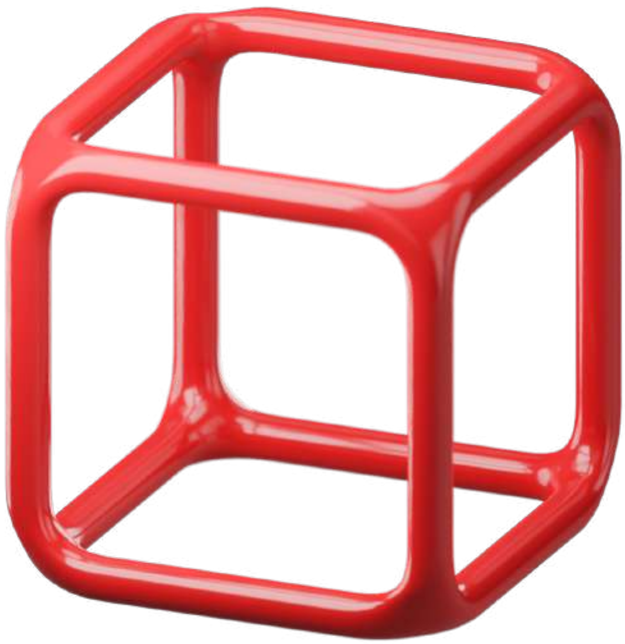
الرياضيات

الكورس الأول

12

2024 - 2023
UULA.COM
UULA



الرياضيات

الكورس الأول

12

2024 - 2023

UULA.COM

UULA

حقق هدفك الدراسي

ريح بالك وارفع مستوى دراستك مع المذكرة الشاملة والفيديوهات
اللي تشرحها والاختبارات اللي تدربك في منصة علا

نخبة المعلمين يجاوبونك بأسرع وقت

ما فهمت؟ تواصل مع أقوى المعلمين واحصل على شرح لسؤالك

دروس يشرحها أقوى معلمي الكويت

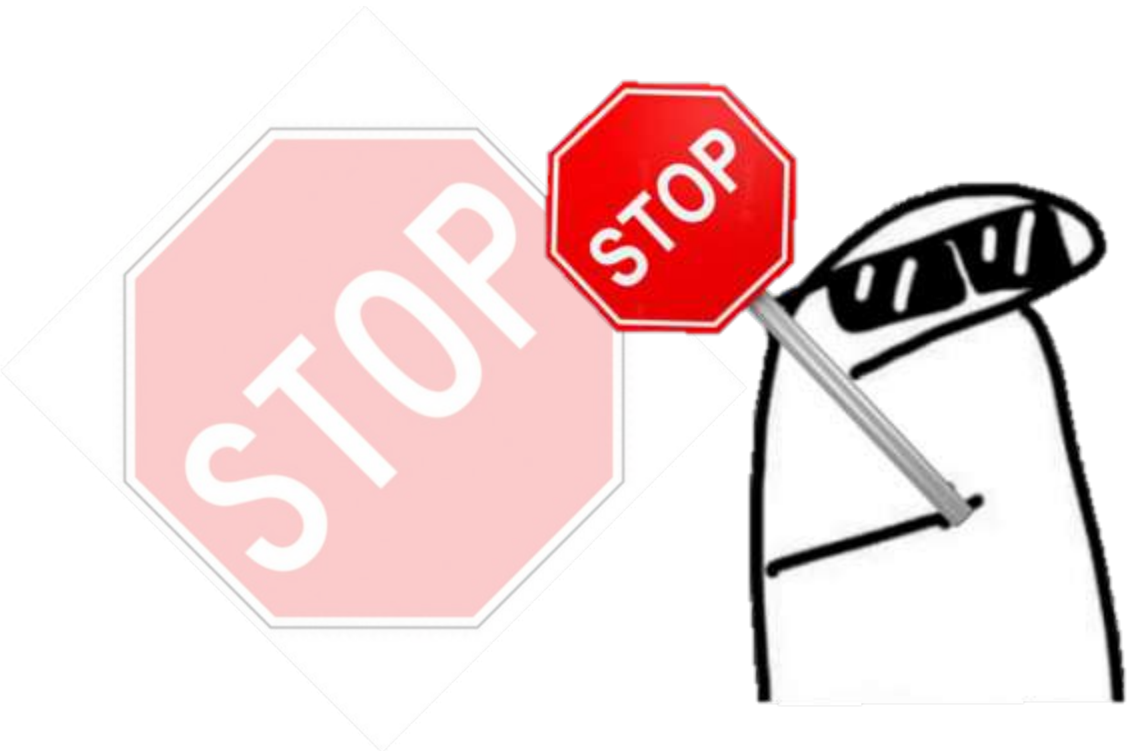
فيديوهات مبسطة قصيرة تشرح لك كل شيء خطوة بخطوة

تفوق في القصير والفاينل مع نماذج اختبارات سابقة

نماذج اختبارات سابقة مشروحة بالكامل تجهزك لاختباراتك

اكتشف عالم التفوق مع منصة علا

لتشترك بالمادة وتستمتع بالشرح المميز صور
أو اضغط على رمز الQR



قبل لا تكمل تأكد من هذه الروابط المهمة

حل كراسة التمارين

التمارين الموضوعية

المعلق والتغييرات

هذه المذكرة تغطي المادة كاملة. في حال وجود أي تغيير للمنهج أو تعليق جزء منه يمكنك تصوير الQR للتأكد من المقرر.

قائمة المحتوى

01 **النهايات و الاتصال**

النهايات 5
نهايات تشتمل على $\pm\infty$ 18
صيغ غير معينة 22
نهايات بعض الدوال المثلثية 27
الاتصال 31
نظريات الاتصال 36
الاتصال على فترة 42

02 **الاشتقاق**

المشتقة 52
قواعد الاشتقاق 67
مشتقات الدوال المثلثية 75
قاعدة السلسلة 79
المشتقات ذات الرتب العليا 85

03 **تطبيقات على الاشتقاق**

القيم القصوى (العظمى والصغرى) للدوال 90
تزايد وتناقص الدوال 98
ربط المشتقة الأولى f' و المشتقة الثانية f'' بمنحى الدالة f 104
رسم بيان دوال كثيرات الحدود 110
تطبيقات على القيم القصوى 121

04 **الإحصاء**

التقدير 126
اختبارات الفروض الإحصائية 131

النهايات

تعريف 1

لتكن x كمية متغيرة، c عدداً حقيقياً , نقول أن x تقترب من c باطراد، إذا كان بالإمكان جعل الكمية $|x-c|$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب

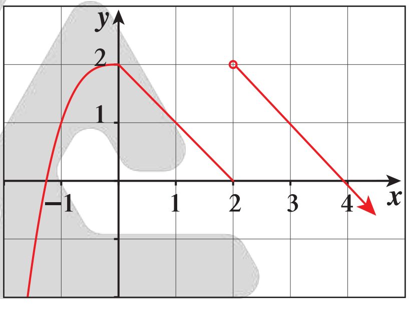
تعريف 2

ليكن c , L عددين حقيقيين ، f دالة حقيقية معرفة في جوار أو جوار ناقص للعددc نكتب : $\lim_{x\to c} f(x) = L$ وتعني أنه عندما تقترب x من c باطراد، $x \neq c$ فإنه قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L

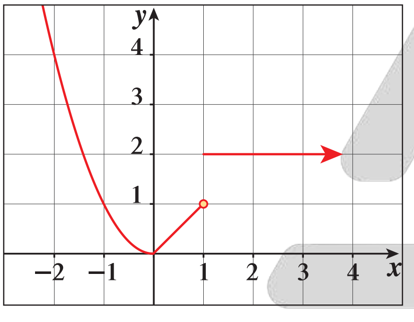
نظرية 1

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to c^+} f(x) = L = \lim_{x\to c^-} f(x)$$

الشكل المقابل يمثل بيان الدالة $f(x)$ أوجد إن أمكن:



- $\lim_{x\to -1} f(x) = 1$
- $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$
- $\lim_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة
- $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$



- $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
- $\lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة
- $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$
- $\lim_{x\to -2} f(x) = 4$

نظرية 2

إذا كانت $f(x) = k$ دالة وكان c,k عددين حقيقيين فإن:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} k = k$$

نظرية 3

إذا كانت $f(x) = x$ دالة وكان c عدداً حقيقياً فإن:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} x = c$$

نظرية 4

إذا كانت: $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة و $\lim_{x\to c} g(x)$ موجودة فإن:

- $\lim_{x\to c} \left(k.g(x)\right) = k. \lim_{x\to c} g(x)$
- $\lim_{x\to c} \left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$
- $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$: $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$
- $\lim_{x\to c} \left(f(x)\times g(x)\right) = \lim_{x\to c} f(x)\times \lim_{x\to c} g(x)$

بفرض : $\lim_{x\to1} f(x) = -2 , \lim_{x\to1} g(x) = 5$ أوجد :

Q $\lim_{x\to1}\big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to1} f(x) - \lim_{x\to1} g(x) = (-2) - (5) = -7$

Q $\lim_{x\to1} \frac{2f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to1}\big(2f(x)\big)}{\lim_{x\to1} g(x)} = \frac{2\lim_{x\to1} f(x)}{\lim_{x\to1} g(x)} = \frac{2(-2)}{5} = -\frac{4}{5}$

شرط المقام: $\lim_{x\to1} g(x) = 5 \quad , 5 \neq 0$

Q $\lim_{x\to1} \frac{g(x)+4}{f(x).g(x)}$

$= \frac{\lim_{x\to1}(g(x)+4)}{\lim_{x\to1}\big(f(x).g(x)\big)} = \frac{\lim_{x\to1} g(x) + \lim_{x\to1} 4}{\lim_{x\to1} f(x). \lim_{x\to1} g(x)} = \frac{5+4}{-10} = -\frac{9}{10}$

شرط المقام: $\lim_{x\to1}\big(f(x).g(x)\big) =$

$\lim_{x\to1} f(x). \lim_{x\to1} g(x) =$

$(-2)\times(5) = -10 , -10 \neq 0$

بفرض : $\lim_{x\to2} f(x) = 7 , \lim_{x\to2} g(x) = -3$ أوجد :

Q $\lim_{x\to2}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to2} f(x) + \lim_{x\to2} g(x) = 7 + (-3) = 4$

Q $\lim_{x\to2}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to2} f(x) \cdot \lim_{x\to2} g(x) = (7)\times(-3) = -21$

Q $\lim_{x\to2} \left(\frac{8f(x)\cdot g(x)}{f(x)+g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to2}\big(8f(x)\cdot g(x)\big)}{\lim_{x\to2}\big(f(x)+g(x)\big)} = \frac{8\lim_{x\to2} f(x) \cdot \lim_{x\to2} g(x)}{\lim_{x\to1} f(x) + \lim_{x\to1} g(x)}$

$= \frac{8\times7\times(-3)}{4} = -42$

شرط المقام:

$\lim_{x\to2}(f(x) + g(x)) =$

$\lim_{x\to2} f(x) + \lim_{x\to2} g(x) =$

$7 + (-3) = 4 \ , 4 \neq 0$

نظرية 5

إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة حدود ، c عدداً حقيقياً فإن: $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

إذا كانت $f(x) , g(x)$ كثيرتي حدود ، c عدداً حقيقياً فإن: $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} \ , g(c) \neq 0$

أوجد :

Q $\lim_{x\to-1}(x^4 - 2x^3 + 5) = (-1)^4 - 2(-1)^3 + 5 = 8$

Q $\lim_{x\to1}(x^3 + 3x^2 - 2x - 17) = (1)^3 + 3(1)^2 - 2(1) - 17 = -15$

Q $\lim_{x\to3}(x^2(2-x)) = \lim_{x\to3}(2x^2 - x^3) = 2(3)^2 - (3)^3 = -9$

Q $\lim_{x\to2} \frac{x^2+5x+6}{x+2} = \frac{(2)^2 + 5(2) + 6}{4} = 5$

شرط المقام: $\lim_{x\to2}(x+2) = 2 + 2 = 4 , 4 \neq 0$

Q $\lim_{x\to2} \frac{x^2+2x+4}{x+2} = \frac{(2)^2 + 2(2) + 4}{4} = 3$

شرط المقام: $\lim_{x\to2}(x+2) = 2 + 2 = 4 , 4 \neq 0$

حساب النهايات من جهة واحدة:

Q أوجد إن أمكن: $\lim_{x\to1} f(x)$

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & : x<1\\ 5 & : x=1\\ \frac{5}{x} & : x>1\end{cases}$$

$3x+2$ $\quad$ 1 $\quad$ $\frac{5}{x}$

$\lim_{x\to1^-} f(x)=$

$\lim_{x\to1^-}(3x+2)=3(1)+2=5$

$\lim_{x\to1^+} f(x)=$

$\lim_{x\to1^+}\frac{5}{x}=\frac{5}{1}=5$

شرط المقام

$\lim_{x\to1^+} x=1 \quad ,1\neq0$

$\because \lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)=5 \quad \therefore \lim_{x\to1} f(x)=5$

Q $f(x)=\begin{cases}x^2-3 & : x<2\\ x-1 & : x>2\end{cases}$ أوجد إن أمكن $\lim_{x\to2} f(x)$:

x^2-3 $\quad$ 2 $\quad$ $x-1$

$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}(x^2-3)=2^2-3=1$

$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}(x-1)=2-1=1$

$\because \lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^+} f(x)=1 \quad \therefore \lim_{x\to2} f(x)=1$

Q $g(x)=\begin{cases}x^2-2 & : x\leq0\\ 1-2x & : x>0\end{cases}$ أوجد إن أمكن $\lim_{x\to0} g(x)$:

x^2-2 $\quad$ 0 $\quad$ $1-2x$

$\lim_{x\to0^-} g(x)$

$=\lim_{x\to0^-}(x^2-2)=0^2-2=-2$

$\lim_{x\to0^+} g(x)$

$=\lim_{x\to0^+}(1-2x)=1-2(0)=1$

$\because \lim_{x\to0^-} g(x)\neq\lim_{x\to0^+} g(x) \quad \therefore \lim_{x\to0} g(x)$ غير موجودة

Q $g(x)=\begin{cases}x^3+x & : x>1\\ \frac{x}{x^2+1} & : x\leq1\end{cases}$ ،أوجد إن أمكن $\lim_{x\to1} g(x)$:

$\frac{x}{x^2+1}$ $\quad$ 1 $\quad$ x^3+x

$\lim_{x\to1^-} g(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}$

شرط المقام:

$\lim_{x\to1^-}(x^2+1)=2, \quad 2\neq0$

$\lim_{x\to1^+} g(x)=\lim_{x\to1^+}(x^3+x)$

$=(1)^3+1=2$

$\because \lim_{x\to1^+} g(x)\neq\lim_{x\to1^-} g(x) \quad \therefore \lim_{x\to1} g(x)$ غير موجودة

نهايات دوال تحتوي على قيمة مطلقة:

مراجعة: إعادة تعريف القيمة المطلقة

$|x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$

$|x-8| = \begin{cases} x-8 & : x \geq 8 \\ -x+8 & : x < 8 \end{cases}$

$|2x+6| = \begin{cases} 2x+6 & : x \geq -3 \\ -2x-6 & : x < -3 \end{cases}$

لتكن الدالة : $f(x) = |x-3| + 2x$

- اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة
- أوجد $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$
- هل للدالة f نهاية عندما $x \to 3$ ؟

$$f(x) = \begin{cases} x-3+2x & : x \geq 3 \\ -x+3+2x & : x < 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3x-3 & : x \geq 3 \\ x+3 & : x < 3 \end{cases}$$

3

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(x+3) = 3+3 = 6$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}(3x-3) = 3(3)-3 = 6$$

$$\because \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = 6 \quad \therefore \lim_{x\to 3} f(x) = 6$$

لتكن الدالة: $f(x) = x^2 - |x+2|$

- اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة
- أوجد $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$
- هل للدالة f نهاية عندما $x \to -2$ ؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2-(x+2) & : x \geq -2 \\ x^2-(-x-2) & : x < -2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2-x-2 & : x \geq -2 \\ x^2+x+2 & : x < -2 \end{cases}$$

x^2+x+2 $\qquad$ x^2-x-2

-2

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-}(x^2+x+2) = (-2)^2+(-2)+2 = 4$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+}(x^2-x-2) = (-2)^2-(-2)-2 = 4$$

$$\because \lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^-} f(x) = 4 \quad \therefore \lim_{x\to -2} f(x) = 4$$

نظرية 6 : بفرض $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة ، n عدداً صحيحاً موجباً

$$\lim_{x\to c}(f(x))^n = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)^n$$

$$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$$ في حالة n عدد زوجي يشترط أن يكون $c>0$

$$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$$ في حالة n عدد زوجي يشترط أن يكون $\lim_{x\to c} f(x) > 0$

أوجد :

Q $\lim_{x\to -1}(x^2-3x-1)^5 = \left(\lim_{x\to -1}(x^2-3x-1)\right)^5 = \left((-1)^2-3(-1)-1\right)^5 = 243$

دوال جذرية بسيطة:

Q $\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{0} = 0$

Q $\lim_{x\to -2}\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-2}$

Q $\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{4}$

Q $\lim_{x\to 25}\sqrt{x} = \sqrt{25} = 5$ شرط الجذر: $25>0$

Q $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x-3} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 2}(x-3)} = \sqrt[3]{(2-3)} = -1$

Q $\lim_{x\to 5}\sqrt{x^2-5} = \sqrt{\lim_{x\to 5}(x^2-5)} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

شرط الجذر: $\lim_{x\to 5}(x^2-5) = (5)^2-5 = 20,\quad 20>0$

أوجد :

Q $\lim_{x\to 4}(x+\sqrt{x})^4 = \left(\lim_{x\to 4}x + \lim_{x\to 4}\sqrt{x}\right)^4 = (4+\sqrt{4})^4 = 1296$ شرط الجذر: $4>0$:

Q $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x^2-2}}{x-2} = \frac{\lim_{x\to 3}\sqrt{3x^2-2}}{\lim_{x\to 3}(x-2)} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to 3}(3x^2-2)}}{\lim_{x\to 3}(x-2)} = \frac{\sqrt{25}}{1} = 5$

شرط الجذر:

$\lim_{x\to 3}(3x^2-2) = 3(3)^2-2 = 25,\ 25>0$

شرط المقام:

$\lim_{x\to 3}(x-2) = 3-2 = 1,\quad 1\neq 0$

Q $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x^3-4x+5}}{x-2} = \frac{\lim_{x\to -1}\sqrt[3]{x^3-4x+5}}{\lim_{x\to -1}(x-2)} = \frac{\sqrt[3]{\lim_{x\to -1}(x^3-4x+5)}}{\lim_{x\to -1}(x-2)} = \frac{\sqrt[3]{(-1)^3-4(-1)+5}}{-3} = -\frac{2}{3}$

شرط المقام:

$\lim_{x\to -1}(x-2) = (-1)-2 = -3 : -3\neq 0$

إلغاء العامل الصفري في المقام

مراجعة: تحليل كثيرات الحدود من الدرجة الثانية:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Q $(x+3)^2$

$= (x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2 = x^2 + 6x + 9$

Q $(x-5)^2$

$= (x)^2 - 2(x)(5) + (5)^2 = x^2 - 10x + 25$

$ax^2 + bx + c$

Q $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

Q $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$

Q $t^2 - 3t + 2 = (t-2)(t-1)$

Q $x^2 - x = x(x-1)$

Q $x^2 + 7x = x(x+7)$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Q $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

Q $x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$

Q $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

أوجد :

Q $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$

بالتعويض عن $x = 1$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \frac{\overset{(1)}{\cancel{(x-1)}}(x+2)}{x\cancel{(x-1)}} = \frac{x+2}{x} \quad : x \neq 1$$

شرط المقام:

$\lim\limits_{x\to 1} x = 1, \quad 1 \neq 0$

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = 3$$

Q $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

بالتعويض عن $x = -2$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2-4} = \frac{(x+1)\overset{(1)}{\cancel{(x+2)}}}{(x-2)\cancel{(x+2)}} = \frac{x+1}{x-2} \quad : x \neq -2$$

شرط المقام

$\lim\limits_{x\to -2} (x-2) = (-2) - 2 = -4: \ -4 \neq 0$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x+1}{x-2} = \frac{(-2)+1}{-4} = \frac{1}{4}$$

من كراسة التمارين:

12. $\lim\limits_{t\to 2} \frac{t^2-3t+2}{t^2-4}$

بالتعويض عن t بـ 2 نحصل على صيغة غير معينة

$$f(t) = \frac{t^2-3t+2}{t^2-4} = \frac{\overset{(1)}{\cancel{(t-2)}}(t-1)}{\cancel{(t-2)}(t+2)} = \frac{t-1}{t+2} \quad : t \neq 2$$

نهاية المقام:

$\lim\limits_{t\to 2}(t+2) = 2+2 = 4 \neq 0$

$$\therefore \lim_{t\to 2} f(t) = \lim_{t\to 2} \frac{t-1}{t+2} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

أوجد :

$\lim_{x\to-7}\frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x}$

بالتعويض عن $x=-7$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x)=\frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x}=\frac{(x+4)^2-3^2}{x^2+7x}=\frac{(x+4-3)(x+4+3)}{x(x+7)}$$

$$=\frac{(x+1)\cancel{(x+7)}}{x\cancel{(x+7)}}=\frac{x+1}{x}\quad : x\neq-7$$

$$\lim_{x\to-7}f(x)=\lim_{x\to-7}\frac{x+1}{x}=\frac{(-7)+1}{-7}=\frac{6}{7}$$

شرط المقام:

$\lim_{x\to-7}x=-7\quad ,-7\neq0$

من كراسة التمارين:

11. $\lim_{x\to0}\frac{(4+x)^2-16}{x}$

بالتعويض عن x بـ 0 في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x)=\frac{(4+x)^2-16}{x}=\frac{(4+x+4)\cancel{(4+x-4)}}{\cancel{x}}=8+x\qquad x\neq0$$

$$\therefore \lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(8+x)=8+0=8$$

مراجعة: تحليل كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$x^3-8\qquad =x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+2^2)=(x-2)(x^2+2x+4)$

$x^3+8\qquad =x^3+2^3=(x+2)(x^2-2x+2^2)=(x+2)(x^2-2x+4)$

أوجد :

$\lim_{x\to0}\frac{(2+x)^3-8}{x}$

بالتعويض عن $x=0$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x)=\frac{(2+x)^3-8}{x}=\frac{(2+x-2)((2+x)^2+2(2+x)+2^2)}{x}$$

$$=\frac{\cancel{x}((2+x)^2+2(2+x)+4)}{\cancel{x}}=(2+x)^2+2(2+x)+4\qquad : x\neq0$$

$$\therefore \lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}[(2+x)^2+2(2+x)+4]$$

$$=\left(\lim_{x\to0}(2+x)\right)^2+2\lim_{x\to0}(2+x)+\lim_{x\to0}4=(2+0)^2+2(2+0)+4=12$$

من كراسة التمارين :

13. $\lim_{x\to0}\frac{(3+x)^3-27}{x}$

مسائل القيمة المطلقة:

أوجد :

$\lim_{x\to1}\frac{|x-1|}{x^2-1}$

بالتعويض عن $x=1$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x)=\frac{|x-1|}{x^2-1^2}=\begin{cases}\frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x+1)}=\frac{1}{x+1} & x>1 \quad : x\neq1\\ \frac{\cancel{-x+1}}{(\cancel{x-1})(x+1)}=\frac{-1}{x+1} & x<1 \quad : x\neq1\end{cases}$$

$\frac{-1}{x+1}$ | 1 | $\frac{1}{x+1}$

$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{-1}{x+1}=-\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to1^-}(x+1)=2\ ,2\neq0$ شرط المقام

$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to1^+}(x+1)=2\ ,2\neq0$ شرط المقام

$\because \lim_{x\to1^-}f(x)\neq\lim_{x\to1^+}f(x) \quad \therefore \lim_{x\to1}f(x)$ غير موجودة

$\lim_{x\to5}\frac{|x+2|-7}{x^2-25}$

بالتعويض عن $x=5$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\cancel{x+2-7}}{(\cancel{x-5})(x+5)}=\frac{1}{x+5} & x\geq-2 \quad (x\neq5)\\ \frac{-x-2-7}{(x-5)(x+5)}=\frac{-x-9}{(x-5)(x+5)} & x<-2\end{cases}$$

$\frac{-x-9}{(x-5)(x+5)}$ | -2 | $\frac{1}{x+5}$

$\lim_{x\to5}f(x)=\lim_{x\to5}\frac{1}{x+5}=\frac{1}{10}$ شرط المقام

$\lim_{x\to5}(x+5)=10\ ,\quad 10\neq0$

مراجعة: الضرب بمرافق الجذر التربيعي

$(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})=(3)^2-(\sqrt{x})^2=9-x$

$(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)=(\sqrt{x})^2-(1)^2=x-1$

$(\sqrt{2x-3}-1)(\sqrt{2x-3}+1)=(\sqrt{2x-3})^2-(1)^2=2x-3-1=2x-4$

مسائل الجذر التربيعي :

أوجد :

Q $\lim\limits_{x\to 9} \frac{x-9}{3-\sqrt{x}}$

بالتعويض عن $x=9$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x)=\frac{x-9}{3-\sqrt{x}}\times\frac{3+\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}=\frac{\overset{(-1)}{\cancel{(x-9)}}(3+\sqrt{x})}{\cancel{9-x}}=-3-\sqrt{x} \qquad x\neq 9$$

$$\lim_{x\to 9} f(x)=\lim_{x\to 9}(-3-\sqrt{x})=\lim_{x\to 9}(-3)-\lim_{x\to 9}\sqrt{x}=(-3)-\sqrt{9}=-6$$

شرط الجذر $9>0$

Q $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$

بالتعويض عن $x=2$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}\times\frac{\sqrt{2x-3}+1}{\sqrt{2x-3}+1}=\frac{2x-3-1}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}=\frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$$=\frac{2\overset{(1)}{\cancel{(x-2)}}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{2x-3}+1)}=\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1} \qquad x\neq 2$$

شرط الجذر:

$$\lim_{x\to 2}(2x-3)=2(2)-3=1 \quad ,1>0$$

شرط المقام:

$$\lim_{x\to 2}(\sqrt{2x-3}+1)=\lim_{x\to 2}\sqrt{2x-3}+\lim_{x\to 2}1$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to 2}(2x-3)}+\lim_{x\to 2}1=\sqrt{1}+1=2 \quad ,2\neq 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2} 2}{\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{2x-3}+1)}=\frac{2}{2}=1$$

Q $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$

بالتعويض عن $x=2$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}=\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}\times\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2-(3)^2}{(x^2-2x)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$=\frac{x^2+5-9}{(x^2-2x)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\frac{x^2-4}{(x^2-2x)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\frac{\overset{(1)}{\cancel{(x-2)}}(x+2)}{x\cancel{(x-2)}(\sqrt{x^2+5}+3)} \quad : x\neq 2$$

$$=\frac{x+2}{x(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

شرط الجذر:

$$\lim_{x\to 2}(x^2+5)=2^2+5=9 \quad ,9>0$$

شرط المقام:

$$\lim_{x\to 2} x\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)=$$

$$\lim_{x\to 2} x\left(\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2+5}+\lim_{x\to 2}3\right)=$$

$$\lim_{x\to 2} x\left(\sqrt{\lim_{x\to 2}(x^2+5)}+\lim_{x\to 2}3\right)=$$

$$2(\sqrt{9}+3)=12 \quad ,12\neq 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}\left(x(\sqrt{x^2+5}+3)\right)}$$

$$=\frac{2+2}{12}=\frac{1}{3}$$

مسائل الجذر التكعيبي:

تذكر:

$$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$
$$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$$

أوجد :

Q $\lim\limits_{x\to1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

بالتعويض عن $x = 1$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - (1)^3}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{\cancel{(\sqrt[3]{x}-1)}\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1^2\right)}{\cancel{\sqrt[3]{x}-1}} = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1 \qquad : x \neq 1$$

(1)

$$\therefore \lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1\right) = \lim_{x\to1}\sqrt[3]{x^2} + \lim_{x\to1}\sqrt[3]{x} + \lim_{x\to1} 1$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{x\to1} x^2} + \sqrt[3]{\lim_{x\to1} x} + 1 \quad = \sqrt[3]{(1)^2} + \sqrt[3]{1} + 1 = 3$$

Q $\lim\limits_{x\to-1} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$

بالتعويض عن $x = -1$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}} = \sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x+1}} = \sqrt[3]{\frac{\cancel{(x+1)}(x^2 - x + 1^2)}{\cancel{x+1}}} \quad = \sqrt[3]{x^2 - x + 1} \qquad : x \neq -1$$

$$\therefore \lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1}\sqrt[3]{x^2 - x + 1} \quad = \sqrt[3]{\lim_{x\to-1}(x^2 - x + 1)} = \sqrt[3]{(-1)^2 - (-1) + 1}$$

$$= \sqrt[3]{3} \approx 1.44$$

Q $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}$

بالتعويض عن $x = -2$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}} = \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}} \times \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} = \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\cancel{x+2}} = (x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2}$$

$: x \neq -2$

$$\therefore \lim_{x\to-2} f(x) = \lim_{x\to-2}\left((x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2}\right) = \lim_{x\to-2}(x-2) \times \lim_{x\to-2}\sqrt[3]{(x+2)^2} =$$

$$= \lim_{x\to-2}(x-2) \times \sqrt[3]{\left(\lim_{x\to-2}(x+2)\right)^2} = (-2-2) \times \sqrt[3]{(-2+2)^2} = 0$$

مسائل القسمة التركيبية:

أوجد :

Q $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}$

بالتعويض عن $x=-1$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

-1	1	6	2	-3
	$\downarrow$	-1	-5	3
	1	5	-3	0
	x^2	x		

$$\therefore f(x)=\frac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}=x^2+5x-3 \quad : x\neq -1$$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(x^2+5x-3)$$

$$=(-1)^2+5(-1)-3=-7$$

Q $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-2x^2-4x+3}{x-3}$

بالتعويض عن $x=3$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

3	1	-2	-4	3
	$\downarrow$	3	3	-3
	1	1	-1	0
	x^2	x		

$$\therefore f(x)=\frac{x^3-2x^2-4x+3}{x-3}=x^2+x-1 \quad : x\neq 3$$

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}(x^2+x-1)$$

$$=(3)^2+(3)-1=11$$

Q $\lim\limits_{x\to 2} \frac{-x^5+x^3+x+22}{x-2}$

بالتعويض عن $x=2$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

2	-1	0	1	0	1	22
	$\downarrow$	-2	-4	-6	-12	-22
	-1	-2	-3	-6	-11	0
	x^4	x^3	x^2	x		

$$\therefore f(x)=\frac{-x^5+x^3+x+22}{x-2}=$$

$$-x^4-2x^3-3x^2-6x-11 \quad : x\neq 2$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=$$

$$\lim_{x\to 2}(-x^4-2x^3-3x^2-6x-11)=$$

$$-(2)^4-2(2)^3-3(2)^2-6(2)-11=-67$$

Q $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^5+32}{x+2}$

بالتعويض عن $x=-2$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

-2	1	0	0	0	0	32
	$\downarrow$	-2	4	-8	16	-32
	1	-2	4	-8	16	0
	x^4	x^3	x^2	x		

$$\therefore f(x)=\frac{x^5+32}{x+2}=x^4-2x^3+4x^2-8x+16$$

$$: x\neq -2$$

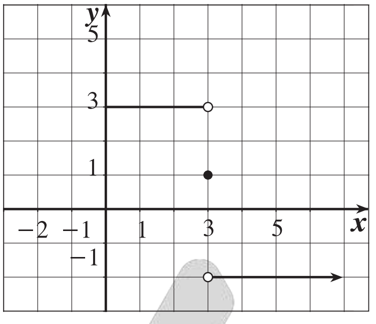
$$\lim_{x\to -2} f(x)=$$

$$\lim_{x\to -2}(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)=$$

$$(-2)^4-2(-2)^3+4(-2)^2-8(-2)+16=80$$

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -2$ (في الرسم البياني أدناه) ⓐ ⓑ



2. $\lim\limits_{y \to 2} \frac{y^2+5y+6}{y+2} = 5$ ⓐ ⓑ

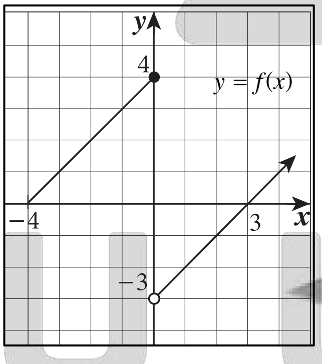
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5x^3+8x^2}{3x^4-16x^2} = 0$ ⓐ ⓑ

4. $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{x^2}-x}{x} = -2$ ⓐ ⓑ

5. $\lim\limits_{x \to 1^+} (2x - |x| + 2) = 3$ ⓐ ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. الشكل المقابل هو بيان دالة f
العبارة الصحيحة في ما يلي هي:



ⓐ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 4$ ⓑ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -3$

ⓒ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 4$ ⓓ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -3$

7. $\lim\limits_{x \to -2} (x^3 + 3x^2 - 2x - 17) =$

ⓐ 17 ⓑ -17 ⓒ 9 ⓓ -9

8. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} =$

ⓐ 1 ⓑ 0 ⓒ $\frac{1}{2}$ ⓓ غير موجودة

9. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2} =$

ⓐ 1 ⓑ 0 ⓒ $\frac{1}{2}$ ⓓ $\frac{1}{3}$

10. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} =$

ⓐ -1 ⓑ 1 ⓒ $\frac{1}{2}$ ⓓ 0

11. $\lim_{x \to 2^+} \frac{|x-2|}{x^2-4} =$

ⓐ $\frac{1}{2}$ ⓑ $-\frac{1}{2}$ ⓒ $\frac{1}{4}$ ⓓ $-\frac{1}{4}$

12. $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x} =$

ⓐ $-\frac{1}{2}$ ⓑ $\frac{1}{2}$ ⓒ $\frac{1}{4}$ ⓓ $-\frac{1}{4}$

13. $\lim_{x \to -8} \frac{x+8}{\sqrt[3]{x}+2} =$

ⓐ 12 ⓑ -12 ⓒ 4 ⓓ -4

14. $\lim_{x \to -3} \frac{2x^3+9x^2+9x}{x+3} =$

ⓐ 9 ⓑ 0 ⓒ -3 ⓓ -9

نهايات تشتمل على $\pm\infty$

أولاً: نهايات محددة عندما $x \to \pm\infty$

الدالة f معرفة على الفترة (a,∞) $\qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = L$

الدالة f معرفة على الفترة $(-\infty,a)$ $\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

نظرية 7 :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

نظرية 8 :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \,, k \in \mathbb{R} \,, n \in \mathbb{Z}^+ \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{20}{x^3} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{20}{x^3} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x^7} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x^7} = 0$$

ثانياً: نهايات غير محددة $(\pm\infty)$ عندما $x \to c$

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty \;, \qquad \lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

نظرية 9 :

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty \,, \lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty \iff \lim_{x\to c} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty \,, \lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty \iff \lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

ملاحظات:

1. إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ وكان b عدداً حقيقياً فإن $\lim_{x\to c}(f(x) + b) = \pm\infty$
2. إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ وكان
   - b عدداً حقيقياً موجباً فإن: $\lim_{x\to c}(b.f(x)) = \pm\infty$
   - b عدداً حقيقياً سالباً فإن: $\lim_{x\to c}(b.f(x)) = \mp\infty$
3. إذا كان $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$ ، $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ فإن:

$$\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = \infty \quad , \quad \lim_{x\to c}(f(x).g(x)) = \infty$$

4. إذا كان $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty$ ، $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ فإن:

$$\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to c}(f(x).\,g(x)) = +\infty$$

5. إذا كان $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$ ، $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ فإن:

$$\lim_{x\to c}(f(x).\,g(x)) = -\infty$$

نظرية 10 :

$c \in \mathbb{R}\,, \qquad n \in \mathbb{Z}^{+}$

n عدد **زوجي**

$$\lim_{x \to c} \frac{1}{(x-c)^n} = \infty$$

n عدد **فردي**

$$\lim_{x \to c^-} \frac{1}{(x-c)^n} = -\infty \qquad \lim_{x \to c^+} \frac{1}{(x-c)^n} = \infty$$

تدرب: أوجد إن أمكن كلاً مما يلي:

- $\lim_{x \to 4^-} \frac{1}{(x-4)} = \quad -\infty$
- $\lim_{x \to 4^+} \frac{1}{(x-4)} = \quad +\infty$
- $\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \quad +\infty$

- $\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{(x-2)^3} = \quad -\infty$
- $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{(x-2)^3} = \quad +\infty$
- $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^4} = \quad +\infty$

- $\lim_{x \to -5^-} \frac{1}{(x+5)^9} = \quad -\infty$
- $\lim_{x \to -5^+} \frac{1}{(x+5)^9} = \quad +\infty$
- $\lim_{x \to -5} \frac{1}{(x+5)^6} = \quad +\infty$

- $\lim_{x \to 2^+} \frac{-6}{(x-2)^3} = \lim_{x \to 2^+} \left((-6)\,\frac{1}{(x-2)^3}\right) = -\infty\,, \quad -6 < 0$

- $\lim_{x \to -5} \frac{-8}{(x+5)^4} = \lim_{x \to -5} \left((-8)\,\frac{1}{(x+5)^4}\right) = -\infty\,, \quad -8 < 0$

- $\lim_{x \to 2} \frac{7}{(x-2)^2} = \lim_{x \to 2} \left((7)\,\frac{1}{(x-2)^2}\right) = \infty$

- $\lim_{x \to 2^-} \frac{-10}{(x-2)^5} = \lim_{x \to 2^-} \left((-10)\,\frac{1}{(x-2)^5}\right) = +\infty\,, \quad -10 < 0$

معلق

- أوجد إن أمكن : $\lim_{x \to 2} \frac{1}{|x-2|}$

$$\frac{1}{|x-2|} = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & x > 2 \\ \dfrac{-1}{x-2} & x < 2 \end{cases}$$

$\frac{-1}{x-2} \qquad 2 \qquad \frac{1}{x-2}$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{|x-2|} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-1}{(x-2)} = \lim_{x \to 2^-} (-1)\frac{1}{(x-2)} = +\infty \quad -1 < 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{|x-2|} = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{(x-2)} = \infty \quad (2)$$

$(1)\ (2) \Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{1}{|x-2|} = \infty$

أوجد إن أمكن : $\lim\limits_{x\to-1} \frac{3}{|x+1|}$

$$\frac{3}{|x+1|}=\begin{cases}\dfrac{3}{x+1} & x>-1\\[2mm] \dfrac{-3}{x+1} & x<-1\end{cases}$$

$\dfrac{-3}{x+1}$ $\quad -1 \quad$ $\dfrac{3}{x+1}$

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{3}{|x+1|}=\lim_{x\to-1^-}\frac{-3}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1^-}(-3)\frac{1}{(x+1)}=+\infty \quad ①$$

$(-3)<0$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{3}{|x+1|}=\lim_{x\to-1^+}\frac{3}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1^+}(3)\frac{1}{(x+1)}=\infty \quad ②$$

$$①,② \Longrightarrow \lim_{x\to-1}\frac{3}{|x+1|}=\infty$$

من كراسة التمارين:

7. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{-7}{|x+2|}$

معلق

$$\frac{-7}{|x+2|}=\begin{cases}\dfrac{-7}{x+2} & x>-2\\[2mm] \dfrac{-7}{-x-2}=\dfrac{7}{x+2} & x<-2\end{cases}$$

-2

$$\lim_{x\to-2^-}\frac{-7}{|x+2|}=\lim_{x\to-2^-}7\cdot\frac{1}{(x+2)}$$

$=-\infty \quad ①$

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{-7}{|x+2|}=\lim_{x\to-2^+}(-7)\cdot\frac{1}{(x+2)}$$

$② \quad =-\infty;$ $\quad -7<0$

$$①,② \Longrightarrow \lim_{x\to-2}\frac{-7}{|x+2|}=-\infty$$

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

معلق

1. $\lim_{x \to -4^-} \frac{1}{(x+4)^9} = -\infty$ (a) (b)

2. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{|x|-3} = 2$ (a) (b)

3. $\lim_{x \to -\infty} \frac{|x|-3}{x+3} = -1$ (a) (b)

4. $\lim_{x \to \infty} \frac{1-x}{2x^2-5x-3} = -\infty$ (a) (b)

5. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{|2x-3|} = \frac{1}{2}$ (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. $\lim_{x \to \infty} \frac{|x|}{|x|+1} =$

(a) 0 (b) 1 (c) ∞ (d) $\frac{1}{2}$

7. $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+3} =$

(a) ∞ (b) $-\infty$ (c) 1 (d) 0

8. $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{x} + 1\right)\left(\frac{5x^2-1}{x^2}\right) =$

(a) 0 (b) 5 (c) 1 (d) $-\infty$

9. $\lim_{x \to \infty} \frac{-|x+3|}{2x} =$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) ∞ (d) $-\infty$

معلق

10. $\lim_{x \to 2^-} \left(\frac{3}{x-2}\right)^5 =$

(a) 0 (b) 2 (c) ∞ (d) $-\infty$

11. $\lim_{x \to 4^+} \frac{2}{(x-4)^3} =$

(a) ∞ (b) 2 (c) $-\infty$ (d) 0

صيغ غير معينة

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n \;: n \in \mathbb{Z}^+$$

- $\lim_{x\to\pm\infty} x^6 = \infty$
- $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$
- $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim_{x\to\pm\infty} x^8 = \infty$
- $\lim_{x\to\infty} x = \infty$
- $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} a\,x^n : \quad n \in \mathbb{Z}^+ \;, a \in \mathbb{R}-\{0\}$$

- $\lim_{x\to\infty} 5x^2 = \infty$
- $\lim_{x\to-\infty} -4x^6 = -\infty \,, \quad -4 < 0$
- $\lim_{x\to-\infty} 5x^7 = -\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} -x^5 = +\infty, \quad -1 < 0$
- $\lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} -4x = \infty \,, \quad -4 < 0$
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{3} = \infty$
- $\lim_{x\to\infty} -3x^8 = -\infty \,, \quad -3 < 0$
- $\lim_{x\to\infty} 5x^7 = \infty$
- $\lim_{x\to\infty} -x^5 = -\infty, \quad -1 < 0$
- $\lim_{x\to\infty} 2x^3 = \infty$
- $\lim_{x\to\infty} -4x = -\infty, \quad -4 < 0$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad : a_n \in \mathbb{R}^* \quad \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

- $\lim_{x\to\infty} (-3x^2 + 2x - 4)$

  $= \lim_{x\to\infty} (-3x^2) = -\infty \,, \quad -3 < 0$
- $\lim_{x\to\infty} (2x^2 - 3x + 1)$

  $= \lim_{x\to\infty} (2x^2) = \infty$

من كراسة التمارين:

Q أوجد إن أمكن كلا من :

1) $\lim_{x\to\infty} (3x^2 - 5x + 4)$

$= \lim_{x\to\infty} (3x^2) = \infty$

2) $\lim_{x\to\infty} (-4x^2 + x - 1)$

$= \lim_{x\to\infty} (-4x^2) = -\infty: \quad -4 < 0$

3) $\lim_{x\to-\infty} (2x^3 - 3x + 7)$

$= \lim_{x\to-\infty} (2x^3) = -\infty$

4) $\lim_{x\to-\infty} (-4x^3 + 2x + 5)$

$= \lim_{x\to-\infty} (-4x^3) = \infty: \quad -4 < 0$

نظرية 11 : إذا كانت كل من f,g دالة حدودية حيث:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$$
$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_0$$

بالتالي:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_n}{b_m}\ :\ n=m$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0\ :\ n<m$

أوجد :

Q $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-3x^3}{2x^3+5}=-\frac{3}{2}$ (درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام)

Q $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x-1}{3x^4-x}=0$ (درجة حدودية البسط < درجة حدودية المقام)

Q $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4-1}{7-2x^4}=\frac{1}{-2}=\frac{-1}{2}$ (درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام)

Q $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^2+5x+1}{6x^2-x+1}=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$ (درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام)

Q $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{4x^3-2x+3}=0$ (درجة حدودية البسط < درجة حدودية المقام)

Q $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-5x+7}{-2x^2+3x-1}=\frac{4}{-2}=-2$ (درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام)

Q $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3+7x-1}{-5x^3+x+2}=\frac{2}{-5}=\frac{-2}{5}$ (درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام)

Q $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+5}{2x^3+x-1}=0$ (درجة حدودية البسط < درجة حدودية المقام)

Q $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2-2x+3}=0$ (درجة حدودية البسط < درجة حدودية المقام)

Q إذا كانت: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+3}{2x+5}=3$ فأوجد قيمة كل من a,b

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+3}{2x+5}=3\quad,\quad 3\neq 0$

$\therefore$ درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام ، أي أن حدودية البسط من الدرجة الأولى بالتالي:

$ax^2=0\Longrightarrow a=0$ ، $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{bx+3}{2x+5}=\frac{b}{2}=\frac{3}{1}\quad\Longrightarrow b=6$

Q إذا كانت: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2}{ax^2+bx-3}=-1$ فأوجد قيمة كل من a,b

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2}{ax^2+bx-3}=-1\,,\quad -1\neq 0$

$\therefore$ درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام أي أن حدودية المقام من الدرجة الأولى ، بالتالي:

$ax^2=0\Longrightarrow a=0$ ، $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2}{bx-3}=\frac{1}{b}=\frac{-1}{1}\quad\Longrightarrow b=-1$

من كراسة التمارين:

11. إذا كانت: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+4}{3x^2-2x+1}=-1$ فأوجد قيم a,b

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+4}{3x^2-2x+1}=-1,\ -1\neq 0$

∴ درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام أي أن حدودية البسط من الدرجة الثانية، بالتالي:

$$ax^3=0\Rightarrow a=0\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{bx^2+4}{3x^2-2x+1}=-1\Rightarrow\frac{b}{3}=-1\Rightarrow b=-3$$

12. إذا كانت: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+2x-5}{ax^3+bx^2+3}=-1$ فأوجد قيم a,b

$\because \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+2x-5}{ax^3+bx^2+3}=-1,\ -1\neq 0$

∴ درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام أي أن حدودية المقام من الدرجة الثانية، بالتالي

$$ax^3=0\Rightarrow a=0\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+2x-5}{bx^2+3}=-1\Rightarrow\frac{2}{b}=-1\Rightarrow b=-2$$

Q أوجد: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$

$$f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}=\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}}=\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}=\frac{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}=\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$(x>0 ، |x|=x)\quad : x\neq 0$

شرط الجذر:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)=$

$\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=1+0-0=1\ ,1>0$

نهاية البسط:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)=$

$\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}=1-0=1$

شرط المقام:

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}$

$=\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}=\sqrt{1}=1\quad ,1\neq 0$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$=\frac{1}{1}=1$$

Q أوجد : $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}=\frac{\sqrt{x^2\left(2-\frac{1}{x}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{|x|\sqrt{\left(2-\frac{1}{x}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{\cancel{x}\sqrt{\left(2-\frac{1}{x}\right)}}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{\sqrt{\left(2-\frac{1}{x}\right)}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$: x\neq 0$

$(x>0 ، |x|=x)$

شرط الجذر: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=2-0=2\;,2>0$

نهاية البسط: $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\sqrt{2}$

شرط المقام: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=1+0=1\;,1\neq 0$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\left(2-\frac{1}{x}\right)}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\left(2-\frac{1}{x}\right)}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$$

Q أوجد : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}$

$$f(x)=\frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}=\frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}}=\frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}}=\frac{\overset{(-1)}{\cancel{x}}\left(3-\frac{5}{x}\right)}{-\cancel{x}\sqrt{\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}}=\frac{-3+\frac{5}{x}}{\sqrt{\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}}$$

$: x\neq 0$

$(x<0\;,|x|=-x)$

شرط الجذر:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{9}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}1-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{9}{x^2}=1-0=1\;,1>0$

نهاية البسط:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3+\frac{5}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}-3+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x}=-3+0=-3$

شرط المقام:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}=\sqrt{1}=1\;,1\neq 0$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3+\frac{5}{x}}{\sqrt{\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3+\frac{5}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}}$$

$$=\frac{-3}{1}=-3$$

صيغ غير معينة-التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. $\lim_{x\to\infty}(3x^2+7x-8)=\infty$ — (a) (b)

2. $\lim_{x\to-\infty}(-x^3-2x+1)=-\infty$ — (a) (b)

3. $\lim_{x\to-\infty}(-x^2+x-3)=-\infty$ — (a) (b)

4. $\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+4}{3x^2-5x+1}=0$ — (a) (b)

5. $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3+7x^2-1}{2x^3-4}=2$ — (a) (b)

6. $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-7}{\sqrt{4x^2-8x+5}}=\frac{3}{2}$ — (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

7. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+5}{2x^4+x^2-2}=$

(a) ∞ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) $-\infty$

8. $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}}=$

(a) ∞ (b) $-\infty$ (c) 3 (d) -3

9. $\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+3}{\sqrt{9x^2-2x+4}}=$

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $-\frac{5}{3}$ (c) $\frac{5}{9}$ (d) $-\frac{5}{9}$

10. $\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+1}{\sqrt{4x^2-x+3}}=$

(a) -1 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

11. إذا كان: $\lim_{x\to\infty}\frac{mx^2+nx+4}{\sqrt{x^2-2x+4}}=-2$ فإن قيم m,n هي:

(a) $m=0\,,n=-2$ (b) $m=0\,,n=2$ (c) $m=1\,,n=-1$ (d) $m=1\,,n=1$

12. إذا كان: $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-2x+3}}{mx^2+nx-4}=1$ فإن قيم m,n هي:

(a) $m=0\,,n=-2$ (b) $m=0\,,n=2$ (c) $m=0\,,n=4$ (d) $m=0\,,n=-4$

نهايات بعض الدوال المثلثية

تذكر :

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $\dfrac{1}{\sin x} = \csc x$, $\dfrac{1}{\cos x} = \sec x$

قوانين للحفظ

$\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \tan x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{bx}{\sin ax} = \dfrac{b}{a}$ $\quad a \neq 0 , b \neq 0$

أوجد :

Q $\lim\limits_{x\to 0} \tan(9x) = 0$

Q $\lim\limits_{x\to 0} \cos(7x) = 1$

Q $\lim\limits_{x\to 0} \sin(5x) = 0$

Q $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9x}{\sin 4x} = \dfrac{9}{4}$

Q $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{3x} = \dfrac{5}{3}$

شرط المقام $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1 , 1 \neq 0$

Q $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-3}{\cos x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 0} \cos x} = \dfrac{0-3}{1} = -3$

من كراسة التمارين:

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1+\cos x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0} x^2}{\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)} = \dfrac{0^2}{2} = 0$

شرط المقام: $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)$

$= \lim\limits_{x\to 0} 1 + \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1 + 1 = 2$, $2 \neq 0$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\tan x}{\sin x - \cos x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(1-\tan x)}{\lim\limits_{x\to 0}(\sin x - \cos x)}$

$= \dfrac{\lim\limits_{x\to 0} 1 - \lim\limits_{x\to 0} \tan x}{\lim\limits_{x\to 0} \sin x - \lim\limits_{x\to 0} \cos x} = \dfrac{1-0}{-1} = -1$

شرط المقام: $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x - \cos x)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \sin x - \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 0 - 1 = -1$

$-1 \neq 0$

أوجد :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{2x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\sin x}{2x} = \lim_{x\to0}\left(\sin x\cdot\frac{\sin x}{2x}\right)$$

$$= \lim_{x\to0}\sin x\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x} = 0\times\frac{1}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x^2-x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x(2x-1)} = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{(2x-1)}\right)$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{(2x-1)} = 1\times\frac{1}{-1} = -1$$

شرط المقام

$\lim_{x\to0}(2x-1) = -1$

$,-1\neq0$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{3x\cos x} = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{3x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{3x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{3x}\cdot\frac{\lim_{x\to0}1}{\lim_{x\to0}\cos x} = \frac{2}{3}\times\frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

شرط المقام

$\lim_{x\to0}\cos x = 1$

$,1\neq0$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x^2\,(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to0}\frac{x^2\,(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot(1+\cos x)\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\lim_{x\to0}(1+\cos x)$$

$$= \left(\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\left(\lim_{x\to0}1+\lim_{x\to0}\cos x\right) = (1)^2\cdot(1+1) = 2$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{\cos x-1}\times\frac{\cos x+1}{\cos x+1} = \lim_{x\to0}\frac{x\sin x\,(\cos x+1)}{\cos^2 x-1} = \lim_{x\to0}\frac{x\cancel{\sin x}\,(\cos x+1)}{-\sin^{\cancel{2}} x}\qquad x\neq0$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\left(\frac{x}{-\sin x}\right)\cdot(\cos x+1)\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{x}{-\sin x}\right).\lim_{x\to0}(\cos x+1)$$

$$= \left(\lim_{x\to0}\frac{-x}{\sin x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to0}\cos x+\lim_{x\to0}1\right) = \left(\frac{-1}{1}\right)\cdot(1+1) = -2$$

من كراسة التمارين:

2. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}\times\frac{1+\cos 2x}{1+\cos 2x} =$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 2x}{\sin 2x(1+\cos 2x)} = \lim_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{\sin 2x(1+\cos 2x)}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \frac{\lim_{x\to0}\sin 2x}{\lim_{x\to0}(1+\cos 2x)} = \frac{0}{2} = 0$$

شرط المقام

$\lim_{x\to0}(1+\cos 2x) =$

$\lim_{x\to0}1+\lim_{x\to0}\cos 2x = 1+1 = 2\ \ ,2\neq0$

نتيجة:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx}=\frac{a}{b}\qquad a\neq 0\,,b\neq 0$$

أوجد :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{\left(2\frac{\tan x}{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\left(2\frac{\tan x}{x}\right)}=\frac{1}{2}$$

شرط المقام: $\lim\limits_{x\to 0}\left(2\frac{\tan x}{x}\right)=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=2\times 1=2\ ,2\neq 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\tan x-3\sin x}{4x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5\tan x}{4x}-\frac{3\sin x}{4x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5\tan x}{4x}-\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{4x}$$

$$=\frac{5}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}-\frac{3}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

$$=\frac{5}{4}(1)-\frac{3}{4}(1)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\tan x+x^2\cos x}{5x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\tan x}{5x}+\frac{x^{\cancel{2}}\cos x}{5\cancel{x}}\right)\qquad x\neq 0$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\tan x}{5x}+\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{5}$$

$$=\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}+\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}x\cdot\lim_{x\to 0}\cos x$$

$$=\frac{3}{5}(1)+\frac{1}{5}\times 0\times 1=\frac{3}{5}$$

أوجد :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x-x^2}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x}{3x^2}-\frac{x^2}{3x^2}\right)\qquad x\neq 0$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}-\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\tan x-2x\cos x}{3x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x\tan x}{3x}-\frac{2x\cos x}{3x}\right)\qquad x\neq 0$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}-\frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x$$

$$=\frac{1}{3}\times 1\times 1-\frac{2}{3}\times 1=\frac{-1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x+\sin x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5\cancel{x}}{\cancel{x}}+\frac{\sin x}{x}\right)\qquad x\neq 0$$

$$=\lim_{x\to 0}5+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=5+1=6$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x+3x\cos 4x}{5x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{5x}+\frac{3\cancel{x}\cos 4x}{5\cancel{x}}\right)\qquad x\neq 0$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{5x}+\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\cos 4x$$

$$=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times 1=1$$

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

3. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=0$ ⓐ ⓑ

4. $\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin 2x}{2\cos 2x}=\frac{1}{2}$ ⓐ ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin x}=$

ⓐ 2 ⓑ -2 ⓒ 0 ⓓ ∞

9. $\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+5\sin^2 x}{3x^2}=$

ⓐ 3 ⓑ 9 ⓒ 0 ⓓ ∞

ملاحظة: التمارين 1 ، 2 ، 5 ، 7 ، 8 ، 10 معلقة

تمارين موضوعية إضافية:

Q $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 4x}=$

ⓐ $-\frac{1}{4}$ ⓑ $\frac{1}{4}$ ⓒ 1 ⓓ 0

Q $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 6x}{\tan 3x}=$

ⓐ 0 ⓑ 1 ⓒ -2 ⓓ 2

Q $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 7x}{\cos x}=$

ⓐ -7 ⓑ 7 ⓒ 1 ⓓ 0

Q $\lim_{x\to 0}\sin 4x=$

ⓐ $-\frac{1}{4}$ ⓑ $\frac{1}{4}$ ⓒ 1 ⓓ 0

Q $\lim_{x\to 0}\tan 6x=$

ⓐ 0 ⓑ 1 ⓒ -2 ⓓ 2

الاتصال

الاتصال عند نقطة تكون الدالة f متصلة عند $x = c$ في مجالها إذا كانت $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$

Q ابحث اتصال الدالة f عند $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & : x \geq 1 \\ 5x - 1 & : x < 1 \end{cases}$$

$5x - 1$ 1 $x^2 + 3x$

$f(1) = (1)^2 + 3(1) = 4 \quad \rightarrow (1)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (5x - 1) = 5(1) - 1 = 4$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2 + 3x) = (1)^2 + 3(1) = 4$

$\because \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 4 \quad \therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 4 \quad \rightarrow (2)$

$(1), (2) \Longrightarrow \because \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$, $\therefore$ f متصلة عند $x = 1$

Q ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x & : x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & : x > 0 \end{cases}$$

$x^3 + x$ 0 $\dfrac{x^2}{x+1}$

$f(0) = (0)^3 + (0) = 0 \quad \rightarrow (1)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x^3 + x) = (0)^3 + (0) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{0^2}{1} = 0$

شرط المقام:

$\lim\limits_{x\to 0^+} (x + 1) = 1 , 1 \neq 0$

$\because \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \quad \therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \quad \rightarrow (2)$

$(1), (2) \Longrightarrow \because \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, $\therefore$ f متصلة عند $x = 0$

Q ابحث اتصال الدالة f عند $x = 3$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & : x > 3 \\ 7 & : x \le 3 \end{cases}$$

7 | 3 | $\frac{x^2-9}{x-3}$

$f(3) = 7 \quad \to 1$

$\lim_{x\to3^-} f(x) = \lim_{x\to3^-} 7 = 7$

$\lim_{x\to3^+} f(x) = \lim_{x\to3^+} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to3^+} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} \quad : x \ne 3$

$= \lim_{x\to3^+} (x+3) = 3+3 = 6$

$\because \lim_{x\to3^-} f(x) \ne \lim_{x\to3^+} f(x) \quad \therefore \lim_{x\to3} f(x)$ غير موجودة $\to 2$

$\therefore f$ غير متصلة عند $x = 3$

ملاحظة: $\lim_{x\to3^-} f(x) = f(3)$ بالتالي f متصلة عند $x = 3$ من جهة اليسار فقط

Q ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & : x < 2 \\ 1 & : x = 2 \\ x^2+1 & : x > 2 \end{cases}$$

$2x+1$ | $f(2) = 1 \quad \to 1$ | x^2+1

2

$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} (2x+1) = 2(2)+1 = 5$

$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} (x^2+1) = 2^2+1 = 5$

$\because \lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^+} f(x) = 5 \quad \therefore \lim_{x\to2} f(x) = 5 \quad \to 2$

$1, 2 \implies \because \lim_{x\to2} f(x) \ne f(2) \Rightarrow x = 2$ ليست متصلة عند f

Q ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{|x-2|} & : x \ne 2 \\ 1 & : x = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x-2} & : x > 2 \\ 1 & : x = 2 \\ \frac{x-2}{-x+2} & : x < 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & : x > 2 \\ 1 & : x = 2 \\ -1 & : x < 2 \end{cases}$$

$f(2) = 1 \quad \to 1$

2

$f(x) = -1$ | $f(x) = 1$

$\lim_{x\to2^-} f(x) = -1$

$\lim_{x\to2^+} f(x) = 1$

$\because \lim_{x\to2^-} f(x) \ne \lim_{x\to2^+} f(x) \therefore \lim_{x\to2} f(x)$ غير موجودة $\to 2$

$\therefore f$ ليست متصلة عند $x = 2$

ملاحظة: $\lim_{x\to2^+} f(x) = f(2)$ بالتالي f متصلة عند $x = 2$ من جهة اليمين فقط

Q ابحث اتصال الدالة f عند $x=-1$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x+1|}{x+1}-2x & : x\neq -1\\ 2 & : x=-1\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x+1}-2x & : x>-1\\ 2 & : x=-1\\ \frac{-x-1}{x+1}-2x & : x<-1\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}1-2x & : x>-1\\ 2 & : x=-1\\ -1-2x & : x<-1\end{cases}$$

$f(-1)=2 \quad \rightarrow ①$

$-1-2x$ $\qquad$ -1 $\qquad$ $1-2x$

$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(-1-2x)$ $\qquad$ $\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(1-2x)$

$=-1-2(-1)=1$ $\qquad$ $=1-2(-1)=3$

$\because \lim_{x\to -1^-} f(x)\neq \lim_{x\to -1^+} f(x) \ \therefore \lim_{x\to -1} f(x)$ غير موجودة $\rightarrow ②$

$\therefore f$ ليست متصلة عند $x=-1$

من كراسة التمارين:

ابحث اتصال كل من الدوال التالية عند $x=c$:

7. $h(x)=\begin{cases}\frac{x^2-3x-4}{x+1} & : x\neq -1\\ -1 & : x=-1\end{cases}$, $x=-1$ $\qquad$ $h(-1)=-1\rightarrow ①$

$\lim_{x\to -1} h(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-3x-4}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x-4)}{\cancel{x+1}}$ $\qquad$ $x\neq -1$

$=\lim_{x\to -1}(x-4)=(-1)-4=-5\rightarrow ②$

$\because \lim_{x\to -1} h(x)\neq h(-1)\Rightarrow$ h غير متصلة عند $x=-1$

8. $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-3x}{|x|} & : x\neq 0\\ -3 & : x=0\end{cases}$, $x=0$ $\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-3x}{x}=\frac{x(x-3)}{x}=x-3 & : x>0\\ -3 & : x=0\\ \frac{x^2-3x}{-x}=\frac{x(x-3)}{-x}=-x+3 & : x<0\end{cases}$

$f(0)=-3$

$-x+3$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $x-3$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x+3)=-0+3=3$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-3)=0-3=-3$

$\because \lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة

$\therefore f$ غير متصلة عند $x=0$

ملاحظة: الدالة f متصلة عند $x=0$ من اليمين فقط لأن: $\because \lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=-3$

9. $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & : x\neq 1\\ \frac{1}{2} & : x=1\end{cases}, \quad x=1$

$f(1)=\frac{1}{2}\rightarrow ①$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$

$=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x+1)}{\lim\limits_{x\to1}(\sqrt{x^2+3}+2)}=\frac{1+1}{4}=\frac{1}{2}\rightarrow ②$

من ①,② نجد أن:

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)=\frac{1}{2}$

$\therefore f$ متصلة عند $x=1$

$\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}\times\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2}$

$=\frac{x^2+3-2^2}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$=\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x^2+3}+2)}=\frac{(x+1)}{(\sqrt{x^2+3}+2)} \quad : x\neq 1$

شرط الجذر:

$\lim\limits_{x\to1}(x^2+3)=1^2+3=4,\ 4>0$

شرط المقام:

$\lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)=\sqrt{\lim\limits_{x\to1}(x^2+3)}+\lim\limits_{x\to1}2$

$=\sqrt{4}+2=4, \qquad 4\neq 0$

10. أوجد قيمة a بحيث تصبح الدالة التالية متصلة عند $x=3$

$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x<3\\ 2ax, & x\geq 3\end{cases}$

$\because f$ متصلة عند $x=3$

$\therefore \lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to3^-}(x^2-1)=\lim\limits_{x\to3^+}(2ax)$

$\Longrightarrow 3^2-1=2a(3)\Longrightarrow 8=6a \Longrightarrow a=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

الاتصال ، التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. الدالة f : $f(x)=\frac{1}{(x+2)^2}+1$ متصلة عند $x=-2$ — ⓐ **ⓑ**

2. الدالة : $y=\frac{1}{x^2+1}$ متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$ — **ⓐ** ⓑ

3. الدالة : $y=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$ متصلة عند $x=-1$ — **ⓐ** ⓑ

4. إذا كانت الدالة f متصلة عند $x=-1$ وكان $\lim\limits_{x\to-1}(f(x)-2)=-1$ فإن $f(-1)=1$ — **ⓐ** ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

5. نقاط انفصال الدالة $f : f(x) = \cot x$ هي :

ⓐ $0 , \pi$ ⓑ $2k\pi$ ⓒ $k\pi$ ⓓ $\frac{\pi}{2} + k\pi \; : k \in \mathbb{Z}$

6. نقاط الدالة $f : f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$ التي يمكن التخلص من الانفصال عندما هي :

ⓐ 2 ⓑ $-2 , 2$ ⓒ -2 ⓓ $-5 , 2$

7. نقاط الدالة $f : f(x) = \frac{2x^3+16}{x^2+x-2}$ التي لا يمكن التخلص من الانفصال عندما هي :

ⓐ $-1 , 2$ ⓑ -2 ⓒ $1 , -2$ ⓓ 1

8. إذا كانت الدالة f متصلة عند $x = 2$ فإن $f(x)$ يمكن أن تكون :

ⓐ $\frac{1}{|x-2|}$ ⓑ $\sqrt{x-2}$ ⓒ $\frac{|x-2|}{x-2}$ ⓓ $\begin{cases} \sqrt{x^2-3} : x > 2 \\ 3x-5 : x \leq 2 \end{cases}$

9. إذا كانت الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^2+1 : x \geq 2 \\ \frac{x^2-4}{x-2} : x < 2 \end{cases}$ فإن :

ⓐ $\lim_{x\to 2+} f(x) = 4$ ⓑ $\lim_{x\to 2-} f(x) = 4$

ⓒ $\lim_{x\to 2} f(x)$ موجودة ⓓ f متصلة عند $x = 2$

10. معلق.

11. إذا كانت الدالة f متصلة عند $x = -2$ وكانت $\lim_{x\to -2}(x^2 + f(x)) = 7$ فإن $f(-2)$ تساوي :

ⓐ 3 ⓑ 5 ⓒ 9 ⓓ 11

12. إذا كانت الدالة g متصلة عند $x = 1$ وكانت النقطة $(1, -3)$ تقع على منحنى الدالة g فإن $\lim_{x\to 1}(g(x))^2$ تساوي

ⓐ -6 ⓑ -3 ⓒ 1 ⓓ 9

لكل سؤال مما يلي إجابة صحيحة من القائمة، اختر الإجابة الصحيحة

13. $g(x) = \begin{cases} x+1 & : x > a \\ 3-x & : x \leq a \end{cases} \Rightarrow a = \ldots$ ⓓ

14. $g(x) = \begin{cases} 2ax-2 & : x \neq a \\ 3a & : x = a \end{cases} \Rightarrow a = \ldots$ ⓑ

15. $g(x) = \begin{cases} 3x^2 & : x > a \\ 2x & : x \leq a \end{cases} \Rightarrow a = \ldots$ ⓒ

ⓐ -1
ⓑ 2
ⓒ 0
ⓓ 1
ⓔ $\frac{2}{3}$

نظريات الاتصال

نظرية (14) :

خواص الدوال المتصلة

إذا كانت f,g دالتين متصلتين عند $x=c$ فإن الدوال التالية متصلة أيضاً عند $x=c$:

$f+g$ $\quad$ $f-g$ $\quad$ $k.f \;\; : k\epsilon\mathbb{R}$ $\quad$ $f.g$ $\quad$ $\dfrac{f}{g} \;\; : g(c)\neq 0$

دوال متصلة: الدوال التالية متصلة عند كل عدد حقيقي. $c\in\mathbb{R}$

- الدوال الثابتة
- الدوال كثيرات الحدود
- الدوال الحدودية النسبية (شرط المقام لا يساوي صفرا)
- دالة القيمة المطلقة $f(x) = |x|$
- الدوال المثلثية الأساسية متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها

ابحث اتصال الدالة f عند $x=c$ في كل مما يلي:

Q $f(x)=x^2+|x| \quad , \quad c=-1$

$h(x)=x^2$ كثيرة حدود متصلة عند $x=-1$

$g(x)=|x|$ دالة متصلة عند $x=-1$

$\therefore f(x)=h(x)+g(x)$ دالة متصلة عند $x=-1$

Q $f(x)=\sin x-\cos x \quad , \quad c=\frac{\pi}{2}$

$h(x)=\sin x$ دالة مثلثية متصلة عند $x=\frac{\pi}{2}$

$g(x)=\cos x$ دالة مثلثية متصلة عند $x=\frac{\pi}{2}$

$\therefore f(x)=h(x)-g(x)$ دالة متصلة عند $x=\frac{\pi}{2}$

Q $f(x)=x^2-4x+3+|x| \quad , \quad c=3$

$m(x)=x^2-4x+3$ كثيرة حدود متصلة عند $x=3$

$n(x)=|x|$ دالة متصلة عند $x=3$

$\therefore f(x)=m(x)+n(x)$ دالة متصلة عند $x=3$

Q $f(x)=\frac{\tan x}{x+1} \quad , \quad c=\frac{\pi}{4}$

$a(x)=\tan x$ دالة مثلثية متصلة عند $x=\frac{\pi}{4}$

$b(x)=x+1$ دالة كثيرة حدود متصلة عند $x=\frac{\pi}{4}$

المقام $b(x)=x+1,\;\; b\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+1\neq 0$

$\therefore f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$ دالة متصلة عند $x=\frac{\pi}{4}$

Q ابحث اتصال $f(x)=\frac{x-2}{x^2+9}-\frac{1}{x}$ عند $x=3$

$g(x)=\frac{x-2}{x^2+9}$ حدودية نسبية متصلة عند $x=3$ لأن المقام $\neq 0$ عند $x=3$

$h(x)=\frac{1}{x}$ حدودية نسبية متصلة عند $x=3$ لأن المقام $\neq 0$ عند $x=3$

$\therefore\ f(x)=g(x)-h(x)$ دالة متصلة عند $x=3$

Q ابحث اتصال $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{2x}{x-2}$ عند $x=1$

$u(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$: حدودية نسبية متصلة عند $x=1$ لأن المقام $\neq 0$ عند $x=1$

$v(x)=\frac{2x}{x-2}$: حدودية نسبية متصلة عند $x=1$ لأن المقام $\neq 0$ عند $x=1$

$\therefore\ f(x)=u(x)-v(x)$ متصلة عند $x=1$

نظرية (15): **اتصال الدوال الجذرية عند نقطة:**

- الدالة $y=\sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x=c\in\mathbb{R}^+$ ، n عدد صحيح زوجي موجب
- الدالة $y=\sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x=c\in\mathbb{R}$ ، n عدد صحيح فردي أكبر من 1
- إذا كانت الدالة g متصلة عند كل $x=c$ ، وكان $g(c)>0$
  فإن الدالة $f(x)=\sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x=c$

ابحث اتصال كل دالة عند العدد المبين:

Q $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}\ ,x=1$

$g(x)=\sqrt[3]{x}$ دالة جذر تكعيبي متصلة عند $x=1$

$h(x)=x^2+1$ دالة كثيرة حدود متصلة عند $x=1$

شرط المقام $h(1)=1^2+1=2\ ,\ 2\neq 0$

$\therefore\ f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ دالة متصلة عند $x=1$

Q $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+4}\ ,x=-2$

$g(x)=\sqrt[3]{x}$ دالة جذر تكعيبي متصلة عند $x=-2$

$h(x)=x^2+4$ دالة كثيرة حدود متصلة عند $x=-2$

شرط المقام $h(-2)=(-2)^2+4=8\ ,\ 8\neq 0$

$\therefore\ f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ دالة متصلة عند $x=-2$

Q $f(x) = \sqrt{x+3}\ \ , x = -1$

$x = -1$ متصلة عند g $\quad g(x) = x + 3$

$g(-1) = (-1) + 3 = 2 \quad , 2 > 0$

$x = -1$ متصلة عند $\quad f(x) = \sqrt{g(x)}\ \therefore$

Q $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}\ \ , x = -2$ $\quad x = -2$ متصلة عند g $\quad g(x) = x^2 - 4x + 3$

$g(-2) = (-2)^2 - 4(-2) + 3 = 15\ , 15 > 0$

$x = -2$ متصلة عند $\quad f(x) = \sqrt{g(x)}\ \therefore$

الدالة المركبة

إذا كانت $f\ , g$ دالتين حقيقيتين، وكان مدى الدالة f هو مجموعة جزئية من مجال الدالة g فإنه يتعين دالة مركبة

$$(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$$

ملاحظة: سنقتصر في دراستنا فقط على الدوال القابلة للتركيب

أوجد : $\boldsymbol{f(x) = 1 + x\ \ , g(x) = x^2 - 1}$

Q $(g \circ f)(x) \ = g(f(x)) = g(1 + x) = (1 + x)^2 - 1 = 1 + 2x + x^2 - 1 = x^2 + 2x$

Q $(g \circ f)(2) \ = (2)^2 + 2(2) = 8$

Q $(f \circ g)(x) \ = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = 1 + (x^2 - 1) = x^2$

Q $(f \circ g)(2) \ = (2)^2 = 4$

أوجد : $\boldsymbol{f(x) = 2x + 3\ \ , g(x) = x^2 + 3}$

Q $(g \circ f)(x) \ = g(f(x)) = g(2x + 3) = (2x + 3)^2 + 3 = 4x^2 + 12x + 9 + 3 = 4x^2 + 12x + 12$

Q $(g \circ f)(-1) = 4(-1)^2 + 12(-1) + 12 = 4$

Q $(f \circ g)(x) \ = f(g(x)) = f(x^2 + 3) = 2(x^2 + 3)\ + 3 = 2x^2 + 9$

Q $(f \circ g)(-1) = 2(-1)^2 + 9 = 11$

أوجد : $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x^4 + 2}$

Q $(f \circ g)(x) \ = f(g(x)) = f(x^4 + 2) = \sqrt{x^4 + 2}$

Q $(f \circ g)(0) \ = \sqrt{0^4 + 2} = \sqrt{2}$

Q $(g \circ f)(x) \ = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^4 + 2 = x^2 + 2$

Q $(g \circ f)(0) \ = 0^2 + 2 = 2$

أوجد : $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, $g(x)=\dfrac{3}{x^2+4}$

Q $(f\circ g)(x)$ $=f(g(x))=f\left(\dfrac{3}{x^2+4}\right)=\sqrt{1+\left(\dfrac{3}{x^2+4}\right)^2}$

Q $(g\circ f)(\sqrt{3})$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\sqrt{1+x^2}\right)=\dfrac{3}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2+4}=\dfrac{3}{1+x^2+4}=\dfrac{3}{x^2+5}$

$\Rightarrow g\left(f(\sqrt{3})\right)=\dfrac{3}{(\sqrt{3})^2+5}=\dfrac{3}{8}$

نظرية (16) : اتصال الدوال المركبة

إذا كانت f متصلة عند c ، g متصلة عند $f(c)$ ؛ فإن الدالة المركبة $g\circ f$ متصلة عند c

Q لتكن: $f(x)=x^2+5$, $g(x)=\sqrt{x}$ ابحث اتصال $g_o f$ عند $x=-2$

① $f(x)=x^2+5$ كثيرة حدود متصلة عند $x=-2$

$f(-2)=(-2)^2+5=9$

② $g(x)=\sqrt{x}$ دالة جذر تربيعي متصلة عند $x=9$ $(9>0)$

①,② $\Leftarrow$ $g\circ f$ متصلة عند $x=-2$

Q لتكن: $g(x)=2x+3$, $f(x)=\frac{|x|}{x+2}$ ابحث اتصال $f o g$ عند $x=1$

① $g(x)=2x+3$ كثيرة حدودمتصلة عند $x=1$

$g(1)=2(1)+3=5$

② $f(x)=\dfrac{|x|}{x+2}$ متصلة عند $x=5$ لأن :

- $u(x)=|x|$ متصلة عند $x=5$
- $v(x)=x+2$متصلة عند $x=5$
- شرط المقام:
$v(5)=5+2=7$, $7\neq 0$

①,② $\Leftarrow$ $f\circ g$ متصلة عند$x=1$

Q لتكن: $f(x)=|x^2-5x+6|$ ابحث اتصال fعند $x=2$

$h(x)=x^2-5x+6$, $g(x)=|x|$ $\Rightarrow$

$f(x)=(g\circ h)(x)=g(h(x))=g\,(x^2-5x+6)=|x^2-5x+6|$

① $h(x)=x^2-5x+6$ كثيرة حدود متصلة عند $x=2$

$h(2)=(2)^2-5(2)+6=0$

② $g(x)=|x|$ دالة متصلة عند $x=0$

①,② $\Leftarrow$ $f=g\circ h$ متصلة عند $x=2$

Q لتكن: $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ ابحث اتصال f عند $x = 0$

$h(x) = x^2 - 3x + 2 \quad , \quad g(x) = |x| \Rightarrow$
$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(x^2 - 3x + 2) = |x^2 - 3x + 2|$

① $h(x) = x^2 - 3x + 2$ كثيرة حدود متصلة عند $x = 0$

$h(0) = (0)^2 - 3(0) + 2 = 2$

② $g(x) = |x|$ دالة متصلة عند $x = 2$

①, ② $\Leftarrow$ $f = g \circ h$ متصلة عند $x = 0$

من كراسة التمارين:

Q ابحث اتصال الدالة التالية عند القيمة المعطاة:

1. $f(x) = x^2 - |2x - 3|, \ x = 2$

$h(x) = x^2$ كثيرة حدود متصلة عند $x = 2$

$g(x) = |2x - 3|$ متصلة عند $x = 2$ لأن:

$a(x) = 2x - 3$ كثيرة حدود متصلة عند $x = 2$

$a(2) = 2(2) - 3 = 1$

$b(x) = |x|$ دالة متصلة عند $x = 1$

إذاً: $g(x) = (b \circ a)(x)$ متصلة عند $x = 2$

$\therefore$ $f(x) = h(x) - g(x)$ متصلة عند $x = 2$

9. لتكن: $f(x) = 2x^2 - 3$, $g(x) = \sqrt{x + 4}$ ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

① $f(x) = 2x^2 - 3$ كثيرة حدود متصلة عند $x = -2$

② $f(-2) = 2(-2)^2 - 3 = 5$

③ $g(x) = \sqrt{x + 4}$ متصلة عند $x = 5$ لأن:

$u(x) = x + 4$ متصلة عند $x = 5$

$u(5) = (5) + 4 = 9, \quad 9 > 0$

①,②,③ $\Leftarrow$ $g \circ f$ متصلة عند $\Leftarrow x = -2$

نظريات الاتصال - التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. الدالة f: $f(x) = x^2 + |x - 1|$ متصلة عند $x = 3$ — ⓐ (مظلل) ⓑ

2. الدالة f: $f(x) = \frac{2x+5}{x+2} - \frac{2}{x}$ متصلة عند $x = 0$ — ⓐ ⓑ (مظلل)

3. الدالة f: $f(x) = \frac{2x-2}{|x|-1}$ متصلة عند $x = 0$ — ⓐ (مظلل) ⓑ

4. الدالة f: $f(x) = \frac{\sqrt[3]{3x-1}}{x^2}$ متصلة عند $x = 3$ — ⓐ (مظلل) ⓑ

5. الدالة f : $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 4}$ متصلة عند $x = 2$

ⓐ ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. نقاط انفصال الدالة f : $f(x) = \frac{-x+2}{x^2+9}$ عند :

ⓐ $x = 3$
ⓑ $x = -3$
ⓒ $x = 2$
ⓓ لا توجد نقاط انفصال

7. نقاط انفصال الدالة f : $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-1}$ عند x تساوي :

ⓐ $1, -1$ ⓑ $2, -2$ ⓒ $1, 2$ ⓓ $-1, -2$

8. $f(x) = x^2 + 3, g(x) = \frac{x}{x-3} : x \neq 0 \Rightarrow (g \circ f)(x) =$

ⓐ $\frac{4x^2 - 18x + 27}{(x-3)^2}$ ⓑ $\frac{x^2}{x^2-3}$ ⓒ $\frac{x^2+3}{x^2}$ ⓓ $\frac{x^2}{x^2+3}$

9. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-3}}$ $, g(x) = x^2 + 3, \ x \neq 0 \ \Rightarrow (f \circ g)(x) =$

ⓐ $\frac{x^2}{x-3} + 3$ ⓑ $\frac{x}{\sqrt{x-3}} + 3$ ⓒ $\frac{-(x^2+3)}{x}$ ⓓ $\frac{x^2+3}{|x|}$

10. لتكن الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^2 + 7}$ ، g : $g(x) = x^2 - 3$ فإن: $(f \circ g)(0)$ يساوي :

ⓐ 4 ⓑ -4 ⓒ 1 ⓓ -1

11. إذا كانت g دالة متصلة عند $x = 2$ فإن الدالة المتصلة عند $x = 2$ فيما يلي هي :

ⓐ $\sqrt{g(x)}$ ⓑ $\frac{1}{g(x)}$ ⓒ $\frac{g(x)}{x-2}$ ⓓ $|g(x)|$

12. إذا كانت الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^2 - a}$ متصلة عند $x = 3$ فإن a يمكن أن تساوي :

ⓐ 4 ⓑ 9 ⓒ 16 ⓓ 25

تـدرب و تـفـوق
اختبارات الكترونية ذكية

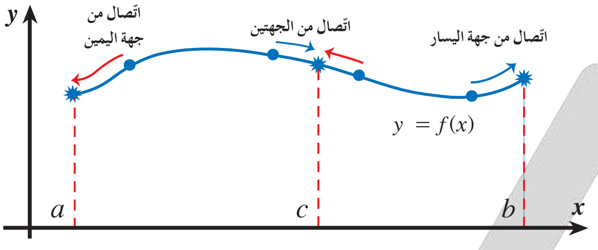
الاتصال على فترة

الاتصال على فترة مفتوحة

تكون الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة $(a\,,b)$ إذا كانت متصلة عند كل x تنتمي إلى الفترة $(a\,,b)$

الاتصال على فترة مغلقة

تكون الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a\,,b]$إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:



1. الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة $(a\,,b)$
2. الدالة f متصلة عند $x = a$ من جهة اليمين أي:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

3. الدالة f متصلة عند $x = b$ من جهة اليسار أي: $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

ملاحظات:

- إذا تحقق الشرطان 1 ، 2 من التعريف السابق تكون الدالة متصلة على الفترة $[a,b)$
- إذا تحقق الشرطان 1 ، 3 من التعريف السابق تكون الدالة متصلة على الفترة $(a,b]$
- إذا كانت الدالة متصلة على فترة ما فإنها متصلة على أي فترة جزئية منها
- إذا كانت الدالة متصلة على كل من الفترتين $[a,c]$,$[c,b]$ فإن الدالة متصلة على الفترة $[a,b]$
- يبقى التعريف السابق صحيحاً في حالة الفترات على الصورة $[a,\infty)$,$(-\infty,b]$

Q ادرس اتصال الدالة f على $[1,3]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}-2 & : x=1\\ x^2-3 & : 1<x<3\\ 6 & : x=3\end{cases}$$

1 ——— 3

$f(1)=-2$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x^2-3)$

$=(1)^2-3=-2$

$\because \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)$

$\therefore$ f متصلة

عند $x=1$ من اليمين

②

نفرض: $h(x)=x^2-3$

h كثيرة حدود

متصلة على $\mathbb{R}$

$\because f(x)=h(x)\ \ \forall x\in(1,3)$

$\therefore$ f متصلة على $(1,3)$

①

$f(3)=6$

$\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}(x^2-3)$

$=(3)^2-3=6$

$\because \lim\limits_{x\to3^-} f(x)=f(3)$

$\therefore$ f متصلة

عند $x=3$ من اليسار

③

①,②,③ $\Longrightarrow$ f متصلة على $[1,3]$

Q ادرس اتصال الدالة f على $[1,5]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}2 & : x=1\\ \dfrac{x^2+1}{x} & : 1<x<5\\ \dfrac{26}{5} & : x=5\end{cases}$$

1 ——— 5

$f(1)=2$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+1}{x}$

$=\dfrac{1^2+1}{1}=2$

شرط المقام:

$\lim\limits_{x\to1^+} x=1\ ,\ 1\neq0$

$\because \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)$

$\therefore$ f متصلة

عند $x=1$ من اليمين

②

نفرض: $g(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

g حدودية نسبية متصلة

$\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$

$\because f(x)=g(x)\ \ \forall x\in(1,5)$

$\therefore$ f متصلة على $(1,5)$

①

$f(5)=\dfrac{26}{5}$

$\lim\limits_{x\to5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to5^-}\dfrac{x^2+1}{x}$

$=\dfrac{5^2+1}{5}=\dfrac{26}{5}$

شرط المقام:

$\lim\limits_{x\to5^-} x=5\ ,\ 5\neq0$

$\because \lim\limits_{x\to5^-} f(x)=f(5)$

$\therefore$ f متصلة

عند $x=5$ من اليسار

③

①,②,③ $\Longrightarrow$ f متصلة على $[1,5]$

ادرس اتصال كل من الدوال التالية على الفترة المبينة:

Q $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, $[-1,5]$

f حدودية نسبية

$\forall x\in\mathbb{R}\ ,x^2+1\neq 0 \Rightarrow$ f متصلة على $\mathbb{R}$

$\because [-1\,,5]\subseteq\mathbb{R}\Rightarrow$ f متصلة على $[-1\,,5]$

Q $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$, $[0,5]$

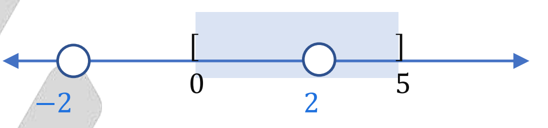
f حدودية نسبية

$x^2-4=0 \Rightarrow \quad (x-2)(x+2)=0 \Rightarrow x=2\,,x=-2$

$\therefore f$ متصلة $\forall x\in\mathbb{R}-\{\pm 2\}$

$\because f$ غير متصلة عند $x=2$, $2\in[0,5]$

$\therefore f$ متصلة $\forall x\in[0,5]-\{2\}$



f متصلة على كل من $[0\,,2)$, $(2\,,5]$

ادرس اتصال كل من الدوال التالية على الفترة المبينة:

Q $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+2}$, $[0,3]$

f حدودية نسبية

$\forall x\in\mathbb{R},\quad x^2+2\neq 0 \Rightarrow$ f متصلة على $\mathbb{R}$

$\because [0\,,3]\subseteq\mathbb{R}\Rightarrow$ f متصلة على $[0\,,3]$

Q $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$, $[0,2]$

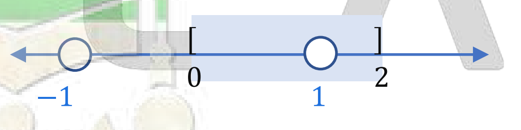
f حدودية نسبية

$x^2-1=0 \Rightarrow (x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x=1\,,x=-1$

$\therefore f$ متصلة $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\,,1\}$

$\because f$ غير متصلة عند $x=1$, $1\in[0,2]$

$\therefore f$ متصلة $\forall x\in[0,2]-\{1\}$



f متصلة على كل من $[0\,,1)$, $(1\,,2]$

Q ادرس اتصال الدالة على مجالها: $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le -1 \\ \frac{4}{x+3}, & x>-1 \end{cases}$

$D_f=(-\infty\,,-1]\cup(-1\,,\infty)=\mathbb{R}$

$-\infty$ ——— -1 ——— ∞

نفرض: $g(x)=x+3$

$g(x)$ كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\because f(x)=g(x) \quad \forall x\in(-\infty\,,-1]$

① $\therefore f$ متصلة على $(-\infty,-1]$

نفرض: $h(x)=\dfrac{4}{x+3}$

$h(x)$ حدودية نسبية متصلة

$\forall x\in\mathbb{R}-\{-3\}$

$\because f(x)=h(x) \quad \forall x\in(-1,\infty)$

② $\therefore f$ متصلة على $(-1\,,\infty)$

ندرس اتصال الدالة f عند $x=-1$ من اليمين

$f(-1)=(-1)+3=2$

شرط المقام $\lim\limits_{x\to-1^+}(x+3)=2\,,2\neq 0$

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{4}{x+3}=\dfrac{4}{2}=2$

$\because \lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=f(-1) \Rightarrow$ f متصلة عند $x=-1$ من اليمين ③

من ③, ②, ① نجد أن f متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

من كراسة التمارين:

6. ادرس اتصال الدالة على مجالها: $f(x)=\begin{cases} -x+4, & x\le 7 \\ \frac{9}{-x+4}, & x>7 \end{cases}$

$Df=(-\infty\,,7]\cup(7\,,\infty)=\mathbb{R}$

——— 7 ———

$h(x)=-x+4$

h كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\because f(x)=h(x) \quad \forall x\in(-\infty,7]$

$\therefore f$ متصلة على $(-\infty,7]$ ①

$g(x)=\dfrac{9}{-x+4}$

$g(x)$ حدودية نسبية متصلة

$\forall x\in\mathbb{R}-\{4\}$

$\because f(x)=g(x) \quad \forall x\in(7,\infty)$

② $\therefore f$ متصلة على $(7\,,\infty)$

ندرس الاتصال عند $x=7$ من اليمين

$f(7)=-(7)+4=-3$

شرط المقام $\lim\limits_{x\to7^+}(-x+4)=-7+4=-3$ ، $-3\neq 0$

$\lim\limits_{x\to7^+}f(x)=\lim\limits_{x\to7^+}\dfrac{9}{-x+4}=\dfrac{9}{-3}=-3$

$\because \lim\limits_{x\to7^+}f(x)=f(7) \Rightarrow$ ③ $\therefore f$ متصلة عند $x=7$ من اليمين

من ③, ②, ① نجد f متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

ادرس اتصال الدالة على مجالها: $f(x)=\begin{cases}2x-1 & ,x<1\\ -x+2 & ,1\le x<3\\ 1 & ,x\ge 3\end{cases}$

$D_f=(-\infty\,,1)\cup[1,3)\cup[3,\infty)=\mathbb{R}$

نفرض:

$u(x)=2x-1$

كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\forall x\in(-\infty\,,1)$

$f(x)=u(x)$

$\therefore f$ متصلة على

$(-\infty\,,1)$ ①

نفرض:

$v(x)=-x+2$

كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\forall x\in[1,3)$

$f(x)=v(x)$

$\therefore f$ متصلة على

$[1,3)$ ②

نفرض:

$a(x)=1$

دالة ثابتة (كثيرة حدود) متصلة على $\mathbb{R}$

$\forall x\in[3,\infty)$

$f(x)=a(x)$

$\therefore f$ متصلة على

$[3,\infty)$ ③

الاتصال عند 1 من اليسار

$f(1)=-(1)+2=1$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(2x-1)=2(1)-1=1$$

$\because \lim_{x\to1^-}f(x)=f(1)\Rightarrow$

$\therefore f$ متصلة عند 1 من اليسار ④

الاتصال عند 3 من اليسار

$f(3)=1$

$$\lim_{x\to3^-}f(x)=\lim_{x\to3^-}(-x+2)=-(3)+2=-1$$

$\because \lim_{x\to3^-}f(x)\neq f(3)\Rightarrow$

$\therefore f$ غير متصلة عند 3 من اليسار ⑤

من ①, ②, ③, ④, ⑤ نجد : f غير متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

لكن f متصلة على كل من $(-\infty,3),\ [3\,,\infty)$

إذا كانت الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ أوجد قيمة الثابتين a, b

$$f(x)=\begin{cases} x^2-a, & x<0 \\ 2, & x=0 \\ ax+b, & x>0 \end{cases}$$

x^2-a $\qquad f(0)=2 \qquad$ $ax+b$

0

$\because f$ متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

$\therefore f$ متصلة عند $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}(ax+b)=f(0)$

$a(0)+b=2 \quad \Rightarrow b=2$

$\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-a)=f(0)$

$0^2-a=2 \quad \Rightarrow a=-2$

إذا كانت الدالة f متصلة على $[1,4]$ أوجد قيمة الثابتين a, b

$$f(x)=\begin{cases} 5, & x=1 \\ ax+b, & 1<x<4 \\ b+8, & x=4 \end{cases}$$

$1 \qquad ax+b \qquad 4$

$f(1)=5 \qquad f(4)=b+8$

$\because f$ متصلة على $[1,4]$

$\therefore f$ متصلة عند 4 من اليسار & $\therefore f$ متصلة عند 1 من اليمين

$\lim\limits_{x\to 4^-}f(x)=f(4)$

$\lim\limits_{x\to 4^-}(ax+b)=b+8$

$4a+\cancel{b}=\cancel{b}+8 \quad \Rightarrow a=2$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=5$

$a+b=5 \Rightarrow \quad 2+b=5 \Rightarrow b=3$

تعميم :

إذا كانت g متصلة على فترة ما، $g(x)\ge 0$ في هذه الفترة فإن الدالة $f(x)=\sqrt{g(x)}$ متصلة على هذه الفترة

$f(x)=\sqrt{x^2-2x}$ أوجد مجال الدالة f ثم ادرس اتصال f على الفترة $[-5,0]$

$g(x)=x^2-2x$

$D_f=\{x: g(x)\ge 0\}$

$x^2-2x\ge 0$

$x^2-2x=0$ المعادلة المناظرة

$x(x-2)=0 \Rightarrow x=0\ , x=2$

$-\infty \quad + \quad 0 \quad - \quad 2 \quad + \quad \infty$

$D_f=(-\infty,0]\cup[2,\infty)=\mathbb{R}-(0,2)$

اتصال الدالة f على $[-5,0]$

$g(x)\ge 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}-(0,2)$

$\because [-5,0]\subseteq \mathbb{R}-(0,2)$

① $\therefore g(x)\ge 0 \quad \forall x\in[-5,0]$

② $g(x)$ متصلة على $[-5,0]$

①,② $\Longrightarrow$ f متصلة على $[-5,0]$

Q $f(x)=\sqrt{x^2-7x+10}$ أوجد مجال الدالة f ثم ادرس اتصال f على الفترة $[6,10]$

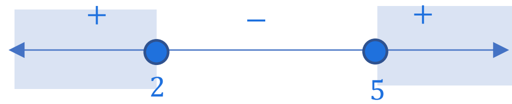
$g(x)=x^2-7x+10$

$D_f=\{x: g(x)\geq 0\}$

$x^2-7x+10\geq 0$

$x^2-7x+10=0 \Rightarrow$

$x=5\ ,x=2$



$D_f=(-\infty,2]\cup[5,\infty)\ =\mathbb{R}-(2,5)$

اتصال الدالة f على $[6,10]$

$g(x)\geq 0\quad \forall x\in\mathbb{R}-(2,5)$

$\because [6,10]\subseteq\mathbb{R}-(2,5)$

① $\therefore g(x)\geq 0\quad \forall x\in [6,10]$

② $g(x)$ متصلة على $[6,10]$

①,② $\Longrightarrow$ f متصلة على $[6,10]$

Q $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ أوجد مجال الدالة f ثم ادرس اتصال f على الفترة $[-3,3]$

$g(x)=9-x^2$

$Df=\{x: g(x)\geq 0\}$

$9-x^2\geq 0$

$9-x^2=0$ المعادلة المناظرة

$(3-x)(3+x)=0\Longrightarrow$

$x=3\ ,x=-3$

$D_f=[-3,3]$

اتصال الدالة f على $[-3,3]$

① $g(x)\geq 0\quad \forall x\in[-3,3]$

② $g(x)$ متصلة على $[-3,3]$

①,② $\Longrightarrow$ f متصلة على $[-3,3]$

Q $f(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$ ادرس اتصال f على الفترة $[1,3]$

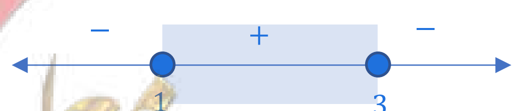
$g(x)=-x^2+4x-3$

$Df=\{x: g(x)\geq 0\}$

$-x^2+4x-3\geq 0$

$-x^2+4x-3=0\Rightarrow$

$x=1\ ,x=3$



$D_f=[1,3]$

اتصال الدالة f على $[1,3]$

① $g(x)\geq 0\quad \forall x\in[1,3]$

② $g(x)$ متصلة على $[1,3]$

①,② $\Longrightarrow$ f متصلة على $[1,3]$

ملاحظة :

ناتج تركيب دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$ هو دالة متصلة على $\mathbb{R}$

Q $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4}$ ادرس اتصال f على $\mathbb{R}$

$h(x) = x^2 - 5x + 4$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(x^2 - 5x + 4) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4}$

$\because$ $h(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$ ، $g(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore$ $f(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها تركيب دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$

Q $f(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x + 5}$ ادرس اتصال f على $\mathbb{R}$

$h(x) = -x^2 + 2x + 5,$ $g(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(-x^2 + 2x + 5) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x + 5}$

$\because$ $h(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$ ، $g(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore$ $f(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها تركيب دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$

من كراسة التمارين:

ادرس اتصال كل من الدوال التالية على $\mathbb{R}$

15. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 2}$

$h(x) = x^2 + 3x - 2$ $g(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(x) = (g\ o\ h)(x) = g(h(x)) = g(x^2 + 3x - 2) = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 2}$

$h(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$ ، $g(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore$ $f(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها تركيب دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$

16. $f(x) = |3x^2 + 4x - 1|$

$h(x) = 3x^2 + 4x - 1$ $g(x) = |x|$

$f(x) = (g\ o\ h)(x) = g(h(x)) = g(3x^2 + 4x - 1) = |3x^2 + 4x - 1|$

$h(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$ ، $g(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore$ $f(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها تركيب دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$

7. ادرس اتصال f على مجالها :

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+9} & : x\le 0\\ \frac{6}{x+3} & : x>0\end{cases}$$

$D_f=(-\infty,0]\cup(0,\infty)=\mathbb{R}$

0

$g(x)=\frac{6}{x+3}$

$g(x)$ حدودية نسبية متصلة

$\forall x\in\mathbb{R}-\{-3\}$

$\because f(x)=g(x)\quad \forall x\in(0,\infty)$

② $\therefore f(x)$ متصلة على $(0,\infty)$

$h(x)=\sqrt{x^2+9}$

بفرض: $a(x)=x^2+9$

$a(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$

$a(x)\ge 0\quad \forall x\in R$

$\therefore h(x)=\sqrt{a(x)}$ متصلة على $\mathbb{R}$

$\because f(x)=h(x)\quad \forall x\in(-\infty,0]$

① $\therefore f$ متصلة على $(-\infty,0]$

ندرس الاتصال عند $x=0$ من اليمين

نهاية المقام

$\lim_{x\to0^+}(x+3)=3\quad :3\ne0$

$f(0)=\sqrt{0^2+9}=3$

$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{6}{x+3}=\frac{6}{3}=2$

③ $\therefore f$ ليست متصلة عند 0 من اليمين $\Rightarrow \because \lim_{x\to0^+}f(x)\ne f(0)$

①, ②, ③ $\Rightarrow$

f غير متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

لكن f متصلة على كل من $(-\infty,0],(0,\infty)$

الاتصال على فترة - التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. إذا كانت f دالة متصلة كل من $[1,3),[3,5]$ فإن f متصلة على $[1,5]$ — (a) (b)

2. الدالة f : $f(x)=x^2-|x|$ متصلة لكل قيم $x\in\mathbb{R}$ — (a) (b)

3. الدالة f: $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ متصلة على $[-2,2]$ — (a) (b)

4. الدالة f: $f(x)=\frac{2x-3}{x+2}$ متصلة على $(-\infty,0)$ — (a) (b)

5. الدالة f: $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ متصلة على $(-\infty,2)$ فقط — (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. لتكن الدالة f: $f(x)=\frac{x+1}{x-4}$ فإن الدالة f:

ⓐ لها نقطتا انفصال عند كل من $x=-1$, $x=4$

ⓑ متصلة على $(-\infty,4]$

ⓒ متصلة على كل من $(-\infty,4),(4,\infty)$

ⓓ ليس أي مما سبق

7. إذا كانت f دالة متصلة على $[-2,3]$ فإن:

معلق

ⓐ $\lim_{x\to-2^+} f(x)=\lim_{x\to3^-} f(x)$

ⓑ $\lim_{x\to-2^+} f(x)=f(3)$

ⓒ $\lim_{x\to-2^+} f(x)=f(-2)$

ⓓ $\lim_{x\to3^-} f(x)=f(-2)$

8. الدالة f: $f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-25}}$ متصلة على:

ⓐ $(-\infty,\frac{1}{2}]$

ⓑ $(5,\infty)$

ⓒ $\mathbb{R}$

ⓓ $(-5,5)$

9. لتكن f: $f(x)=\begin{cases}\frac{5}{2} & : x\le-3\\ \frac{\sqrt{x^2+16}}{2} & : -3<x<0\\ \frac{4-x^2}{x-2} & : x\ge0, x\ne2\end{cases}$ ، فإن f دالة متصلة على:

ⓐ $(-\infty,\infty)$

ⓑ $(-\infty,2)$

ⓒ $(-\infty,0]$

ⓓ $(-\infty,-3]$

معلق

10. الدالة f: $f(x)=\begin{cases}\frac{3x+m}{x-2} & : x<1\\ x+n & : x>1\\ 2m & : x=1\end{cases}$ متصلة على $\mathbb{R}$ إذا كان:

ⓐ $m=-1$, $n=3$

ⓑ $m=1$, $n=-3$

ⓒ $m=-1$, $n=-3$

ⓓ $m=1$, $n=3$

11. الدالة g: $g(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & : x>1\\ 3x & : x\le1\end{cases}$ متصلة على:

ⓐ $(-\infty,1]$, $(1,\infty)$

ⓑ $(-\infty,1)$, $[1,\infty)$

ⓒ $(-\infty,\infty)$

ⓓ $(-\infty,3]$

المشتقة

المشتقة عند نقطة

تعريف مشتقة الدالة f عند $x=a$ هي : $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

تعريف (بديل) لمشتقة الدالة f عند $x=a$ هي : $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Q باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة $f: f(x)=2x^2+1$ عند $x=1$

طريقة (1):

$$x=1 \Rightarrow f(1)=2(1)^2+1=3$$

إن وجدت

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+1-3}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2(x^2-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}= \quad : x\neq 1$$

$$=2\lim_{x\to 1}(x+1)=2(1+1)=4$$

طريقة (2):

$$x=1 \Rightarrow f(1)=2(1)^2+1=3$$

إن وجدت

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(1+h)^2+1-3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(1+h)^2-2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2[(1+h)^2-1^2]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2[\cancel{(1+h-1)}(1+h+1)]}{\cancel{h}} \quad : h\neq 0$$

$$=2\lim_{h\to 0}(2+h)=2(2+0)=4$$

Q باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة $f: f(x)=3x^2$ عند $x=-2$

طريقة (1):

$$x=-2 \Rightarrow f(-2)=3(-2)^2=12$$

إن وجدت

$$f'(-2)=\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{3x^2-12}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{3(x^2-4)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{3(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} \quad : x\neq -2$$

$$=3\lim_{x\to -2}(x-2)=3(-2-2)=-12$$

طريقة (2):

$$x=-2 \Rightarrow f(-2)=3(-2)^2=12$$

إن وجدت

$$f'(-2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-12}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(-2+h)^2-12}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3[(-2+h)^2-4]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(-2+h-2)\cancel{(-2+h+2)}}{\cancel{h}}$$

$$=3\lim_{h\to 0}(-4+h)=3(-4+0)=-12$$

باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f : $f(x)=\sqrt{x}$ عند $x=a$ حيث $a>0$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ إن وجدت

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\lim_{x\to a}\frac{\overset{1}{\cancel{x-a}}}{\cancel{(x-a)}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$ $: x\neq a$

$$=\frac{\lim_{x\to a}1}{\lim_{x\to a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

شرط الجذر $a>0$

شرط المقام $\lim_{x\to a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})$

$$=\lim_{x\to a}\sqrt{x}+\lim_{x\to a}\sqrt{a}$$

$$=\sqrt{a}+\sqrt{a}=2\sqrt{a} \quad : 2\sqrt{a}\neq 0$$

أوجد باستخدام التعريف مشتقة الدالة f : $f(x)=\frac{1}{x}$ عند $x=b$ ، $b\neq 0$

$$f'(b)=\lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$ إن وجدت

$$=\lim_{x\to b}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{b}}{x-b}=\lim_{x\to b}\frac{\frac{\overset{-1}{\cancel{b-x}}}{xb}}{\cancel{x-b}}=\lim_{x\to b}\frac{-1}{xb}=\frac{-1}{(b).b}=\frac{-1}{b^2}$$

شرط المقام:

$: \lim_{x\to b}(xb)=b^2,\ b^2\neq 0$

من كراسة التمارين:

1. استخدم التعريف لإيجاد مشتقة الدالة $f(x)=\frac{3}{x}$ عند $x=3$

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$ إن وجدت

$$x=3\Rightarrow f(3)=\frac{3}{3}=1$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{3}{x}-1}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\frac{3-x}{x}\right)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{x}=\frac{-1}{3}$$

شرط المقام $\lim_{x\to 3}x=3, 3\neq 0$

2. استخدم التعريف لإيجاد مشتقة الدالة $f(x)=2x^3$ عند $x=1$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$ إن وجدت

$$x=1\Rightarrow f(1)=2(1)^3=2$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x^3-1^3)}{x-1}=2\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1^2)}{\cancel{x-1}}$$ $: x\neq 1$

$$=2\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=2(1^2+1+1)=6$$

المشتقة من جهة واحدة

Q بين أن الدالة التالية لها مشتقة من جهة اليمين ولها مشتقة من جهة اليسار عند $x=0$ لكن ليس لها مشتقة عند $x=0$:

- $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\le 0 \\ 2x & ,x>0 \end{cases}$

x^2 0 $2x$

$f(0)=0^2=0$

(إن وُجدت) $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}2=2$

(إن وُجدت) $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to0^-}x=0$

$\because f'_-(0)\neq f'_+(0)\Longrightarrow$ غير موجودة $f'(0)$

Q لتكن f : $f(x)=|x-2|$ ، **ابحث** قابلية اشتقاق الدالة f عند $x=2$

الدالة f متصلة عند $x=2$ ، لأنها دالة قيمة مطلقة لكثيرة حدود ،نبحث قابلية اشتقاق الدالة عند $x=2$

$f(x)=|x-2|=\begin{cases} x-2 & x\ge 2 \\ -x+2 & x<2 \end{cases}$

$-x+2$ 2 $x-2$

$f(2)=2-2=0$

(إن وُجدت) $f'_+(2)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\overset{1}{\cancel{x-2}}-0}{\cancel{x-2}}=\lim\limits_{x\to2^+}1=1$

(إن وُجدت) $f'_-(2)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\overset{-1}{\cancel{-x+2}}-0}{\cancel{x-2}}=\lim\limits_{x\to2^-}-1=-1$

$\because f'_-(2)\neq f'_+(2)\Longrightarrow f'(2)$ غير موجودة

الدالة f متصلة عند $x=2$ ، لكنها غير قابلة للاشتقاق عند $x=2$

لتكن f : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} & ,x \le 1 \\ \sqrt{x} & ,x > 1 \end{cases}$ بين أن للدالة f مشتقة لجهة اليمين مساوية للمشتقة لجهة اليسار عند $x = 1$

$f(1) = \frac{1}{4}(1)^2 + \frac{3}{4} = 1$

$\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}$ | 1 | $\sqrt{x}$

إن وجدت $f'_+(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\cancel{x - 1}}{\cancel{(x - 1)}(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\lim\limits_{x \to 1^+} 1}{\lim\limits_{x \to 1^+} (\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{2}$

شرط المقام: $\lim\limits_{x \to 1^+} (\sqrt{x} + 1) =$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x} + \lim\limits_{x \to 1^+} 1 = \sqrt{1} + 1 = 2 \quad : 2 \ne 0$

شرط الجذر: $1 > 0$

إن وجدت $f'_-(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} - 1}{x - 1}$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{\frac{1}{4}(x^2 - 1)}{x - 1}$

$= \frac{1}{4} \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{\cancel{(x - 1)}(x + 1)}{\cancel{x - 1}}$

$= \frac{1}{4} \lim\limits_{x \to 1^-} (x + 1) = \frac{1}{4}(1 + 1) = \frac{1}{2}$

$\because f'_-(1) = f'_+(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$

معلق

لتكن الدالة f حيث : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ,x \le -1 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} & ,x > -1 \end{cases}$ بين أن للدالة f مشتقة لجهة اليمين مساوية للمشتقة لجهة اليسار عند $x = -1$

$f(-1) = \frac{1}{-1} = -1$

$\frac{1}{x}$ | -1 | $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}$

(إن وُجدت) $f'_+(-1) = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$

$= \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} + 1}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}}{x + 1}$

$= \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{\frac{1}{2}(x^2 - 1)}{x + 1} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{(x - 1)\cancel{(x + 1)}}{\cancel{x + 1}}$

$= \frac{1}{2} \lim\limits_{x \to -1^+} (x - 1) = \frac{1}{2}(-1 - 1) = -1$

(إن وجدت) $f'_-(-1) = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$

$= \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{\frac{1}{x} + 1}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{\left(\frac{\cancel{1 + x}}{x}\right)}{\cancel{x + 1}}$

$= \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{-1} = -1$

شرط المقام $\lim\limits_{x \to -1^-} x = -1, -1 \ne 0$

$\because f'_-(-1) = f'_+(-1) = -1 \Rightarrow f'(-1) = -1$

لتكن $f(x) = x^3$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة إن وجدت

طريقة (1) :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{(إن وُجدت)}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{\cancel{(x - a)}(x^2 + ax + a^2)}{\cancel{x - a}} = (a)^2 + a(a) + a^2 = 3a^2$$

$$\because f'(a) = 3a^2 \quad \therefore f'(x) = 3x^2$$

طريقة (2) :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{(إن وُجدت)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{(x + h - x)}\left((x+h)^2 + x(x+h) + x^2\right)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0}(x+h)^2 + \lim_{h\to 0} x(x+h) + \lim_{h\to 0} x^2$$

$$= (x+0)^2 + x(x+0) + x^2 \quad = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$$

لتكن $f(x) = x^2 + 2$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة

طريقة (1) :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{(إن وُجدت)}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{x^2 + 2 - (a^2 + 2)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2 + 2 - a^2 - 2}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\cancel{(x - a)}(x + a)}{\cancel{x - a}} = \lim_{x\to a}(x + a) = a + a = 2a$$

$$\because f'(a) = 2a \quad \therefore f'(x) = 2x$$

طريقة (2) :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{(إن وُجدت)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + 2 - (x^2+2)}{h}$$

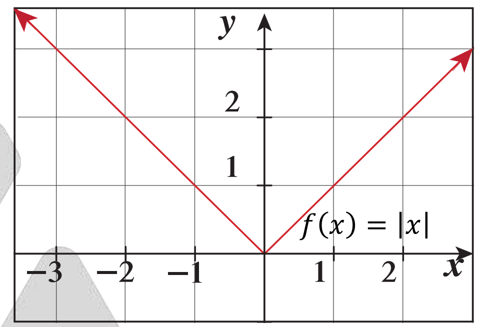
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + 2 - x^2 - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{(x + h - x)}(x + h + x)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0}(2x + h) = 2x + 0 = 2x$$

متى تكون $f'(a)$ غير موجودة؟

- **ركن :**

تكون المشتقة من جهة اليمين لا تساوي المشتقة من جهة اليسار $f'_+(a) \neq f'_-(a)$



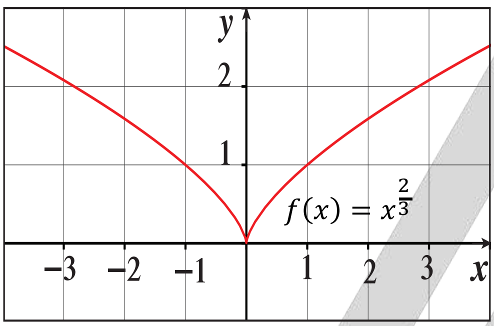
- **ناب :**

يكون ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطع محددة يقترب من ∞ من جهة ويقترب من $-\infty$ من الجهة الثانية

$$f'_-(a) \to \infty \ \& \ f'_+(a) \to -\infty$$

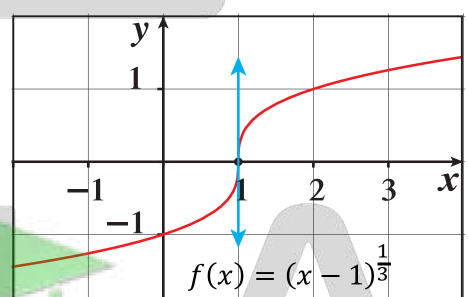
أو

$$f'_-(a) \to -\infty \ \& \ f'_+(a) \to +\infty$$



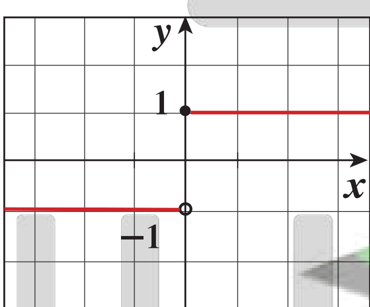
- **مماس رأسي :**

يكون المماس رأسياً عند نقطة محددة



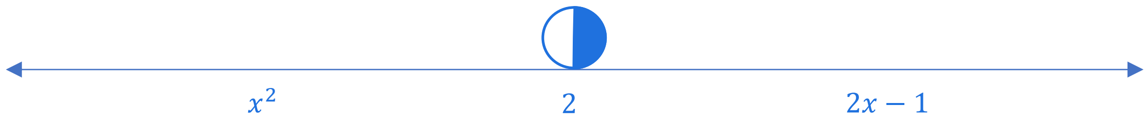
- **عدم اتصال :**

إذا كانت الدالة غير متصلة عند $x = a$ فإن $f'(a)$ غير موجودة



Q لتكن الدالة: $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x<2 \\ 2x-1 & ,x\geq 2 \end{cases}$ **ابحث** قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x=2$

نبحث اتصال الدالة f عند $x=2$



$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x^2=(2)^2=4$

$f(2)=2(2)-1=3$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(2x-1)$

$=2(2)-1=3$

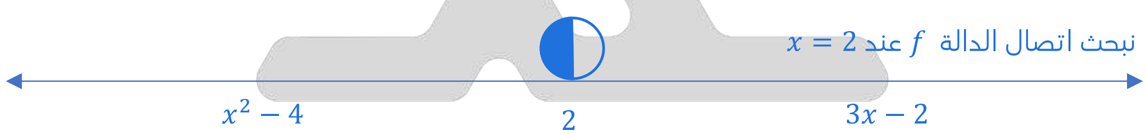
$\because \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \quad \therefore \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة

بالتالي f ليست متصلة عند $x=2$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x=2$

Q لتكن الدالة: $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & ,x\leq 2 \\ 3x-2 & ,x>2 \end{cases}$ **ابحث** قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x=2$

نبحث اتصال الدالة f عند $x=2$



$f(2)=2^2-4=0$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-4)=(2)^2-4=0$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to 2^+}(3x-2)=3(2)-2=4$

$\because \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \quad \therefore \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة

بالتالي f ليست متصلة عند $x=2$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x=2$

لتكن الدالة: $f(x) = \begin{cases} 6x-1 & ,x > \frac{1}{2} \\ 2x+1 & ,x \le \frac{1}{2} \end{cases}$ بين أن الدالة f متصلة عندما $x = \frac{1}{2}$

ولكنها غير قابلة للاشتقاق عندها

الاتصال

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} (2x+1) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} (6x-1) = 6\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 2$$

$$\because \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = 2$$

$\because \lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$ f متصلة عند $x = \frac{1}{2}$

الاشتقاق

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 2$$

$f'_-\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}}$ إن وجدت

$$= \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{2x+1-2}{x-\frac{1}{2}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{2x-1}{x-\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{2\cancel{\left(x-\frac{1}{2}\right)}}{\cancel{x-\frac{1}{2}}} = \quad : x \ne \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} (2) = 2$$

$f'_+\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}}$ إن وجدت

$$= \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{6x-1-2}{x-\frac{1}{2}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{6x-3}{x-\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{6\cancel{\left(x-\frac{1}{2}\right)}}{\cancel{x-\frac{1}{2}}} = \quad : x \ne \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} (6) = 6$$

$\because f'_-\left(\frac{1}{2}\right) \ne f'_+\left(\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow$ غير موجودة $f'\left(\frac{1}{2}\right)$

الدالة f متصلة عند $x = \frac{1}{2}$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند $x = \frac{1}{2}$

لتكن الدالة: $f(x) = \begin{cases} -x-1 & ,x > -\frac{1}{3} \\ 5x+1 & ,x \le -\frac{1}{3} \end{cases}$ بين أن الدالة f متصلة وغير قابلة للاشتقاق عند $x = -\frac{1}{3}$

الاتصال

$$\underset{5x+1}{\longleftarrow}\quad \frac{-1}{3} \quad\underset{-x-1}{\longrightarrow}$$

$$f\left(\frac{-1}{3}\right) = 5\left(\frac{-1}{3}\right) + 1 = \frac{-2}{3}$$

$$\lim_{x\to\frac{-1}{3}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{-1}{3}^-} (5x+1) = 5\left(\frac{-1}{3}\right) + 1 = \frac{-2}{3}$$

$$\lim_{x\to\frac{-1}{3}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{-1}{3}^+} (-x-1) = -\left(\frac{-1}{3}\right) - 1 = \frac{-2}{3}$$

$$\because \lim_{x\to\frac{-1}{3}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{-1}{3}^+} f(x) = \frac{-2}{3} \Rightarrow \lim_{x\to\frac{-1}{3}} f(x) = \frac{-2}{3}$$

$$\because \lim_{x\to\frac{-1}{3}} f(x) = f\left(-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow$$

$\therefore$ f متصلة عند $x = -\frac{1}{3}$

معلق

الاشتقاق

$$f'_-\left(\frac{-1}{3}\right) = \lim_{x\to\frac{-1}{3}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{-1}{3}\right)}{x - \left(\frac{-1}{3}\right)}$$ إن وجدت

$$= \lim_{x\to\frac{-1}{3}^-} \frac{5x+1-\frac{-2}{3}}{x+\frac{1}{3}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{-1}{3}^-} \frac{5x+\frac{5}{3}}{x+\frac{1}{3}} \quad : x \ne -\frac{1}{3}$$

$$= \lim_{x\to\frac{-1}{3}^-} \frac{5\left(\cancel{x+\frac{1}{3}}\right)}{\cancel{x+\frac{1}{3}}} = \lim_{x\to\frac{-1}{3}^-} (5) = 5$$

$$f'_+\left(\frac{-1}{3}\right) = \lim_{x\to\frac{-1}{3}^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{-1}{3}\right)}{x - \left(\frac{-1}{3}\right)}$$ إن وجدت

$$= \lim_{x\to\frac{-1}{3}^+} \frac{-x-1-\frac{-2}{3}}{x+\frac{1}{3}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{-1}{3}^+} \frac{\overset{(-1)}{\cancel{-x-\frac{1}{3}}}}{\cancel{x+\frac{1}{3}}} \quad : x \ne -\frac{1}{3}$$

$$= \lim_{x\to\frac{-1}{3}^+} (-1) = -1$$

$\because f'_-\left(\frac{-1}{3}\right) \ne f'_+\left(\frac{-1}{3}\right) \Rightarrow f'\left(\frac{-1}{3}\right)$ غير موجودة

الدالة f متصلة عند $x = \frac{-1}{3}$ لكنها غير قابلة للاشتقاق عند $x = \frac{-1}{3}$

لتكن f: $f(x)=\begin{cases} x^2-x-2 & ,x\le 2 \\ -x^2+7x-10 & ,x>2 \end{cases}$ بيّن الدالة f متصلة عند $x=2$ وادرس قابلية الاشتقاق عندها

الاتصال

x^2-x-2 | 2 | $-x^2+7x-10$

$f(2)=2^2-2-2=0$

$\lim_{x\to2^+} f(x)=$

$\lim_{x\to2^+}(-x^2+7x-10)$

$=-(2)^2+7(2)-10=0$

$\lim_{x\to2^-} f(x)=$

$\lim_{x\to2^-}(x^2-x-2)$

$=(2)^2-(2)-2=0$

$\therefore \lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^+} f(x)=0 \Rightarrow$ $\therefore \lim_{x\to2} f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to2} f(x)=0=f(2) \Rightarrow$ $\therefore f$ متصلة عند $x=2$

الاشتقاق

$f(2)=2^2-2-2=0$

إن وجدت $f'_+(2)=\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2^+}\frac{-x^2+7x-10-0}{x-2}$

$=-1\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-7x+10}{x-2}$

$=-\lim_{x\to2^+}\frac{\cancel{(x-2)}(x-5)}{\cancel{x-2}}$ $: x\neq 2$

$=-\lim_{x\to2^+}(x-5)=-(2-5)=3$

إن وجدت $f'_-(2)=\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-x-2-0}{x-2}$

$=\lim_{x\to2^-}\frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{x-2}}$ $: x\neq 2$

$=\lim_{x\to2^-}(x+1)=(2)+1=3$

$\therefore f'_-(2)=f'_+(2)=3 \Rightarrow f'(2)=3$

الدالة f متصلة و قابلة للاشتقاق عند $x=2$

ادرس اتصال الدالة f عندما $x = 1$ وقابلية اشتقاقها عند هذه النقطة حيث:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2+1} & , x \le 1 \\ 2x - 1 & , x > 1 \end{cases}$$

الاتصال

$\frac{2}{x^2+1}$ | 1 | $2x - 1$

$$f(1) = \frac{2}{1^2+1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{2}{x^2+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$\lim_{x \to 1^-} (x^2 + 1) =$ شرط المقام

$1^2 + 1 = 2, \quad 2 \ne 0$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x - 1)$$

$$= 2(1) - 1 = 1$$

$$\because \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

$\because \lim_{x \to 1} f(x) = f(1) \Rightarrow x = 1$ متصلة عند f $\therefore$

الاشتقاق

$$f(1) = \frac{2}{1^2+1} = 1$$

$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ إن وجدت

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{\left(\frac{2}{x^2+1}\right) - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\left(\frac{1 - x^2}{x^2+1}\right)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{\overset{-1}{\cancel{(1 - x)}}(1 + x)}{x^2+1}}{\cancel{x - 1}} \quad : x \ne 1$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{-1 - x}{x^2+1} = \frac{-1 - 1}{2} = -1$$

$\lim_{x \to 1^-} (x^2 + 1) =$ شرط المقام

$1^2 + 1 = 2, \quad 2 \ne 0$

$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ إن وجدت

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{2x - 1 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{2x - 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{2\cancel{(x - 1)}}{\cancel{x - 1}} \quad : x \ne 1$$

$$= \lim_{x \to 1^+} (2) = 2$$

$\because f'_-(1) \ne f'_+(1)$ $\therefore$ $f'(1)$ غير موجودة

الدالة متصلة عند $x = 1$ لكنها غير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

Q لتكن $f:$ $f(x)=\begin{cases} x+5 & ,x\le 3 \\ x^2-1 & ,x>3 \end{cases}$ أوجد إن أمكن $f'(3)$

$f(3)=3+5=8$

$x+5$ | 3 | x^2-1

إن وجدت
$$f'_-(3)=\lim_{x\to3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3^-}\frac{x+5-8}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3^-}\frac{\cancel{x-3}}{\cancel{x-3}}^{(1)}=\lim_{x\to3^-}(1)=1$$
$:x\neq 3$

إن وجدت
$$f'_+(3)=\lim_{x\to3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3^+}\frac{x^2-1-8}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3^+}\frac{x^2-9}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3^+}\frac{(\cancel{x-3})(x+3)}{\cancel{x-3}}$$
$:x\neq 3$
$$=\lim_{x\to3^+}(x+3)=3+3=6$$

$\because f'_-(3)\neq f'_+(3)\Longrightarrow f'(3)$ غير موجودة

Q لتكن $f:$ $f(x)=\begin{cases} x^2+x & , & x\le -1 \\ x^2-x-2 & , & x>-1 \end{cases}$ أوجد إن أمكن $f'(-1)$

$f(-1)=(-1)^2+(-1)=0$

x^2+x | -1 | x^2-x-2

إن وجدت
$$f'_-(-1)=\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x--1}$$
$$=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2+x-0}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1^-}\frac{x(\cancel{x+1})}{\cancel{x+1}}$$
$:x\neq -1$
$$=\lim_{x\to-1^-}x=-1$$

إن وجدت
$$f'_+(-1)=\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x--1}$$
$$=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2-x-2-0}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1^+}\frac{(\cancel{x+1})(x-2)}{\cancel{x+1}}$$
$:x\neq -1$
$$=\lim_{x\to-1^+}(x-2)=-3$$

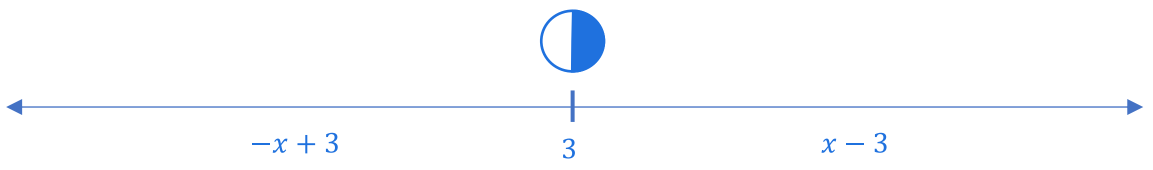
$\because f'_-(-1)\neq f'_+(-1)\Longrightarrow f'(-1)$ غير موجودة

بعض مسائل كراسة التمارين:

5. لتكن الدالة $f(x) = |x - 3|$

بين أن الدالة f متصلة عند $x = 3$ و لكنها غير قابلة للاشتقاق عندها.

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & : x \geq 3 \\ -x + 3 & : x < 3 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (-x + 3) = 0$$

$$f(3) = (3) - 3 = 0$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x - 3) = 0$$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 3$ لأن $\lim_{x\to 3} f(x) = 0 = f(3)$

$$f'_-(3) = \lim_{x\to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{-x + 3 - 0}{x - 3} = -1$$

$$f'_+(3) = \lim_{x\to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{x - 3 - 0}{x - 3} = 1$$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 3$ لأن $f'_-(3) \neq f'_+(3)$

7. لتكن الدالة g : $g(x) = \begin{cases} (x+1)^2 \ , & x \leq 0 \\ 2x + 1 \ , & x > 0 \end{cases}$ أوجد $g'(0)$.

$$g(0) = (0 + 1)^2 = 1$$

$$g'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{(x+1)^2 - 1^2}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(x + 1 - 1)(x + 1 + 1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x(x+2)}{x} = \lim_{x\to 0^-} (x + 2) = 2$$

$$g'_+(0) = \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x + 1 - 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\because g'_-(0) = g'_+(0) = 2 \Rightarrow g'(0) = 2$$

8. لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 & : x \le 2 \\ 4x - 4 & : x > 2 \end{cases}$ أوجد $f'(2)$.

x^2 | $4x - 4$

2

$f(2) = 2^2 = 4$

(إن وجدت) $f'_{-}(2) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x \to 2^-} (x + 2) = 4$

(إن وجدت) $f'_{+}(2) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4x - 4 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4x - 8}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4(x - 2)}{x - 2} = 4$

$\because f'_{-}(2) = f'_{+}(2) = 4 \Rightarrow f'(2) = 4$

المشتقة-التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

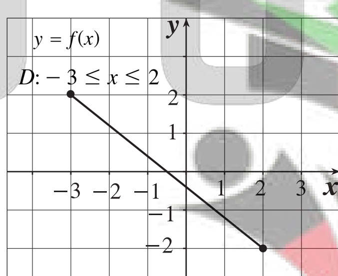
1. إذا كانت f : $f(x) = 3x - 12$ فإن $f'(x) = 3$ (a) (b)

2. إن الدالة f : $f(x) = x|x|$ غير قابلة لاشتقاق $\forall x \in \mathbb{R}$ (a) (b)

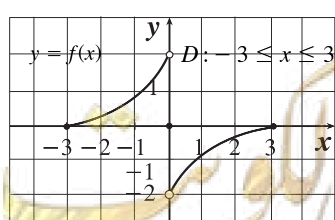
3. إن الدالة f : $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4x - 5}$ غير قابلة للاشتقاق عندما x تساوي -1 فقط (a) (b)

4. إن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & : x < 4 \\ x^2 - 9 & : x > 4 \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x = 4$ (a) (b)

5. إن الدالة f ذات الرسم البياني
قابلة للاشتقاق على الفترة $[-3, 2]$ (a) (b)



6. إن الدالة f ذات الرسم البياني أدناه
هي متصلة على الفترة $[-3, 3]$
ولكن غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ (a) (b)

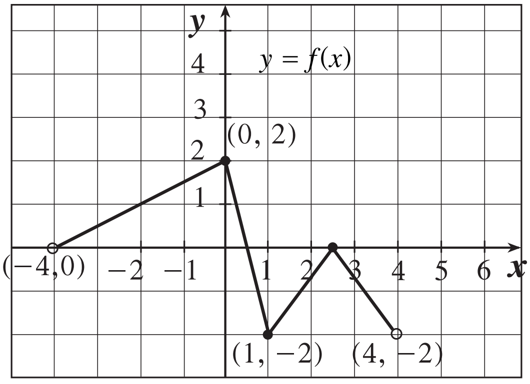


ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

7. إن الدالة f : $f(x) = x + \sqrt{x^2} + 2$ ليست قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ و السبب هو :

ⓐ ناب ⓑ ركن ⓒ مماس عمودي ⓓ غير متصلة

8. تكون الدالة f ذات الرسم البياني أدناه غير قابلة للاشتقاق عند كل $x = \cdots$



ⓐ $0, 1, 2\frac{1}{2}$

ⓑ $-2, +2$

ⓒ $-4, 0, 1, 4$

ⓓ $1, 4$

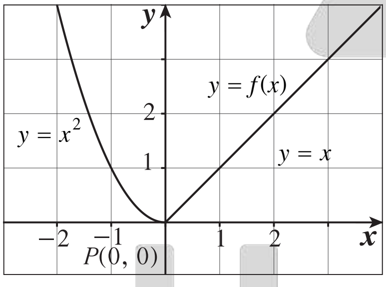
9. الدالة f القابلة للاشتقاق عند $x = 3$ فيما يلي هي :

ⓐ $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ ⓑ $\sqrt{3-x}$ ⓒ $\begin{cases} 3x-1 & : x \le 3 \\ 1 & : x > 3 \end{cases}$ ⓓ $\sqrt[3]{x+2}$

10. إذا كانت $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ فإن مجال f' هو

ⓐ $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ ⓑ $\mathbb{R} - \{-2\}$ ⓒ $\mathbb{R} - \{2\}$ ⓓ $\mathbb{R} - (-2, 2)$

11. في الشكل المقابل ، عند النقطة P :



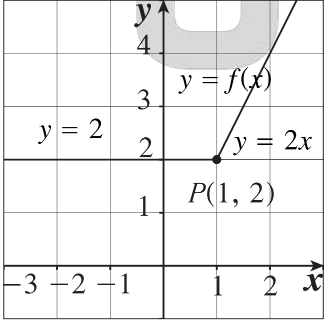
ⓐ المشتقة جهة اليسار موجبة

ⓑ المشتقة جهة اليمين سالبة

ⓒ الدالة قابلة للاشتقاق

ⓓ ليس أي مما سبق

12. في الشكل المقابل ، عند النقطة P :



ⓐ $f'_+(1) = 1$

ⓑ $f'_-(1) = 0$

ⓒ $f'_-(1) = 2$

ⓓ f قابلة للاشتقاق

تدرب و تفوق

اختبارات الكترونية ذكية

قواعد الاشتقاق

قاعدة (1) :

مشتقة أي دالة ثابتة تساوي الصفر

قاعدة (2) :

إذا كان $f(x) = x$ فإن: $f'(x) = 1$

قاعدة (3) :

إذا كان $f(x) = x^n$ فإن: $f'(x) = n.x^{n-1}$

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

Q $f(x) = x^4$ $\quad f'(x) = 4\,x^{4-1} = 4\,x^3$

Q $f(x) = x^{10}$ $\quad f'(x) = 10\,x^{10-1} = 10\,x^9$

Q $f(x) = x^{12}$ $\quad f'(x) = 12\,x^{12-1} = 12\,x^{11}$

قاعدة (4) :

إذا كانت f دالة في x قابلة للاشتقاق وكان k عددا حقيقيا ثابتا فإن:

$$(k.f(x))' = k.f'(x)$$

قاعدة (5) :

قاعدة الجمع والطرح: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

Q أوجد $\frac{dy}{dt}$ حيث : $y = t^3 + 6t^2 - \frac{5}{3}t + 16$

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2 + 12t - \frac{5}{3}$$

Q أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث : $y = 5x^3 - 4x^2 + 6$

$$\frac{dy}{dx} = 15x^2 - 8x$$

قاعدة (6) :

قاعدة اشتقاق ضرب دالتين: $(f.g)' = f'.g + f.g'$

Q أوجد $f'(x)$ حيث: $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$

$$f'(x) = (2x)(x^3 + 3) + (x^2 + 1)(3x^2) = 2x^4 + 6x + 3x^4 + 3x^2 = 5x^4 + 3x^2 + 6x$$

أوجد $f'(x)$ حيث :

$f(x) = (2x+1)(3x-2)$

$f'(x) = (2)(3x-2) + (2x+1)(3) \quad = 6x - 4 + 6x + 3 = 12x - 1$

$f(x) = 4x^2(x+6)$

طريقة أولى : $f'(x) = (8x)(x+6) + (4x^2)(1) \ = 8x^2 + 48x + 4x^2 \ = 12x^2 + 48x$

طريقة ثانية : $f(x) = 4x^2(x+6) = 4x^3 + 24x^2 \Rightarrow f'(x) = 12x^2 + 48x$

$f(x) = (x^3-4)^2$

$f(x) = (x^3-4)^2 = (x^3-4)(x^3-4)$

$f'(x) = (3x^2)(x^3-4) + (x^3-4)(3x^2) = 3x^5 - 12x^2 + 3x^5 - 12x^2 = 6x^5 - 24x^2$

قاعدة (7) :

قاعدة القسمة : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$

أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \frac{x^3-1}{5x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(5x^2+1) - (x^3-1)(10x)}{(5x^2+1)^2} = \frac{15x^4 + 3x^2 - 10x^4 + 10x}{(5x^2+1)^2} = \frac{5x^4 + 3x^2 + 10x}{(5x^2+1)^2}$$

أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \frac{4x^2+2x}{2x^3+5}$

$$f'(x) = \frac{(8x+2)(2x^3+5) - (4x^2+2x)(6x^2)}{(2x^3+5)^2}$$

$$= \frac{16x^4 + 40x + 4x^3 + 10 - 24x^4 - 12x^3}{(2x^3+5)^2} = \frac{-8x^4 - 8x^3 + 40x + 10}{(2x^3+5)^2}$$

إيجاد معادلة المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة $(a, f(a)) = (x_1, y_1)$ ومعادلة المستقيم العمودي (الناظم) على منحنى الدالة عند النقطة

ميل المماس	ميل الناظم (العمودي)
$f'(a) = m$	$\frac{-1}{f'(a)} = \frac{-1}{m}$
معادلة المماس	معادلة الناظم (العمودي)
$y - f(a) = f'(a)(x-a)$	$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x-a)$
$y - y_1 = m(x - x_1)$	$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

Q أوجد معادلة المماس للمنحنى $y = x^3 + x$ عند النقطة : $(1,2)$

$$y = f(x) = x^3 + x \Rightarrow y' = f'(x) = 3x^2 + 1$$

ميل المماس $m = f'(1) = 3(1)^2 + 1 = 4$

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = 4(x - 1)$$

$$y = 4x - 4 + 2$$

$$y = 4x - 2$$

معادلة الناظم (العمودي)

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{-1}{4}(x - 1)$$

$$y = \frac{-1}{4}x + \frac{1}{4} + 2$$

$$y = \frac{-1}{4}x + \frac{9}{4}$$

Q أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم عند النقطة: $(1,\frac{2}{3})$ لمنحنى الدالة : $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+2}$

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x^2+2) - (x^3+1)(2x)}{(x^2+2)^2}$$

ميل المماس

$$m = f'(1) = \frac{(3\times1^2)(1^2+2) - (1^3+1)(2)}{(1^2+2)^2} = \frac{5}{9}$$

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{2}{3} = \frac{5}{9}(x - 1)$$

$$y = \frac{5}{9}x - \frac{5}{9} + \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{5}{9}x + \frac{1}{9}$$

معادلة الناظم (العمودي)

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - \frac{2}{3} = \frac{-9}{5}(x - 1)$$

$$y = \frac{-9}{5}x + \frac{9}{5} + \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{-9}{5}x + \frac{37}{15}$$

Q أوجد معادلة المماس و معادلة الناظم عند النقطة: $(1,0)$ لمنحنى الدالة: $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

$$f'(x) = \frac{(1)(x+2) - (x-1)(1)}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x+1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} \Rightarrow m = f'(1) = \frac{3}{(1+2)^2} = \frac{1}{3}$$

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{1}{3}(x - 1)$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

معادلة الناظم (العمودي)

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - 0 = -3(x - 1)$$

$$y = -3x + 3$$

نتيجة:

إذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق وكانت $g(x) \neq 0$ ، k عدد ثابتاً فإن: $\left(\frac{k}{g(x)}\right)' = \frac{-k.g'(x)}{(g(x))^2}$

أوجد : $f'(x)$

Q $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$ $\quad f'(x) = \frac{-3(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-6x}{(x^2+1)^2}$

Q $f(x) = \frac{-4}{x^2+2x+5}$ $\quad f'(x) = \frac{4(2x+2)}{(x^2+2x+5)^2} = \frac{8x+8}{(x^2+2x+5)^2}$

الأسس الصحيحة السالبة

$f(x) = \frac{4}{x^2} = 4x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -8x^{-3}$ $\quad f(x) = x^{-4} \Rightarrow f'(x) = -4x^{-5}$

$f(x) = \frac{-3}{x^5} = -3x^{-5} \Rightarrow f'(x) = 15x^{-6}$ $\quad f(x) = x^{-5} \Rightarrow f'(x) = -5x^{-6}$

قاعدة:

$f(x) = \frac{a}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-a}{x^2} \quad : a \neq 0$

Q لتكن $y = \frac{x^2+3}{2x}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 1$

$y = \frac{x^2}{2x} + \frac{3}{2x} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}$

$y' = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2x^2}$

$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = y'(1) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2(1)^2} = -1$

Q لتكن $y = \frac{3x^2+7}{8x^2}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = -1$

$y = \frac{3x^2}{8x^2} + \frac{7}{8x^2} = \frac{3}{8} + \frac{7}{8}x^{-2}$

$y' = \frac{7}{8}(-2x^{-3}) = \frac{-7}{4}x^{-3}$

$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=-1} = y'(-1) = \frac{-7}{4}(-1)^{-3} = \frac{7}{4}$

الدوال الجذرية:

إذا كانت $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ **حيث** m, n **عددان صحيحان مختلفان** $n \neq 0$ **فإن :** $f'(x) = \frac{m}{n}x^{\left(\frac{m}{n}-1\right)}$

$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$

إذا كانت $f(x) = \sqrt{x}$ **تكون** $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

أوجد : $f'(x)$

Q $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ $\quad f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$

Q $f(x) = \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{-1}{4}}$

Q $f(x) = x^{\frac{3}{2}}; x > 0$ $\quad f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

Q $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & ,x\le 1 \\ 2x+1 & ,x>1 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها أوجد $f'(x)$ إن أمكن

$$D_f=(-\infty\,,1]\cup(1\,,\infty)=\mathbb{R} \qquad f'(x)=\begin{cases} 2x & x<1 \\ \text{تُبحث} & x=1 \\ 2 & x>1 \end{cases}$$

$$f(1)=1^2+2=3$$

x^2+2 | 1 | $2x+1$

إن وجدت

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+2-3}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} \qquad x\ne1$$

$$=\lim_{x\to1^-}(x+1)=2$$

إن وجدت

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{2x+1-3}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{2x-2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} \qquad x\ne1$$

$$=\lim_{x\to1^+}2=2$$

$$f'_-(1)=f'_+(1)=2 \quad\Rightarrow f'(1)=2$$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases} 2x & x<1 \\ 2 & x=1 \\ 2 & x>1 \end{cases}=\begin{cases} 2x & x<1 \\ 2 & x\ge1 \end{cases} \Rightarrow D_{f'}=\mathbb{R}$$

أوجد المشتقة إن أمكن لكل من الدوال التالية:

- $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & ,x\le 2 \\ 4x-3 & ,x>2 \end{cases}$ $\qquad f'(x)=\begin{cases} 2x & x<2 \\ \text{تُبحث} & x=2 \\ 4 & x>2 \end{cases}$

$$D_f=(-\infty\,,2]\cup(2\,,\infty)=\mathbb{R}$$

$$f(2)=2^2+1=5$$

x^2+1 | 2 | $4x-3$

إن وجدت

$$f'_-(2)=\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2+1-5}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-4}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2^-}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} \qquad x\ne2$$

$$=\lim_{x\to2^-}(x+2)=4$$

إن وجدت

$$f'_+(2)=\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2^+}\frac{4x-3-5}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{4x-8}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2^+}\frac{4\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} \qquad x\ne2$$

$$=\lim_{x\to2^+}4=4$$

$$\because f'_-(2)=f'_+(2)=4\Rightarrow f'(2)=4$$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases} 2x & x<2 \\ 4 & x=2 \\ 4 & x>2 \end{cases}=\begin{cases} 2x & x<2 \\ 4 & x\ge2 \end{cases}\Rightarrow D_{f'}=\mathbb{R}$$

- $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & ,x<1 \\ 2\sqrt{x} & ,x\ge 1 \end{cases}$ $\quad D_f=(-\infty,1)\cup[1,\infty)=\mathbb{R}$ $\quad f'(x)=\begin{cases} 2x & x<1 \\ \text{تُبحث} & x=1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & x>1 \end{cases}$

x^2+1 $\quad$ 1 $\quad$ $2\sqrt{x}$ $\quad \to f(1)=2\sqrt{1}=2$

إن وجدت $\quad f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} \qquad : x\ne 1$$

$$=\lim_{x\to1^-}(x+1)$$

$$=1+1=2$$

إن وجدت $\quad f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{2\sqrt{x}-2}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)} \qquad : x\ne 1$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to1^+}2}{\lim\limits_{x\to1^+}(\sqrt{x}+1)}=\frac{2}{2}=1$$

شرط المقام:

$$\lim_{x\to1^+}(\sqrt{x}+1)=\lim_{x\to1^+}\sqrt{x}+\lim_{x\to1^+}1$$

$$=\sqrt{1}+1=2 \quad , \quad 2\ne 0 \quad , \quad 1>0$$

$\because f'_-(1)\ne f'_+(1) \Rightarrow$ غير موجودة $f'(1)$ $\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x & x<1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & x>1 \end{cases}$ $\Rightarrow D_{f'}=\mathbb{R}-\{1\}$

من كراسة التمارين:

13.أوجد معادلة المماس و معادلة العمودي (الناظم) لمنحنى الدالة $y=\frac{8}{4+x^2}$ عند النقطة $(2,1)$.

$$y=f(x)=\frac{8}{4+x^2}$$

$$y'=f'(x)=\frac{-8(2x)}{(4+x^2)^2}=\frac{-16x}{(4+x^2)^2}$$

ميل المماس $\quad m=f'(2)=\dfrac{-16(2)}{(4+2^2)^2}=\dfrac{-1}{2}$

معادلة المماس

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-1=\frac{-1}{2}(x-2)$$

$$y=\frac{-1}{2}x+1+1$$

$$y=\frac{-1}{2}x+2$$

معادلة الناظم (العمودي)

$$y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1)$$

$$y-1=2(x-2)$$

$$y=2x-4+1$$

$$y=2x-3$$

14. لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases} x-\frac{4}{x} & ,x\ge 2\\ x^2-4 & ,x<2\end{cases}$ أوجد $f'(x)$ وعين مجالها

$D_f=(-\infty,2)\cup[2,\infty)=\mathbb{R}$

$f'(x)=\begin{cases}1+\frac{4}{x^2} & x>2\\ \text{تُبحث} & x=2\\ 2x & x<2\end{cases}$

x^2-4 $\qquad$ $x-\frac{4}{x}\rightarrow f(2)=2-\frac{4}{2}=0$

2

$\frac{x}{1}-\frac{4}{x}=\frac{x^2-4}{x}=\frac{(x-2)(x+2)}{x}$

⚠ معلق

$f'_-(2)=\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ $\qquad$ $f'_+(2)=\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-4-0}{x-2}$ $\qquad$ $=\lim_{x\to2^+}\frac{\frac{(\cancel{x-2})(x+2)}{x}}{\cancel{x-2}}$

$=\lim_{x\to2^-}\frac{(\cancel{x-2})(x+2)}{\cancel{x-2}}=4$ $\qquad$ $=\lim_{x\to2^+}\frac{x+2}{x}=\frac{4}{2}=2$ $\qquad$ $2\neq0$

$\because f'_-(2)\neq f'_+(2)\Rightarrow$ غير موجودة $f'(2)\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}1+\frac{4}{x^2} & x>2\\ 2x & : x<2\end{cases}$ $\Rightarrow D_{f'}=\mathbb{R}-\{2\}$

قواعد الاشتقاق - التمارين الموضوعية

UULA

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. إذا كانت $y=-x^2+3$ فإن $\frac{dy}{dx}=-2$ $\qquad$ ⓐ ⓑ

2. إذا كانت $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{3}+x$ فإن $\frac{dy}{dx}=x^2+\frac{2}{3}x+1$ $\qquad$ ⓐ ⓑ

3. إذا كانت $y=\frac{2x+5}{3x-2}$ فإن $\frac{dy}{dx}=\frac{12x+11}{(3x-2)^2}$ $\qquad$ ⓐ ⓑ

4. إذا كانت $y=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$ فإن $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{x^4}$ $\qquad$ ⓐ ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

5. إذا كانت $y=1-x+x^2-x^3$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

ⓐ $-1+2x-3x^2$ $\qquad$ ⓑ $2-3x$ $\qquad$ ⓒ $-6x+2$ $\qquad$ ⓓ $1-x$

6. إذا كانت $f(x)=5x^3-3x^5$ فإن $f'(x)$ تساوي :

ⓐ $20x+60x^2$ $\qquad$ ⓑ $15x^2-15x^4$ $\qquad$ ⓒ $30x-30x^4$ $\qquad$ ⓓ $30x-60x^3$

7. إذا كانت $y=\frac{x^2+5x-1}{x^2}$ فإن $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ تساوي :

ⓐ $\frac{-7}{2}$ ⓑ -3 ⓒ 3 ⓓ $\frac{7}{2}$

8. ميل مماس منحنى $y=x^2+5x$ عند $x=3$ تساوي :

ⓐ 24 ⓑ $-\frac{5}{2}$ ⓒ 11 ⓓ 8

9. ميل مماس منحنى الدالة $f(x)=\frac{2}{x}$ عند $x=-2$ تساوي :

ⓐ -1 ⓑ $-\frac{1}{2}$ ⓒ $\frac{1}{2}$ ⓓ 1

10. ميل مماس منحنى الدالة $f(x)=\frac{-1}{x-1}$ عند $x=0$ تساوي :

ⓐ -1 ⓑ 0 ⓒ 1 ⓓ 2

11. للدالة $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ مماس رأسي معادلته :

ⓐ $x=0$ ⓑ $y=0$ ⓒ $x=1$ ⓓ $y=1$

12. ميل الناظم لمنحنى الدالة $y=x^3-3x+1$ عند النقطة $(2,3)$ هي :

ⓐ 9 ⓑ 3 ⓒ $-\frac{1}{3}$ ⓓ $\frac{-1}{9}$

13. النقاط على منحنى الدالة $y=2x^3-3x^2-12x+20$ التي يكون المماس عندها موازياً لمحور السينات هي :

ⓐ $(-1,27)$ ⓑ $(2,0)$ ⓒ $(2,0),(-1,27)$ ⓓ $(-1,27),(0,20)$

14. لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases}x^2+2x & : x\ge 1\\ 4x-1 & : x<1\end{cases}$ فإن مجال f' هو :

ⓐ $\{1\}$ ⓑ $\mathbb{R}-\{1\}$ ⓒ $[1,\infty)$ ⓓ $\mathbb{R}$

15. إن معادلة المماس لمنحنى الدالة f: $f(x)=2x^2-13x+2$ عند $x=3$ هي :

ⓐ $y=x-16$ ⓑ $y=-x+16$ ⓒ $y=-x-13$ ⓓ $y=-x-16$

16. إذا كانت $f(2)=3$ ، $f'(2)=5$ عند النقطة P على منحنى الدالة f فإن :

ⓐ معادلة خط المماس : $y=5x+7$

ⓑ معادلة الخط العمودي : $y=-\frac{1}{5}x+7$

ⓒ معادلة الخط العمودي : $y=-\frac{1}{5}x+\frac{17}{5}$

ⓓ معادلة خط المماس : $y=5x+3$

مشتقات الدوال المثلثية

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad , \qquad (\sin x)' = \cos x$$

أوجد مشتقات الدوال التالية:

Q $y = x^2 . \sin x$

$$y' = (2x)(\sin x) + (x^2)(\cos x) \qquad = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$$

Q $u = \frac{\cos x}{1-\sin x}$

$$u' = \frac{(-\sin x)(1-\sin x) - (\cos x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2} = \frac{-\sin x + 1}{(1-\sin x)^2} = \frac{\overset{1}{\cancel{(1-\sin x)}}}{(1-\sin x)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{1-\sin x}$$

Q $f(x) = \sin^2 x$

$$= \sin x \quad \sin x$$

$$f'(x) = (\sin x)'(\sin x) + (\sin x)(\sin x)'$$

$$= (\cos x)(\sin x) + (\sin x)(\cos x) \qquad = 2 \quad \sin x \quad \cos x$$

Q $h(x) = \cos^2 x$

$$= \cos x \quad \cos x$$

$$h'(x) = (\cos x)'(\cos x) + (\cos x)(\cos x)'$$

$$= (-\sin x)(\cos x) + (\cos x)(-\sin x) \qquad = -2 \quad \sin x \quad \cos x$$

Q $g(x) = \frac{x}{\cos x}$

$$g'(x) = \frac{(1)(\cos x) - (x)(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x + x \quad \sin x}{(\cos x)^2}$$

Q $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

$$y' = \frac{(\cos x)(\sin x + \cos x) - (\sin x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cancel{\cos x \cdot \sin x} + \cos^2 x - \cancel{\sin x \cdot \cos x} + \sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \quad , \quad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \,.\, \tan x \,,\, (\csc x)' = -\csc x \,.\, \cot x$$

أوجد مشتقات الدوال التالية:

Q $h(x) = \csc x + \sin x \,.\, \tan x$

$h'(x) = -\csc x \cot x + (\cos x)(\tan x) + (\sin x)(\sec^2 x)$

Q $g(x) = \sec x(1 + \sin x)$

$g'(x) = (\sec x \tan x)(1 + \sin x) + (\sec x)(\cos x) \quad = \sec x \ \tan x + \sec x \ \tan x \ \sin x + 1$

Q $f(x) = \tan x + \cot x \qquad f'(x) = \sec^2 x + \ (-\csc^2 x) = \sec^2 x - \csc^2 x$

Q $f(x) = \frac{1+\tan x}{\tan x} \quad f(x) = \frac{1}{\tan x} + \frac{\tan x}{\tan x} \quad = \cot x + 1 \Longrightarrow f'\ (x) = -\csc^2 x$

(حل آخر)

$$f'(x) = \frac{(\sec^2 x)(\tan x) - (1 + \tan x)(\sec^2 x)}{(\tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec^2 x \tan x \ - \sec^2 x \ - \tan x \sec^2 x}{\tan^2 x} = \frac{-\sec^2 x}{\tan^2 x} = \frac{-1}{\cos^2 x} \times \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

Q $g(x) = \sec x + \csc x \qquad g'(x) = \sec x \ \ \tan x \ - \ \csc x \ \ \cot x$

Q $h(x) = \frac{\sec x}{\csc x} \quad h(x) = \frac{\sec x}{\csc x} = \frac{\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{1} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \Longrightarrow \quad h'(x) = \sec^2 x$

(حل آخر)

$$h'(x) = \frac{(\sec x \tan x)(\csc x) - (\sec x)(-\csc x \cot x)}{\csc^2 x}$$

$$= \frac{(\sec x \tan x \csc x) + (\sec x \csc x \cot x)}{\csc^2 x} = \frac{\sec x \tan x + \sec x \cot x}{\csc x}$$

من كراسة التمارين:

Q في التمارين أوجد $\frac{dy}{dx}$

2. $y = 4 - x^2 \sin x$

$y' = (-2x)(\sin x) + (-x^2)(\cos x) = -2x \sin x - x^2 \cos x$

3. $y = \frac{\cot x}{1+\cot x}$

$$y' = \frac{(-\csc^2 x)(1+\cot x) - (\cot x)(-\csc^2 x)}{(1+\cot x)^2}$$

$$= \frac{-\csc^2 x - \csc^2 x \cot x + \cot x \csc^2 x}{(1+\cot x)^2} = \frac{-\csc^2 x}{(1+\cot x)^2}$$

4. $y = \frac{\cos x}{1+\sin x}$

$$y' = \frac{(-\sin x)(1+\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{-\sin x - 1}{(1+\sin x)^2} = -\frac{\sin x + 1}{(1+\sin x)^2} = \frac{-1}{1+\sin x}$$

Q أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \tan x$ عند النقطة $p\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}\right)^2 = 2 = m$$

معادلة المستقيم العمودي :

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{-1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = \frac{-1}{2}x + \frac{\pi}{8} + 1$$

Q أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \sec x$ عند النقطة $p\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \sec x \cdot \tan x \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{3}} = \sec\left(\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} \times \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} = m$$

معادلة المستقيم العمودي :

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{-1}{2\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow y = \frac{-1}{2\sqrt{3}}x + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + 2$$

من كراسة التمارين:

7. لتكن : $y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sin x} + \cot x$ أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة عند $P\left(\frac{\pi}{4}, 4\right)$

$$y = 1 + \sqrt{2}\csc x + \cot x \Rightarrow y' = -\sqrt{2}\csc x \cot x - \csc^2 x$$

ميل المماس

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\csc\left(\frac{\pi}{4}\right)\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) - \csc^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 = m$$

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = -4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = -4x + \pi + 4$$

مشتقات الدوال المثلثية - التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. إذا كانت $y = 1 + x - \cos x$ فإن $\frac{dy}{dx} = 1 + \sin x$ — (a) (b)

2. إذا كانت $y = \frac{4}{\cos x}$ فإن $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{\cos^2 x}$ — (a) (b)

3. ميل المماس لمنحنى الدالة $y = \sin x + 3$ عند $x = \pi$ هو 1 — (a) (b)

4. إن منحنى الدالة $y = \tan x$ ومنحنى الدالة $y = \cos x$ ليس لهما مماسات أفقية — (a) (b)

مغلق

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

5. إذا كانت $y = \frac{1}{x} + 5 \sin x$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

(a) $-\frac{1}{x^2} - 5\cos x$ (b) $\frac{1}{x^2} + 5\cos x$ (c) $-\frac{1}{x^2} + 5\cos x$ (d) $\frac{1}{x^2} - 5\cos x$

6. إذا كانت $f(x) = 3x + x\tan x$ فإن $f'(0)$ يساوي :

(a) -3 (b) 0 (c) 1 (d) 3

7. إذا كانت $y = \frac{x}{1+\cos x}$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

(a) $-\frac{x\sin x}{(1+\cos x)^2}$ (b) $\frac{1+\cos x - x\sin x}{(1+\cos x)^2}$

(c) $\frac{1+\cos x - x\sin x}{1+\cos^2 x}$ (d) $\frac{1+\cos x + x\sin x}{(1+\cos x)^2}$

8. معادلة المستقيم العمودي على المماس لبيان الدالة $y = 2\cos x$ عند النقطة $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ هي :

(a) $y = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$ (b) $y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$

(c) $y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$ (d) $y = -\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$

9. إذا كانت $y = \frac{1}{\sin x}$ فإن y' تساوي :

(a) $\cot x \cdot \csc x$ (b) $\cos x$ (c) $-\cot x \cdot \csc x$ (d) $-\cos x$

قاعدة السلسلة

الشكل الأول لقاعدة السلسلة:

$$(fog)'(x) = f'\big(g(x)\big) \,.\, g'(x)$$

إذا كانت $f(x) = 3x^2 + 1$, $g(x) = x^{10}$ فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة :

Q $(f \circ g)'(x)$

$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$

$f'(x) = 6x \Rightarrow f'\big(g(x)\big) = 6\big(g(x)\big) = 6(x^{10}) = 6x^{10}$ $\qquad g'(x) = 10x^9$

$\therefore (f \circ g)'(x) = (6x^{10}) \cdot (10x^9) = 60x^{19}$

Q $(g \circ f)'(-1)$

$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$

$g'(x) = 10x^9 \Rightarrow \quad g'(f(x)) = 10(3x^2 + 1)^9$ $\qquad f'(x) = 6x$

$\therefore (g \circ f)'(x) = 10(3x^2 + 1)^9 \,.\, 6x = 60x\,(3x^2 + 1)^9$

$\Rightarrow \; (g \circ f)'\,(-1) = 60(-1)\,(3(-1)^2+1)^9 \; = -15728640$

إذا كانت $f(x) = -2x^3 + 4$, $g(x) = x^{13}$ فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة :

Q $(f \circ g)'(x)$

$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$

$f'(x) = -6x^2 \Rightarrow f'\big(g(x)\big) = -6\big(g(x)\big)^2 = -6(x^{13})^2 = -6x^{26}$ $\qquad g'(x) = 13x^{12}$

$\therefore (f \circ g)'(x) = -6x^{26} \cdot 13x^{12} = -78x^{38}$

Q $(g \circ f)'(0)$

$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$

$g'(x) = 13x^{12} \Rightarrow \quad g'(f(x)) = 13(-2x^3 + 4)^{12}$ $\qquad f'(x) = -6x^2$

$(g \circ f)'(x) = 13(-2x^3 + 4)^{12} \,.\, (-6x^2) = -78x^2(-2x^3 + 4)^{12}$

$\therefore (g \circ f)'\,(0) = -78(0)^2(-2(0)^3 + 4)^{12} = 0$

Q إذا كانت $f(x)=\frac{2x+1}{x}$, $g(x)=x^2+1$ فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f\circ g)'(x)$

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$f(x)=\frac{2x+1}{x}=\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}=2+\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}\Rightarrow f'(g(x))=\frac{-1}{(x^2+1)^2} \qquad g'(x)=2x$$

$$\therefore (f\circ g)'(x)=\frac{-1}{(x^2+1)^2}\cdot 2x=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

Q إذا كانت $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$, $g(x)=\sqrt{x}$ فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة : $(f\circ g)'(1)$

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$f'(x)=\frac{(2x)(x^2+4)-(x^2-4)(2x)}{(x^2+4)^2}=\frac{2x^3+8x-2x^3+8x}{(x^2+4)^2}=\frac{16x}{(x^2+4)^2}$$

$$\Rightarrow f'(g(x))=\frac{16\sqrt{x}}{(x+4)^2} \qquad g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore (f\circ g)'(x)=\frac{16\sqrt{x}}{(x+4)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{8}{(x+4)^2}$$

$$\therefore (f\circ g)'(1)=\frac{8}{(1+4)^2}=\frac{8}{25}$$

من كراسة التمارين:

أوجد $(f\circ g)'$ عند القيم المعطاة لـ x .

5. $f(x)=x+\frac{1}{\cos^2 x}$, $g(x)=\pi x$, $x=\frac{1}{4}$

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$f(x)=x+(\sec x)^2\Rightarrow f'(x)=1+2\sec^2 x\tan x$$

$$f'(g(x))=1+2\sec^2(\pi x)\tan(\pi x) \quad , \quad g'(x)=\pi$$

$$\therefore (f\circ g)'(x)=(1+2\sec^2(\pi x)\tan(\pi x))\times\pi$$

$$\therefore (f\circ g)'\left(\frac{1}{4}\right)=\left(1+2\sec^2(\frac{\pi}{4})\tan(\frac{\pi}{4})\right)\times\pi=5\pi$$

الشكل الثاني لقاعدة السلسلة:

إذا كانت: $u = g(x)$, $y = f(u)$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة السلسلة

$y = u^3 - 3u + 1 \quad , \quad u = 5x^2 + 2$

$\frac{dy}{du} = 3u^2 - 3 \quad , \quad \frac{dy}{dx} = 10x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= (3u^2 - 3)(10x)$$
$$= 30xu^2 - 30x$$
$$= 30x(5x^2 + 2)^2 - 30x$$
$$= 30x(25x^4 + 20x^2 + 4) - 30x$$
$$= 750x^5 + 600x^3 + 90x$$

$y = u^2 + 4u - 3 \quad , \quad u = 2x^3 + x$

$\frac{dy}{du} = 2u + 4 \quad , \quad \frac{dy}{dx} = 6x^2 + 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= (2u + 4) \cdot (6x^2 + 1)$$
$$= 12x^2u + 2u + 24x^2 + 4$$
$$= 12x^2(2x^3 + x) + 2(2x^3 + x) + 24x + 4$$
$$= 24x^5 + 12x^3 + 4x^3 + 2x + 24x^2 + 4$$
$$= 24x^5 + 16x^3 + 24x^2 + 2x + 4$$

من كراسة التمارين:

7. أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

b) $y = 5u^3 + 4 \ , \ u = 3x^2 + 1$

$\frac{dy}{du} = 15u^2 \quad , \quad \frac{dy}{dx} = 6x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= (15u^2)(6x)$$
$$= 90xu^2$$
$$= 90x(3x^2 + 1)^2$$
$$= 90x(9x^4 + 6x^2 + 1)$$
$$= 810x^5 + 540x^3 + 90x$$

a) $y = \cos u \ , \ u = 6x + 2$

$\frac{dy}{du} = -\sin u \quad , \quad \frac{dy}{dx} = 6$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= -\sin u \cdot 6$$
$$= -6\sin(6x + 2)$$

قاعدة: في الدوال المثلثية التي من الشكل $y = cos(f(x))$ يمكن إيجاد المشتقة وفق الطريقة التالية:

- $\left(cos(f(x))\right)' = -\boldsymbol{sin}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})).\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$

وبالمثل يمكن تعميم هذه القاعدة على كل الدوال المثلثية:

- $\left(sin(f(x))\right)' = \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})).\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$
- $\left(tan(f(x))\right)' = \boldsymbol{sec}^2(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})).\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$
- $\left(cot(f(x))\right)' = -\boldsymbol{csc}^2(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})).\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$
- $\left(sec(f(x))\right)' = \boldsymbol{sec}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})).\boldsymbol{tan}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})).\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$
- $\left(csc(f(x))\right)' = -\boldsymbol{csc}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})).\boldsymbol{cot}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})).\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$

يتحرك جسيم على محور السينات بحيث إن موضعه عند أي لحظة $t \geq 0$ يعطى بالدالة : $S = \cos(t^2 + 1)$. أوجد السرعة اللحظية للجسيم كدالة في t

$$\frac{ds}{dt} = -\sin(t^2 + 1)(2t) \quad = -2t\sin(t^2 + 1)$$

أوجد مشتقة $y = \sin(x^2 + x)$ بالنسبة إلى المتغير x

$$y' = \cos(x^2 + x)(2x + 1) \quad = (2x + 1)\cos(x^2 + x)$$

من كراسة التمارين:

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

8. $s = \sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}t\right)$

$$\frac{ds}{dt} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)\left(\frac{3\pi}{2}\right) + -\sin\left(\frac{7\pi}{4}t\right)\left(\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right) - \frac{7\pi}{4}\sin\left(\frac{7\pi}{4}t\right)$$

9. $y = \tan(2x - x^3)$

$$y' = \sec^2(2x - x^3)\cdot(2 - 3x^2)$$

10. $y = \sin(3x + 1)$

$$y' = \cos(3x + 1)\cdot(3)$$

الشكل الثالث لقاعدة السلسلة: قاعدة سلسلة القوى:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)^n = n\left(f(x)\right)^{n-1}.f'(x)$$

أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \sin^3 x$ باستخدام قاعدة السلسلة

$$f'(x) = 3\sin^2 x\,(\cos x)$$

أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \cos^5 x$ باستخدام قاعدة السلسلة

$$f'(x) = 5\cos^4 x\,(-\sin x) \quad = -5\cos^4 x\cdot\sin x$$

Q لتكن $y = \sqrt[5]{(x^2+3x+5)^3}$ أوجد y'

$$y = (x^2+3x+5)^{\frac{3}{5}}$$

$$y' = \frac{3}{5}(x^2+3x+5)^{\frac{-2}{5}}\ (2x+3) \ = \frac{3}{5}\ \frac{(2x+3)}{\sqrt[5]{(x^2+3x+5)^2}}$$

Q لتكن $y = \sqrt[4]{(2x^4-3x^2+4)^3}$ أوجد y'

$$y = (2x^4-3x^2+4)^{\frac{3}{4}}$$

$$y' = \frac{3}{4}(2x^4-3x^2+4)^{\frac{-1}{4}} \cdot (8x^3-6x) = \frac{3}{4}\ \frac{(8x^3-6x)}{\sqrt[4]{(2x^4-3x^2+4)}}$$

من كراسة التمارين:

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

11. $y = (\tan x + \sec x)^2$

$$y' = 2(\tan x + \sec x)\cdot(\sec^2 x + \sec x \tan x)$$

12. $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$

$$y' = 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot\frac{(1)(x+1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

$$= 2\frac{(x-1)}{(x+1)}\cdot\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{4(x-1)}{(x+1)^3}$$

13. $y = (1-6x)^{\frac{2}{3}}$

$$y' = \frac{2}{3}(1-6x)^{-\frac{1}{3}}\cdot(-6)$$

$$= -4(1-6x)^{-\frac{1}{3}}$$

14. $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$y' = (1)\left((1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right) + (x)\left(-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}(2x)\right)$$

$$= (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + x\left(-x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$= (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

15. $y = \sin^2(3x-2)$

$$y' = 2\sin(3x-2)\cos(3x-2)\,(3)$$

$$= 6\sin(3x-2)\cos(3x-2)$$

المماس والناظم :

Q أوجد ميل مماس المنحنى $y = \sin^5 x$ عند $x = \frac{\pi}{3}$

$$\frac{dy}{dx} = 5\sin^4 x \cdot (\cos x)$$

ميل المماس

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{3}} = 5\sin^4\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{45}{32} = m$$

Q بين أن ميل أي مماس للمنحنى $y = \frac{1}{(-2x-1)^3}$ دائما يكون موجباً حيث $x \neq -\frac{1}{2}$

$$y = (-2x-1)^{-3} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -3(-2x-1)^{-4}(-2) = \frac{6}{(-2x-1)^4} \quad : \quad \frac{6}{(-2x-1)^4} > 0$$

$\therefore$ ميل المماس دائما يكون موجبا حيث $x \neq -\frac{1}{2}$

من كراسة التمارين:

أوجد معادلة المماس ومعادلة الخط العمودي على المماس في كل مما يلي:

16. $f(x) = \sqrt{x^2+5} \quad , \quad (2,3)$

$$f(x) = (x^2+5)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+5)^{-\frac{1}{2}}(2x) = x(x^2+5)^{-\frac{1}{2}}$$

ميل المماس

$$f'(a) = f'(2) = 2(2^2+5)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = m$$

المماس	الناظم
$y - y_1 = m(x - x_1)$	$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$
$y - 3 = \frac{2}{3}(x-2)$	$y - 3 = -\frac{3}{2}(x-2)$
$y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} + 3$	$y = -\frac{3}{2}x + 3 + 3$
$y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$	$y = -\frac{3}{2}x + 6$

17. $g(x) = (x^3+1)^8 \quad , \quad (0,1)$ عند

$$g'(x) = 8(x^3+1)^7(3x^2) = 24x^2(x^3+1)^7$$

ميل المماس

$$g'(0) = 24(0)^2(0^3+1)^7 = 0$$

المماس أفقي معادلته	الناظم رأسي معادلته
$y = y_1$	$x = x_1$
$y = 1$	$x = 0$

قاعدة السلسلة - التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. إذا كانت $y=\cos(\sqrt{3}x)$ فإن $\frac{dy}{dx}=\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x)$ — (a) (b)

2. إذا كانت $y=5\cot\left(\frac{2}{x}\right)$ فإن $\frac{dy}{dx}=\frac{10}{x^2}\csc^2\left(\frac{2}{x}\right)$ — (a) (b)

3. إذا كانت $y=(x+\sqrt{x})^{-2}$ فإن $\frac{dy}{dx}=-2(x+\sqrt{x})^{-1}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ — (a) (b)

4. إذا كانت $s=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3t\right)$ فإن $\frac{ds}{dt}=3\sin\left(\frac{\pi}{2}-3t\right)$ — (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

5. إذا كانت $y=\sin^{-5}x-\cos^3x$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

(a) $5\sin^{-6}x\cos x-3\cos^2x\sin x$
(b) $5\sin^{-6}x\cos x+3\cos^2x\sin x$
(c) $-5\sin^{-6}x\cos x-3\cos^2x\sin x$
(d) $-5\sin^{-6}x\cos x+3\cos^2x\sin x$

6. إذا كانت $y=\frac{3}{\sqrt{2x+1}}$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

(a) $3(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$
(b) $-3(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$
(c) $-3(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$
(d) $3(2x+1)^{-1}$

7. إذا كانت $s=\frac{4}{3\pi}\sin 3t+\frac{4}{5\pi}\cos 5t$ فإن $\frac{ds}{dt}$ تساوي :

(a) $\frac{4}{\pi}\sin 3t-\frac{4}{\pi}\cos 5t$
(b) $\frac{4}{\pi}\cos 3t+\frac{4}{\pi}\sin 5t$
(c) $\frac{4}{\pi}\cos 3t-\frac{4}{\pi}\sin 3t$
(d) $\frac{4}{\pi}\cos 3t-\frac{4}{\pi}\sin 5t$

8. إذا كانت $r=\tan(2-\theta)$ فإن $\frac{dr}{d\theta}$ تساوي :

(a) $\sec^2(2-\theta)$ (b) $-\sec^2(2-\theta)$ (c) $\sec^2(\theta+2)$ (d) $\sec(2-\theta)$

9. إذا كانت $f(u)=\cot\frac{\pi u}{10}$ و $g(x)=5\sqrt{x}$ فإن $(f\circ g)'(x)$ عند $x=+1$ تساوي :

معلق

(a) $\frac{3\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $-\frac{\pi}{4}$ (d) $-\frac{3\pi}{4}$

المشتقات ذات الرتب العليا

أوجد المشتقات حتى الرتبة الرابعة للدالة:
$y = 2x^7 - 4x^2 + 3x - 5$
بدلالة المتغير x

$y' = 14x^6 - 8x + 3$

$y'' = 84x^5 - 8$

$y''' = 420x^4$

$y^{(4)} = 1680x^3$

إذا كانت: $y = \sin x$ فبين أن:
$y^{(4)} = y$

$$\left.\begin{aligned} y &= \sin x \\ y' &= \cos x \\ y'' &= -\sin x \\ y''' &= -\cos x \\ y^{(4)} &= --\sin x = \sin x \end{aligned}\right\} \Rightarrow y^{(4)} = y$$

إذا كانت $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$
فأوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة

$y = 4x^5 - 5x^3 + 7$

$y' = 20x^4 - 15x^2$

$y'' = 80x^3 - 30x$

$y''' = 240x^2 - 30$

لتكن الدالة: $y = \cos x$ بين أن:
$y^{(4)} + y'' = 0$

$y' = -\sin x$

$y'' = -\cos x$

$y''' = --\sin x = \sin x$

$y^{(4)} = \cos x$

$\Rightarrow y^{(4)} + y'' = \cos x + \ -\cos x = 0$

أوجد y'' حيث: $y = \frac{1}{\cos x}$

$$y = \frac{1}{\cos x} = \sec x \Rightarrow \ y' = \sec x \cdot \tan x$$

$$y'' = (\sec x\ \tan x)(\tan x) + (\sec x)(\sec^2 x) = \sec x \cdot \ \tan^2 x + \sec^3 x$$

أوجد y'' حيث: $y = \frac{1}{\sin x}$

$$y = \frac{1}{\sin x} = \csc x \Rightarrow \ y' = -\csc x\ \cot x$$

$$y'' = (--\csc x\ \cot x)(\cot x) + (-\csc x)(-\csc^2 x) = \csc x\ \cot^2 x + \csc^3 x$$

من كراسة التمارين:

3. $y = \frac{3}{(x-2)} = 3(x-2)^{-1}$

$y' = 3(-1)(x-2)^{-2}(1) = -3(x-2)^{-2}$
$y'' = -3(-2)(x-2)^{-3}(1) = 6(x-2)^{-3}$
$y''' = 6(-3)(x-2)^{-4}(1) = -18(x-2)^{-4}$

4. $y = \sin 2x$

$y' = 2\cos 2x$
$y'' = 2(-\sin 2x)(2) = -4\sin 2x$
$y''' = -4\cos 2x(2) = -8\cos 2x$

5. $y = \cos 4x$

$y' = -\sin 4x(4) = -4\sin 4x$
$y'' = -4\cos 4x(4) = -16\cos 4x$
$y''' = -16(-\sin 4x)(4) = 64\sin 4x$

6. $y = \sin^2 x$

$y' = 2\sin x\cos x$
$y'' = (2\cos x)(\cos x) + (2\sin x)(-\sin x)$
$= 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$
$y''' = 2(2)\cos x\,(-\sin x) - 2(2)\sin x\,(\cos x)$
$= -4\sin x\cos x - 4\sin x\cos x$
$= -8\sin x\cos x$

الاشتقاق الضمني

Q أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ في الحالات التالية:

a) $y^2 + xy = 7x$

$2y \cdot y' + (x)'(y) + (x)(y)' = 7$

$2y \cdot y' + (1)(y) + (x)(y') = 7$

$y'(2y + x) + y = 7$

$\frac{y'\cancel{(2y+x)}}{\cancel{(2y+x)}} = \frac{7-y}{2y+x}$

$y' = \frac{7-y}{2y+x}$

b) $y = x + x^2y^5$

$y' = (x)' + (x^2)'(y^5) + (x^2)(y^5)'$

$y' = 1 + (2x)(y^5) + (x^2)(5y^4\, y')$

$y' = 1 + 2x\, y^5 + 5x^2\, y^4\, y'$

$y' - 5x^2\, y^4\, y' = 1 + 2x\, y^5$

$y'(1 - 5x^2\, y^4) = 1 + 2x\, y^5$

$y' = \frac{1 + 2x\, y^5}{1 - 5x^2\, y^4}$

Q لتكن $y^2 = x^2 - 2x$ أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$

$y^2 = x^2 - 2x$

$(y^2)' = (x^2 - 2x)'$

$2yy' = 2x - 2$

$y' = \frac{2x-2}{2y} = \frac{x-1}{y}$

Q أوجد ميل المماس لمنحنى الدائرة الذي معادلته:
$x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(3, -4)$

$2x + 2y \cdot y' = 0$

$\frac{2}{2}(x + y \cdot y') = \frac{0}{2}$

$x + y\, y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$

بالتعويض بـ $(3, -4)$

$\frac{dy}{dx}\Big|(3,-4) = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

∴ميل المماس = $\frac{3}{4}$

Q أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته:
$x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1,1)$

$2x - 2y \cdot y' + y'x + y = 0$

$y'(-2y + x) = -2x - y$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{-2y + x}$

بالتعويض بـ $(1,1)$

$\frac{dy}{dx}\Big|(1,1) = \frac{-2(1) - 1}{-2(1) + 1} = 3$

∴ميل المماس = 3

Q أوجد ميل المماس $\frac{dy}{dx}$ للمنحنى الذي معادلته :
$2y = x^2 + \sin y$ عند النقطة $(2\sqrt{\pi}, 2\pi)$

$$2y' = 2x + \cos y \cdot y'$$

$$2y' - \cos y \cdot y' = 2x$$

$$y'(2 - \cos y) = 2x \quad \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2 - \cos y}$$

بالتعويض بـ $(2\sqrt{\pi}, 2\pi)$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{(2\sqrt{\pi}\,,\,2\pi)} = \frac{2(2\sqrt{\pi})}{2 - \cos(2\pi)} = \frac{4\sqrt{\pi}}{1} = 4\sqrt{\pi}$$

$\therefore$ ميل المماس $= 4\sqrt{\pi}$

Q للمنحنى الذي معادلته : $2\sqrt{y} + y = x$ أوجد y' ، ثم
أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(3,1)$

$$2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' + y' = 1 \Rightarrow y'\left(\frac{1}{\sqrt{y}} + 1\right) = 1$$

$$y' = \frac{1 \times \sqrt{y}}{\left(\frac{1}{\sqrt{y}} + 1\right) \times \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{1 + \sqrt{y}}$$

بالتعويض بـ $(3,1)$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|(3\,,1) = \frac{\sqrt{1}}{1 + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ ميل المماس $= \frac{1}{2}$

Q أوجد ميل المماس $\frac{dy}{dx}$ للمنحنى الذي
معادلته : $x^2 + y^2 - 2xy = 1$
حيث $x \neq y$ عند النقطة $(2,1)$

$$2x + 2y \cdot y' - 2y - 2xy' = 0$$

$$y'(2y - 2x) = -2x + 2y$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-2x + 2y}{2y - 2x} = 1$$

بالتعويض بـ $(2,1)$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|(2\,,1) = 1$$

$\therefore$ ميل المماس $= 1$

Q للمنحنى الذي معادلته :
$y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$ أوجد y'، ثم أوجد
ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1,1)$

$$2y \cdot y' + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' + 2x = 0$$

$$\Rightarrow \; y'\left(2y + \frac{1}{2\sqrt{y}}\right) = -2x$$

$$y' = \frac{-2x \times 2\sqrt{y}}{\left(2y + \frac{1}{2\sqrt{y}}\right) 2\sqrt{y}} = \frac{-4x\sqrt{y}}{4y\sqrt{y} + 1}$$

بالتعويض بـ $(1,1)$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|(1\,,1) = \frac{-4(1) \cdot \sqrt{1}}{4(1) \cdot \sqrt{1} + 1} = \frac{-4}{5}$$

$\therefore$ ميل المماس $= \frac{-4}{5}$

من كراسة التمارين:

أوجد معادلة المماس ومعادلة الخط العمودي عند النقطة المحددة:

12. $2xy + \pi \sin y = 2\pi, \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

$$(2)(y) + (2x)(y') + \pi \cos y \, y' = 0 \Rightarrow y'(2x + \pi \cos y) = -2y$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-2y}{2x + \pi \cos y} \Rightarrow m = \frac{dy}{dx}\bigg|_{(1,\frac{\pi}{2})} = \frac{-2 \times \frac{\pi}{2}}{2 + \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-\pi}{2} = m$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{2}(x - 1)$$

$$y = \frac{-\pi}{2}x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \frac{-\pi}{2}x + \pi$$

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{2}{\pi}x - \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}$$

إذا كانت $y = x.\sin x$ فأثبت أن:
$y''' + y' + 2\sin x = 0$

$$y = x\sin x$$
$$y' = (1)(\sin x) + (x)(\cos x)$$
$$y' = \sin x + x\cos x$$
$$y'' = \cos x + (1)(\cos x) + (x)(-\sin x)$$
$$y'' = 2\cos x - x\sin x \qquad y'' = 2\cos x - y$$
$$y''' = -2\sin x - y'$$
$$y''' + y' + 2\sin x = 0$$

إذا كانت $y = \sqrt{1-2x}$
أثبت أن: $yy'' + (y')^2 = 0$

بتربيع الطرفين نجد أن: $y = \sqrt{1-2x}$

$$y^2 = 1 - 2x$$
$$2y \cdot y' = -2$$
$$y \cdot y' = -1$$
$$(y')(y') + (y)(y'') = 0$$
$$(y')^2 + yy'' = 0$$

لتكن: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ أثبت أن: $(1+x^2)f'''(x) + 6xf''(x) + 6f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 - (-2x)(2)(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4} = \frac{(1+x^2)(-2(1+x^2) - (-8x^2))}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{(12x)(1+x^2)^3 - (6x^2-2)(3(1+x^2)^2(2x))}{(1+x^2)^6}$$

$$= \frac{(1+x^2)^2\left(12x(1+x^2) - ((6x^2-2)(6x))\right)}{(1+x^2)^6} = \frac{-24x^3+24x}{(1+x^2)^4}$$

$$\Rightarrow (1+x^2)f'''(x) + 6xf''(x) + 6f'(x) =$$

$$(1+x^2)\frac{-24x^3+24x}{(1+x^2)^4} + 6x\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} + 6\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0$$

معلق

لتكن $f(x) = \frac{1}{1-x}$ فأثبت أن: $f'''(x) = \frac{3!}{(1-x)^4}$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \quad \Rightarrow f'(x) = -1(1-x)^{-2} \cdot (-1) = (1-x)^{-2}$$
$$f''(x) = -2(1-x)^{-3} \cdot (-1) = 2(1-x)^{-3}$$
$$f'''(x) = 2(-3) \cdot (1-x)^{-4} \cdot (-1) = 6(1-x)^{-4} = \frac{3!}{(1-x)^4}$$

من كراسة التمارين:

15. إذا كانت $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ فأثبت أن: $4x^2 f''(x) - 3f(x) = 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{-1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$\therefore 4x^2 f''(x) - 3f(x) = 4x^2 \cdot \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{-1}{2}} = 3x^{\frac{-1}{2}} - 3x^{\frac{-1}{2}} = 0$$

التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. إذا كانت $y = \frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$ فإن $\frac{d^2y}{dx^2} = -2x$ — (a) (b)

2. إذا كانت $y = \frac{-3x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 4x$ فإن $\frac{d^3y}{dx^3} = -18x$ — (a) (b)

3. معادلة المماس لمنحنى $x^2 - y^2 - x^2y = 7$ عند النقطة $(2\,,-1)$ هي : $y = 4x - 9$ — (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

4. إذا كانت : $f(x) = (1+6x)^{\frac{2}{3}}$ فإن : $f''(x)$ تساوي :

(a) $\frac{8}{27}(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$ (b) $8(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

(c) $-8(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$ (d) $-64(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

5. إذا كانت $f(x) = \frac{2x+1}{3x+2}$ فإن $f^{(4)}(x)$ تساوي :

معلق

(a) $24(3x+2)^{-5}$ (b) [illegible]$(3x+2)^{-5}$

(c) $648(3x+2)^{-5}$ (d) $-648(3x+2)^{-5}$

6. ميل الخط العمودي على المماس (الناظم) عند النقطة $A(3\,,2)$ على منحنى : $x^2 - y^2 - 2xy = -7$ هو :

(a) -5 (b) $-\frac{1}{5}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) 5

7. ميل المماس عند النقطة $A(1\,,1)$ على منحنى : $x^2 - 3y^2 + 2xy = 0$ هي :

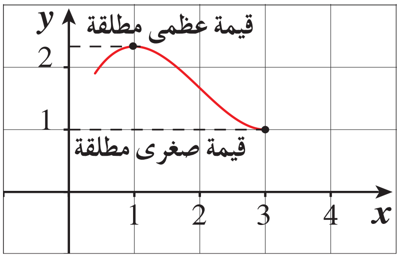
(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) 2

تــدرب و تـفـوق

اختبارات الكترونية ذكية

القيم القصوى (العظمى والصغرى) للدوال

تعريف (1): القيم القصوى المطلقة



إذا كانت f دالة مجالها D, $c \in D$ فإن $f(c)$ تسمى :

- قيمة عظمى مطلقة للدالة f على D عندما $f(c) \geq f(x)\ ,\ \forall x \in D$
- قيمة صغرى مطلقة للدالة f على D عندما $f(c) \leq f(x)\ ,\ \forall x \in D$

نظرية (1): نظرية القيمة القصوى

إذا كانت f دالة متصلة على فترة مغلقة $[a,b]$ فإن f تكون لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة

ملاحظة :

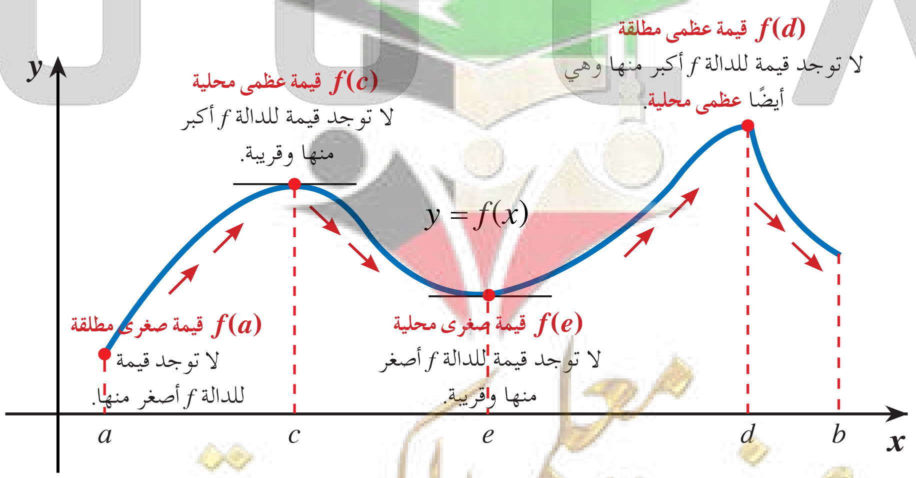
لتكن الدالة f المعرفة على $[a,b]$, $c \in (a,b)$ فإننا نسمي:

- $(a,f(a))$, $(b,f(b))$ نقاطا طرفية
- $(c,f(c))$ نقطة داخلية

تعريف (2): القيمة القصوى المحلية:

لتكن $(c,f(c))$ نقطة داخلية للدالة f، D فترة مفتوحة تحوي c ، تكون $f(c)$:

- قيمة عظمى محلية عند c عندما:
  $f(c) \geq f(x)\ ,\ \forall x \in D$
- قيمة صغرى محلية عند c عندما:
  $f(c) \leq f(x)\ ,\ \forall x \in D$



تعريف (3): النقطة الحرجة

النقطة الداخلية للدالة f, $(c,f(c))$ تسمى نقطة حرجة عندما $f'(c)=0$ أو $f'(c)$ غير موجودة

أوجد النقاط الحرجة لكل من الدوال المتصلة التالية:

Q $g(x)=x^3-3x^2+5$

$g(x)$ دالة كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$g'(x)=3x^2-6x$

$g'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-6x=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0 \Rightarrow x=0$ ، $x=2$

$g(0)=(0)^3-3(0)^2+5=5 \Rightarrow$ $(0,5)$

$g(2)=(2)^3-3(2)^2+5=1 \Rightarrow$ $(2,1)$

نقطتان حرجتان للدالة g على مجالها

Q $f(x)=x^4-4x^3-8x^2+10$

f دالة كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x)=4x^3-12x^2-16x$

$f'(x)=0 \Rightarrow 4x(x^2-3x-4)=0$

$\Rightarrow x=0 \qquad x=4 \qquad x=-1$

$f(0)=(0)^4-4(0)^3-8(0)^2+10=10 \Rightarrow (0,10)$

$f(4)=(4)^4-4(4)^3-8(4)^2+10=-118 \Rightarrow (4,-118)$

$f(-1)=(-1)^4-4(-1)^3-8(-1)^2+10=7 \Rightarrow (-1,7)$

نقاط حرجة للدالة f على مجالها

Q $f(x) = \begin{cases} x^2+1\,, x<1 \\ 3x-1\,,\ x \geq 1 \end{cases}$ $\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & x<1 \\ \text{تُبحث} & x=1 \\ 3 & x>1 \end{cases}$

$f(1) = 3(1) - 1 = 2$

x^2+1 | 1 | $3x-1$

إن وُجدت $f'_+(1) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{3x-1-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{3x-3}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{3\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 3$

إن وُجدت $f'_-(1) = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2+1-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 2$

$\because f'_-(1) \neq f'_+(1)$

معلق

$\therefore$ $f'(1)$ غير موجودة بالتالي يوجد نقطة حرجة عند $x=1$

$f'(x) = \begin{cases} 2x & x<1 \\ 3 & x>1 \end{cases}$

النقاط الحرجة

$x>1\,, x\in(1,\infty)$

$f'(x) = 3$

$\forall x \in (1,\infty), f'(x) \neq 0$

بالتالي لا توجد نقاط حرجة على هذه الفترة

$x=1$

$f'(1)$ غير موجودة

للدالة نقطة حرجة عند $x=1$ وهي:

$(1\,, f(1))$

$(1\,, 2)$

$x<1\,, x\in(-\infty,1)$

$f'(x) = 2x$

$2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$0 \in (-\infty,1)$

للدالة نقطة حرجة عند $x=0$

$f(0) = 0^2 + 1 = 1$

$\therefore$ $(0,1)$ نقطة حرجة

Q $f(x) = |x-5|$

$$f(x) = |x-5| = \begin{cases} x-5 & x \geq 5 \\ -x+5 & x < 5 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 5 \\ \text{تُبحث} & x = 5 \\ -1 & x < 5 \end{cases} \quad f(5) = 0$$

$-x+5$ 5 $x-5$

$f'_-(5) = \lim_{x\to5^-} \frac{f(x)-f(5)}{x-5}$ إن وُجدت | $f'_+(5) = \lim_{x\to5^+} \frac{f(x)-f(5)}{x-5}$ إن وُجدت

$= \lim_{x\to5^-} \frac{-x+5-0}{x-5} = -1$ | $= \lim_{x\to5^+} \frac{x-5-0}{x-5} = 1$

معلق ⚠

$\because f'_-(5) \neq f'_+(5)$

$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 5 \\ -1 & x < 5 \end{cases}$ $\therefore f'(5)$ غير موجودة بالتالي يوجد نقطة حرجة عند $x = 5$

النقاط الحرجة

$x > 5 , x \in (5,\infty)$	$x = 5$	$x < 5 , x \in (-\infty,5)$
$f'(x) = 1$	$f'(5)$ غير موجودة	$f'(x) = -1$
$\forall x \in (5,\infty), f'(x) \neq 0$	بالتالي للدالة نقطة حرجة عند $x = 5$ وهي:	$\forall x \in (-\infty,5), f'(x) \neq 0$
بالتالي لا توجد نقطة حرجة على هذه الفترة	$(5 , f(5))$ $(5 , 0)$	بالتالي لا توجد نقاط حرجة على هذه الفترة

نظرية (2): نظرية القيم القصوى المحلية

إذا كانت للدالة f قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محلية عند $x = c$ فإن $(c , f(c))$ نقطة حرجة

Q أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[0,3]$

$\because f$ متصلة على $[0 , 3]$ $\therefore$ يوجد قيمة عظمى مطلقة و قيمة صغرى مطلقة في الفترة $[0,3]$

$f(0) = 0^3 - 3(0) + 1 = 1 \quad , \quad f(3) = 3^3 - 3(3) + 1 = 19$

$f'(x) = 3x^2 - 3, f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x^2-1) = 0 \Rightarrow 3(x-1)(x+1) = 0$

$x = -1 : \quad -1 \notin \ (0 , 3)$

$x = 1 : \quad 1 \in \ (0 , 3) \Rightarrow \quad f(1) = 1^3 - 3(1) + 1 = -1$

$\therefore (1 , -1)$ نقطة حرجة

x	0	1	3
$f(x)$	1	-1	19

من الجدول:
- أكبر قيمة للدالة f في الفترة $[0,3]$ هي $19 \Leftarrow 19$ قيمة عظمى مطلقة
- أصغر قيمة للدالة f في الفترة $[0,3]$ هي $-1 \Leftarrow -1$ قيمة صغرى مطلقة

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة: $f(x)=x^3-3x+1$ في الفترة $[-2,1]$

$\because f$ متصلة على $[-2\,,1]$ $\therefore$ يوجد قيمة عظمى مطلقة و قيمة صغرى مطلقة في الفترة $[-2,1]$

$f(-2)=(-2)^3-3(-2)+1=-1 \quad , f(1)=1^3-3(1)+1=-1$

$f'(x)=3x^2-3, f'(x)=0 \Rightarrow 3(x^2-1)=0 \Rightarrow 3(x-1)(x+1)=0$

$x=1 \quad ,1 \notin \ (-2\,,1)$

$x=-1 \quad ,-1 \in \ (-2\,,1) \Rightarrow \quad f(-1)=(-1)^3-3(-1)+1=3$

$\therefore$ $(-1\,,3)$ نقطة حرجة

من الجدول:

x	-2	-1	1
$f(x)$	-1	3	-1

- أكبر قيمة للدالة f في الفترة $[-2,1]$ هي $3 \Leftarrow 3$ قيمة عظمى مطلقة
- أصغر قيمة للدالة f في الفترة $[-2,1]$ هي $-1 \Leftarrow -1$ قيمة صغرى مطلقة

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة: $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ في الفترة $[-2,3]$

$\because f$ متصلة على $[-2\,,3]$ $\therefore$ يوجد قيمة عظمى مطلقة و قيمة صغرى مطلقة في الفترة $[-2,3]$

$f(-2)=(-2)^{\frac{2}{3}}\approx 1.587$ ، $f(3)=(3)^{\frac{2}{3}}\approx 2.08$

$$f'(x)=\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

لاحظ أن: $f'(x)\neq 0$ "لأن البسط لا يساوي الصفر"

$f'(x)$ غير موجودة "عندما يكون المقام يساوي صفرا"

$3\sqrt[3]{x}=0 \Rightarrow x=0, \quad 0\in \ (-2\,,3) \ , f(0)=0^{\frac{2}{3}}=0$

$\therefore$ $(0\,,0)$ نقطة حرجة

من الجدول:

x	-2	0	3
$f(x)$	1.587	0	2.08

- أكبر قيمة للدالة f في الفترة $[-2\,,3]$ هي $2.08 \Leftarrow 2.08$ قيمة عظمى مطلقة
- أصغر قيمة للدالة f في الفترة $[-2\,,3]$ هي $0 \Leftarrow 0$ قيمة صغرى مطلقة

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة: $f(x)=\frac{1}{x^2}$ في الفترة $[1,3]$

$\because$ f متصلة على $[1\,,3]$ $\therefore$ يوجد قيمة عظمى مطلقة و قيمة صغرى مطلقة في الفترة $[1,3]$

$$f'(x)=-2x^{-3}=\frac{-2}{x^3} \qquad f(3)=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9} \qquad f(1)=\frac{1}{1^2}=1\ ,$$

لاحظ أن: $f'(x)\neq 0$ "لأن البسط لا يساوي الصفر"

$f'(x)$ غير موجودة "عندما يكون المقام يساوي صفر " أي :

$$x^3=0 \Rightarrow x=0, \qquad 0\notin(1\,,3)$$

إذاً لا يوجد للدالة f نقاط حرجة في الفترة $(1\,,3)$

x	1	3
$f(x)$	1	$\frac{1}{9}$

من الجدول:
- أكبر قيمة للدالة f في الفترة $[1\,,3]$ هي $1 \Leftarrow 1$ قيمة عظمى مطلقة
- أصغر قيمة للدالة f في الفترة $[1\,,3]$ هي $\frac{1}{9} \Leftarrow \frac{1}{9}$ قيمة صغرى مطلقة

لتكن f ، $a,b\in R$ ، $f(x)=x^3+ax^2+bx+5$ و كان للدالة قيمة قصوى محلية عند كل من : $x=\frac{1}{3}\ ,x=1$ المطلوب : أوجد قيمة كل من الثابتين a,b

$\because$ f كثيرة حدود $\therefore$ f متصلة و قابلة للاشتقاق على R

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$\because$ للدالة قيمة قصوى محلية عند كل من $x=1\ ,\ x=\frac{1}{3}$

$$\therefore f'(1)=0 \Longrightarrow 3(1)^2+2a(1)+b=0 \Longrightarrow 2a+b=-3$$

$$f'\left(\frac{1}{3}\right)=0 \Longrightarrow 3\left(\frac{1}{3}\right)^2+2a\left(\frac{1}{3}\right)+b=0 \Longrightarrow \frac{2}{3}a+b=\frac{-1}{3}$$

$$\Longrightarrow a=-2\,,b=1$$

لتكن f ، $a,b\in R$ ، $f(x)=2x^3+ax^2+bx+1$ و كان للدالة قيمة قصوى محلية عند كل من: $x=2\ ,x=-1$ المطلوب : أوجد قيمة كل من الثابتين a,b

$\because$ f كثيرة حدود $\therefore$ f متصلة و قابلة للاشتقاق على R

$$f'(x)=6x^2+2ax+b$$

$\because$ للدالة قيمة قصوى محلية عند كل من $x=-1\ ,\ x=2$

$$f'(-1)=0 \Longrightarrow 6(-1)^2+2a(-1)+b=0 \Longrightarrow -2a+b=-6$$

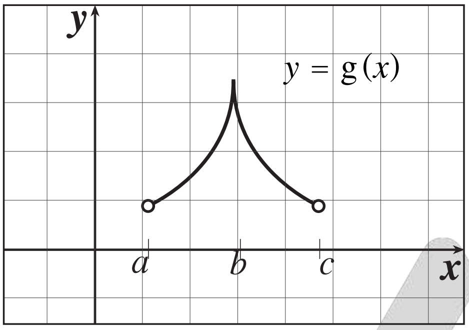
$$f'(2)=0 \Longrightarrow 6(2)^2+2a(2)+b=0 \Longrightarrow 4a+b=-24$$

$$\Longrightarrow a=-3\,,b=-12$$

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. إذا كانت f دالة متصلة على (a, b) فإن f لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة.
ⓐ ⓑ

2. في الشكل التالي، للدالة g قيمة قصوى محلية عند $x = c$
ⓐ ⓑ



3. الدالة g : $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ لها قيمة عظمى في مجالها
ⓐ ⓑ

4. الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ لها قيمة عظمى في مجالها
ⓐ ⓑ

5. الدالة h : $h(x) = |3x - 5|$ لها قيمة حرجة عند $x = 5$
ⓐ ⓑ

معلق

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. لتكن $y = |x|$ فإن الدالة y:
ⓐ لها قيمة عظمى مطلقة فقط
ⓑ لها قيمة صغرى مطلقة فقط
ⓒ لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة
ⓓ ليس لها قيمة صغرى مطلقة وليس لها قيمة عظمى مطلقة

معلق

7. عدد النقاط الحرجة للدالة $y = 3x^3 - 9x - 4$ على الفترة $(0, 2)$ هو:
ⓐ 3 ⓑ 2 ⓒ 1 ⓓ 0

8. الدالة k : $k(x) = |x^2 - 4|$ لها:
ⓐ قيمة عظمى مطلقة
ⓑ قيمة صغرى مطلقة
ⓒ نقطتان حرجتان فقط
ⓓ ليس أي مما سبق

معلق

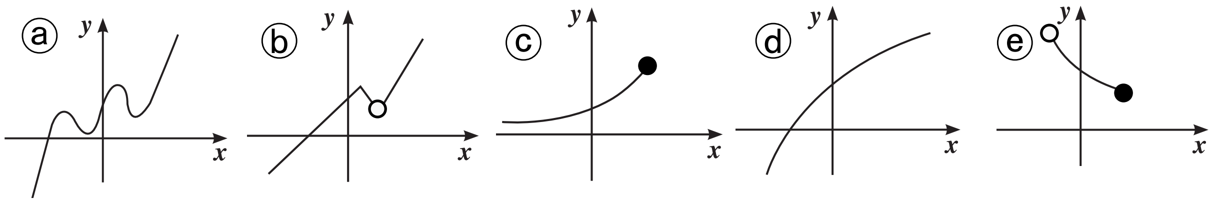
9. إذا كانت $f(x) = ax^2 - 25x$ لها قيمة قصوى محلية عند $x = \frac{5}{2}$ فإن a تساوي:
ⓐ 2 ⓑ 3 ⓒ 4 ⓓ 5

اختر من القائمة ما يناسب كل عبارة من التمثيلات البيانية أدناه

10. لها قيمة عظمى مطلقة — c

11. لها أكثر من قيمة قصوى محلية — a

12. ليس لها قيم قصوى محلية أو مطلقة — d



اختر من القائمة ما يناسب كل عبارة من التمثيلات البيانية

.13 — c

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	أكبر من الصفر

.14 — b

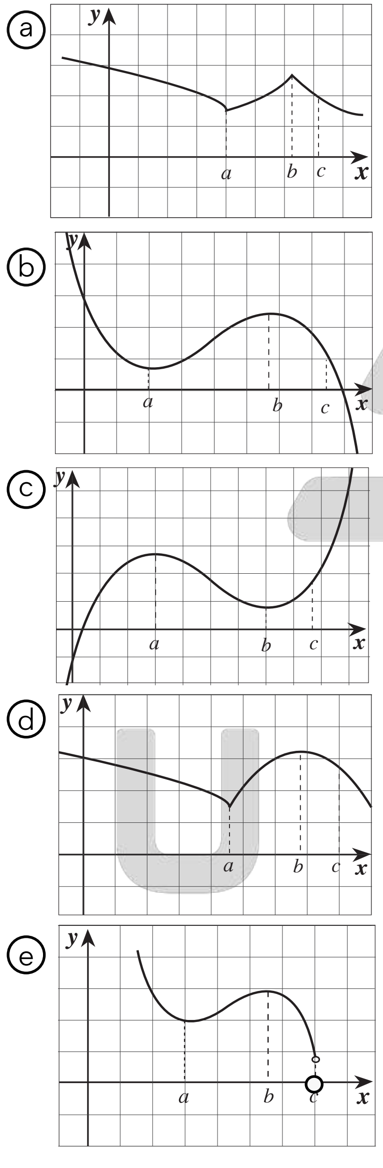
x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	أصغر من الصفر

.15 — d

x	$f'(x)$
a	غير موجودة
b	0
c	أصغر من الصفر

.16 — a

x	$f'(x)$
a	غير موجودة
b	غير موجودة
c	أصغر من الصفر

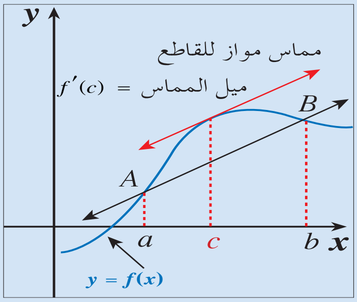


تزايد وتناقص الدوال

نظرية (3) نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت f دالة:
- متصلة على الفترة $[a,b]$
- قابلة للاشتقاق على الفترة (a,b) فإنه يوجد على الأقل $c \in (a,b)$ بحيث :

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Q بين أن الدالة: $f(x) = x^2$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0,2]$ ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك

الشروط : $f(x) = x^2$ دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ فهي متصلة على الفترة $[0\,,2]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(0\,,2)$.

$\because$ شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة $[0\,,2]$

$\therefore$ يوجد على الأقل $c \in (0\,,2)$ بحيث :

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{f(2)-f(0)}{2}$$

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(c) = 2c \quad , f(2) = (2)^2 = 4 \quad , f(0) = (0)^2 = 0$$

$$\therefore 2c = \frac{4-0}{2} \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1 \in (0\,,2)$$

التفسير : يوجد مماس لمنحنى الدالة عند $x = 1$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $(0\,,0)(2\,,4)$

Q بين أن الدالة: $f(x) = x^2 + 2x$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3,1]$ ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك

الشروط : $f(x) = x^2 + 2x$ دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ فهي متصلة على الفترة $[-3\,,1]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(-3\,,1)$.

$\because$ شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة $[-3\,,1]$

$\therefore$ يوجد على الأقل $c \in (-3\,,1)$ بحيث :

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(1)-f(-3)}{1-(-3)} = \frac{f(1)-f(-3)}{4}$$

$$f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow f'(c) = 2c + 2$$
$$f(-3) = (-3)^2 + 2(-3) = 3 \;, \qquad f(1) = 1^2 + 2(1) = 3$$

$$\therefore 2c + 2 = \frac{3-3}{4} \Rightarrow 2c + 2 = 0 \Rightarrow c = -1 \in (-3\,,1)$$

التفسير : يوجد مماس لمنحنى الدالة عند $x = -1$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $(-3\,,3)(1\,,3)$

بين أن الدالة: $f(x) = x^3 + 1$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3,3]$ ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك

الشروط : $f(x) = x^3 + 1$ دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ فهي متصلة على الفترة $[-3\,,3]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(-3\,,3)$.

$\because$ شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة $[-3\,,3]$

$\therefore$ يوجد على الأقل $c \in (-3\,,3)$ بحيث :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)} = \frac{f(3) - f(-3)}{6}$$

$$f'(x) = 3x^2 \Longrightarrow f'(c) = 3c^2$$
$$f(-3) = (-3)^3 + 1 = -26\,, \qquad f(3) = (3)^3 + 1 = 28$$

$$\therefore 3c^2 = \frac{28 - (-26)}{6} = 9 \Longrightarrow c^2 = 3 \Longrightarrow c = \pm\sqrt{3}$$
$$c = -\sqrt{3} \in (-3\,,3)\,, c = \sqrt{3} \in (-3\,,3)$$

التفسير : يوجد مماسان لمنحنى الدالة عند $x = -\sqrt{3}\,, x = \sqrt{3}$

يوازيان القاطع المار بالنقطتين $(-3\,,-26)(3\,,28)$

بين أن الدالة : $f(x) = x^3 - 3x + 2$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0,4]$ ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك

الشروط : $f(x) = x^3 - 3x + 2$ دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ فهي متصلة على الفترة$[0\,,4]$وقابلة للاشتقاق على الفترة$(0\,,4)$.

$\because$ شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة $[0\,,4]$

$\therefore$ يوجد على الأقل $c \in (0\,,4)$ بحيث :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{f(4) - f(0)}{4}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Longrightarrow f'(c) = 3c^2 - 3$$
$$f(4) = (4)^3 - 3(4) + 2 = 54\ , \qquad f(0) = (0)^3 - 3(0) + 2 = 2$$

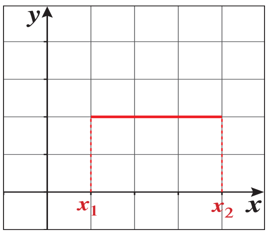
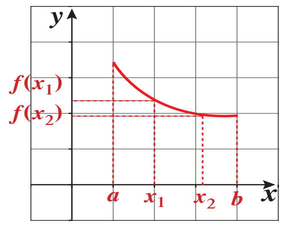
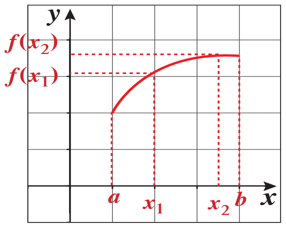
$$\therefore 3c^2 - 3 = \frac{54 - 2}{4} = 13 \Longrightarrow 3c^2 = 16 \Longrightarrow c^2 = \frac{16}{3} \Longrightarrow c = \mp\sqrt{\frac{16}{3}}$$

$$c = \frac{4\sqrt{3}}{3} \in (0,4) \qquad c = \frac{-4\sqrt{3}}{3} \notin (0,4)$$

التفسير : يوجد مماس لمنحنى الدالة عند $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

يوازي القاطع المار بالنقطتين $(0\,,2)(4\,,54)$

تزايد وتناقص الدوال : لتكن f دالة معرفة على الفترة I نقول إن الدالة

دالة ثابتة	دالة متناقصة	دالة متزايدة
		
$\forall x_1, x_2 \in I \implies f(x_1) = f(x_2)$	$\forall x_1, x_2 \in I$ $x_1 < x_2 \implies$ $f(x_1) > f(x_2)$	$\forall x_1, x_2 \in I$ $x_1 < x_2 \implies$ $f(x_1) < f(x_2)$

الدالة المطردة: هي الدالة التي تكون دائماً متزايدة على فترة أو دائماً متناقصة على فترة

نظرية (4) الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة والدوال الثابتة

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a,b)

- إذا كانت $f'(x) > 0$ عند كل x تنتمي للفترة (a,b) فإن f تتزايد على (a,b)
- إذا كانت $f'(x) < 0$ عند كل x تنتمي للفترة (a,b) فإن f تتناقص على (a,b)
- إذا كانت $f'(x) = 0$ عند كل x تنتمي للفترة (a,b) فإن f ثابتة على (a,b)

Q حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة:

- $f(x) = x^2 - 5x + 6$

f كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 2x - 5 \,, \qquad f'(x) = 0 \implies x = \frac{5}{2}$

	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		∞
الفترات		$\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$		$\left(\frac{5}{2}, \infty\right)$	
إشارة f'		$-$		$+$	
سلوك f		$\searrow$		$\nearrow$	

f متناقصة على $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ f متزايدة على $\left(\frac{5}{2}, \infty\right)$

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة:

- $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

f كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = -2x + 4\,, \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-4}{-2} = 2$

$-\infty$		2		∞
الفترات	$(-\infty, 2)$		$(2, \infty)$	
اشارة f'	$+$		$-$	
سلوك f	↗		↘	

f متزايدة على $(-\infty, 2)$ $\quad$ f متناقصة على $(2, \infty)$

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

f كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = -1\,, x = 3$

$-\infty$		-1		3		∞
الفترات	$(-\infty, -1)$		$(-1, 3)$		$(3, \infty)$	
اشارة f'	$+$		$-$		$+$	
سلوك f	↗		↘		↗	

f متزايدة على كل من $(-\infty, -1)\,, (3, \infty)$

f متناقصة على $(-1, 3)$

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x) = x^3 - 6x$

f كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \mp\sqrt{2}$

$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		∞
الفترات	$(-\infty, -\sqrt{2})$		$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$		$(\sqrt{2}, \infty)$	
اشارة f'	$+$		$-$		$+$	
سلوك f	↗		↘		↗	

f متزايدة على كل من $(-\infty, -\sqrt{2})\,, (\sqrt{2}, \infty)$ $\quad$ f متناقصة على $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Q حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$

f حدودية نسبية متصلة $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

$$f'(x)=\frac{(2x)(x-1)-(x^2)(1)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0\Longrightarrow x^2-2x=0\Longrightarrow x=0\,,x=2$$

$-\infty$	0		1		2	∞
الفترات	$(-\infty,0)$	$(0\,,1)$	غير معرفة	$(1\,,2)$	$(2\,,\infty)$	
اشارة f'	$+$	$-$		$-$	$+$	
سلوك f	↗	↘		↘	↗	

fمتزايدة على كل من $(-\infty,0),(2\,,\infty)$

fمتناقصة على كل من $(0\,,1),(1\,,2)$

Q حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$

f حدودية نسبية متصلة $\forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

$$f'(x)=\frac{(2x)(2x-1)-(x^2)(2)}{(2x-1)^2}=\frac{4x^2-2x-2x^2}{(2x-1)^2}=\frac{2x^2-2x}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x)=0\Longrightarrow 2x^2-2x=0\qquad\Longrightarrow 2x(x-1)=0\Rightarrow x=0\,,x=1$$

$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		1	∞
الفترات	$(-\infty,0)$	$\left(0\,,\frac{1}{2}\right)$	غير معرفة	$\left(\frac{1}{2}\,,1\right)$	$(1\,,\infty)$	
اشارة f'	$+$	$-$		$-$	$+$	
سلوك f	↗	↘		↘	↗	

fمتزايدة على كل من $(-\infty,0),(1\,,\infty)$

fمتناقصة على كل من $\left(0\,,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2}\,,1\right)$

تزايد وتناقص الدوال - التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. الدالة $g : g(x) = x^2 - x - 3$ متزايدة على $(-\infty, \frac{1}{2})$ — (a) (b)

2. الدالة $f : f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ متناقصة على كل من الفترة $(-\infty, -\sqrt{5})$ والفترة $(\sqrt{5}, \infty)$ — (a) (b)

3. الدالة $f : f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $[0, 1]$ — (a) (b)

4. الدالة $f : f(x) = x^3 + 1$ مطّردة على $\mathbb{R}$ — (a) (b)

مـعـلـق

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

5. تكون الدالة $k : k(x) = \frac{x}{x^2-4}$

(a) متزايدة على كل فترة من مجال تعريفها

(b) متناقصة على كل فترة من مجال تعريفها

(c) متناقصة على كل من $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ ومتزايدة على $(2, \infty)$

(d) ليس أي مما سبق

6. الدالة $R : R(x) = |x|$

(a) متزايدة على مجال تعريفها

(b) متناقصة على مجال تعريفها

(c) متزايدة على الفترة $(0, \infty)$ ومتناقصة على الفترة $(-\infty, 0)$

(d) متناقصة على الفترة $(0, \infty)$ ومتزايدة على الفترة $(-\infty, 0)$

مـعـلـق

7. إذا كانت $f' : f'(x) = -x^2$ فإن الدالة f :

(a) متزايدة على مجال تعريفها

(b) متزايدة على الفترة $(-\infty, 0)$ فقط

(c) متناقصة على مجال تعريفها

(d) متناقصة على الفترة $(0, \infty)$ فقط

8. إذا كانت $f' : f'(x) = -3x$ فإن الدالة f :

(a) متزايدة على الفترة $(0, \infty)$

(b) متناقصة على الفترة $(-\infty, 0]$

(c) متزايدة على مجال تعريفها

(d) متزايدة على الفترة $(-\infty, 0)$ ومتناقصة على الفترة $(0, \infty)$

ربط f' و f'' بمنحى الدالة f

نظرية (5) اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية

لتكن f دالة متصلة على مجالها وكانت $(c,f(c))$ نقطة حرجة:

- إذا كانت إشارة f' تتغير من الموجب إلى السالب عند $x=c$، فإن للدالة قيمة عظمى محلية عند c
- إذا كانت إشارة f' تتغير من السالب إلى الموجب عند $x=c$، فإن للدالة قيمة صغرى محلية عند c
- إذا لم تتغير إشارة f' عند $x=c$، فإنه لا يكون لـ f قيمة قصوى محلية عند c

Q لتكن الدالة $f(x)=x^3-12x-5$ أوجد :

النقاط الحرجة للدالة ، الفترات التي تكون الدالة f متناقصة أو متزايدة عليها ، القيم القصوى المحلية

f كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x)=3x^2-12,\qquad f'(x)=0 \Rightarrow 3(x-2)(x+2)=0 \Rightarrow x=-2\,,x=2$

نقاط حرجة $\quad f(2)=-21 \Rightarrow (2,-21) \qquad f(-2)=11 \Rightarrow (-2,11)$

الفترات	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
اشارة f'	$+$	$-$	$+$
سلوك f	متزايدة	متناقصة	متزايدة

f متزايدة على كل من $(-\infty,-2),(2,\infty)$ $\qquad$ f متناقصة على $(-2,2)$

يوجد لـ f قيمة عظمى محلية عند $x=-2$ و تساوي $f(-2)=11$

يوجد لـ f قيمة صغرى محلية عند $x=2$ و تساوي $f(2)=-21$

Q لتكن الدالة $f(x)=-x^3+3x^2-4$ أوجد كلا مما يلي :

النقاط الحرجة للدالة ، الفترات التي تكون الدالة f متناقصة أو متزايدة عليها ، القيم القصوى المحلية

f كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ $\qquad f(x)=-x^3+3x^2-4$

$f'(x)=-3x^2+6x=0 \Rightarrow -3x(x-2)=0 \Rightarrow x=0\,,f(0)=-4 \quad (0,-4)$

$x=2\,,f(2)=0 \quad (2,0)$

نقاط حرجة

الفترات	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
اشارة f'	$-$	$+$	$-$
سلوك f	متناقصة	متزايدة	متناقصة

f متناقصة على كل من $(-\infty,0),(2,\infty)$ ، f متزايدة على $(0,2)$

يوجد لـ f قيمة صغرى محلية عند $x=0$ و تساوي $f(0)=-4$

يوجد لـ f قيمة عظمى محلية عند $x=2$ و تساوي $f(2)=0$

لتكن الدالة $f(x) = x - 3 + \frac{4}{x-1}$ أوجد كلا مما يلي:
النقاط الحرجة للدالة ، الفترات التي تكون الدالة f متناقصة أو متزايدة عليها ، القيم القصوى المحلية

$f(x)$ مجموع دالتين "كثيرة حدود" و "حدودية نسبية" بالتالي $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق على كل من الفترتين $(-\infty\,,1)\,,(1\,,\infty)$

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1-2)(x-1+2)}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3\,, f(3) = 2 \Rightarrow (3\,,2)$$
$$x = -1\,, f(-1) = -6 \Rightarrow (-1\,,-6)$$
نقاط حرجة

الفترات	$(-\infty,-1)$	$(-1\,,1)$	غير معرفة	$(1\,,3)$	$(3\,,\infty)$
اشارة f'	$+$	$-$		$-$	$+$
سلوك f	$\nearrow$	$\searrow$		$\searrow$	$\nearrow$

f متزايدة على كل من $(-\infty,-1),(3\,,\infty)$ f متناقصة على كل من $(-1\,,1),(1\,,3)$

يوجد لـ f قيمة عظمى محلية عند $x = -1$ و تساوي $f(-1) = -6$

يوجد لـ f قيمة صغرى محلية عند $x = 3$ و تساوي $f(3) = 2$

لتكن الدالة $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ أوجد كلا مما يلي:
النقاط الحرجة للدالة ، الفترات التي تكون الدالة f متناقصة أو متزايدة عليها ، القيم القصوى المحلية

$g(x)$ متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} \Leftarrow \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad x^2 + 1 \neq 0$

$$g'(x) = \frac{(1)(x^2+1) - (x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow (1-x)(1+x) = 0 \Rightarrow x = 1\,, f(1) = 0.5 \qquad (1\,,0.5)$$
$$x = -1\,, f(-1) = -0.5 \qquad (-1\,,-0.5)$$
نقاط حرجة

الفترات	$(-\infty\,,-1)$	$(-1\,,1)$	$(1\,,\infty)$
اشارة g'	$-$	$+$	$-$
سلوك g	$\searrow$ متناقصة	$\nearrow$ متزايدة	$\searrow$ متناقصة

g متناقصة على كل من الفترة $(-\infty\,,-1)\,,(1\,,\infty)$ g متزايدة على الفترة $(-1\,,1)$

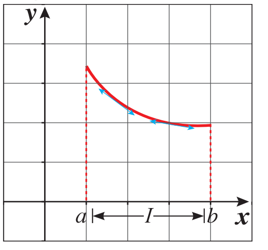
يوجد لـ g قيمة صغرى محلية عند $x = -1$ و تساوي $g(-1) = -0.5$

يوجد لـ g قيمة عظمى محلية عند $x = 1$ و تساوي $g(1) = 0.5$

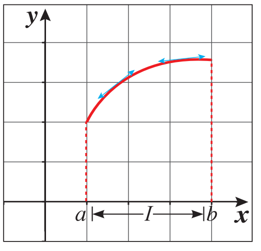
تعريف التقعر:

- إذا وقع منحنى الدالة أعلى جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعراً لأعلى على هذه الفترة
- إذا وقع منحنى الدالة أسفل جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعراً لأسفل على هذه الفترة

التقعر نحو الأعلى

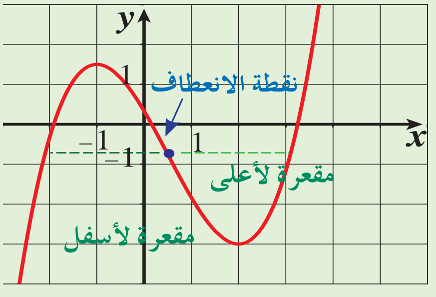


التقعر نحو الأسفل



اختبار التقعر

- إذا كانت $f''(x) > 0 \ ,\forall x \in I$ فإنه يكون مقعراً لأعلى على الفترة I
- إذا كانت $f''(x) < 0 \ ,\forall x \in I$ فإنه يكون مقعراً لأسفل على الفترة I



نقطة الانعطاف:

تُسمى النقطة $(c,f(c))$ نقطة انعطاف لبيان الدالة f إذا كانت الدالة متصلة عند c ومنحنى الدالة يغير تقعّره عند هذه النقطة من أعلى إلى أسفل أو بالعكس

ملاحظة:

إذا كانت $(c,f(c))$ نقطة انعطاف لبيان الدالة f فإن: $f''(c) = 0$ أو $f''(c)$ غير موجودة

أوجد فترات التقعر ونقطة الانعطاف لمنحى الدالة

Q $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

f كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x \Rightarrow f''(x) = 12x + 6 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2}$$

$-\infty \quad \frac{-1}{2} \quad \infty$

الفترات	$\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right)$	$\left(\frac{-1}{2}, \infty\right)$
اشارة f''	$-$	$+$
بيان f	$\cap$ مقعر للأسفل	$\cup$ مقعر للأعلى

بيان الدالة f مقعراً لأسفل في الفترة $\left(-\infty , \frac{-1}{2}\right)$ ومقعراً لأعلى في الفترة $\left(\frac{-1}{2}, \infty\right)$

نقطة انعطاف $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

Q $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ $\quad$ f كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 4x \Rightarrow f''(x) = 6x - 4 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 = \frac{11}{27}$

	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	∞
الفترات	$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$		$\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$
اشارة f''	$-$		$+$
بيان f	$\cap$ مقعر للأسفل		$\cup$ مقعر للأعلى

بيان الدالة f مقعراً لأسفل في الفترة $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ و مقعراً لأعلى في الفترة $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$

$\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{27}\right)$ نقطة انعطاف

نظرية (6): اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية

إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) < 0$ فإن f تكون لها قيمة عظمى محلية عند $x = c$

إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) > 0$ فإن f تكون لها قيمة صغرى محلية عند $x = c$

أوجد القيم القصوى المحلية للدالة:

Q $f(x) = x^3 - 12x - 5$ $\quad$ f كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow 3(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2, x = 2$

$f''(x) = 6x$

$f''(-2) = 6(-2) = -12 \quad , \quad -12 < 0$

$\therefore$ يوجد لـ f عند $x = -2$

قيمة عظمى محلية و هي $f(-2) = 11$

$f''(2) = 6(2) = 12 \quad , \quad 12 > 0$

$\therefore$ يوجد لـ f عند $x = 2$

قيمة صغرى محلية و هي $f(2) = -21$

Q $f(x) = 4x^3 - 12x^2$ $\quad$ f كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 12x^2 - 24x \quad , \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 12x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

$f''(x) = 24x - 24$

$f''(2) = 24(2) - 24 = 24 \quad , \quad 24 > 0$

يوجد لـ f عند $x = 2$

قيمة صغرى محلية و هي $f(2) = -16$

$f''(0) = 24(0) - 24 = -24 \quad , \quad -24 < 0$

يوجد لـ f عند $x = 0$

قيمة عظمى محلية و هي $f(0) = 0$

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. الدالة $y = x^3 - 3x^2 + 5$ على الفترة $(0 , 3)$ مقعرة لأسفل ⓐ ⓑ

2. الدالة $y = \frac{x}{x-1}$ على $(-\infty ,0)$ مقعرة لأعلى معلق ⓐ ⓑ

3. إذا كانت $f''(c) = 0$ ، فإن لمنحنى الدالة f نقطة انعطاف هي $(c ,f(c))$ ⓐ ⓑ

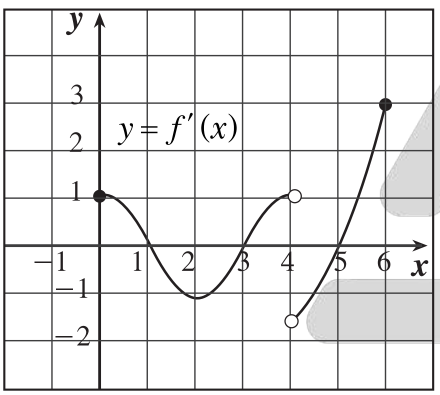
4. إذا كان لمنحنى الدالة f نقطة انعطاف هي $(c ,f(c))$ فإن $f''(c) = 0$ ⓐ ⓑ

5. يمكن أن تكون النقطة الحرجة نقطة انعطاف ⓐ ⓑ

6. منحنى الدالة $y = -3x^8$ مقعرة للأعلى ⓐ ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

7. إذا كان الشكل المقابل يمثل بيان دالة المشتقة (f') فإن الدالة f تكون



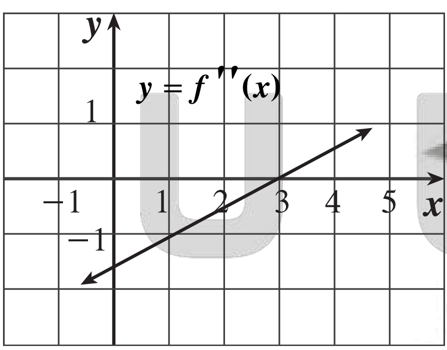
ⓐ متزايدة على كل من $(1 , 3)$,$(4 , 5)$

ⓑ متناقصة على كل من $(1 , 3)$,$(4 , 5)$

ⓒ لها قيمة صغرى محلية عند $x = 3$ فقط

ⓓ لها نقطة انعطاف عند كل من $x = 4 , x = 2$

8. إذا كانت f دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة والشكل المقابل يوضح بيان f'' فإن منحنى f مقعر للأسفل في الفترة:



ⓐ $(-\infty , 3)$ ⓑ $(3 , \infty)$

ⓒ $[-1 , 4]$ ⓓ $(3 , 5)$

9. أي من منحنيات الدوال التالية يكون مقعراً لأسفل في الفترة $(-1 , 1)$

ⓐ $f(x) = x^2$ ⓑ $f(x) = x|x|$ ⓒ $f(x) = -x^3$ ⓓ $f(x) = -x^2$

10. إذا كانت f دالة كثيرة الحدود، $(c ,f(c))$ نقطة انعطاف لها فإن:

ⓐ $f''(c) = 0$ ⓑ $f'(c) = 0$ ⓒ $f(c) = 0$ ⓓ $f''(c)$ غير موجودة

11.أي من الدوال التالية ليس لها نقطة انعطاف:

ⓐ $f(x) = x^3 + 5x$

ⓑ $f(x) = 4x^2 - 2x^4$

ⓒ $f(x) = x^3$

ⓓ $f(x) = (x-2)^4$

12.للدالة f : $f(x) = (x^2 - 3)^2$ نقاط انعطاف عددها:

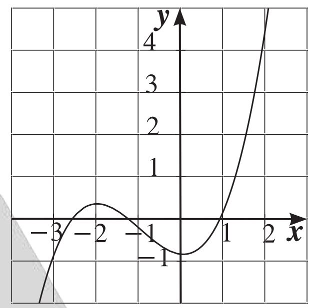
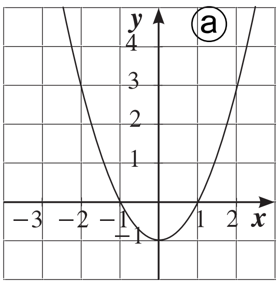
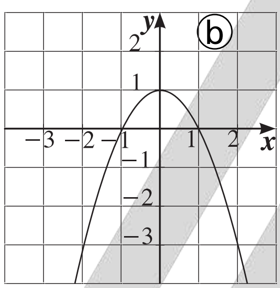
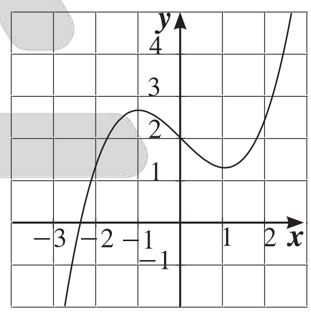
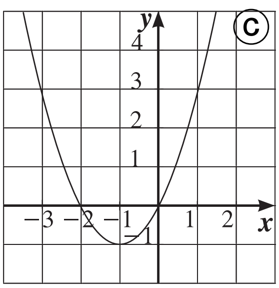
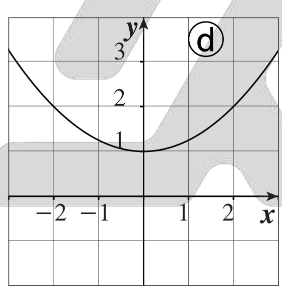
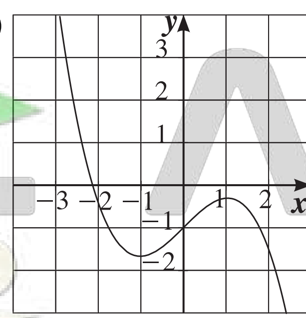
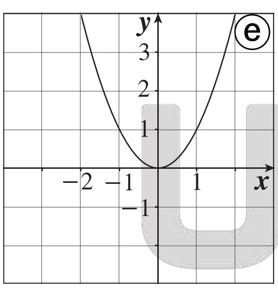
ⓐ 1

ⓑ 2

ⓒ 3

ⓓ 4

اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1)

منحنى الدالة f	منحنى دالة المشتقة f'
.13 **c** 	 
.14 **a** 	 
.15 **b** 	

رسم بيان دوال كثيرات الحدود

Q ادرس تغير الدالة: $f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بيانها

f دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = \infty$$

$f'(x) = 3x^2 - 3 \,, f'(x) = 0 \Rightarrow$

$3(x-1)(x+1) = 0$

$x = 1 \longrightarrow f(1) = 2$

$\therefore$ $(1\,,2)$ نقطة حرجة

$x = -1 \longrightarrow f(-1) = 6$

$\therefore$ $(-1\,,6)$ نقطة حرجة

	$-\infty$	-1	1	∞
اشارة f'	$+$	$-$	$+$	
سلوك f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

$f(-1) = 6$
قيمة عظمى محلية

$f(1) = 2$
قيمة صغرى محلية

f متزايدة على كل من:
الفترة $(-\infty\,,-1)$ والفترة $(1\,,\infty)$

f متناقصة على الفترة $(-1\,,1)$

$f''(x) = 6x \,, f''(x) = 0 \Rightarrow$

$x = 0 \,, f(0) = 4$

	$-\infty$	0	∞
اشارة f''	$-$	$+$	
بيان f	$\cap$ للأسفل	$\cup$ للأعلى	

منحنى الدالة f مقعر لـ:

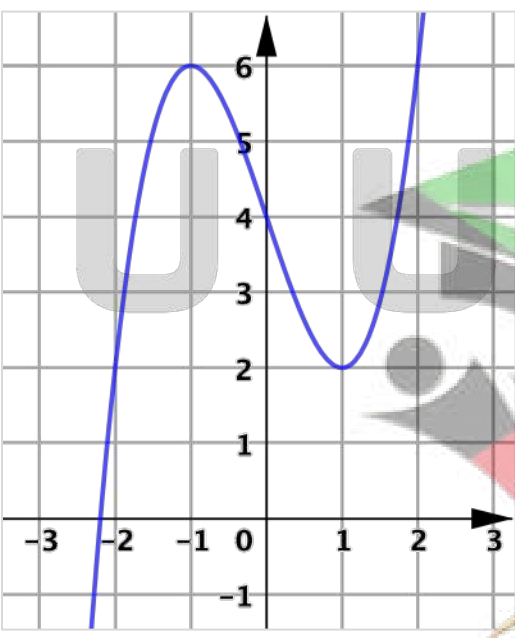
أعلى في $(0\,,\infty)$, أسفل في $(-\infty\,,0)$

$\therefore$ $(0\,,4)$ نقطة انعطاف

نقاط إضافية :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	6	4	2	6

بيان الدالة f :



ادرس تغير الدالة: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها

f كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = \infty$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x-3)(x-1) = 0$$

$$x = 3 \longrightarrow f(3) = -4$$

$\therefore$ $(3,-4)$ نقطة حرجة

$$x = 1 \longrightarrow f(1) = 0$$

$\therefore$ $(1,0)$ نقطة حرجة

x	$-\infty$	1	3	∞
اشارة f'	$+$	$-$	$+$	
سلوك f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

$f(1) = 0$
قيمة عظمى محلية

$f(3) = -4$
قيمة صغرى محلية

f متزايدة على كل من:
الفترة $(-\infty, 1)$ والفترة $(3, \infty)$

f متناقصة على الفترة $(1, 3)$

$$f''(x) = 6x - 12 \,,\, f''(x) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{12}{6} = 2 \longrightarrow f(2) = -2$$

x	$-\infty$	2	∞
اشارة f''	$-$	$+$	
بيان f	$\frown$ للأسفل	$\smile$ للأعلى	

منحنى الدالة f مقعر لـ:

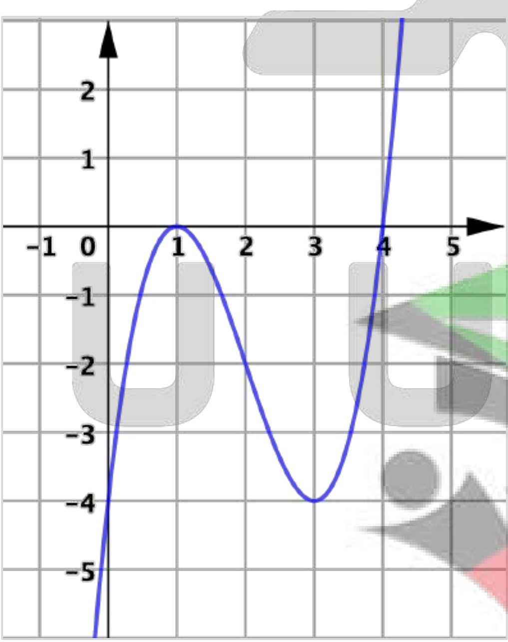
أعلى في $(2, \infty)$, أسفل في $(-\infty, 2)$

$\therefore$ $(2, -2)$ نقطة انعطاف

نقاط إضافية :

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-4	0	-2	-4	0

بيان الدالة f :



ادرس تغير الدالة: $f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها

f كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-x^3) = -\infty$$

$f'(x) = -3x^2 \, , f'(x) = 0 \Rightarrow$

$x = 0 \longrightarrow f(0) = 1$

$\therefore$ $(0\,,1)$ نقطة حرجة

	$-\infty$	0	∞
اشارة f'	$-$		$-$
سلوك f	$\searrow$ متناقصة		$\searrow$ متناقصة

fمتناقصة على :

الفترة $(-\infty\,,0)$ والفترة $(0,\infty)$

$f''(x) = -6x \, , f''(x) = 0 \Rightarrow$

$x = 0 \longrightarrow f(0) = 1$

	$-\infty$	0	∞
اشارة f''	$+$		$-$
بيان f	$\cup$ للأعلى		$\cap$ للأسفل

منحنى الدالة f مقعر لـ:

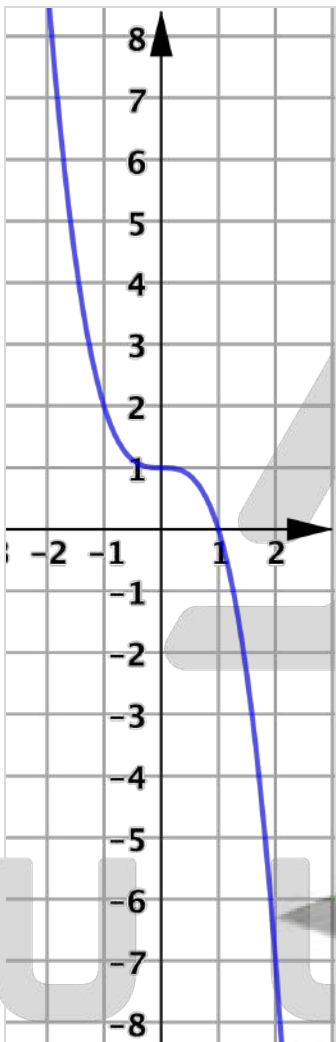
أسفل في $(0\,,\infty)$, أعلى في $(-\infty\,,0)$

$\therefore$ $(0\,,1)$ نقطة انعطاف

نقاط إضافية :

x	-2	-1	0	1	2
y	9	2	1	0	-7

بيان الدالة f :



ادرس تغير الدالة: $f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها

f كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -2x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -2x^3 = -\infty$$

$f'(x) = 1 - 6x^2, f'(x) = 0 \Rightarrow$

$1 - 6x^2 = 0 , x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow$

$x = \frac{-\sqrt{6}}{6} , f\left(\frac{-\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{-\sqrt{6}}{9}$

$\therefore$ $\left(\frac{-\sqrt{6}}{6} , \frac{-\sqrt{6}}{9}\right)$ نقطة حرجة

$x = \frac{\sqrt{6}}{6} , f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{9}$

$\therefore$ $\left(\frac{\sqrt{6}}{6} , \frac{\sqrt{6}}{9}\right)$ نقطة حرجة

	$-\infty$	$\frac{-\sqrt{6}}{6}$	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	∞
اشارة f'	$-$	$+$	$-$	
سلوك f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

$f\left(\frac{-\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{-\sqrt{6}}{9}$ قيمة صغرى محلية

$f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{9}$ قيمةعظمى محلية

f متناقصة على:

الفترة $\left(-\infty , \frac{-\sqrt{6}}{6}\right)$ والفترة $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \infty\right)$

f متزايدة على الفترة: $\left(\frac{-\sqrt{6}}{6} , \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

$f''(x) = -12x , f''(x) = 0 \Rightarrow$

$x = 0 , f(0) = 0$

	$-\infty$	0	∞
اشارة f''	$+$	$-$	
بيان f	$\smile$ للأعلى	$\frown$ للأسفل	

منحنى الدالة f مقعر لـ:

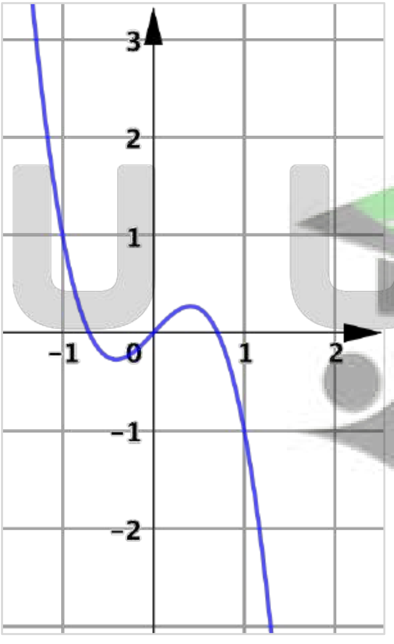
أسفل في $(0,\infty)$, أعلى في $(-\infty ,0)$

$\therefore$ $(0,0)$ نقطة انعطاف

نقط إضافية :

x	-1	$\frac{-\sqrt{6}}{6}$	0	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	1
y	1	$\frac{-\sqrt{6}}{9}$	0	$\frac{\sqrt{6}}{9}$	-1

بيان الدالة f :



ادرس تغير الدالة: $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 2$ وارسم بيانها

f كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3x^4 = \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3x^4 = \infty$$

$f'(x) = 12x^3 + 12x^2, f'(x) = 0$

$\Rightarrow 12x^2(x+1) = 0$

$x = 0\,, f(0) = 2$

$\therefore$ $(0\,,2)$ نقطة حرجة

$x = -1\,, f(-1) = 1$

$\therefore$ $(-1,1)$ نقطة حرجة

	$-\infty$	-1	0	∞
إشارة f'	$-$	$+$	$+$	
سلوك f	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	

fمتناقصة على $(-\infty,-1)$

fمتزايدة على:
الفترة $(-1\,,0)$والفترة $(0,\infty)$

$f(-1) = 1$ قيمة صغرى محلية

$f''(x) = 36x^2 + 24x\,, f''(x) = 0$

$\Rightarrow 12x(3x+2) = 0$

$x = 0\,, f(0) = 2$

$x = -\frac{2}{3}\,, f\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{38}{27}$

	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	0	∞
إشارة f''	$+$	$-$	$+$	
بيان f	$\cup$	$\cap$	$\cup$	

منحنى الدالة f مقعر ل:

أعلى في كل من $(0\,,\infty)$,$\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$,

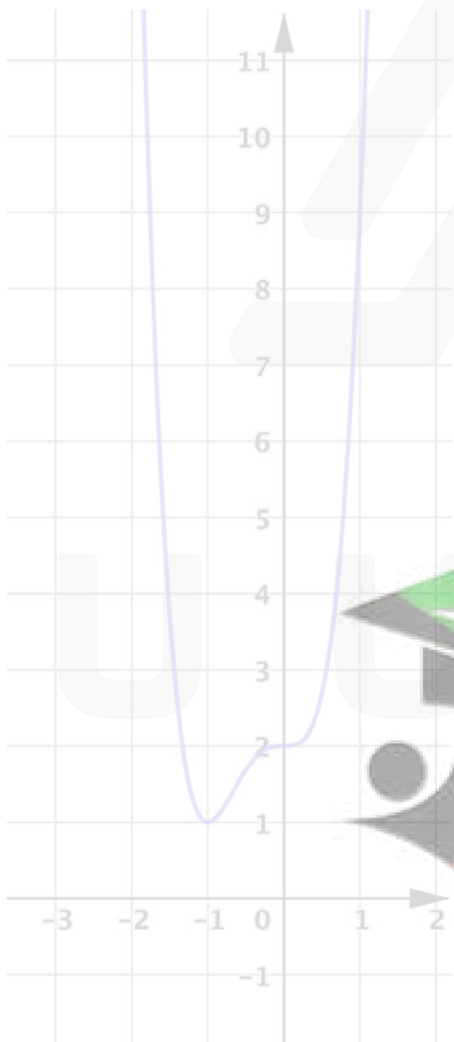
لأسفل في $\left(-\frac{2}{3}\,,0\right)$

$\therefore$ $\left(\frac{-2}{3}\,,\frac{38}{27}\right)$, $(0\,,2)$ نقاط انعطاف

نقاط إضافية :

x	-2	-1	$\frac{-2}{3}$	0	1
$f(x)$	18	1	$\frac{38}{27}$	2	9

بيان الدالة f :



ادرس تغير الدالة: $f(x) = x^4 - 2x^2$ وارسم بيانها

f كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = \infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = \infty$

$f'(x) = 4x^3 - 4x , f'(x) = 0$

$\Rightarrow 4x(x-1)(x+1) = 0$

نقاط حرجة:

$x = 0 , f(0) = 0 \quad ,(0 , 0)$

$x = 1 , f(1) = -1 \quad ,(1 , -1)$

$x = -1 , f(-1) = -1 , (-1 , -1)$

x	$-\infty$	-1	0	1	∞
اشارة f'	$-$	$+$	$-$	$+$	
سلوك f	↘	↗	↘	↗	

f متزايدة على:
الفترة $(-1 , 0)$ والفترة $(1,\infty)$

f متناقصة على :
الفترة $(-\infty , -1)$ والفترة $(0,1)$

$f(-1) = -1$ قيمة صغرى محلية

$f(0) = 0$ قيمة عظمى محلية

$f(1) = -1$ قيمة صغرى محلية

$f''(x) = 12x^2 - 4 , f''(x) = 0$

$x = \frac{-\sqrt{3}}{3} , f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{-5}{9}$

$x = \frac{\sqrt{3}}{3} , f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{-5}{9}$

x	$-\infty$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	∞
اشارة f''	$+$	$-$	$+$	
بيان f	$\cup$	$\cap$	$\cup$	

منحنى الدالة f مقعر لـ:

أعلى في كل من $\left(-\infty, \frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$,

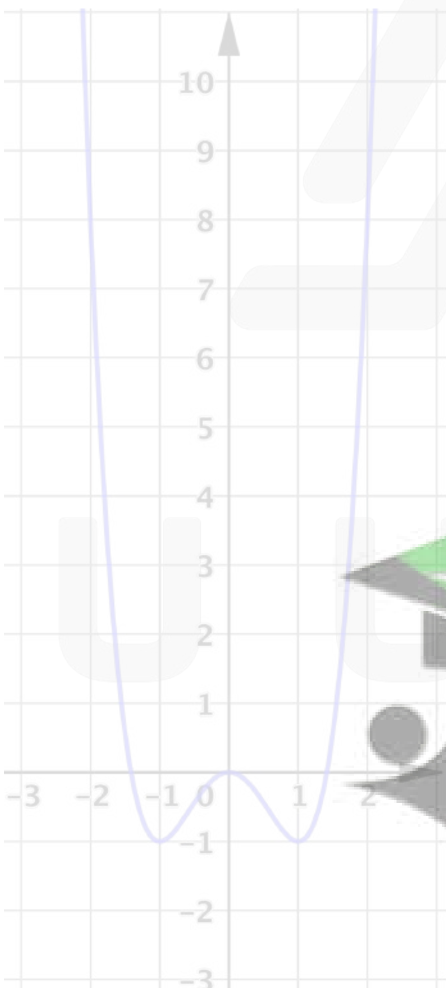
لأسفل في $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\therefore$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-5}{9}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{-5}{9}\right)$ نقاط انعطاف

نقاط إضافية :

x	-2	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	2
$f(x)$	8	-1	$\frac{-5}{9}$	0	$\frac{-5}{9}$	-1	8

بيان الدالة f :



ادرس تغير الدالة: $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ وارسم بيانها

f كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x^4 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x^4 = -\infty$$

$$f'(x) = -4x^3 + 4x, f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow -4x(x-1)(x+1) = 0$$

نقاط حرجة:

$x = 0, f(0) = 1$ $(0, 1)$

$x = 1, f(1) = 2$ $(1, 2)$

$x = -1, f(-1) = 2$ $(-1, 2)$

	$-\infty$	-1	0	1	∞
اشارة f'	$+$	$-$	$+$	$-$	
سلوك f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

fمتزايدة على:
الفترة $(0,1)$ والفترة $(-\infty, -1)$

fمتناقصة على :
الفترة $(-1, 0)$والفترة $(1,\infty)$

$f(-1) = 2$ قيمة عظمى محلية

$f(0) = 1$ قيمة صغرى محلية

$f(1) = 2$ قيمة عظمى محلية

$$f''(x) = -12x^2 + 4, f''(x) = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{14}{9}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{14}{9}$$

	$-\infty$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	∞
اشارة f''	$-$	$+$	$-$	
بيان f	$\frown$	$\smile$	$\frown$	

منحنى الدالة f مقعر لـ:

أسفل في كل من $\left(-\infty, \frac{-\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$

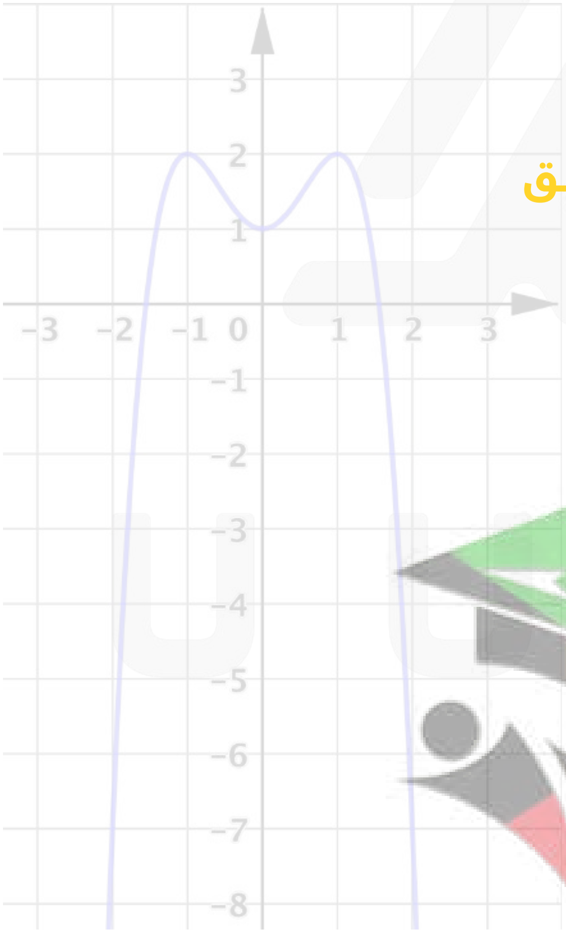
لأعلى في $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\therefore$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{14}{9}\right), \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{14}{9}\right)$ نقاط انعطاف

نقاط إضافية :

x	-2	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	2
$f(x)$	-7	2	$\frac{14}{9}$	1	$\frac{14}{9}$	2	-7

بيان الدالة f :



ادرس تغير الدالة: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$ وارسم بيانها

f كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^4 = \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^4 = \infty$$

$f'(x) = 4x^3 - 16x = 0$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$

$4x(x-2)(x+2) = 0$

نقاط حرجة:

$x = 0\,, f(0) = 7 \qquad (0\,,7)$

$x = 2\,, f(2) = -9 \qquad (2\,,-9)$

$x = -2\,, f(-2) = -9 \qquad (-2\,,-9)$

x	$-\infty$	-2	0	2	∞
إشارة f'	$-$	$+$	$-$	$+$	
سلوك f	↘	↗	↘	↗	

fمتزايدة على:
الفترة $(2,\infty)$ والفترة $(-2,0)$

fمتناقصة على :
الفترة $(0,2)$والفترة $(-\infty,-2)$

$f(-2) = -9$ قيمة صغرى محلية

$f(0) = 7$ قيمة عظمى محلية

$f(2) = -9$ قيمة صغرى محلية

$f''(x) = 12x^2 - 16\,, f''(x) = 0 \Rightarrow$

$x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}\,, f\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{-17}{9}$

$x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,, f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{-17}{9}$

x	$-\infty$	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	∞
إشارة f''	$+$		$-$		$+$
بيان f	◡		◠		◡

منحنى الدالة f مقعر لـ:

أعلى في كل من $\left(-\infty,\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\infty\right)$

أسفل في $\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

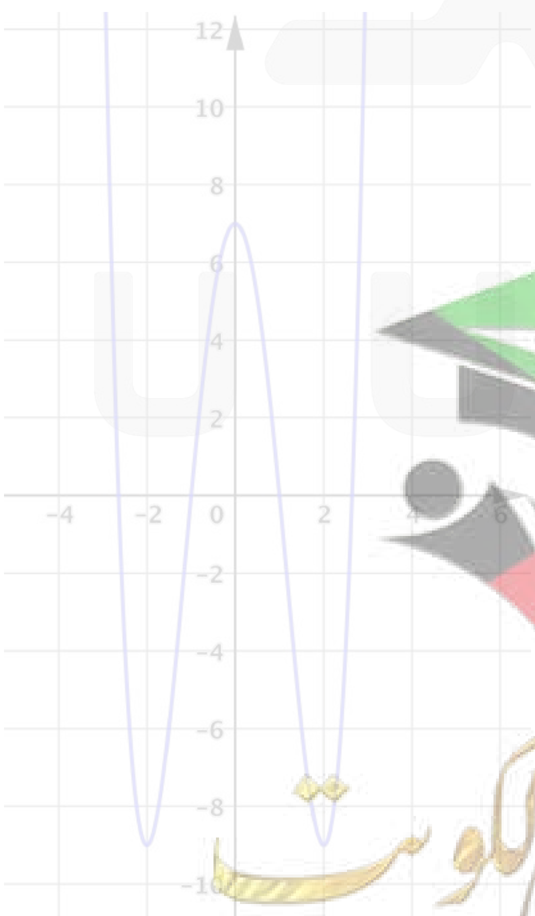
$\therefore$ $\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3},\frac{-17}{9}\right), \left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{-17}{9}\right)$ نقاط انعطاف

نقاط إضافية :

x	-3	-2	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	-1
$f(x)$	16	-9	$\frac{-17}{9}$	0

x	0	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	3
$f(x)$	7	0	$\frac{-17}{9}$	-9	16

بيان الدالة f :



6) ادرس تغير الدالة: $f(x) = -x^3 - 3x$ وارسم بيانها

f كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$$

$f'(x) = -3x^2 - 3$

$f'(x) \neq 0$

لا يوجد حلول

بالتالي لا يوجد نقاط حرجة

	$-\infty$				∞
إشارة f'	−	−	−	−	−
سلوك f	↘				

f متناقصة على $(-\infty,\infty)$

$f''(x) = -6x \, , f''(x) = 0 \Rightarrow$

$x = 0, f(0) = 0$

	$-\infty$		0		∞
إشارة f''		+		−	
بيان f		∪		∩	

منحنى الدالة f مقعر لـ:

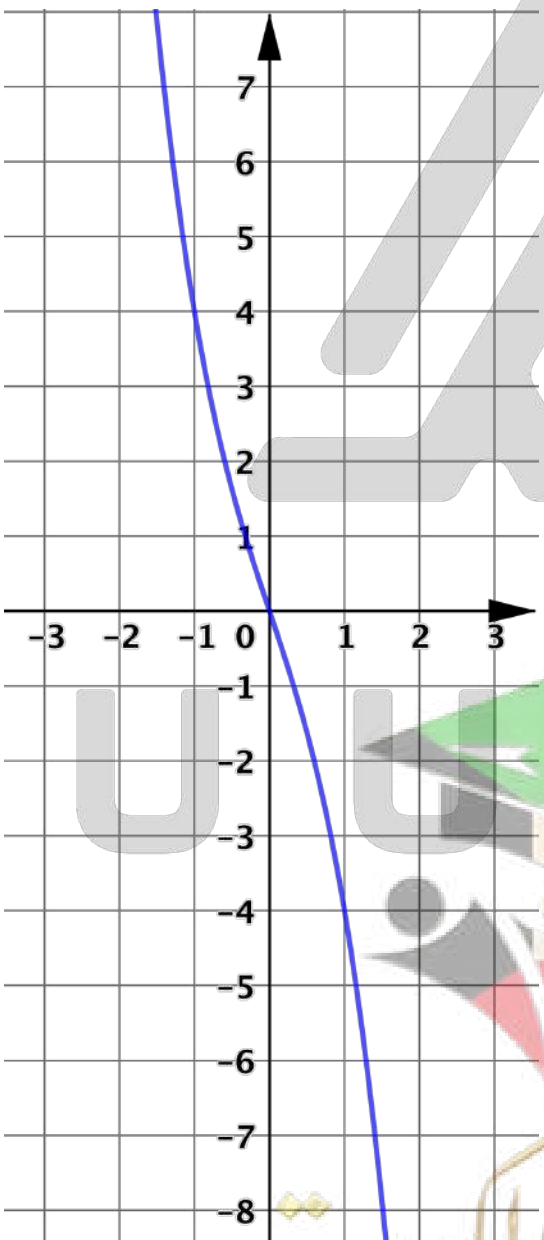
أعلى في $(-\infty,0)$

أسفل في $(0,\infty)$

$\therefore$ $(0,0)$ نقاط انعطاف

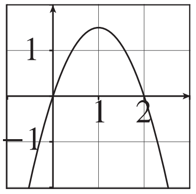
نقاط إضافية

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	14	4	0	-4	-14



ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

لتكن f : $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2$ و (C) منحناها



1. يمر المنحنى (C) بنقطة الأصل — ⓐ ⓑ
2. الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة f' — ⓐ ⓑ
3. المماس عند النقطة التي إحداثيها السيني يساوي 2 موازٍ لمحور السينات — ⓐ ⓑ
4. 4 هي قيمة عظمى محلية — ⓐ ⓑ
5. المنحنى (C) مقعر لأعلى على الفترة $(-\infty, 1)$ — ⓐ ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

في التمارين التالية، الدالة f دالة كثيرة حدود جدول تغيرها:

x	$-\infty$		-1		5		∞
$f(x)$	∞	↘	-5	↗	3	↘	$-\infty$

6. العبارة الصحيحة فيما يلي هي:

ⓐ $f(-2) > f(0)$ ⓑ $f(0) < f(6)$
ⓒ $f(-9) > f(-2)$ ⓓ $f(-1) > f(8)$

7. للمعادلة $f(x) = 0$

ⓐ لا حل لها ⓑ ثلاثة حلول ⓒ حلان ⓓ حل واحد

8. جدول تغير الدالة f يوضح أن:

ⓐ -5 قيمة صغرى مطلقة
ⓑ 3 قيمة عظمى مطلقة
ⓒ -5 قيمة صغرى محلية، 3 قيمة عظمى محلية
ⓓ -1 قيمة صغرى محلية، 5 قيمة عظمى محلية

9. لتكن الدالة f : $f(x) = -x^2 + 7x + 1$

ⓐ لمنحنى f قيمة عظمى محلية ⓑ لمنحنى f نقطة انعطاف
ⓒ منحنى f مقعر لأعلى ⓓ لمنحنى f قيمة صغرى محلية

10. لتكن $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \, , a \neq 0$: f لمنحنى f دائماً

ⓐ قيمة عظمى محلية وقيمة صغرى محلية
ⓑ نقطة انعطاف
ⓒ تقعر لأسفل ثم تقعر لأعلى
ⓓ لا تمر بنقطة الأصل

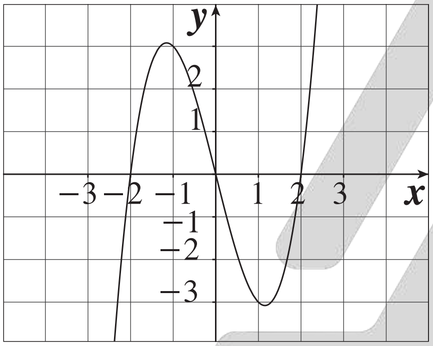
11. الدالة f كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة:

معلق

ⓐ لمنحنى f دائماً نقطة انعطاف
ⓑ لمنحنى f أكثر من قيمة عظمى محلية
ⓒ منحنى f يقطع دائماً محور السينات
ⓓ قد لا يكون لمنحنى f قيمة صغرى محلية

اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1)

الشكل المقابل يمثل بيان الدالة f



12. $f'(x) = 0$ ...... ⓓ

13. $f'(x) > 0$ في ...... ⓑ

14. $f''(x) < 0$ في ...... ⓐ

ⓐ $(-\infty \, , 0)$
ⓑ $(-\infty \, , -1) \, , (1 \, , \infty)$
ⓒ $-2 \, , 0 \, , \quad 2$
ⓓ $-1 \, , 1$
ⓔ $(0 \, , \infty)$

تطبيقات على القيم القصوى

Q عددان موجبان مجموعهما 100 ومجموع مربعيهما أصغر ما يمكن، ما العددان؟

العدد الأول	العدد الثاني
x	$(100-x)$

$0 < x < 100$

مجموع مربعيهما $f(x) = x^2 + (100-x)^2$

$f'(x) = 2x + 2(100-x)(-1)$

$= 2x - 200 + 2x = 4x - 200$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 200 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{200}{4} = 50$

$\therefore$ $(50\,,f(50))$ نقطة حرجة

$f''(x) = 4\;,\quad 4 > 0$

$\therefore$ $f(50)$ قيمة صغرى مطلقة عند: $x = 50$

$\therefore$ العددان هما $50\,,50$

Q أوجد عددين مجموعهما 14 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن؟

العدد الأول	العدد الثاني
x	$14-x$

ناتج ضربهما

$f(x) = x(14-x) = 14x - x^2$

$f'(x) = 14 - 2x$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow 14 - 2x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-14}{-2} = 7$

$\therefore$ $(7\,,f(7))$ نقطة حرجة

$f''(x) = -2$ ، $-2 < 0$

$\therefore$ $f(7)$ قيمة عظمى مطلقة عند $x = 7$

$\therefore$ العددان هما $14 - 7 = 7\,,7$

من كراسة التمارين:

1. مجموع عددين غير سالبين هو 20 أوجد العددين إذا كان

a) مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن (يُحل بنفس طريقة السؤال السابق ↗)

b) أحد العددين مضافا إليه الجذر التربيعي للآخر أكبر ما يمكن

العدد الأول	العدد الثاني
x	$20-x$

$0 < x < 20$

$f(x) = 20 - x + \sqrt{x}$

$f'(x) = -1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{-2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$

أصفار البسط: $f'(x) = 0$

$-2\sqrt{x} + 1 = 0 \Longrightarrow$

$\sqrt{x} = \dfrac{-1}{-2} \Longrightarrow x = \dfrac{1}{4} \in (0,20)$

أصفار المقام: $2\sqrt{x} = 0 \Longrightarrow x = 0 \notin (0,20)$

x	0	$\frac{1}{4}$	20
إشارة f'	$+$		$-$
سلوك f	↗		↘

$\therefore$ $\left(\frac{1}{4}\,,f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ نقطة حرجة

$\therefore$ $f\left(\frac{1}{4}\right)$ قيمة عظمى مطلقة

$\therefore$ العددان هما $\frac{1}{4}\,,\ 20 - \frac{1}{4} = \frac{79}{4}$

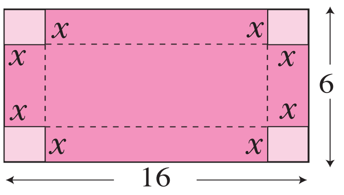
Q يراد صنع صندوق بدون غطاء بقص مربعات متطابقة طول ضلع كل منها x من أركان طبقة صفيح أبعادها $6cm$,$16cm$ و ثني جوانبها إلى أعلى (الشكل جانبا) المطلوب:

- أوجد قيمة x بحيث يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن وما هو حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة

الارتفاع × العرض × الطول = حجم الصندوق

$0 < 2x < 6$

$0 < x < 3$



$$V(x) = (16 - 2x)(6 - 2x)x$$

$$= (96 - 32x - 12x + 4x^2) \cdot x = 4x^3 - 44x^2 + 96x$$

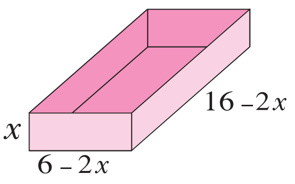
$$V'(x) = 12x^2 - 88x + 96$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 88x + 96 = 0 \Rightarrow$$

$$x = 6 \notin (0,3) \qquad x = \frac{4}{3} \in (0,3)$$

$$V''(x) = 24x - 88$$

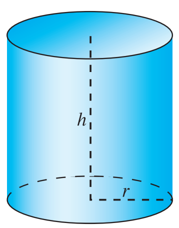
$$V''\left(\frac{4}{3}\right) = 24\left(\frac{4}{3}\right) - 88 = -56 \ , -56 < 0$$



∴ أكبر حجم للصندوق عند $x = \frac{4}{3}$

وهو: $V\left(\frac{4}{3}\right) = 4\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 44\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 96\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1600}{27} cm^3$

Q طلب إليك تصميم علبة زيت تسع لترا واحدا تكون على شكل أسطوانة دائرية قائمة ما أبعادها لتكون كمية المعدن المستخدم لصنعها أقل ما يمكن



$$V = 1l = 1000\ cm^3$$

$$\pi r^2 . h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$\therefore A = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \qquad : r > 0$$

$$\therefore A' = 4\pi r + \frac{-2000}{r^2}$$

$$A' = 0 \Rightarrow \frac{4\pi r}{1} + \frac{-2000}{r^2} = 0 \Rightarrow \frac{4\pi r^3 + \ -2000}{r^2} = 0 \Rightarrow$$

$$4\pi r^3 + \ -2000 = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{2000}{4\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5.42$$

	0	5.42	∞
إشارة A'	−		+
سلوك A	↘		↗

∴ يوجد لـ A قيمة صغرى مطلقة عند $r \approx 5.42$ بالتالي: $h = \frac{1000}{\pi(5.42)^2} \approx 10.84\ cm$

تعطي الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h

- أوجد الارتفاع $h(cm)$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة
- ما قيمة هذا الحجم

$v(h) = 2\pi(-h^3 + 36h) \qquad h \in (0, \infty)$

$v'(h) = 2\pi(-3h^2 + 36)$

$v'(h) = 0 \Rightarrow -3h^2 + 36 = 0$

$h = -2\sqrt{3} \notin (0, \infty)$

$h = 2\sqrt{3} \quad \in (0, \infty)$

$v'' = 2\pi(-6h) = -12\pi h$

$v''(2\sqrt{3}) = -12\pi(2\sqrt{3})$

$\approx -130.6 < 0$

∴ أكبر حجم للأسطوانة عندما $h = 2\sqrt{3}\ cm$

$$v(2\sqrt{3}) = 2\pi\left(-(2\sqrt{3})^3 + 36(2\sqrt{3})\right) \approx 522.37\ cm^3$$

أوجد أقصر مسافة بين النقطة $p(x,y)$ على المنحنى الذي معادلته $y^2 - x^2 = 16$ والنقطة $Q(6,0)$

$PQ = \sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 - 2.x.6 + 6^2 + y^2}$

$= \sqrt{x^2 - 12x + 36 + 16 + x^2} \qquad : y^2 = 16 + x^2$

$\therefore f(x) = (2x^2 - 12x + 52)^{\frac{1}{2}}$ دالة المسافة:

$f'(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - 12x + 52)^{-\frac{1}{2}}(4x - 12) = \frac{4x - 12}{2\sqrt{2x^2 - 12x + 52}}$

أصفار البسط

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3$

∴ $(3, f(3))$ نقطة حرجة

أصفار المقام

$2\sqrt{2x^2 - 12x + 52} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 12x + 52 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= (-12)^2 - 4 \times 2 \times 52 = -272 < 0$

لا توجد أصفار مقام

	$-\infty$	3	∞
إشارة f'	$-$		$+$
سلوك f	↘		↗

∴ يوجد للدالة قيمة صغرى مطلقة عندما $x = 3$ بالتالي أقصر مسافة هي

$f(3) = (2(3)^2 - 12(3) + 52)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{34}\ units$

Q أوجد أقصر مسافة بين النقطة $A(x,y)$ على المنحى الذي معادلته $y=\sqrt{x}$ والنقطة $B(3,0)$

$$AB=\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2-6x+9+y^2}=\sqrt{x^2-6x+9+x}$$

$$\therefore f(x)=\sqrt{x^2-5x+9}=(x^2-5x+9)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x^2-5x+9)^{-\frac{1}{2}}(2x-5)=\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+9}}$$

أصفار البسط $f'(x)=0\Rightarrow$

$2x-5=0\Rightarrow \quad x=\frac{5}{2}$

$\therefore$ نقطة حرجة $\left(\frac{5}{2},f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$

أصفار المقام $2\sqrt{x^2-5x+9}=0\Rightarrow$

$x^2-5x+9=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times9=-11<0$

⚠ معلق

لا يوجد أصفار للمقام

	0	$\frac{5}{2}$	∞
إشارة f'	$-$		$+$
سلوك f	$\searrow$		$\nearrow$

$\therefore$ يوجد للدالة قيمة صغرى مطلقة عندما $x=\frac{5}{2}$ بالتالي أصغر مسافة هي

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2-5\left(\frac{5}{2}\right)+9\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{11}}{2}\ units$$

من كراسة التمارين:

3. أثبت أن من بين المستطيلات التي محيطها $8m$ واحدا منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعا ؟

محيط المستطيل $=y+y+x+x=2x+2y=8 \quad\Rightarrow\quad x+y=4\Rightarrow y=4-x$

مساحة المستطيل $=xy=x.(4-x)\Rightarrow f(x)=4x-x^2$

$f'(x)=4-2x, f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{-4}{-2}=2\Rightarrow$ نقطة حرجة $(2,f(2))$

$f''(x)=-2\ ,\quad -2<0\Rightarrow$ يوجد لـ f قيمة عظمى مطلقة عند $x=2$

$\therefore$ أبعاد المستطيل $2m$,$2m$

بالتالي الشكل مربع لأنه مستطيل بعداه متساويان

x

y

$0<x<4$

$0<y<4$

7. ضلعان في مثلث طولاهما a,b والزاوية بينهما θ المطلوب: ما قيمة θ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن؟ (إرشاد : مساحة المثلث $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$)

$0°<\theta<180°$

$$A(\theta)=\frac{1}{2}ab\ \sin\theta\ \Rightarrow A'(\theta)=\frac{1}{2}ab\cos\theta=0$$

$A'(\theta)=0\Rightarrow\cos\theta=0\Rightarrow\theta=\cos^{-1}(0)=90°$ قيمة حرجة

⚠ معلق

$$A''(\theta)=\frac{-1}{2}ab\sin\theta\ \Rightarrow A''(90°)=\frac{-1}{2}ab\sin(90°)=-\frac{1}{2}ab<0$$

$\therefore$ يوجد للمساحة A قيمة عظمى مطلقة عند $\theta=90°$

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. أصغر محيط ممكن لمستطيل مساحته $16\ cm^2$ هو $16\ cm$ — (a) (b)

2. أكبر مساحة لمستطيل قاعدته على محور السينات ورأساه العلويان على القطع المكافئ الذي معادلته $y = 12 - x^2$ هي $24\ units^2$ — (a) (b)

معلق

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

3. مستطيل مساحته $36\ cm^2$ فإن أبعاده التي تعطي أصغر محيط هي:

(a) $9\ cm , 4\ cm$ (b) $12\ cm , 3\ cm$
(c) $6\ cm , 6\ cm$ (d) $18\ cm , 2\ cm$

4. أبعاد أكبر مساحة لمستطيل قاعدته على محور السينات ورأساه العلويان على القطع المكافئ $y = 4 - x^2$ هي:

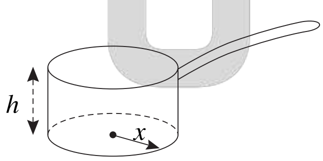
(a) $8 , \frac{4\sqrt{3}}{3}$ (b) $\frac{8}{3} , \sqrt{3}$
(c) $4 , 4$ (d) $\frac{4\sqrt{3}}{3} , \frac{8}{3}$

معلق

5. أردت التخطيط لصنع صندوق على هيئة شبه مكعب بدون غطاء من قطعة ورق مقوّى مستطيلة أبعادها $10\ cm , 16\ cm$، وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة عند الرؤوس، ثم طي الأجزاء البارزة.
أبعاد الصندوق الذي له أكبر حجم يمكن صنعه على أساسها هي:

(a) $2\ cm , 6\ cm , 12\ cm$ (b) $3\ cm , 4\ cm , 12\ cm$
(c) $2\ cm , 8\ cm , 12\ cm$ (d) $3\ cm , 6\ cm , 8\ cm$

6. تعطى المساحة الكلية لوعاء أسطواني الشكل بالمعادلة $s = \pi x^2 + \frac{2v}{x}$ ، حيث x طول نصف قطر قاعدته و V حجمه (تذكر: $V = \pi x^2 h$)
إذا كان حجم الوعاء ثابتا فإن القيمة الدنيا لمساحته هي عندما:



(a) $x > h$ (b) $x = h$ (c) $x < h$ (d) ليس أي مما سبق

🎯 **تــدرب و تـفـوق**
اختبارات الكترونية ذكية

التقدير

درسنا سابقاً المجتمع الإحصائي والعينة

المتوسط الحسابي: للمجتمع هو μ ، للعينة هو $\bar{x}$
التباين: للمجتمع هو σ^2 ، للعينة هو s^2
الانحراف المعياري: للمجتمع هو σ ، للعينة هو s

المعلمة: هي ثابت يصف **المجتمع** أو يصف توزيع المجتمع كالمتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ

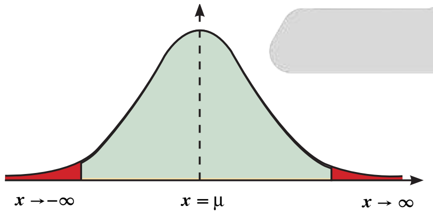
الإحصاءة: هو اقتران تتعين قيمته من **العينة** كالمتوسط الحسابي $\bar{x}$ أو الانحراف المعياري s

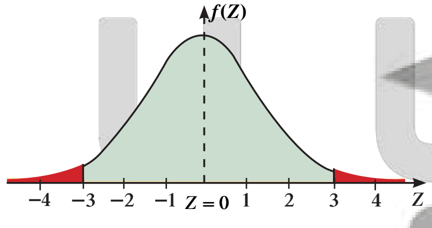
تقدير المعلمة : هو إحصاءة تعتمد على قيم العينة وتعكس قيمة قريبة لمعلمة المجتمع
سنتعلم طريقتين للتقدير (التقدير بنقطة - التقدير بفترة ثقة)

التقدير بنقطة: هي قيمة وحيدة محسوبة من العينة تُستخدم لتقدير معلمة مجهولة من المجتمع

فترة الثقة: هي فترة طرفاها متغيران عشوائيان تحوي إحدى معالم المجتمع بنسبة معينة نسميها درجة الثقة (مستوى الثقة)
التقدير بفترة الثقة: هو إيجاد فترة معينة يتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة

خواص التوزيع الطبيعي:





- المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال
- المنحنى على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول محوره $x = \mu$
- يمتد المنحنى من طرفيه إلى ∞, $-\infty$
- المساحة تحت المنحنى تساوي 1 وحدة مساحة
- عندما يكون $\sigma = 1$, $\mu = 0$ فإن التوزيع الطبيعي يصبح اسمه **"التوزيع الطبيعي المعياري"**

أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لكل من درجات الثقة التالية، وذلك باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

97% $\quad 1-\alpha = 0.97 \Rightarrow \frac{1-\alpha}{2} = \frac{0.97}{2} = 0.485 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.1 + 0.07 = 2.17$

99.2% $\quad 1-\alpha = \frac{99.2}{100} = 0.992 \Rightarrow \frac{1-\alpha}{2} = \frac{0.992}{2} = 0.496 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.6 + 0.05 = 2.65$

95% $\quad 1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \frac{1-\alpha}{2} = \frac{0.95}{2} = 0.475 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.9 + 0.06 = 1.96$

التقدير بفترة الثقة للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي

أولا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع معلوما

أجريت الدراسة على عينة من الإناث حجمها (25) والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 3.6$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 18.4$ ، باستخدام مستوى ثقة 95%

$n = 25$

$\sigma = 3.6$

$\bar{x} = 18.4$

- أوجد هامش الخطأ
- أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ
- فسر فترة الثقة

مستوى الثقة 95%

① ∵ مستوى الثقة 95% $\therefore Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

∵ σ معلومة يكون هامش الخطأ: $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{3.6}{\sqrt{25}} = 1.4112$

② فترة الثقة $(\bar{x} - E, \bar{x} + E) = (18.4 - 1.4112, 18.4 + 1.4112) = (16.9888, 19.8112)$

③ التفسير : عند اختيار 100عينة حجم كل منها $n = 25$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحتوي على القيمة الحقيقية لـ μ

أجريت الدراسة على عينة من الإناث حجمها (40) والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 12.5$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 76.3$ ، باستخدام مستوى ثقة 95%

$n = 40$

$\sigma = 12.5$

$\bar{x} = 76.3$

- أوجد هامش الخطأ
- أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ
- فسر فترة الثقة

مستوى الثقة 95%

① ∵ مستوى الثقة 95% $\therefore Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

∵ σ معلومة يكون هامش الخطأ: $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{12.5}{\sqrt{40}} \approx 3.87379$

② فترة الثقة $(\bar{x} - E, \bar{x} + E) = (76.3 - 3.87379, 76.3 + 3.87379) = (72.5262, 80.1738)$

③ التفسير : عند اختيار 100عينة حجم كل منها $n = 40$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحتوي على القيمة الحقيقية لـ μ

ثانيا: إذا كان التباين σ^2 غير معلوم و $n > 30$

Q أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 81$ ومتوسطها الحسابي $\bar{x} = 50$ وانحرافها المعياري $S = 9$ ، مستوى ثقة 95%

- أوجد هامش الخطأ
- أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ
- فسر فترة الثقة

$n = 81$

$\bar{x} = 50$

$s = 9$

مستوى الثقة 95%

① ∵ مستوى الثقة 95% ∴ $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

∵ σ غير معلومة , $n > 30$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{9}{\sqrt{81}} = 1.96$$

② فترة الثقة: $(\bar{x} - E, \bar{x} + E) = (50 - 1.96, 50 + 1.96) = (48.04, 51.96)$

③ التفسير : عند اختيار 100عينة حجم كل منها $n = 81$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحتوي على μ

Q عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها 36ومتوسطها الحسابي 60 وتباينها 16 ، عند مستوى ثقة 95%

- أوجد هامش الخطأ
- أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ
- فسر فترة الثقة

$n = 36$

$\bar{x} = 60$

$s^2 = 16 \Rightarrow s = 4$

مستوى الثقة 95%

① ∵ مستوى الثقة 95% ∴ $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

∵ σ غير معلومة , $n > 30$

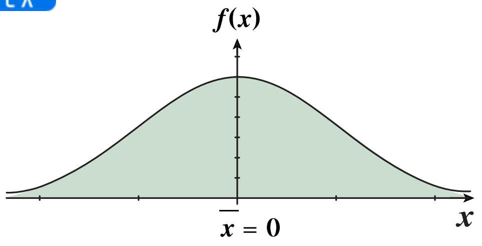
$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{36}} = 1.3066$$

② فترة الثقة: $(\bar{x} - E, \bar{x} + E) = (60 - 1.3066, 60 + 1.3066) = (58.6933, 61.3067)$

③ التفسير : عند اختيار 100عينة حجم كل منها $n = 36$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحتوي على μ

ثالثا: إذا كان التباين σ^2 غير معلوم $n \le 30$

خواص التوزيع t:



- متماثل حول متوسطه الحسابي
- يمتد المنحنى من طرفيه إلى $\infty, -\infty$
- المتوسط الحسابي = صفر
- انحرافه المعياري أكبر من 1
- يعتمد على درجات الحرية $(n-1)$

Q أوجد فترة ثقة 95% للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ علما أن العينة أخذت من مجتمع طبيعي. إذا كان لدينا $\bar{x} = 8.4$,$S = 0.3$,$n = 13$

① σ غير معلومة , $n \le 30$ نستخدم توزيع t

درجات الحرية $n - 1 = 12$

∵ مستوى الثقة 95%

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

من جدول التوزيع t نجد: $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.179$

هامش الخطأ: $E = t_{\frac{\alpha}{2}} . \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.179 \times \frac{0.3}{\sqrt{13}} \approx 0.1813$

② فترة الثقة

$$(\bar{x} - E , \bar{x} + E) = (8.4 - 0.1813 , 8.4 + 0.1813) = (8.2187 , 8.5813)$$

Q أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها 25 ، فإذا كان الانحراف المعياري للعينة s يساوي 10 ومتوسطها الحسابي $\bar{x}$ يساوي 15 ، باستخدام فترة ثقة ٪95 أوجد:

- هامش الخطأ
- فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ

$n = 25$

$\bar{x} = 15$

$s = 10$

① σ غير معلومة , $n \le 30$ نستخدم توزيع t

درجات الحرية $n - 1 = 24$

∵ مستوى الثقة 95%

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

من جدول التوزيع t نجد: $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.064$

هامش الخطأ: $E = t_{\frac{\alpha}{2}} . \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.064 \times \frac{10}{\sqrt{25}} = 4.128$

② فترة الثقة

$$(\bar{x} - E , \bar{x} + E) = (15 - 4.128 , 15 + 4.128) = (10.872 , 19.128)$$

التقدير-التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

.1 إن القيمة الحرجة $Z_{\frac{a}{2}}$ لدرجة الثقة 96% هي 2.05 معلق

(a) (b)

.2 إذا أخذنا عينة من 225 هاتفاً، ووجدنا أن متوسط صلاحية استخدامها $\bar{x}$ هو 1.7 سنة، والانحراف المعياري s=0.5 ، ودرجة الثقة 95% فنجد أن فترة الثقة هي: $2.63 < \mu < 2.76$

(a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

.3 إن القيمة الحرجة $Z_{\frac{a}{2}}$ لدرجة الثقة 96.6% هي:

(a) 2.12 (b) 2.17 (c) 21.2 (d) 21%

.4 المتوسط الحسابي لدرجات 9 طلاب هو $\bar{x} = 2.76$ حيث النهاية العظمى 4 درجات والانحراف المعياري s=0.87 إن فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي عند درجة ثقة 95% هي:

(a) (2.1916 , 3.3284)
(b) (1.6232 , 3.8968)
(c) (2.1916 , 3.8968)
(d) (2.0913 , 3.4287)

.5 لنفترض أن متوسط مجتمع إحصائي يقع ضمن الفترة $62.84 < \mu < 69.46$ فمتوسط هذه العينة يساوي:

(a) 56.34 (b) 62.96 (c) 6.62 (d) 66.15

.6 إن حجم العينة المطلوبة لتقدير المتوسط الحسابي للمجتمع مع هامش خطأ وحدتين، ومستوى ثقة 95% وانحراف معياري للمجتمع $\sigma = 8$ يساوي:

(a) 65 (b) 62 (c) 8 (d) 26

.7 أنجز 16 طالباً في كلية الطب قياس ضغط الدم لدى الشخص نفسه فحصلوا على النتائج التالية: 150 , 140 , 130 , 134 , 138 , 130 , 135 , 120 , 125 , 120 , 130 , 135 , 144 , 143 , 140 , 130 على افتراض أن الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي $\sigma = 10mm\ Hg$ فإن فترة الثقة عند درجة ثقة 95% للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي هي:

معلق

(a) (129.1 , 131.55)
(b) (129.1 , 138.9)
(c) (131.55 , 136.45)
(d) (136.45 , 138.9)

.8 تتقارب قيمتي Z , t المتناظرة في جدول التوزيع الطبيعي المعياري إذا زادت درجات الحرية عن:

(a) 29 (b) 28 (c) 27 (d) 26

اختبارات الفروض الإحصائية

الفرض الإحصائي: هو ادعاء مبني على حيثيات معقولة حول معلمة من معالم المجتمع مثل μ , σ

المقياس الإحصائي: هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة تحت شروط معينة

اختبارات الفروض الإحصائية: هي طريقة معيارية لاختبار ادعاء ما حول معلمة من معالم المجتمع

أولا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع معلوما

Q بينت الدراسة أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل أسلاك معدنية هو $\mu = 1800$ kg مع انحراف معياري $\sigma = 150$kg ويؤكد الأخصائيون في المصنع المنتج لهذه الأسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة تحمل هذه الأسلاك وتأكيدا على ذلك تم اختبار عينة من 40 سلكا فتبين أن متوسط قوة تحمل هذه الأسلاك يساوي 1840 kg والمطلوب :
هل يمكن قبول مثل هذا الفرض بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$

① صياغة الفروض $H_0 \leftarrow \mu = 1800$ $\qquad$ $H_1 \leftarrow \mu \neq 1800$

② σ معلومة نستخدم المقياس

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1840 - 1800}{\frac{150}{\sqrt{40}}} \approx 1.686$$

③ ∵ مستوى الثقة 95% ⇐ $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

④ منطقة القبول $(-1.96 , 1.96)$

⑤ اتخاذ القرار الإحصائي $1.686 \in (-1.96, 1.96)$

بالتالي نقبل $H_0 \leftarrow \mu = 1800$ $\qquad$ نرفض $H_1 \leftarrow \mu \neq 1800$

Q تزعم شركة أن متوسط رواتب موظفيها يساوي 4000 د.ك ، إذا أخذت عينة من 25 موظفاً ، ووجد أن متوسط رواتب العينة هو 3950 د.ك ، علماً أن الانحراف المعياري للمجتمع σ يساوي 125 د.ك
وضح كيفية إجراء الاختبار الإحصائي بمستوى ثقة 95٪

① صياغة الفروض $H_0 \leftarrow \mu = 4000$ $\qquad$ $H_1 \leftarrow \mu \neq 4000$

② σ معلومة نستخدم المقياس

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{3950 - 4000}{\frac{125}{\sqrt{25}}} = -2$$

③ ∵ مستوى الثقة 95% ⇐ $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

④ منطقة القبول $(-1.96 , 1.96)$

⑤ اتخاذ القرار الإحصائي $-2 \notin (-1.96, 1.96)$

بالتالي نقبل $H_1 \leftarrow \mu \neq 1800$ $\qquad$ نرفض $H_0 \leftarrow \mu = 1800$

ثانيا: إذا كان التباين σ^2 غير معلوم و $n > 30$

Q إذا كانت $n = 80$, $\bar{x} = 37.2$, $S = 1.79$
اختبر الفرض بأن $\mu = 37$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

① صياغة الفروض $H_0 \leftarrow \mu = 37$ $H_1 \leftarrow \mu \neq 37$

② σ غير معلومة , $n > 30$

نستخدم المقياس

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{37.2 - 37}{\frac{1.79}{\sqrt{80}}} = 0.999$$

③ ∵ مستوى الثقة 95% $\Leftarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

④ منطقة القبول $(-1.96 , 1.96)$

⑤ اتخاذ القرار الإحصائي $0.999 \in (-1.96, 1.96)$

نقبل $H_0 \leftarrow \mu = 37$ نرفض $H_1 \leftarrow \mu \neq 37$

Q متوسط العمر بالساعات لعينة من 100 مصباح كهربائي مصنعة في أحد المصانع $\bar{x} = 1570$ بانحراف معياري: $S = 120$ يقول صاحب المصنع إن متوسط العمر بالساعات $\mu = 1600$ للمصابيح المصنعة في المصنع ،اختبر صحة الفرض $\mu = 1600$ مقابل الفرض $\mu \neq 1600$ باختيار مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

① صياغة الفروض $H_0 \leftarrow \mu = 1600$ $H_1 \leftarrow \mu \neq 1600$

② σ غير معلومة , $n > 30$

نستخدم المقياس

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{1570 - 1600}{\frac{120}{\sqrt{100}}} = -2.5$$

③ ∵ مستوى الثقة 95% $\Leftarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

④ منطقة القبول $(-1.96 , 1.96)$

⑤ اتخاذ القرار الإحصائي $-2.5 \notin (-1.96,1.96)$

نقبل $H_1 \leftarrow \mu \neq 1600$ نرفض $H_0 \leftarrow \mu = 1600$

ثالثا: إذا كان التباين σ^2 غير معلوم و $n \le 30$

Q يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الانفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة يساوي 290دينارا كويتيا إذا أجريت دراسة إحصائية لعينة من 10 منازل وتبين من خلالها أن متوسطها الحسابي $\bar{x} = 283$ وانحرافها المعياري $S = 32$ مع استخدام مستوى ثقة 95% فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟

① صياغة الفروض $H_0 \to \mu = 290$ $H_1 \to \mu \neq 290$

② σ غير معلومة , $n \le 30$

نستخدم المقياس $t = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \dfrac{283 - 290}{\frac{32}{\sqrt{10}}} \approx -0.6917$

③ ∵ مستوى الثقة $95\% \Leftarrow$

درجات الحرية $= n - 1 = 9 \Leftarrow$ $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.262$

④ منطقة القبول $(-2.262 , 2.262)$

⑤ اتخاذ القرار الإحصائي $-0.6917 \in (-2.262 , 2.262) \Leftarrow$ نقبل $H_0 \to \mu = 290$ ونرفض $H_1 \to \mu \neq 290$

Q يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الانفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة يساوي 290 دينارا كويتيا إذا أجريت دراسة إحصائية وتبين من خلالها أن $S = 5$ ، $\bar{x} = 296$ لعينة من 10 منازل مع استخدام مستوى ثقة 95% فهل يبقى افتراض المدير عند الشركة صحيحا أم لا ؟ وضح إجابتك .

① صياغة الفروض $H_0 \to \mu = 290$ $H_1 \to \mu \neq 290$

② σ غير معلومة , $n \le 30$

نستخدم المقياس $t = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \dfrac{296 - 290}{\frac{5}{\sqrt{10}}} \approx 3.795$

③ ∵ مستوى الثقة $95\% \Leftarrow$ درجات الحرية $= n - 1 = 9 \Leftarrow$ $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.262$

④ منطقة القبول $(-2.262 , 2.262)$

⑤ اتخاذ القرار الإحصائي $3.795 \notin (-2.262 , 2.262) \Leftarrow$ نرفض $H_0 \to \mu = 290$ ونقبل $H_1 \to \mu \neq 290$

اختبارات الفروض الإحصائية-التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. في مجتمع إحصائي إذا كان المتوسط الحسابي $\mu = 860$ وعينة من هذا المجتمع حجمها $n = 25$ والمتوسط الحسابي $\bar{x} = 900$ والانحراف المعياري s=125 فإن المقياس الإحصائي هو t=1.6 ⓐ ⓑ

2. متوسط العمر لعينة من 100 مصباح كهربائي بالساعات في أحد المصانع هو $\bar{x} = 1600$ بانحراف معياري s=125 . يقول صاحب المصنع أن متوسط عمر المصابيح بالساعات هو $\mu = 1640$ إن المقياس الإحصائي هو Z=3.2 . ⓐ ⓑ

3. متوسط عمر الإطارات في أحد المصانع $\mu = 25000$ ، في دراسة لعينة عشوائية تبين أن المتوسط الحسابي هو $\bar{x} = 27000$ مع انحراف معياري $s=5000$. إذا كان المقياس الإحصائي $t=2$ فإن حجم العينة $n = 25$

ⓐ ⓑ

4. أخذت عينة عشوائية من مجتمع إحصائي حجمها $n = 81$ مع متوسط حسابي $\bar{x} = 3.6$ وانحراف معياري $s=1.8$. إذا كان المقياس الإحصائي $Z=-1.5$ فإن المتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي $\mu = 3.3$

ⓐ ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

5. إذا كان القرار رفض فرض العدم، وفترة الثقة $(-1.96 , 1.96)$ فإن قيمة الاختبار Z ممكن أن تكون:

ⓐ 1.5 ⓑ -2.5 ⓒ 1.87 ⓓ -1.5

6. إذا كانت قيمة الاختبار الإحصائي $Z = -1.5$ وفترة القبول $(-1.96 , 1.96)$ فإن القرار يكون:

ⓐ رفض فرض العدم ⓑ قبول فرض العدم

ⓒ قبول الفرض البديل ⓓ Z لا تنتمي للفترة

مغلق

7. في دراسة حول متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة هو $\mu = 320$ (دينار) وقد تبين أن المتوسط الحسابي لعينة حجمها $n = 25$ منزلاً من هذه المدينة هو $\bar{x} = 310$ (دينار) مع انحراف معياري $s = 40$. إن المقياس الإحصائي هو:

ⓐ 1.25 ⓑ -1.25 ⓒ 0.8 ⓓ -0.8

8. في دراسة على عينة أسلاك معدنية حجمها $n = 64$ تبين أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل السلك $\bar{x} = 360$ kg مع انحراف معياري $s=50$ kg إذا كان المقياس الإحصائي لقوة تحمل كافة الأسلاك المعدنية $Z = -2.4$ فإن المتوسط الحسابي μ هو:

ⓐ 346 ⓑ 396 ⓒ 376 ⓓ 326

9. هدف إحدى الشركات الكبرى هو ربح صاف متوسطه الحسابي $\mu = 200000$ (دينار) في كل فرع من فروعها المنتشرة في عدد من الدول. في دراسة لعينة من عدد لهذه الفروع أعطت متوسطاً حسابياً $\bar{x} = 195000$ (دينار) مع انحراف معياري $s=80000$ (دينار) إذا كان المقياس الإحصائي $Z = -0.625$ فإن حجم العينة π هو:

ⓐ 100 ⓑ 125 ⓒ 90 ⓓ 110

10. في دراسة لمجتمع إحصائي تبين أن متوسطه الحسابي $\mu = 125$ إذا أخذت عينة من هذا المجتمع حجمها $n = 36$ فتبين أن متوسطها الحسابي $\bar{x} = 130$. إذا كان المقياس الإحصائي $Z=3.125$ فإن الانحراف المعياري σ هو:

ⓐ -9.6 ⓑ 6.9 ⓒ 9.6 ⓓ -6.9