (س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نـ^{٢}
- (س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = ٢ نـ
- (س + د)^{٢} + (ص + هـ)^{٢} = نـ^{٢}
- (س + د)^{٢} − (ص + هـ)^{٢} = ٢ نـ

٢. معادلة الدائرة التي مركزها (٣-، ٢) وطول نصف قطرها ٧ وحدات هي:

- (س + ٣)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٤٩
- (س − ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ١٤
- (س + ٣)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ١٤
- (س − ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٤٩

٣. معادلة الدائرة التي قطرها أب حيث أ(− ٣ ، ٦)، ب(١ ، − ٢) هي:

- (س − ١)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٢٠
- (س + ١)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٢٠
- (س + ١)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ١٠
- (س − ١)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ١٠

٤. معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول قطرها ٦سم هي:

- س^{٢} + ص^{٢} = ٦
- س^{٢} + ص^{٢} = ١٢
- س^{٢} + ص^{٢} = ٣٦
- س^{٢} + ص^{٢} = ٩

٥. معادلة الدائرة التي مركزها (٣، ٤) وتمس محور الصادات هي:

- (س − ٣)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ٩
- (س − ٣)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ١٦
- (س − ٣)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ٦
- (س − ٣)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ٨

تـدرب و تـفـوق
اختبارات الكترونية ذكية
صفوة معلمي الكويت

الانحراف المعياري

Q أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم البيانات: ٩، ٧ ، ٨، ٦، ٤، ٢

$$\overline{س} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{٣٦}{٦} = ٦$$

$س_ر$	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^٢$
٩	٣	٩
٧	١	١
٨	٢	٤
٦	٠	٠
٤	٢−	٤
٢	٤−	١٦
		٣٤

$$\text{التباين} = ع^٢ = \frac{\sum (س_ر - \overline{س})^٢}{ن} = \frac{٣٤}{٦} = \frac{١٧}{٣}$$

$$\text{الانحراف المعياري} = ع = \sqrt{\frac{١٧}{٣}} \simeq ٢,٣٨$$

Q أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم البيانات: ٤، ٦، ٨، ٥، ٣، ٧، ٢

$$\overline{س} = \frac{٤+٦+٨+٥+٣+٧+٢}{٧} = \frac{٣٥}{٧} = ٥$$

القيمة $س_ر$	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^٢$
٤	١−	١
٦	١	١
٨	٣	٩
٥	٠	٠
٣	٢−	٤
٧	٢	٤
٢	٣−	٩
		المجموع = ٢٨

$$\text{التباين} = ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^٢}{ن} = \frac{٢٨}{٧} = ٤$$

$$\text{الانحراف المعياري} = ع = \sqrt{٤} = ٤$$

UULA
صوة معلمي الكويت

Q إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من القيم من بيانات هو ع = ٦ وأن مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو (٥٤٠) فما عدد هذه البيانات؟

$$\text{التباين} = ع^{٢} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^{٢}}{ن} \Leftarrow ٦^{٢} = \frac{٥٤٠}{ن} \Leftarrow ن = \frac{٥٤٠}{٣٦} = ١٥$$

Q إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من القيم من بيانات هو ع = ٦ وأن مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو (٤٨٠) فما عدد هذه البيانات؟

$$\text{التباين} = ع^{٢} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^{٢}}{ن} \Leftarrow ٤^{٢} = \frac{٤٨٠}{ن} \Leftarrow ن = \frac{٤٨٠}{١٦} = ٣٠$$

Q يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان ١٠٠ طالب ثانوي (الوزن بالكيلو جرام).
أوجد المتوسط الحسابي $\overline{س}$ والانحراف المعياري ع لهذه الأوزان.

الفئة	٦٠-	٦٤-	٦٨-	٧٢-	٧٦
التكرار	٥	١٨	٤٢	٢٧	٨

الفئة	مركز الفئة $س_ر$	التكرار $ت_ر$	$س_ر ت_ر$	$(س_ر - \overline{س})$	$(س_ر - \overline{س})^{٢}$	$(س_ر - \overline{س})^{٢} \times ت_ر$
٦٠-	٦٢	٥	٣١٠	٨,٦-	٧٣,٩٦	٣٦٩,٨
٦٤-	٦٦	١٨	١١٨٨	٤,٦-	٢١,١٦	٣٨٠,٨٨
٦٨-	٧٠	٤٢	٢٩٤٠	٠,٦-	٠,٣٦	١٥,١٢
٧٢-	٧٤	٢٧	١٩٩٨	٣,٤	١١,٥٦	٣١٢,١٢
٧٦-	٧٨	٨	٦٢٤	٧,٤	٥٤,٧٦	٤٣٨,٠٨
		المجموع ١٠٠	المجموع: ٧٠٦٠	$\overline{س} = \frac{٧٠٦٠}{١٠٠} = ٧٠,٦$		المجموع : ١٥١٦

$$ع^{٢} = \frac{\sum (س_ر - \overline{س})^{٢} ت_ر}{\sum ت_ر} = \frac{١٥١٦}{١٠٠} \simeq ١٥,١٦ \Leftarrow ع = \sqrt{١٥,١٦} \simeq ٣,٨٩$$

UULA
صفوة معلمي الكويت

موضوعي- الانحراف المعياري

إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

١. مجموع انحرافات مجموعة من القيم عن متوسطها الحسابي يساوي صفرا .

(أ) (ب)

٢. إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم يساوي ٣ وكان مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي يساوي ١٨٠ فإن عدد القيم هو ٦ .

(أ) (ب)

اختر الإجابة الصحيحة :

٣. في البيانات : ١٠، ١٣، ٩، ٧، ١٢، ١٥ الانحراف المعياري هو:

- ○ ٧
- ○ ٦
- ● $\sqrt{7}$
- ○ ليس أي مما سبق

٤. إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم بيانات يساوي ٤ ومجموع مربعات انحرافات قيم البيانات عن متوسطها الحسابي يساوي ١٩٢ فإن عدد قيم هذه البيانات هو:

- ○ ١٦
- ○ ٦
- ● ١٢
- ○ ليس أي مما سبق

🎯 تـدرب و تـفـوق

اختبارات الكترونية ذكية

صفوة معلمي الكويت

طرائق العد

العد عن طريق القوائم

ما عدد الرموز ثلاثية الحروف التي يمكن تكوينها من بين الحروف : أ ، ب ، د من دون تكرار لأي حرف منها؟

اكتب قائمة بالإمكانيات بشكل مرتب (متوال بحسب الترتيب) :

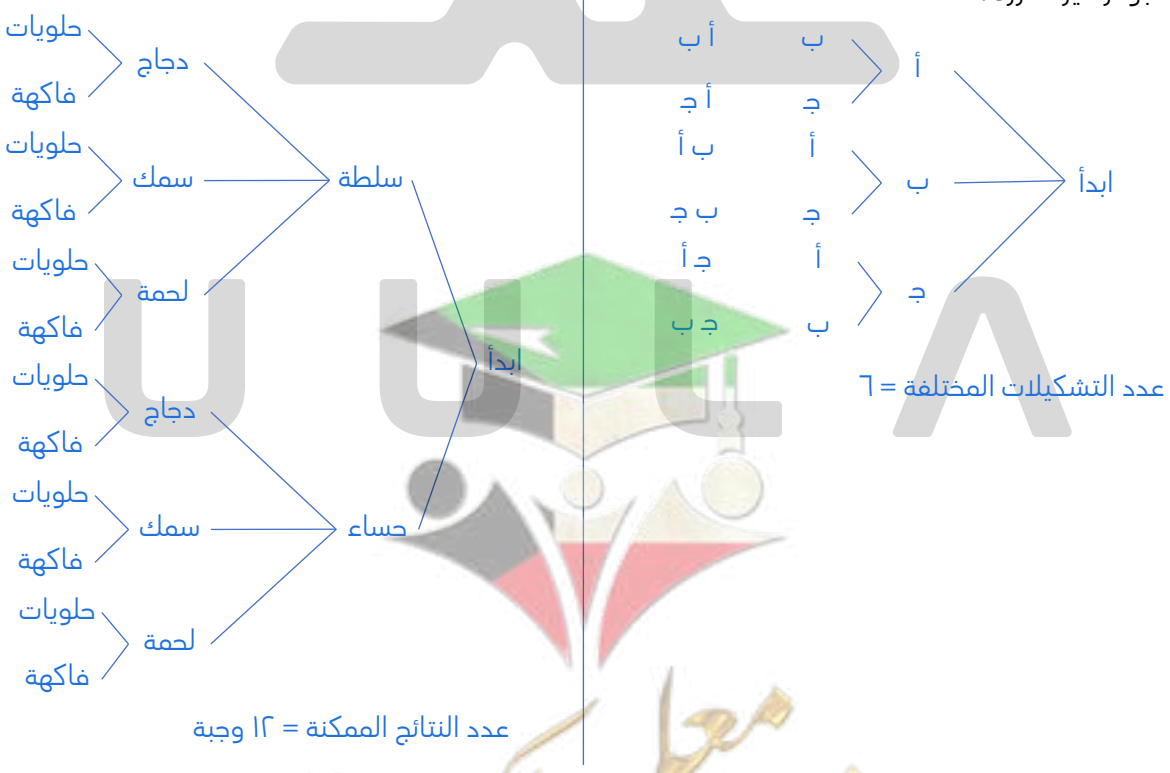
معلق

أ ب ج	أ ب د	أ ج ب	أ ج د	أ د ب	أ د ج (أ أولا)
ب أ ج	ب أ د	ب ج أ	ب ج د	ب د أ	ب د ج (ب أولا)
ج أ ب	ج أ د	ج ب أ	ج ب د	ج د أ	ج د ب (ج أولا)
د أ ب	د أ ج	د ب أ	د ب ج	د ج أ	د ج ب (د أولا)

يوجد ٤ × ٦ = ٢٤ إمكانية . يمكن كتابة ٢٤ رمزا.

الشجرة البيانية

في تجربة على سلوك الحيوان ، استخدم علماء النفس نوعين من الأطعمة على التوالي كمكافأة عبارة عن واحدة من ثلاثة أنواع ممكنة. كم عدد التشكيلات المختلفة الممكنة في حال كانت أنواع الجوائز غير مكررة؟



يقدم أحد المطاعم وجبة غداء مؤلفة من: سلطة أو حساء ، دجاج أو سمك أو لحمة ، حلويات أو فاكهة. استخدم الشجرة البيانية لإعطاء عدد الوجبات الممكنة.

صفوة معلمي الكويت

مبدأ العد

استخدام مبدأ العد، تبدأ لوحات السيارات في إحدى المدن بحرفين من الحروف الأبجدية يتبعهما ثلاثة أرقام. كم عدد اللوحات التي يمكن الحصول عليها؟ افترض أنه لا يوجد تكرار لأي من الحروف أو الأرقام في أي من لوحات التراخيص.

حرف حرف رقم رقم رقم

٢٨ × ٢٧ × ١٠ × ٩ × ٨ = ٥٤٤ ٣٢٠ لوحة

معلق

- ما هو عدد اللوحات التي يمكن الحصول عليها إذا كان رقم الآحاد فرديا؟

حرف حرف رقم رقم رقم

٢٨ × ٢٧ × ٥ × ٩ × ٨ = ٢٧٢ ١٦٠ لوحة

تذكر:

مضروب ن أو
ن! هو : $ن \times (ن-١) \times \ldots \times ٣ \times ٢ \times ١$
فمثلا : $٥! = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$
$٠! = ١$ تقرأ مضروب صفرا = ١

يوجد ثمانية متسابقين في سباق ١٠٠ م جري. ما هو عدد النتائج الممكنة لهذا السباق؟ افترض عدم وجود تعادل بين أي متسابقين. علما بأن المتسابقين وصل كل منهم إلى خط النهاية.

عدد النتائج الممكنة $= ٨! = ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٤٠٣٢٠$

اشترك (٢٠) جملا في سباق للهجن ووصلت جميعها إلى خط النهاية في أوقات مختلفة (لا يوجد أي تعادل). ما هو عدد النتائج الممكنة لهذا السباق؟

$٢٠! = ٢٠ \times ١٩ \times ١٨ \times \ldots \times ٣ \times ٢ \times ١$

التباديل:

قانون التباديل هو: $ل^{ن}_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$

$ن \geq ر$
$ن \in ص^{+}$
$ل^{ن}_{٠} = ١$

أوجد قيمة كل تبديل بدون استخدام الآلة الحاسبة بصورة مباشرة:

$ل^{٥}_{٣} = \frac{٥!}{(٥-٣)!} = ٥ \times ٤ \times ٣ = ٦٠$

$ل^{٦}_{٤} = \frac{٦!}{(٦-٤)!} = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = ٣٦٠$

$ل^{١٠}_{٤} = \frac{١٠!}{(١٠-٤)!} = ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ = ٥٠٤٠$

$ل^{١١}_{٣} = \frac{١١!}{(١١-٣)!} = ١١ \times ١٠ \times ٩ = ٩٩٠$

$ل^{ن}_{٤} = \frac{ن!}{(ن-٤)!} = ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)$

$ل^{ن}_{٣} = \frac{ن!}{(ن-٣)!} = ن(ن-١)(ن-٢)$

صفوة معلمي الكويت

Q افترض أن (٣١) عضوا من جمعية الرياضيات في مدرستك يريدون اختيار أربعة أشخاص لأربعة مناصب (رئيس ، نائب رئيس ، أمين السر ، أمين الصندوق)، حدد كم طريقة يمكن بها الاختيار لهذه المناصب.

$$ل^{٣١}_{٤} = \frac{!٣١}{!(٤-٣١)} = ٣١\times٣٠\times٢٩\times٢٨ = ٧٥٥\ ١٦٠$$

Q في إحدى الجمعيات الخيرية يوجد (٢٠) عضوا يشكلون مجلس الأمناء يريدون اختيار (رئيس ، أمين سر ، أمين الصندوق). حدد كم طريقة يمكن بها الاختيار.

$$ل^{٢٠}_{٣} = \frac{!٢٠}{!(٣-٢٠)} = ٢٠\times١٩\times١٨ = ٦٨٤٠$$

Q ما عدد الكلمات التي يمكن أن تتشكل من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية العربية وذلك في حال عدم تكرار أي منها؟

$$ل^{٢٨}_{٥} = \frac{!٢٨}{!(٥-٢٨)} = ٢٨\times٢٧\times٢٦\times٢٥\times٢٤ = ١١\ ٧٩٣\ ٦٠٠$$

Q ما عدد الأعداد التي يمكن أن تتشكل من ٤ أرقام من أرقام النظام العشري بدون الصفر وذلك في حال عدم تكرار أي رقم؟

$$ل^{٩}_{٤} = \frac{!٩}{!(٤-٩)} = ٩\times٨\times٧\times٦ = ٣٠٢٤$$

التوافيق: قانون التوافيق هو : $ن ر = \binom{ن}{ر} = \frac{!ن}{!ر\ !(ن-ر)}$



Q ما عدد اللجان المكونة من ثلاثة أشخاص والتي يمكن تكوينها من مجموعة من أربعة أشخاص؟

$$ن^{٤}_{٣} = \frac{!٤}{!٣\ !(٣-٤)} = ٤ \text{ طرق}$$

Q ما عدد اللجان المكونة من شخصين والتي يمكن تكوينها من مجموعة من أربعة أشخاص؟

$$ن^{٤}_{٢} = \frac{!٤}{!٢\ !(٢-٤)} = ٦ \text{ طرق}$$

Q إذا كان فريق كرة سلة يتكون من ١٢ لاعبا. فما عدد الفرق المختلفة التي يمكن تكوينها من خمسة لاعبين من بين لاعبي هذا الفريق (يمكن لأي لاعب اللعب في كل المراكز) ؟

$$ن^{١٢}_{٥} = \frac{!١٢}{!٥\ !(٥-١٢)} = \frac{١٢\times١١\times١٠\times٩\times٨}{!٥} = ٧٩٢$$

Q إذا كان فريق كرة قدم يتكون من ٢٠ لاعبا. فما عدد الفرق المختلفة التي يمكن تكوينها من ١١ لاعبا من بين لاعبي هذا الفريق؟ (يمكن لأي لاعب اللعب في أي مركز)

$$ن^{٢٠}_{١١} = \frac{!٢٠}{!١١\ !(١١-٢٠)}$$

$$= \frac{٢٠\times١٩\times١٨\times١٧\times١٦\times١٥\times١٤\times١٣\times١٢\times١١\times١٠}{!١١} = ١٦٧\ ٩٦٠$$

صفوة معلمي الكويت

Q من أجل اختبار لوائح المرشحين للانتخابات النيابية يجب اختيار (١٠) مرشحين من بين (٥١) مرشحا ما عدد اللوائح المختلفة التي يمكن تكوينها؟

$$ن_{١٠}^{٥١} = \frac{!٥١}{!(١٠-٥١)\ !١٠} = ١٢\ ٧٧٧\ ٧١١\ ٨٧٠$$

Q أثناء الإعداد لزيارة المتحف الوطني أراد منظمو الزيارة إعداد لوائح للطلاب لاستخدام حافلات تتسع كل منها ١٥ طالبا علما أن عدد الطلاب هو ٦٠ طالبا. ما عدد اللوائح المختلفة التي يمكن إعدادها للزيارة؟

$$ن_{١٥}^{٦٠} = \frac{!٦٠}{!(١٥-٦٠)\ !١٥} = ٥,٣١٩٤٠٨٩١٩ \times ١٠^{١٣}$$

فيما يلي ، حدد ما إذا كان المثال يبين تبديلا أو توفيقا.

Q اختيار ٣ طلاب من الصف العاشر للمشاركة في مسابقة تلاوة القرآن. التوافيق

Q مراكز المشاركين الثلاثة في مسابقة تلاوة القرآن. التباديل

في كل مما يلي حدد ما إذا كان المثال يبين تبديلا أو توفيقا واحسب عدد الطرق في كل حالة.

Q اختيار رئيس ، نائب رئيس ، أمين سر من بين ٢٥ عضوا في نادي القراءة التباديل $ل_{٣}^{٢٥} = ١٣٨٠٠$

Q اختيار ٥ حبات بطاطا من كيس يحتوي على ١٢ حبة لإعداد وجبة غذائية التوافيق $ق_{٥}^{١٢} = ٧٩٢$

Q وضع معلم مخططا يبين مقاعد ٢٢ طالبا في غرفة بها ٢٥ مقعدا التباديل $ل_{٢٢}^{٢٥} = ٢,٥٨٥٢ \times ١٠^{٢٤}$

Q اختيار ٤ أبيات من قصيدة شعرية مكونة من ١١ بيتا لكتابتها وتعليقها في غرفة الفصل التوافيق $ق_{٤}^{١١} = ٣٣٠$

موضوعي- طرق العد

إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

١. ٥! = ١٢٠ (أ) (ب)

٢. $ل_{٥}^{٨}$ = ٦٧٣٠ (أ) (ب)

٣. $ق_{٥}^{١٤}$ = ٢٠٠٢ (أ) (ب)

اختر الإجابة الصحيحة

Q بكم طريقة يمكن اختيار ٣ طلاب من أصل ٩ طلاب؟

- ٥٠٤ طريقة
- ٨٤ طريقة
- ٢٧ طريقة
- ١٢ طريقة

Q بكم طريقة ترتيب ٤ سيارات في ٤ مواقف

- ٢٤ طريقة
- ١٦ طريقة
- ٤ طرق
- ١٢ طريقة

تـدرب و تـفـوق

اختبارات الكترونية ذكية

صفوة معلمي الكويت

الاحتمال المشروط

في كل تجربة عشوائية ، نهتم أولا بمعرفة مجموعة النواتج الممكنة والتي تسمى فضاء العينة (ف). كل حدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

إذا كانت جميع نواتج التجربة لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث هو :

$$\text{ل (الحدث أ)} = \frac{\text{عدد نواتج الحدث أ}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$$

أي أن: $\text{ل}(أ) = \frac{\text{ن}(أ)}{\text{ن}(ف)}$

يكتب الاحتمال بصورة كسر عشري، أو كسر، أو نسبة، أو نسبة مئوية.

خواص الاحتمال لحدث ما:

ليكن أ حدثا في فضاء عينة ف منته وغير خال فإن: $٠ \leq \text{ل}(أ) \leq ١$

- إذا كان $أ = \{\ \}$ إذاً $\text{ل}(أ) = ٠$ ويسمى حدثا مستحيلا.
- إذا كان $أ = ف$ إذا $\text{ل}(أ) = ١$ ويسمي حدثا مؤكدا.
- مجموع احتمالات جميع النواتج في فضاء العينة يساوي ١.

في لعبة "رمي حجري نرد منتظمين ومتمايزين" والتجربة هي ملاحظة الوجه العلوي لكل من الحجرين:



- مم يتألف كل ناتج؟
- اكتب فضاء العينة
- ما عدد النواتج الممكنة ؟

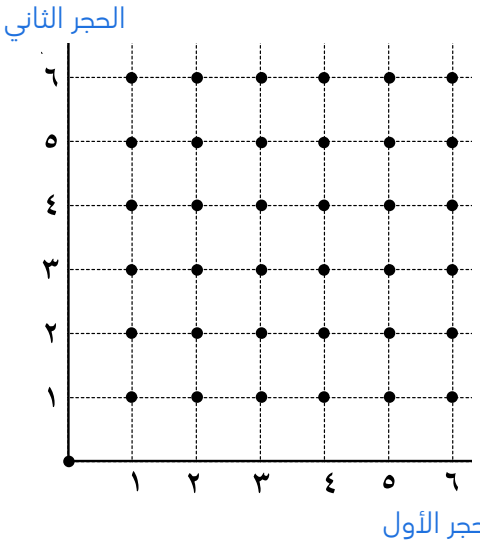
$\text{ن}(ف) = ٣٦$

ف	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	(١ ، ١)	(٢ ، ١)	(٣ ، ١)	(٤ ، ١)	(٥ ، ١)	(٦ ، ١)
٢	(١ ، ٢)	(٢ ، ٢)	(٣ ، ٢)	(٤ ، ٢)	(٥ ، ٢)	(٦ ، ٢)
٣	(١ ، ٣)	(٢ ، ٣)	(٣ ، ٣)	(٤ ، ٣)	(٥ ، ٣)	(٦ ، ٣)
٤	(١ ، ٤)	(٢ ، ٤)	(٣ ، ٤)	(٤ ، ٤)	(٥ ، ٤)	(٦ ، ٤)
٥	(١ ، ٥)	(٢ ، ٥)	(٣ ، ٥)	(٤ ، ٥)	(٥ ، ٥)	(٦ ، ٥)
٦	(١ ، ٦)	(٢ ، ٦)	(٣ ، ٦)	(٤ ، ٦)	(٥ ، ٦)	(٦ ، ٦)

صفوة معلمي الكويت

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

- مثل فضاء العينة بيانيا.



- ما احتمال الحدث أ "ظهور عددين مجموعهما يساوي ٤" ؟

$$ل(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(ف)} = \frac{٣}{٣٦} = \frac{١}{١٢}$$

- ما احتمال الحدث ب "ظهور عددين مجموعهما يساوي ٧" ؟

$$ل(ب) = \frac{ن(ب)}{ن(ف)} = \frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$$

- ما احتمال الحدث جـ "ظهور عددين مجموعهما يساوي ١٣" ؟

$$ل(جـ) = \text{صفرا} \quad \text{مستحيل}$$

- ما احتمال الحدث د "ظهور عددين أحدهما مربع للآخر" ؟

$$ل(د) = \frac{ن(د)}{ن(ف)} = \frac{٣}{٣٦} = \frac{١}{١٢}$$

اشترى ناصر علبة حلوى تحتوي على ١٢ قطعة بينها ٤ قطع بالشوكولا، يريد ناصر أخذ قطعتين من العلبة معا عشوائيا. فما احتمال أن يختار قطعتين بالشوكولا ؟

$$ل(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(ف)} = \frac{{}_٤ن_٢}{{}_{١٢}ن_٢} = \frac{\frac{!٤}{!٢\,!(٢-٤)}}{\frac{!١٢}{!٢\,!(٢-١٢)}} = \frac{٦}{٦٦} = \frac{١}{١١}$$

معلق

- ما احتمال اختيار قطعتي حلوى عشوائيا ليستا بالشوكولاتة ؟

$$ل(ب) = \frac{ن(ب)}{ن(ف)} = \frac{{}_٨ن_٢}{{}_{١٢}ن_٢} = \frac{\frac{!٨}{!٢\,!(٢-٨)}}{\frac{!١٢}{!٢\,!(٢-١٢)}} = \frac{٢٨}{٦٦} = \frac{١٤}{٣٣}$$

العمليات على الأحداث واحتمالاتها:

تقاطع حدثين أ ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ ، ب في آن معا ويرمز إليه بـ $أ \cap ب$.

اتحاد حدثين أ ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ أو ب ويرمز إليه بـ $أ \cup ب$.

الحدثان أ ، ب هما متنافيان إذا لم يشتركا في أي عنصر أي $أ \cap ب = \varnothing$

متمم الحدث أ هو $\overline{أ}$ الذي يتألف من كل النواتج الموجودة في فضاء العينة وغير الموجودة في أ .

صفوة معلمي الكويت

قاعدة الاحتمال لا تحاد حدثين

$$ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب)$$
$$\Leftarrow ل(أ \cap ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cup ب)$$

قاعدة الاحتمال لمتمم الحدث أ

$$ل(\overline{أ}) = 1 - ل(أ)$$

قاعدة الاحتمال لحدثين متنافيين

إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف فإن: $ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب)$

Q إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف وكان:
$ل(أ) = 0,7$ ، $ل(ب) = 0,4$ ، $ل(أ \cap ب) = 0,4$ أوجد كلا من: $ل(أ \cup ب)$ ، $ل(\overline{أ})$

$ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب) = 0,7 + 0,4 - 0,4 = 0,7$

$ل(\overline{أ}) = 1 - ل(أ) = 1 - 0,7 = 0,3$

Q إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف وكان:
$ل(أ) = 0,3$ ، $ل(ب) = 0,5$ ، $ل(أ \cup ب) = 0,6$ أوجد كلا من: $ل(أ \cap ب)$ ، $ل(\overline{ب})$

$ل(أ \cap ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cup ب) = 0,3 + 0,5 - 0,6 = 0,2$

$ل(\overline{ب}) = 1 - ل(ب) = 1 - 0,5 = 0,5$

Q إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف وكان:
$ل(أ) = 0,2$ ، $ل(أ \cup ب) = 0,9$ ، $ل(أ \cap ب) = 0,4$ أوجد كلا من: $ل(\overline{أ \cap ب})$ ، $ل(\overline{ب})$

$ل(\overline{أ}) = 0,2 \Leftarrow ل(أ) = 1 - 0,2 = 0,8$

$ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب)$

$0,9 = 0,8 + ل(ب) - 0,4$

$\Leftarrow ل(ب) = 0,9 - 0,4 = 0,5$

$\therefore ل(\overline{ب}) = 1 - ل(ب) = 1 - 0,5 = 0,5$

$ل(\overline{أ \cap ب}) = 1 - ل(أ \cap ب) = 1 - 0,4 = 0,6$

Q إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة وكان:
$ل(أ) = 0,5$ ، $ل(ب) = 0,6$ ، $ل(أ \cap ب) = 0,2$ أوجد: $ل(\overline{أ \cup ب})$

$ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب) = 0,5 + 0,6 - 0,2 = 0,9$

$\therefore ل(\overline{أ \cup ب}) = 1 - ل(أ \cup ب) = 1 - 0,9 = 0,1$

Q في فضاء عينة ف لدينا حدثان أ ، ب متنافيان حيث: $ل(أ) = 0,4$ ، $ل(ب) = 0,5$
احسب $ل(أ \cup ب)$ ، $ل(\overline{أ \cup ب})$

$ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) = 0,4 + 0,5 = 0,9$

$ل(\overline{أ \cup ب}) = 1 - ل(أ \cup ب) = 1 - 0,9 = 0,1$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

الأحداث المستقلة

إذا كان ا ، ب حدثين مستقلين فإن احتمال وقوع الحدثين معا هو:

$$ل(ا \cap ب) = ل(ا) \times ل(ب)$$

س قام أحمد بتطوير قاعدة باستخدام الآلة الحاسبة البيانية لإنتاج أرقام عشوائية من ٠ إلى ٩ فما احتمال أن يكون الرقم الأول الذي حصل عليه زوجيا وأن يكون الرقم الثاني مضاعفا لـ ٣ ؟

ا = {٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨} ب = {٣ ، ٦ ، ٩}

∵ ا ، ب مستقلان ∴ ل(ا ∩ ب) = ل(ا) × ل(ب) = $\frac{٥}{١٠} \times \frac{٣}{١٠}$ = ٠,١٥

س في تجربة عشوائية عند رمي قطعة نقود ثلاث مرات وملاحظة الوجه العلوي.
(ص ، ك ، ص) ما احتمال أن يكون الناتج؟

ا الرمية الأولي صورة
ب الرمية الثانية كتابة
ج الرمية الثالثة صورة

∵ ا ، ب ، ج أحداث مستقلة

∴ ل(ا ∩ ب ∩ ج) = ل(ا) × ل(ب) × ل(ج) = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٨}$

س إذا كان ا ، ب حدثين مستقلين وكان ل(ا) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٤ أوجد كلا من:

ل(ا ∩ ب) = ل(ا) × ل(ب) = ٠,٣ × ٠,٤ = ٠,١٢

ل($\overline{ا}$) = ١ − ل(ا) = ١ − ٠,٣ = ٠,٧

ل(ا ∪ ب) = ل(ا) + ل(ب) − ل(ا ∩ ب) = ٠,٣ + ٠,٤ − ٠,١٢ = ٠,٥٨

الحدث التابع

يكون الحدث تابعا عندما يتأثر ظهوره بحدث سابق.

الشجرة البيانية

س لدينا ٥ كرات حمراء و ٣ كرات زرقاء في كيس في تجربة عشوائية سحبت كرتان على التوالي بدون إرجاع، ما احتمال الحصول على كرتين حمراوين؟

س تحتوي علبة حلوى على ١٢ قطعة، ٤ منها بنكهة شوكولاته والباقي بنكهة الحليب فما احتمال أخذ قطعة بنكهة شوكولاتة وأكلها، ثم أخذ قطعة بنكهة الحليب؟

ش: قطعة شوكولا
ح: قطعة حليب

معلق
صفوة معلمي الكويت

الاحتمال المشروط

إذا كان وقوع الحدث ب مشروطا بوقوع الحدث ا فإن:

$$ل(ب \mid ا) = \frac{ل(ا \cap ب)}{ل(ا)} \quad \text{حيث : } ل(ا) \neq ٠ \qquad \text{وكذلك } ل(ا \cap ب) = ل(ا) \times ل(ب \mid ا)$$

Q في تجربة عشوائية ا ، ب حدثان حيث: $ل(ا) = ٠,٣$ ، $ل(ب) = ٠,٦$ ، $ل(ا \cap ب) = ٠,٢$ أوجد كلا من:
$ل(ب \mid ا)$ ، $ل(ا \mid ب)$

$$ل(ب \mid ا) = \frac{ل(ا \cap ب)}{ل(ا)} = \frac{٠,٢}{٠,٣} = \frac{٢}{٣}$$

$$ل(ا \mid ب) = \frac{ل(ب \cap ا)}{ل(ب)} = \frac{٠,٢}{٠,٦} = \frac{١}{٣}$$

Q في تجربة عشوائية ا ، ب حدثان حيث: $ل(ا) = ٠,٣$ ، $ل(ب \mid ا) = ٠,٢$ أوجد كلا من: $ل(ا \cap ب)$

$$ل(ب \mid ا) = \frac{ل(ا \cap ب)}{ل(ا)}$$

$$\frac{٠,٢}{١} = \frac{ل(ا \cap ب)}{٠,٣} \Leftarrow ل(ا \cap ب) = ٠,٢ \times ٠,٣ = ٠,٠٦$$

Q رمى جاسم حجر نرد منتظما ولاحظ الوجه العلوي له نسمي الحدث ب :"الحصول على عدد أكبر من أو يساوي ٥"
الحدث ا : "الحصول على عدد فردي"
أحسب $ل(ب \mid ا)$ "احتمال ظهور عدد أكبر من أو يساوي ٥ بشرط أن يكون عددا فرديا"

$ف = \{١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦\}$

$ب = \{٥، ٦\}$ $\quad ل(ب) = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

$ا = \{١، ٣، ٥\}$ $\quad ل(ا) = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

$ا \cap ب = \{٥\}$ $\quad ل(ا \cap ب) = \frac{١}{٦}$

$$ل(ب \mid ا) = \frac{ل(ا \cap ب)}{ل(ا)} = \frac{\left(\frac{١}{٦}\right)}{\left(\frac{١}{٢}\right)} = \frac{١}{٦} \times \frac{٢}{١} = \frac{١}{٣}$$

Q في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم إذا كان الحدث ب "الحصول على عدد زوجي" ، والحدث ا "الحصول على عدد أولي" فاحسب $ل(ب \mid ا)$

$ف = \{١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦\}$

$ا = \{٢، ٣، ٥\}$ $\quad ل(ا) = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

$ب = \{٢، ٤، ٦\}$ $\quad ل(ب) = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

$ا \cap ب = \{٢\}$ $\quad ل(ا \cap ب) = \frac{١}{٦}$

$$ل(ب \mid ا) = \frac{ل(ا \cap ب)}{ل(ا)} = \frac{\left(\frac{١}{٦}\right)}{\left(\frac{١}{٢}\right)} = \frac{١}{٦} \times \frac{٢}{١} = \frac{١}{٣}$$

صفوة معلمي الكويت

اختر الإجابة الصحيحة:

١. إذا كان أ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٢، ل(ب) = ٠,٥ فإن ل(أ ∪ ب) =

- ○ ٠,٥
- ○ ٠,٧
- ○ ٠,٨
- ● ٠,٦

٢. إذا كان أ، ب حدثين في فضاء العينة وكان ل(أ) = ٠,٧، ل(ب) = ٠,٥ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٨
فإن ل(أ ∩ ب) =

- ○ ٠,٢
- ● ٠,٤
- ○ ٠,٦
- ○ ١,٢

٣. إذا كان أ، ب حدثين مستقلين في فضاء العينة وكان ل(أ) = ٠,٦، ل(ب) = ٠,٤ فإن ل(أ | ب) =

- ● ٠,٦
- ○ ٠,٤
- ○ ٠,٢
- ○ ١

تـدرب و تـفـوق
اختبارات الكترونية ذكية

صفوة معلمي الكويت