# الرياضيات

## الكورس الأول

غير محلولة

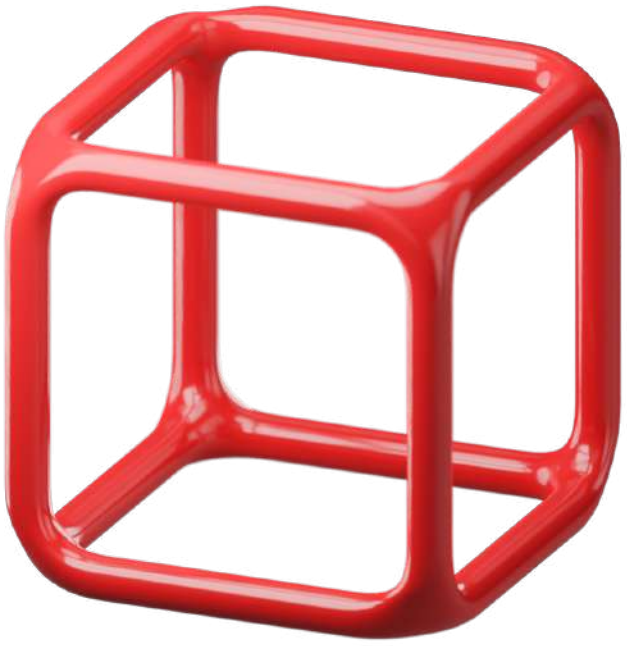
12

UULA

2024 - 2023

UULA.COM

معلم الكويت صفوة



# الرياضيات

## الكورس الأول

غير محلولة

12

2024 - 2023

UULA.COM

UULA

معلمي الكويت صفوة

# حقق هدفك الدراسي

ريح بالك وارفع مستوى دراستك مع المذكرة الشاملة والفيديوهات
اللي تشرحها والاختبارات اللي تدربك في منصة علا

**دروس يشرحها أقوى معلمي الكويت**

فيديوهات مبسطة قصيرة تشرح لك كل شيء خطوة بخطوة

**تفوق في القصير والفاينل مع نماذج اختبارات سابقة**

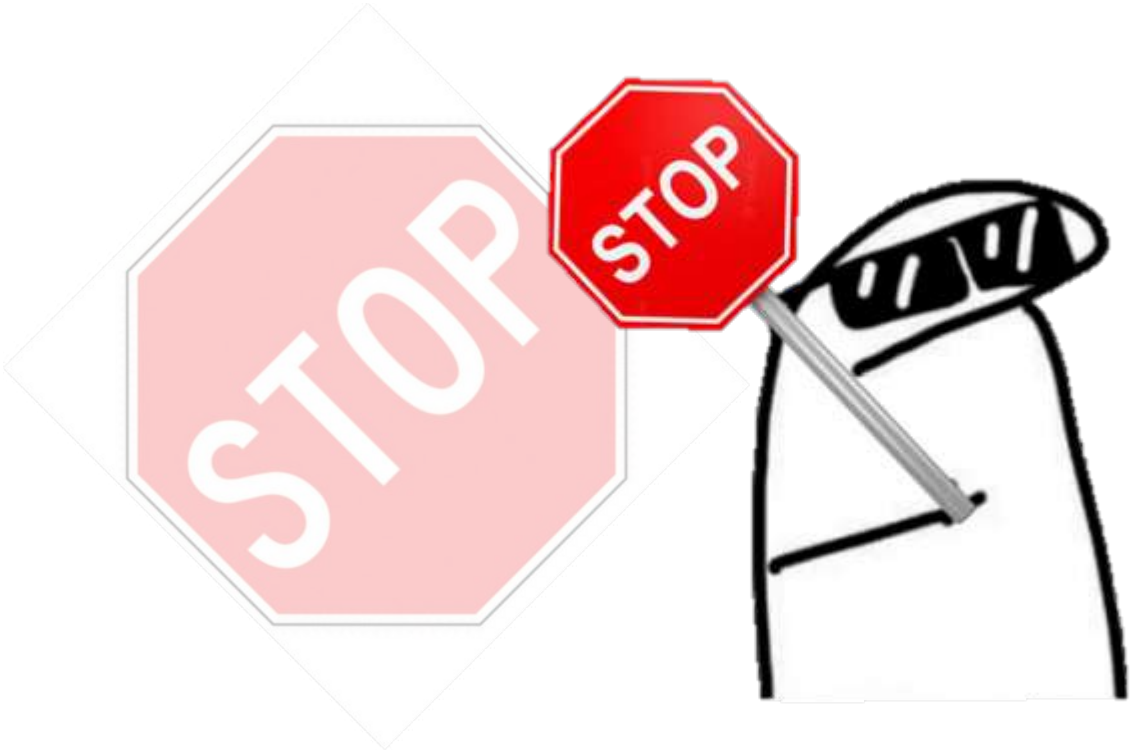
نماذج اختبارات سابقة مشروحة بالكامل تجهزك لاختباراتك

**نخبة المعلمين يجاوبونك بأسرع وقت**

ما فهمت؟ تواصل مع أقوى المعلمين واحصل على شرح لسؤالك

## اكتشف عالم التفوق مع منصة علا

لتشترك بالمادة وتستمتع بالشرح المميز صور
أو اضغط على رمز QR




# قبل لا تكمل تأكد من هذه الروابط المهمة

**حل كراسة التمارين**

**التمارين الموضوعية**

## المعلق والتغييرات 🚧

هذه المذكرة تغطي المادة كاملة. في حال وجود أي تغيير للمنهج أو تعليق جزء منه يمكنك تصوير الQR للتأكد من المقرر.

# قائمة المحتوى


01 **النهايات و الاتصال**

| | |
|---|---|
| النهايات | 5 |
| نهايات تشتمل على $\infty \pm$ | 18 |
| صيغ غير معينة | 22 |
| نهايات بعض الدوال المثلثية | 27 |
| الاتصال | 31 |
| نظريات الاتصال | 36 |
| الاتصال على فترة | 42 |

02 **الاشتقاق**

| | |
|---|---|
| المشتقة | 52 |
| قواعد الاشتقاق | 67 |
| مشتقات الدوال المثلثية | 75 |
| قاعدة السلسلة | 79 |
| المشتقات ذات الرتب العليا | 85 |

03 **تطبيقات على الاشتقاق**

| | |
|---|---|
| القيم القصوى (العظمى والصغرى) للدوال | 90 |
| تزايد وتناقص الدوال | 98 |
| ربط المشتقة الأولى $f'$ و المشتقة الثانية $f''$ بمنحى الدالة $f$ | 104 |
| رسم بيان دوال كثيرات الحدود | 110 |
| تطبيقات على القيم القصوى | 121 |

04 **الإحصاء**

| | |
|---|---|
| التقدير | 126 |
| اختبارات الفروض الإحصائية | 131 |


صفوة معلمي الكويت

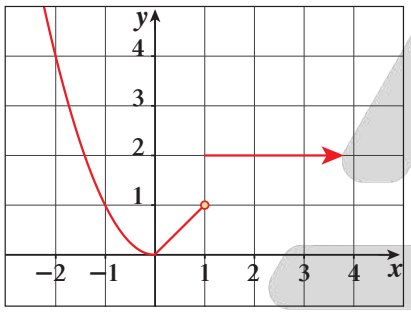
# النهايات

**تعريف 1** لتكن $x$ كمية متغيرة, c عدداً حقيقياً , نقول أن $x$ تقترب من c باطراد، إذا كان بالإمكان جعل الكمية $|x-c|$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب

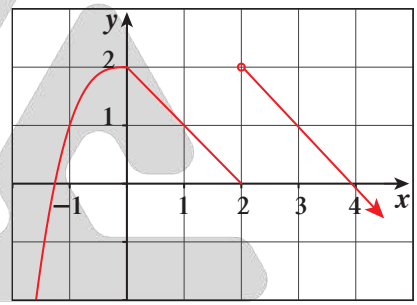
**تعريف 2** ليكن $L$ , $c$ عددين حقيقيين ، $f$ دالة حقيقية معرفة في جوار أو جوار ناقص للعدد cنكتب : $\lim_{x\to c} f(x) = L$ وتعني أنه عندما تقترب $x$ من $c$ باطراد، $x \neq c$ فإنه قيم $f(x)$ تقترب باطراد من $L$

**نظرية 1** $\lim_{x\to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to c^+} f(x) = L = \lim_{x\to c^-} f(x)$

**الشكل المقابل يمثل بيان الدالة $f(x)$ أوجد إن أمكن:**




- $\lim_{x\to 0} f(x)$
- $\lim_{x\to 1} f(x)$
- $\lim_{x\to 2} f(x)$
- $\lim_{x\to -2} f(x)$




- $\lim_{x\to -1} f(x)$
- $\lim_{x\to 0} f(x)$
- $\lim_{x\to 2} f(x)$
- $\lim_{x\to 3} f(x)$

**نظرية 2** إذا كانت $f(x) = k$ دالة وكان $c,k$ عددين حقيقيين فإن: $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} k = k$

**نظرية 3** إذا كانت $f(x) = x$ دالة وكان $c$ عدداً حقيقياً فإن: $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} x = c$

**نظرية 4** إذا كانت: $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة و $\lim_{x\to c} g(x)$ موجودة فإن:

- $\lim_{x\to c}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$
- $\lim_{x\to c}\big(k.g(x)\big) = k.\lim_{x\to c} g(x)$
- $\lim_{x\to c}\big(f(x)\times g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x)\times\lim_{x\to c} g(x)$
- $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$ : $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$

**بفرض :** $\lim_{x\to1} f(x) = -2 , \lim_{x\to1} g(x) = 5$ **أوجد :**

- $\lim_{x\to1}\big(f(x) - g(x)\big)$
- $\lim_{x\to1} \frac{2f(x)}{g(x)}$
- $\lim_{x\to1} \frac{g(x)+4}{f(x).g(x)}$

**بفرض :** $\lim_{x\to2} f(x) = 7 , \lim_{x\to2} g(x) = -3$ **أوجد :**

- $\lim_{x\to2}(f(x) + g(x)) =$
- $\lim_{x\to2}(f(x) \cdot g(x)) =$
- $\lim_{x\to2} \left(\frac{8f(x)\cdot g(x)}{f(x)+g(x)}\right)$

**نظرية 5**

إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة حدود ، c عدداً حقيقياً فإن: $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

إذا كانت $g(x), f(x)$ كثيرتي حدود ، c عدداً حقيقياً فإن: $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} , g(c) \neq 0$

**أوجد :**

- $\lim_{x\to-1} (x^4 - 2x^3 + 5)$
- $\lim_{x\to1}(x^3 + 3x^2 - 2x - 17)$
- $\lim_{x\to3}(x^2(2 - x))$
- $\lim_{x\to2} \frac{x^2+5x+6}{x+2}$
- $lim_{x\to2} \frac{x^2+2x+4}{x+2}$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

# حساب النهايات من جهة واحدة:

أوجد إن أمكن: $\lim_{x\to 1} f(x)$

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & : x<1\\ 5 & : x=1\\ \frac{5}{x} & : x>1\end{cases}$$

أوجد إن أمكن $\lim_{x\to 2} f(x)$ : $f(x)=\begin{cases}x^2-3 & : x<2\\ x-1 & : x>2\end{cases}$

أوجد إن أمكن $\lim_{x\to 0} g(x)$: $g(x)=\begin{cases}x^2-2 & : x\le 0\\ 1-2x & : x>0\end{cases}$

أوجد إن أمكن $\lim_{x\to 1} g(x)$ : $g(x)=\begin{cases}x^3+x & : x>1\\ \frac{x}{x^2+1} & : x\le 1\end{cases}$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

# نهايات دوال تحتوي على قيمة مطلقة:

**مراجعة: إعادة تعريف القيمة المطلقة**

- $|x| = \begin{cases} x & : \ x \geq 0 \\ -x & : \ x < 0 \end{cases}$
- $|x-8| = \begin{cases} x-8 & : \ x \geq 8 \\ -x+8 & : \ x < 8 \end{cases}$
- $|2x+6| = \begin{cases} 2x+6 & : \ x \geq -3 \\ -2x-6 & : \ x < -3 \end{cases}$

- لتكن الدالة : $f(x) = |x-3| + 2x$
  - اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة
  - أوجد $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ ، $\lim_{x \to 3^+} f(x)$
  - هل للدالة $f$ نهاية عندما $x \to 3$ ؟

- لتكن الدالة :$f(x) = x^2 - |x+2|$
  - اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة
  - أوجد $\lim_{x \to -2^-} f(x)$ ، $\lim_{x \to -2^+} f(x)$
  - هل للدالة $f$ نهاية عندما $x \to -2$ ؟

صفوة معلمي الكويت

**نظرية 6 :** بفرض $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة ، $n$ عدداً صحيحاً موجباً

$$\lim_{x\to c} (f(x))^n = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)^n$$

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$$ في حالة $n$ عدد زوجي يشترط أن يكون $c > 0$

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$$ في حالة $n$ عدد زوجي يشترط أن يكون $\lim_{x\to c} f(x) > 0$

**أوجد :**

Q $\lim_{x\to -1} (x^2 - 3x - 1)^5$

دوال جذرية بسيطة:

Q $\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x}$

Q $\lim_{x\to -2} \sqrt[3]{x}$

Q $\lim_{x\to 4} \sqrt[3]{x}$

Q $\lim_{x\to 25} \sqrt{x}$

Q $\lim_{x\to 2} \sqrt[3]{x-3}$

Q $\lim_{x\to 5} \sqrt{x^2-5}$

**أوجد :**

Q $\lim_{x\to 4} (x + \sqrt{x})^4$

Q $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{3x^2-2}}{x-2}$

Q $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3-4x+5}}{x-2}$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

# إلغاء العامل الصفري في المقام

**مراجعة: تحليل كثيرات الحدود من الدرجة الثانية:**

$ax^2 + bx + c$

- $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$
- $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$
- $t^2 - 3t + 2 = (t - 2)(t - 1)$
- $x^2 - x = x(x - 1)$
- $x^2 + 7x = x(x + 7)$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

- $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$
- $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$
- $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

- $(x + 3)^2$
  $= (x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2 = x^2 + 6x + 9$

- $(x - 5)^2$
  $= (x)^2 - 2(x)(5) + (5)^2 = x^2 - 10x + 25$

**أوجد :**

- $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$

- $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$

**من كراسة التمارين:**

12. $\lim_{t \to 2} \frac{t^2 - 3t + 2}{t^2 - 4}$

صفوة معلمي الكويت

**أوجد :**

Q $\lim_{x\to -7} \frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x}$

**من كراسة التمارين:**

11. $\lim_{x\to 0} \frac{(4+x)^2-16}{x}$

**مراجعة: تحليل كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة:**

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Q $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 2^2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

Q $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 2^2) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

**أوجد :**

Q $\lim_{x\to 0} \frac{(2+x)^3-8}{x}$

**من كراسة التمارين :**

13. $\lim_{x\to 0} \frac{(3+x)^3-27}{x}$

صفوة معلمي الكويت

## مسائل القيمة المطلقة:

**أوجد :**

Q $\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x^2-1}$

Q $\lim_{x\to 5} \frac{|x+2|-7}{x^2-25}$

**مراجعة: الضرب بمرافق الجذر التربيعي**

Q $(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x}) = (3)^2 - (\sqrt{x})^2 = 9 - x$

Q $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) = (\sqrt{x})^2 - (1)^2 = x - 1$

Q $(\sqrt{2x-3}-1)(\sqrt{2x-3}+1) = (\sqrt{2x-3})^2 - (1)^2 = 2x - 3 - 1 = 2x - 4$

صفوة معلمي الكويت

## مسائل الجذر التربيعي :

**أوجد :**

Q $\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{3-\sqrt{x}}$

Q $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$

Q $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$

UULA
صفوة معلمي الكويت

**تذكر:**

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

**أوجد :**

Q $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

(1)

Q $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$

Q $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}$

## مسائل القسمة التركيبية:

**أوجد :**

Q $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}$

Q $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-2x^2-4x+3}{x-3}$

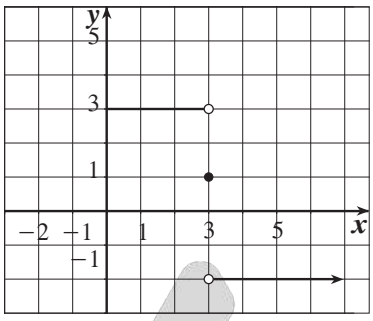
Q $\lim_{x\to 2} \frac{-x^5+x^3+x+22}{x-2}$

Q $\lim_{x\to -2} \frac{x^5+32}{x+2}$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

## ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -2$ (في الرسم البياني أدناه) (a) (b)



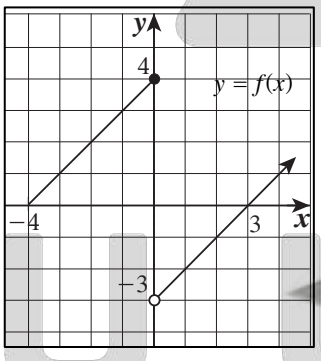

2. $\lim_{y\to 2} \frac{y^2+5y+6}{y+2} = 5$ (a) (b)

3. $\lim_{x\to 0} \frac{5x^3+8x^2}{3x^4-16x^2} = 0$ (a) (b)

4. $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2}-x}{x} = -2$ (a) (b)

5. $\lim_{x\to 1^+} (2x - |x| + 2) = 3$ (a) (b)

## ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.




6. الشكل المقابل هو بيان دالة $f$
العبارة الصحيحة في ما يلي هي:

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 4$ (b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -3$

(c) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 4$ (d) $\lim_{x\to 0} f(x) = -3$

7. $\lim_{x\to -2} (x^3 + 3x^2 - 2x - 17) =$

(a) 17 (b) $-17$ (c) 9 (d) $-9$

8. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} =$

(a) 1 (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) غير موجودة

صفوة معلمي الكويت

9. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2} =$

(a) $1$ (b) $0$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{3}$

10. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} =$

(a) $-1$ (b) $1$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $0$

11. $\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x^2-4} =$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{4}$

12. $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x} =$

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{4}$

13. $\lim_{x\to -8} \frac{x+8}{\sqrt[3]{x}+2} =$

(a) $12$ (b) $-12$ (c) $4$ (d) $-4$

14. $\lim_{x\to -3} \frac{2x^3+9x^2+9x}{x+3} =$

(a) $9$ (b) $0$ (c) $-3$ (d) $-9$

🎯 تـدرب و تـفـوق
اختبارات الكترونية ذكية
صفوة معلمي الكويت
UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

# نهايات تشتمل على $\pm\infty$

## أولاً: نهايات محددة عندما $x \to \pm\infty$

الدالة $f$ معرفة على الفترة $(a,\infty)$ ، $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

الدالة f معرفة على الفترة $(-\infty,a)$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

**نظرية 7 :**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

**نظرية 8 :**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \,, k \in \mathbb{R} \,, n \in \mathbb{Z}^+ \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{20}{x^3} = \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{20}{x^3} = \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x^7} = \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x^7} =$$

## ثانياً: نهايات غير محددة $(\pm\infty)$ عندما $x \to c$

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty \,, \quad \lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

**نظرية 9 :**



$$\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty \,, \lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty \iff \lim_{x\to c} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty \,, \lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty \iff \lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

**ملاحظات:**

1. إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ وكان b عدداً حقيقياً فإن $\lim_{x\to c}(f(x)+b) = \pm\infty$
2. إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ وكان
   - b عدداً حقيقياً موجباً فإن: $\lim_{x\to c}(b.f(x)) = \pm\infty$
   - b عدداً حقيقياً سالباً فإن: $\lim_{x\to c}(b.f(x)) = \mp\infty$
3. إذا كان $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$ ، $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ فإن:

$$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \infty \quad , \quad \lim_{x\to c}(f(x).g(x)) = \infty$$

4. إذا كان $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty$ ، $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ فإن:

$$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to c}(f(x).g(x)) = +\infty$$

5. إذا كان $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$ ، $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ فإن:

$$\lim_{x\to c}(f(x).g(x)) = -\infty$$

معلق
صفوة معلمي الكويت

**نظرية 10 :** $c \in \mathbb{R}\ ,\quad n \in \mathbb{Z}^+$

$n$ عدد **زوجي**

$$\lim_{x\to c} \frac{1}{(x-c)^n} = \infty$$

$n$ عدد **فردي**

$$\lim_{x\to c^-} \frac{1}{(x-c)^n} = -\infty \qquad \lim_{x\to c^+} \frac{1}{(x-c)^n} = \infty$$

**تدرب: أوجد إن أمكن كلاً مما يلي:**

- $\lim_{x\to 4^-} \frac{1}{(x-4)} =$
- $\lim_{x\to 4^+} \frac{1}{(x-4)} =$
- $\lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^2} =$
- $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)^3} =$
- $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)^3} =$
- $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^4} =$
- $\lim_{x\to -5^-} \frac{1}{(x+5)^9} =$
- $\lim_{x\to -5^+} \frac{1}{(x+5)^9} =$
- $\lim_{x\to -5} \frac{1}{(x+5)^6} =$
- $\lim_{x\to 2} \frac{7}{(x-2)^2} =$
- $\lim_{x\to -5} \frac{-8}{(x+5)^4} =$
- $\lim_{x\to 2^+} \frac{-6}{(x-2)^3} =$
- $\lim_{x\to 2^-} \frac{-10}{(x-2)^5} =$

**معلق**

- أوجد إن أمكن : $\lim_{x\to 2} \frac{1}{|x-2|}$

صفوة معلمي الكويت

أوجد إن أمكن : $\lim_{x\to -1} \frac{3}{|x+1|}$

من كراسة التمارين:

7. $\lim_{x\to -2} \frac{-7}{|x+2|}$

⚠ معلق

صفوة معلمي الكويت

**ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة**

معلق ⚠

1. $\lim_{x\to -4^-} \frac{1}{(x+4)^9} = -\infty$ (a) (b)

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{|x|-3} = 2$ (a) (b)

3. $\lim_{x\to -\infty} \frac{|x|-3}{x+3} = -1$ (a) (b)

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{1-x}{2x^2-5x-3} = -\infty$ (a) (b)

5. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{|2x-3|} = \frac{1}{2}$ (a) (b)

**ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.**

6. $\lim_{x\to\infty} \frac{|x|}{|x|+1} =$

(a) 0 (b) 1 (c) ∞ (d) $\frac{1}{2}$

7. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+3} =$

(a) ∞ (b) $-\infty$ (c) 1 (d) 0

8. $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{2}{x}+1\right)\left(\frac{5x^2-1}{x^2}\right) =$

(a) 0 (b) 5 (c) 1 (d) $-\infty$

9. $\lim_{x\to\infty} \frac{-|x+3|}{2x} =$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) ∞ (d) $-\infty$

معلق ⚠

10. $\lim_{x\to 2^-} \left(\frac{3}{x-2}\right)^5 =$

(a) 0 (b) 2 (c) ∞ (d) $-\infty$

11. $\lim_{x\to 4^+} \frac{2}{(x-4)^3} =$

(a) ∞ (b) 2 (c) $-\infty$ (d) 0


تـدرب و تـفـوق
اختبارات الكترونية ذكية

# صيغ غير معينة

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n \quad : n \in \mathbb{Z}^+$$

- $\lim_{x\to\pm\infty} x^6 =$
- $\lim_{x\to\pm\infty} x^8 =$
- $\lim_{x\to\infty} x^3 =$
- $\lim_{x\to\infty} x =$
- $\lim_{x\to-\infty} x^3 =$
- $\lim_{x\to-\infty} x =$

$$\lim_{x\to\pm\infty} a\,x^n : \quad n \in \mathbb{Z}^+ \ , a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

- $\lim_{x\to\infty} 5x^2 =$
- $\lim_{x\to-\infty} -4x^6 =$
- $\lim_{x\to-\infty} 5x^7 =$
- $\lim_{x\to-\infty} -x^5 =$
- $\lim_{x\to-\infty} 2x^3 =$
- $\lim_{x\to-\infty} -4x =$
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{3} =$
- $\lim_{x\to\infty} -3x^8 =$
- $\lim_{x\to\infty} 5x^7 =$
- $\lim_{x\to\infty} -x^5 =$
- $\lim_{x\to\infty} 2x^3 =$
- $\lim_{x\to\infty} -4x =$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad : a_n \in \mathbb{R}^* \quad \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

- $\lim_{x\to\infty} (-3x^2 + 2x - 4)$
- $\lim_{x\to\infty} (2x^2 - 3x + 1)$

**من كراسة التمارين:**

أوجد إن أمكن كلا من :

1) $\lim_{x\to\infty} (3x^2 - 5x + 4)$

2) $\lim_{x\to\infty} (-4x^2 + x - 1)$

3) $\lim_{x\to-\infty} (2x^3 - 3x + 7)$

4) $\lim_{x\to-\infty} (-4x^3 + 2x + 5)$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

**نظرية 11 :** إذا كانت كل من $f$ ,$g$ دالة حدودية حيث:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0$$

بالتالي:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m} \; : \; n = m$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \; : \; n < m$

**أوجد :**

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4-3x^3}{2x^3+5}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2+x-1}{3x^4-x}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^4-1}{7-2x^4}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-3x^2+5x+1}{6x^2-x+1}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{4x^3-2x+3}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2-5x+7}{-2x^2+3x-1}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^3+7x-1}{-5x^3+x+2}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+5}{2x^3+x-1}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2-2x+3}$

- إذا كانت: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+3}{2x+5} = 3$ فأوجد قيمة كل من $a,b$

- إذا كانت: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-2}{ax^2+bx-3} = -1$ فأوجد قيمة كل من $a,b$

صفوة معلمي الكويت

## من كراسة التمارين:

11. إذا كانت: $\lim_{x\to\infty} \frac{ax^3+bx^2+4}{3x^2-2x+1} = -1$ فأوجد قيم $a,b$

12. إذا كانت: $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+2x-5}{ax^3+bx^2+3}$ فأوجد قيم $a,b$

Q أوجد: $\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$

صفوة معلمي الكويت

Q أوجد : $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}$

Q أوجد : $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}$

UULA
صفوة معلمي الكويت

# صيغ غير معينة-التمارين الموضوعية

**ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة**

1. $\lim_{x\to\infty}(3x^2+7x-8)=\infty$ (a) (b)
2. $\lim_{x\to-\infty}(-x^3-2x+1)=-\infty$ (a) (b)
3. $\lim_{x\to-\infty}(-x^2+x-3)=-\infty$ (a) (b)
4. $\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+4}{3x^2-5x+1}=0$ (a) (b)
5. $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3+7x^2-1}{2x^3-4}=2$ (a) (b)
6. $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-7}{\sqrt{4x^2-8x+5}}=\frac{3}{2}$ (a) (b)

**ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.**

7. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+5}{2x^4+x^2-2}=$

(a) $\infty$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $0$ (d) $-\infty$

8. $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}}=$

(a) $\infty$ (b) $-\infty$ (c) $3$ (d) $-3$

9. $\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+3}{\sqrt{9x^2-2x+4}}=$

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $-\frac{5}{3}$ (c) $\frac{5}{9}$ (d) $-\frac{5}{9}$

10. $\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+1}{\sqrt{4x^2-x+3}}=$

(a) $-1$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $1$

11. إذا كان $\lim_{x\to\infty}\frac{mx^2+nx+4}{\sqrt{x^2-2x+4}}=-2$ فإن قيم $m,n$ هي:

(a) $m=0\,,n=-2$ (b) $m=0\,,n=2$ (c) $m=1\,,n=-1$ (d) $m=1\,,n=1$

12. إذا كان $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-2x+3}}{mx^2+nx-4}=1$ فإن قيم $m,n$ هي:

(a) $m=0\,,n=-2$ (b) $m=0\,,n=2$ (c) $m=0\,,n=4$ (d) $m=0\,,n=-4$

تـدرب و تـفـوق
اختبارات الكترونية ذكية
صفوة معلمي الكويت
UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

# نهايات بعض الدوال المثلثية

**تذكر :**

$sin^2x + cos^2x = 1$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , $\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$ , $\frac{1}{\sin x} = \csc x$ , $\frac{1}{\cos x} = \sec x$

**قوانين للحفظ**

$\lim_{x\to 0} \sin x = 0$ , $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ , $\lim_{x\to 0} \tan x = 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$ , $\lim_{x\to 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$ $\quad a \neq 0 , b \neq 0$

**أوجد :**

Q $\lim_{x\to 0} sin(5x) =$

Q $\lim_{x\to 0} cos(7x) =$

Q $\lim_{x\to 0} tan(9x) =$

Q $\lim_{x\to 0} \frac{sin\ 5x}{3x} =$

Q $\lim_{x\to 0} \frac{9x}{sin\ 4x} =$

Q $\lim_{x\to 0} \frac{x-3}{cos\ x}$

**من كراسة التمارين:**

4. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1+\cos x}$

5. $\lim_{x\to 0} \frac{1-tan\ x}{sin\ x-cos\ x}$

**أوجد :**

Q $\lim_{x\to 0} \frac{sin^2 x}{2x}$

Q $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x^2-x}$

Q $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x \cos x}$

Q $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$

Q $\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{\cos x-1}$

**من كراسة التمارين:**

2. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

**نتيجة:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx}=\frac{a}{b} \qquad a\neq 0\,,b\neq 0$$

**أوجد :**

Q $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\tan x}$

Q $\lim_{x\to 0}\frac{5\tan x-3\sin x}{4x}$

Q $\lim_{x\to 0}\frac{3\tan x+x^2\cos x}{5x}$

**أوجد :**

Q $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x-x^2}{3x^2}$

Q $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\tan x-2x\cos x}{3x}$

Q $\lim_{x\to 0}\frac{5x+\sin x}{x}=$

Q $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x+3x\cos 4x}{5x}$

صفوة معلمي الكويت

**ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة**

3. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = 0$ (a) (b)

4. $\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin 2x}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}$ (a) (b)

**ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.**

6. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin x} =$

(a) 2 (b) $-2$ (c) 0 (d) $\infty$

9. $\lim_{x\to 0} \frac{4x^2+5\sin^2 x}{3x^2} =$

(a) 3 (b) 9 (c) 0 (d) $\infty$

**ملاحظة:** التمارين 1 ، 2 ، 5 ، 7 ، 8 ، 10 معلقة

## تمارين موضوعية إضافية:

Q $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin 4x} =$

(a) $-\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) 1 (d) 0

Q $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 6x}{\tan 3x} =$

(a) 0 (b) 1 (c) $-2$ (d) 2

Q $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 7x}{\cos x} =$

(a) $-7$ (b) 7 (c) 1 (d) 0

Q $\lim_{x\to 0} \sin 4x =$

(a) $-\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) 1 (d) 0

Q $\lim_{x\to 0} \tan 6x =$

(a) 0 (b) 1 (c) $-2$ (d) 2

**تـدرب و تـفـوق**

اختبارات الكترونية ذكية

صفوة معلمي الكويت

# الاتصال

**الاتصال عند نقطة** تكون الدالة $f$ متصلة عند $x = c$ في مجالها إذا كانت $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

ابحث اتصال الدالة $f$ عند $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & : x \geq 1 \\ 5x - 1 & : x < 1 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة $f$ عند $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x & : x \leq 0 \\ \frac{x^2}{x+1} & : x > 0 \end{cases}$$

صفوة معلمي الكويت

Q ابحث اتصال الدالة $f$ عند $x = 3$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & : x > 3 \\ 7 & : x \leq 3 \end{cases}$$

Q ابحث اتصال الدالة $f$ عند $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & : x < 2 \\ 1 & : x = 2 \\ x^2 + 1 & : x > 2 \end{cases}$$

Q ابحث اتصال الدالة $f$ عند $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{|x-2|} & : x \neq 2 \\ 1 & : x = 2 \end{cases}$$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

ابحث اتصال الدالة $f$ عند $x=-1$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x+1|}{x+1}-2x & : x\neq -1\\ 2 & : x=-1\end{cases}$$

**من كراسة التمارين:**

**ابحث اتصال كل من الدوال التالية عند $x=c$ :**

7. $h(x)=\begin{cases}\frac{x^2-3x-4}{x+1} : x\neq -1\\ -1 : x=-1\end{cases}$ , $x=-1$

8. $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-3x}{|x|} : x\neq 0\\ -3 : x=0\end{cases}$ , $x=0$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

9. $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & : x\neq 1\\ \frac{1}{2} & : x=1\end{cases}$ , $x=1$

10. أوجد قيمة $a$ بحيث تصبح الدالة التالية متصلة عند $x=3$

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1 & , \quad x<3\\ 2ax & , \quad x\geq 3\end{cases}$$

## الاتصال ، التمارين الموضوعية

**ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة**

1. الدالة f : $f(x)=\frac{1}{(x+2)^2}+1$ متصلة عند $x=-2$ (a) (b)
2. الدالة : $y=\frac{1}{x^2+1}$ متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$ (a) (b)
3. الدالة : $y=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$ متصلة عند $x=-1$ (a) (b)
4. إذا كانت الدالة f متصلة عند $x=-1$ وكان $\lim_{x\to -1}(f(x)-2)=-1$ فإن $f(-1)=1$ (a) (b)

**ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.**

5. نقاط انفصال الدالة $f$ : $f(x) = cot\, x$ هي :

ⓐ $0\,,\pi$ ⓑ $2k\pi$ ⓒ $k\pi$ ⓓ $\frac{\pi}{2} + k\pi \;:k \in \mathbb{Z}$

6. نقاط الدالة $f$ : $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$ التي يمكن التخلص من الانفصال عندما هي :

ⓐ $2$ ⓑ $-2\,,2$ ⓒ $-2$ ⓓ $-5\,,2$

7. نقاط الدالة $f$ : $f(x) = \frac{2x^3+16}{x^2+x-2}$ التي لا يمكن التخلص من الانفصال عندما هي :

ⓐ -1 , 2 ⓑ $-2$ ⓒ $1\,,-2$ ⓓ $1$

8. إذا كانت الدالة $f$ متصلة عند $x = 2$ فإن$f(x)$ يمكن أن تكون :

ⓐ $\frac{1}{|x-2|}$ ⓑ $\sqrt{x-2}$ ⓒ $\frac{|x-2|}{x-2}$ ⓓ $\begin{cases}\sqrt{x^2-3}: x > 2\\ 3x-5: x \le 2\end{cases}$

9. إذا كانت الدالة $f$ : $f(x) = \begin{cases}x^2+1: x \ge 2\\ \frac{x^2-4}{x-2}: x < 2\end{cases}$ فإن :

ⓐ $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = 4$ ⓑ $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = 4$

ⓒ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ موجودة ⓓ $f$ متصلة عند $x = 2$

10. معلق

11. إذا كانت الدالة $f$ متصلة عند $x = -2$ وكانت $\lim\limits_{x\to -2}(x^2 + f(x)) = 7$ فإن $f(-2)$ تساوي :

ⓐ $3$ ⓑ $5$ ⓒ $9$ ⓓ $11$

12. إذا كانت الدالة g متصلة عند $x = 1$ وكانت النقطة $(1, -3)$ تقع على منحنى الدالة g فإن $\lim\limits_{x\to 1}(g(x))^2$ تساوي

ⓐ $-6$ ⓑ $-3$ ⓒ $1$ ⓓ $9$

**لكل سؤال مما يلي إجابة صحيحة من القائمة، اختر الإجابة الصحيحة**

13. $g(x) = \begin{cases}x+1 & : x > a\\ 3-x & : x \le a\end{cases}$ $\Rightarrow a = \ldots$

14. $g(x) = \begin{cases}2ax-2 & : x \ne a\\ 3a & : x = a\end{cases}$ $\Rightarrow a = \ldots$

15. $g(x) = \begin{cases}3x^2 & : x > a\\ 2x & : x \le a\end{cases}$ $\Rightarrow a = \ldots$

ⓐ $-1$
ⓑ $2$
ⓒ $0$
ⓓ $1$
ⓔ $\frac{2}{3}$

🎯 تـدرب و تـفـوق
اختبارات الكترونية ذكية
صفوة معلمي الكويت

# نظريات الاتصال

**نظرية (14) :**

**خواص الدوال المتصلة**

إذا كانت $f,g$ دالتين متصلتين عند $x = c$ فإن الدوال التالية متصلة أيضاً عند $x = c$ :

$f + g$ $\quad$ $f - g$ $\quad$ $k.f \ : k\epsilon\mathbb{R}$ $\quad$ $f.g$ $\quad$ $\frac{f}{g} \ : g(c) \neq 0$

**دوال متصلة: الدوال التالية متصلة عند كل عدد حقيقي.** $c \in \mathbb{R}$

- الدوال الثابتة
- الدوال كثيرات الحدود
- الدوال الحدودية النسبية (شرط المقام لا يساوي صفرا )
- دالة القيمة المطلقة $f(x) = |x|$
- الدوال المثلثية الأساسية متصلة عند كل عدد حقيقي $c$ في مجالها

**ابحث اتصال الدالة $f$ عند $x = c$ في كل مما يلي:**

Q $f(x) = x^2 + |x|$ , $c = -1$

Q $f(x) = \sin x - \cos x$ , $c = \frac{\pi}{2}$

Q $f(x) = x^2 - 4x + 3 + |x|$ , $c = 3$

Q $f(x) = \frac{\tan x}{x+1}$ , $c = \frac{\pi}{4}$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

Q ابحث اتصال $f(x)=\frac{x-2}{x^2+9}-\frac{1}{x}$ عند $x=3$

Q ابحث اتصال $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{2x}{x-2}$ عند $x=1$

**نظرية(15) : اتصال الدوال الجذرية عند نقطة :**

- الدالة $y=\sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x=c\in\mathbb{R}^+$ ، $n$ عدد صحيح زوجي موجب
- الدالة $y=\sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x=c\in\mathbb{R}$ ، $n$ عدد صحيح فردي أكبر من1
- إذا كانت الدالة $g$ متصلة عند كل $x=c$ ، وكان $g(c)>0$
  فإن الدالة $f(x)=\sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x=c$

**ابحث اتصال كل دالة عند العدد المبين:**

Q $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$ ، $x=1$

Q $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+4}$ ، $x=-2$

صفوة معلمي الكويت

- $f(x) = \sqrt{x+3}\ \ , x = -1$

- $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}\ \ , x = -2$

## الدالة المركبة

إذا كانت $f$ , $g$ دالتين حقيقيتين، وكان مدى الدالة $f$ هو مجموعة جزئية من مجال الدالة $g$ فإنه يتعين دالة مركبة $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

ملاحظة: سنقتصر في دراستنا فقط على الدوال القابلة للتركيب

**أوجد :** $f(x) = 1 + x\ \ , g(x) = x^2 - 1$

- $(g \circ f)(x)$
- $(g \circ f)(2)$
- $(f \circ g)(x)$
- $(f \circ g)(2)$

**أوجد :** $f(x) = 2x + 3\ \ , g(x) = x^2 + 3$

- $(g \circ f)(x)$
- $(g \circ f)(-1)$
- $(f \circ g)(x)$
- $(f \circ g)(-1)$

**أوجد :** $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x^4 + 2$

- $(f \circ g)(x)$
- $(f \circ g)(0)$
- $(g \circ f)(x)$
- $(g \circ f)(0)$

صفوة معلمي الكويت

$g(x) = \frac{3}{x^2+4}$ , $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ أوجد :

Q $(f \circ g)(x)$

Q $(g \circ f)(\sqrt{3})$

**نظرية (16) : اتصال الدوال المركبة**

إذا كانت $f$ متصلة عند $c$ ، $g$ متصلة عند $f(c)$ ؛ فإن الدالة المركبة $g \circ f$ متصلة عند $c$

Q لتكن: $f(x) = x^2 + 5$ , $g(x) = \sqrt{x}$ ابحث اتصال $g_o f$ عند $x = -2$

Q لتكن: $g(x) = 2x + 3$ , $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$ ابحث اتصال $f o g$ عند $x = 1$

Q لتكن: $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ ابحث اتصال $f$ عند $x = 2$

صفوة معلمي الكويت

Q لتكن: $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ ابحث اتصال $f$ عند $x = 0$

**من كراسة التمارين:**

Q ابحث اتصال الدالة التالية عند القيمة المعطاة:

1. $f(x) = x^2 - |2x - 3|,\ x = 2$

9. لتكن: $f(x) = 2x^2 - 3, g(x) = \sqrt{x+4}$ ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

# نظريات الاتصال - التمارين الموضوعية

**ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة**

1. الدالة $f$: $f(x) = x^2 + |x - 1|$ متصلة عند $x = 3$ (a) (b)
2. الدالة $f$: $f(x) = \frac{2x+5}{x+2} - \frac{2}{x}$ متصلة عند $x = 0$ (a) (b)
3. الدالة $f$: $f(x) = \frac{2x-2}{|x|-1}$ متصلة عند $x = 0$ (a) (b)
4. الدالة $f$: $f(x) = \frac{\sqrt[3]{3x-1}}{x^2}$ متصلة عند $x = 3$ (a) (b)

5. الدالة $f: f(x)=\sqrt{-x^2+5x-4}$ متصلة عند $x=2$

ⓐ ⓑ

**ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.**

6. نقاط انفصال الدالة $f: f(x)=\frac{-x+2}{x^2+9}$ عند :

ⓐ $x=3$ ⓒ $x=2$

ⓑ $x=-3$ ⓓ لا توجد نقاط انفصال

7. نقاط انفصال الدالة $f: f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-1}$ عند x تساوي :

ⓐ $1,-1$ ⓑ $2,-2$ ⓒ $1,2$ ⓓ $-1,-2$

8. $f(x)=x^2+3, g(x)=\frac{x}{x-3}: x\neq 0 \Rightarrow (g\circ f)(x)=$

ⓐ $\frac{4x^2-18x+27}{(x-3)^2}$ ⓑ $\frac{x^2}{x^2-3}$ ⓒ $\frac{x^2+3}{x^2}$ ⓓ $\frac{x^2}{x^2+3}$

9. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-3}}, g(x)=x^2+3, x\neq 0 \Rightarrow (f\circ g)(x)=$

ⓐ $\frac{x^2}{x-3}+3$ ⓑ $\frac{x}{\sqrt{x-3}}+3$ ⓒ $\frac{-(x^2+3)}{x}$ ⓓ $\frac{x^2+3}{|x|}$

10. لتكن الدالة $f: f(x)=\sqrt{x^2+7}, g(x)=x^2-3 : g$ فإن $(f\circ g)(0)$ يساوي :

ⓐ 4 ⓑ $-4$ ⓒ 1 ⓓ $-1$

11. إذا كانت g دالة متصلة عند $x=2$ فإن الدالة المتصلة عند $x=2$ فيما يلي هي :

ⓐ $\sqrt{g(x)}$ ⓑ $\frac{1}{g(x)}$ ⓒ $\frac{g(x)}{x-2}$ ⓓ $|g(x)|$

12. إذا كانت الدالة $f: f(x)=\sqrt{x^2-a}$ متصلة عند $x=3$ فإن a يمكن أن تساوي :

ⓐ 4 ⓑ 9 ⓒ 16 ⓓ 25


تـدرب و تـفـوق
اختبارات الكترونية ذكية
UULA UULA
صفوة معلمي الكويت
UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

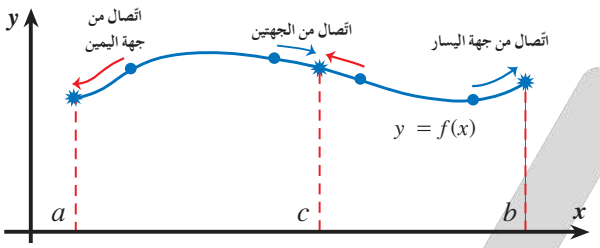
# الاتصال على فترة

**الاتصال على فترة مفتوحة**

تكون الدالة $f$ متصلة على الفترة المفتوحة $(a\ ,\ b)$ إذا كانت متصلة عند كل $x$ تنتمي إلى الفترة $(a\ ,\ b)$

**الاتصال على فترة مغلقة**

تكون الدالة $f$ متصلة على الفترة المغلقة $[a\ ,\ b]$ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:




① الدالة $f$ متصلة على الفترة المفتوحة $(a\ ,\ b)$

② الدالة $f$ متصلة عند $x = a$ من جهة اليمين أي:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

③ الدالة $f$ متصلة عند $x = b$ من جهة اليسار أي: $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

**ملاحظات:**

- إذا تحقق الشرطان ① ، ② من التعريف السابق تكون الدالة متصلة على الفترة $[a,b)$
- إذا تحقق الشرطان ① ، ③ من التعريف السابق تكون الدالة متصلة على الفترة $(a,b]$
- إذا كانت الدالة متصلة على فترة ما فإنها متصلة على أي فترة جزئية منها
- إذا كانت الدالة متصلة على كل من الفترتين $[c,b]$ ,$[a,c]$ فإن الدالة متصلة على الفترة $[a,b]$
- يبقى التعريف السابق صحيحاً في حالة الفترات على الصورة $(-\infty,b]$ ,$[a,\infty)$

صفوة معلمي الكويت

ادرس اتصال الدالة $f$ على $[1,3]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}-2 & : x=1\\ x^2-3 & : 1<x<3\\ 6 & : x=3\end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة $f$ على $[1,5]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}2 & : x=1\\ \dfrac{x^2+1}{x} & : 1<x<5\\ \dfrac{26}{5} & : x=5\end{cases}$$

صفوة معلمي الكويت

- $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ ، $[-1,5]$

- $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$ ، $[0,5]$

ادرس اتصال كل من الدوال التالية على الفترة المبينة:

- $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+2}$ ، $[0,3]$

- $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ ، $[0,2]$

صفوة معلمي الكويت

ادرس اتصال الدالة على مجالها: $f(x)=\begin{cases} x+3,\ x\le -1 \\ \frac{4}{x+3},\ x>-1 \end{cases}$

## ⚠ معلق

**من كراسة التمارين:**

6. ادرس اتصال الدالة على مجالها: $f(x)=\begin{cases} -x+4, x\le 7 \\ \frac{9}{-x+4}, x>7 \end{cases}$

صفوة معلمي الكويت

ادرس اتصال الدالة على مجالها: $f(x)=\begin{cases}2x-1 & ,x<1\\ -x+2 & ,1\le x<3\\ 1 & ,x\ge 3\end{cases}$

UULA
صفوة معلمي الكويت

إذا كانت الدالة $f$ متصلة على $\mathbb{R}$ أوجد قيمة الثابتين $a, b$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-a, & x<0 \\ 2, & x=0 \\ ax+b, & x>0 \end{cases}$$

إذا كانت الدالة $f$ متصلة على $[1,4]$ أوجد قيمة الثابتين $a, b$

$$f(x)=\begin{cases} 5, & x=1 \\ ax+b, & 1<x<4 \\ b+8, & x=4 \end{cases}$$

**تعميم :**

إذا كانت g متصلة على فترة ما، $g(x)\geq 0$ في هذه الفترة فإن الدالة $f(x)=\sqrt{g(x)}$ متصلة على هذه الفترة

أوجد مجال الدالة $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$ ثم ادرس اتصال $f$ على الفترة $[-5,0]$

صفوة معلمي الكويت

Q $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$ أوجد مجال الدالة $f$ ثم ادرس اتصال $f$ على الفترة $[6,10]$

Q $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ أوجد مجال الدالة $f$ ثم ادرس اتصال $f$ على الفترة $[-3,3]$

Q $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$ ادرس اتصال $f$ على الفترة $[1,3]$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

**ملاحظة :**

ناتج تركيب دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$ هو دالة متصلة على $\mathbb{R}$

ادرس اتصال $f$ على $\mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4}$

ادرس اتصال $f$ على $\mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x + 5}$

**من كراسة التمارين:**

**ادرس اتصال كل من الدوال التالية على $\mathbb{R}$**

15. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 2}$

16. $f(x) = |3x^2 + 4x - 1|$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

**من كراسة التمارين:**

7. ادرس اتصال $f$ على مجالها :

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+9} & : x\le 0\\ \frac{6}{x+3} & : x>0\end{cases}$$

# الاتصال على فترة - التمارين الموضوعية

**ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة**

1. إذا كانت $f$ دالة متصلة كل من $[3,5]$,$[1,3)$ فإن $f$ متصلة على $[1,5]$ (a) (b)
2. الدالة $f:f(x)=x^2-|x|$ متصلة لكل قيم $x\in\mathbb{R}$ (a) (b)
3. الدالة $f:f(x)=\sqrt{x^2-4}$ متصلة على $[-2,2]$ (a) (b)
4. الدالة $f:f(x)=\frac{2x-3}{x+2}$ متصلة على $(-\infty,0)$ (a) (b)
5. الدالة $f:f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ متصلة على $(-\infty,2)$ فقط (a) (b)

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

**ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.**

6. لتكن الدالة $f$ : $f(x)=\frac{x+1}{x-4}$ فإن الدالة $f$ :

ⓐ لها نقطتا انفصال عند كل من $x=4\,,x=-1$

ⓑ متصلة على $(-\infty,4]$

ⓒ متصلة على كل من $(-\infty,4),(4,\infty)$

ⓓ *ليس أي مما سبق*

7. إذا كانت $f$ دالة متصلة على $[-2,3]$ فإن :

**معلق**

ⓐ $\lim_{x\to-2^+} f(x)=\lim_{x\to3^-} f(x)$

ⓑ $\lim_{x\to-2^+} f(x)=f(3)$

ⓒ $\lim_{x\to-2+} f(x)=f(-2)$

ⓓ $\lim_{x\to3^-} f(x)=f(-2)$

8. الدالة $f$ : $f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-25}}$ متصلة على :

ⓐ $(-\infty,\frac{1}{2}]$

ⓑ $(5,\infty)$

ⓒ $\mathbb{R}$

ⓓ $(-5,5)$

9. لتكن $f$ : $f(x)=\begin{cases}\frac{5}{2} & : x\le-3\\ \frac{\sqrt{x^2+16}}{2} & : -3<x<0\\ \frac{4-x^2}{x-2} & : x\ge0\,,x\ne2\end{cases}$ ، فإن $f$ دالة متصلة على :

ⓐ $(-\infty,\infty)$

ⓑ $(-\infty,2)$

ⓒ $(-\infty,0]$

ⓓ $(-\infty,-3]$

**معلق**

10. الدالة $f$ : $f(x)=\begin{cases}\frac{3x+m}{x-2} & : x<1\\ x+n & : x>1\\ 2m & : x=1\end{cases}$ متصلة على $\mathbb{R}$ إذا كان :

ⓐ $m=-1\,,n=3$

ⓑ $m=1\,,n=-3$

ⓒ $m=-1\,,n=-3$

ⓓ $m=1\,,n=3$

11. الدالة $g$ : $g(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & : x>1\\ 3x & : x\le1\end{cases}$ متصلة على :

ⓐ $(-\infty,1]\,,(1,\infty)$

ⓑ $(-\infty,1)\,,[1,\infty)$

ⓒ $(-\infty,\infty)$

ⓓ $(-\infty,3]$

**تـدرب و تـفـوق**
اختبارات الكترونية ذكية

صفوة معلمي الكويت

# المشتقة

## المشتقة عند نقطة

**تعريف مشتقة الدالة $f$ عند $x = a$ هي :** $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

**تعريف (بديل) لمشتقة الدالة $f$ عند $x = a$ هي :** $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Q باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = 2x^2 + 1$ عند $x = 1$

Q باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = 3x^2$ عند $x = -2$

صفوة معلمي الكويت

باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة $f: f(x) = \sqrt{x}$ عند $x = a$ حيث $a > 0$

أوجد باستخدام التعريف مشتقة الدالة $f: f(x) = \frac{1}{x}$ عند $x = b$, $b \neq 0$

## من كراسة التمارين:

1. استخدم التعريف لإيجاد مشتقة الدالة $f(x) = \frac{3}{x}$ عند $x = 3$

2. استخدم التعريف لإيجاد مشتقة الدالة $f(x) = 2x^3$ عند $x = 1$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

# المشتقة من جهة واحدة

بين أن الدالة التالية لها مشتقة من جهة اليمين ولها مشتقة من جهة اليسار عند $x = 0$ لكن ليس لها مشتقة عند $x = 0$ :

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 0 \\ 2x & , x > 0 \end{cases}$

لتكن $f$ : $f(x) = |x - 2|$ ، **ابحث** قابلية اشتقاق الدالة $f$ عند $x = 2$

صفوة معلمي الكويت

لتكن $f$ : $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4} & ,x\leq 1\\ \sqrt{x} & ,x>1\end{cases}$ بين أن للدالة $f$ مشتقة لجهة اليمين مساوية للمشتقة لجهة اليسار عند $x=1$

## ⚠ معلق

لتكن الدالة $f$ حيث $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & ,x\leq -1\\ \frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2} & ,x>-1\end{cases}$ : بين أن للدالة $f$ مشتقة لجهة اليمين مساوية للمشتقة لجهة اليسار عند $x=-1$

صفوة معلمي الكويت

Q لتكن $f(x) = x^3$ . أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة إن وجدت

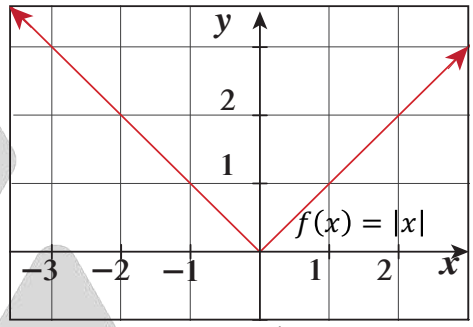
Q لتكن $f(x) = x^2 + 2$ . أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة

صفوة معلمي الكويت

# متى تكون $f'(a)$ غير موجودة؟

- **ركن :**

تكون المشتقة من جهة اليمين لا تساوي المشتقة من جهة اليسار $f'_+(a) \neq f'_-(a)$



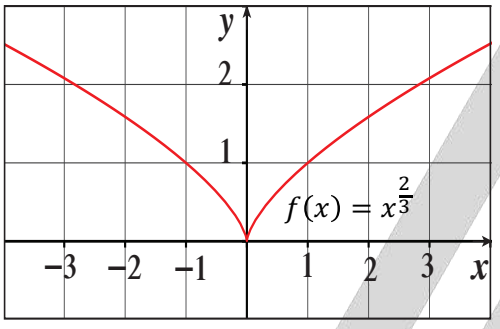

- **ناب :**

يكون ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطع محددة يقترب من ∞ من جهة ويقترب من ∞− من الجهة الثانية

$$f'_-(a) \to \infty \ \& \ f'_+(a) \to -\infty$$

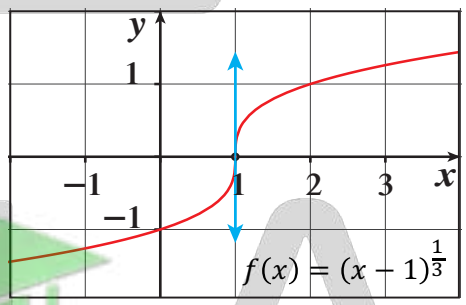
أو

$$f'_-(a) \to -\infty \ \& \ f'_+(a) \to +\infty$$



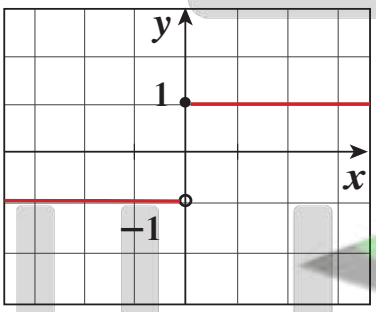

- **مماس رأسي :**

يكون المماس رأسياً عند نقطة محددة




- **عدم اتصال :**

إذا كانت الدالة غير متصلة عند $x = a$ فإن $f'(a)$ غير موجودة




UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

لتكن الدالة: $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x<2 \\ 2x-1 & ,x\geq 2 \end{cases}$ **ابحث** قابلية الاشتقاق للدالة $f$ عند $x=2$

لتكن الدالة: $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & ,x\leq 2 \\ 3x-2 & ,x>2 \end{cases}$ **ابحث** قابلية الاشتقاق للدالة $f$ عند $x=2$

صفوة معلمي الكويت

لتكن الدالة: $f(x)=\begin{cases}6x-1 & ,x>\frac{1}{2}\\ 2x+1 & ,x\leq\frac{1}{2}\end{cases}$ بين أن الدالة $f$ متصلة عندما $x=\frac{1}{2}$

ولكنها غير قابلة للاشتقاق عندها

## ⚠ معلق

صفوة معلمي الكويت

لتكن الدالة: $f(x)=\begin{cases}-x-1 & ,x>-\frac{1}{3}\\ 5x+1 & ,x\le -\frac{1}{3}\end{cases}$ بين أن الدالة $f$ متصلة وغير قابلة للاشتقاق عند $x=-\frac{1}{3}$

## ⚠ معلق

صفوة معلمي الكويت

لتكن $f$: $f(x)=\begin{cases} x^2-x-2 & ,x\leq 2 \\ -x^2+7x-10 & ,x>2 \end{cases}$ بين الدالة $f$ متصلة عند $x=2$ وادرس قابلية الاشتقاق عندها

## ⚠ معلق

صفوة معلمي الكويت

ادرس اتصال الدالة $f$ عندما $x = 1$ وقابلية اشتقاقها عند هذه النقطة حيث:

- $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2+1} & ,x \leq 1 \\ 2x - 1 & ,x > 1 \end{cases}$

معلق

صفوة معلمي الكويت

لتكن $f$: $f(x)=\begin{cases} x+5 & ,x\leq 3 \\ x^2-1 & ,x>3 \end{cases}$ أوجد إن أمكن $f'(3)$

لتكن $f$: $f(x)=\begin{cases} x^2+x & , \quad x\leq -1 \\ x^2-x-2 & , \quad x>-1 \end{cases}$ أوجد إن أمكن $f'(-1)$

صفوة معلمي الكويت

# بعض مسائل كراسة التمارين:

5. لتكن الدالة $f(x) = |x - 3|$
بين أن الدالة $f$ متصلة عند $x = 3$ و لكنها غير قابلة للاشتقاق عندها.

7. لتكن الدالة $g$ : $g(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & , x \leq 0 \\ 2x + 1 & , x > 0 \end{cases}$ أوجد $g'(0)$.

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

8. لتكن الدالة $f$ : $f(x)=\begin{cases}x^2 & : x\le 2\\ 4x-4 & : x>2\end{cases}$ أوجد $f'(2)$.

# المشتقة-التمارين الموضوعية

**ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة**

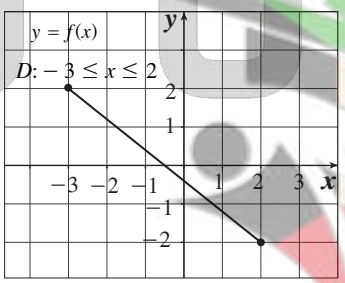
1. إذا كانت $f(x)=3x-12$ : $f$ فإن $f'(x)=3$ (a) (b)

2. إن الدالة $f(x)=x|x|$ : $f$ غير قابلة لاشتقاق $\forall x\in\mathbb{R}$ (a) (b)

3. إن الدالة $f(x)=\frac{x^3-8}{x^2-4x-5}$ : $f$ غير قابلة للاشتقاق عندما $x$ تساوي $-1$ فقط (a) (b)

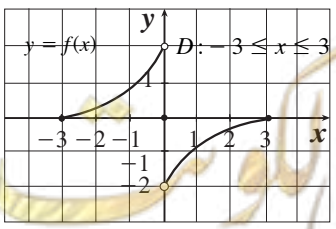
4. إن الدالة $f(x)=\begin{cases}2x-1 & : x<4\\ x^2-9 & : x>4\end{cases}$ : $f$ قابلة للاشتقاق عند $x=4$ (a) (b)

5. إن الدالة $f$ ذات الرسم البياني




قابلة للاشتقاق على الفترة $[-3\ ,2]$ (a) (b)

6. إن الدالة $f$ ذات الرسم البياني أدناه




هي متصلة على الفترة $[-3\ ,3]$

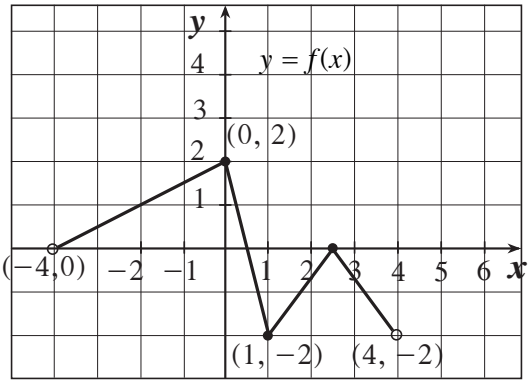
ولكن غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$ (a) (b)

**ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.**

7. إن الدالة $f(x) = x + \sqrt{x^2} + 2$ : ليست قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ و السبب هو :

ⓐ ناب ⓑ ركن ⓒ مماس عمودي ⓓ غير متصلة

8. تكون الدالة $f$ ذات الرسم البياني




أدناه غير قابلة للاشتقاق عند كل ⋯ = $x$

ⓐ $0\,,1\,,2\frac{1}{2}$

ⓑ $-2\,,+2$

ⓒ $-4\,,0\,,1\,,4$

ⓓ $1\,,4$

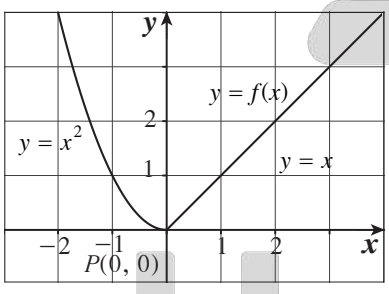
9. الدالة $f$ القابلة للاشتقاق عند $x = 3$ فيما يلي هي :

ⓐ $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ ⓑ $\sqrt{3-x}$ ⓒ $\begin{cases} 3x-1 & : \ x \le 3 \\ 1 & : \ x > 3 \end{cases}$ ⓓ $\sqrt[3]{x+2}$

10. إذا كانت $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ فإن مجال $f'$ هو

ⓐ $\mathbb{R} - \{-2\,,2\}$ ⓑ $\mathbb{R} - \{-2\}$ ⓒ $\mathbb{R} - \{2\}$ ⓓ $\mathbb{R} - (-2\,,2)$

11. في الشكل المقابل ، عند النقطة $P$ :



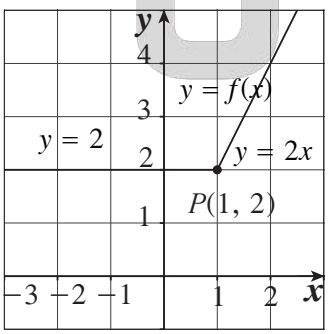

ⓐ المشتقة جهة اليسار موجبة

ⓑ المشتقة جهة اليمين سالبة

ⓒ الدالة قابلة للاشتقاق

ⓓ ليس أي مما سبق

12. في الشكل المقابل ، عند النقطة $P$ :




ⓐ $f'_+(1) = 1$

ⓑ $f'_-(1) = 0$

ⓒ $f'_-(1) = 2$

ⓓ $f$ قابلة للاشتقاق

# قواعد الاشتقاق

**قاعدة (1) :**

مشتقة أي دالة ثابتة تساوي الصفر

**قاعدة (2) :**

إذا كان $f(x) = x$ فان: $f'(x) = 1$

**قاعدة (3) :**

إذا كان $f(x) = x^n$ فان: $f'(x) = n.x^{n-1}$

**أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:**

- $f(x) = x^4$
- $f(x) = x^{10}$
- $f(x) = x^{12}$

**قاعدة (4) :**

إذا كانت $f$ دالة في $x$ قابلة للاشتقاق وكان $k$ عددا حقيقيا ثابتا فإن:

$$\big(k.f(x)\big)' = k.f'(x)$$

**قاعدة (5) :**

قاعدة الجمع والطرح: $\big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x)$

- أوجد $\frac{dy}{dt}$ حيث : $y = t^3 + 6t^2 - \frac{5}{3}t + 16$
- أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث : $y = 5x^3 - 4x^2 + 6$

**قاعدة (6) :**

قاعدة اشتقاق ضرب دالتين: $(f.g)' = f'.g + f.g'$

- أوجد $f'(x)$ حيث : $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$

**أوجد $f'(x)$ حيث :**

- $f(x) = (2x+1)(3x-2)$
- $f(x) = 4x^2(x+6)$
- $f(x) = (x^3-4)^2$

**قاعدة (7) :**

قاعدة القسمة : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$

- أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \frac{x^3-1}{5x^2+1}$
- أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \frac{4x^2+2x}{2x^3+5}$

**إيجاد معادلة المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة $(a,f(a)) = (x_1,y_1)$ ومعادلة المستقيم العمودي (الناظم) على منحنى الدالة عند النقطة**

ميل المماس

$f'(a) = m$

معادلة المماس

$y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

ميل الناظم (العمودي)

$\frac{-1}{f'(a)} = \frac{-1}{m}$

معادلة الناظم (العمودي)

$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x-a)$

$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

Q أوجد معادلة المماس للمنحنى $y = x^3 + x$ عند النقطة : $(1,2)$

Q أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم عند النقطة: $(1,\frac{2}{3})$ لمنحنى الدالة : $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+2}$

Q أوجد معادلة المماس و معادلة الناظم عند النقطة: $(1,0)$ لمنحنى الدالة: $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

**نتيجة:**

إذا كانت $g$ دالة قابلة للاشتقاق وكانت $g(x) \neq 0$ ، $k$ عدد ثابتاً فإن: $\left(\frac{k}{g(x)}\right)' = \frac{-k.g'(x)}{(g(x))^2}$

**أوجد : $f'(x)$**

Q $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$

Q $f(x) = \frac{-4}{x^2+2x+5}$

**الأسس الصحيحة السالبة**

$f(x) = x^{-4} \Rightarrow f'(x) = -4x^{-5}$

$f(x) = x^{-5} \Rightarrow f'(x) = -5x^{-6}$

$f(x) = \frac{4}{x^2} = 4x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -8x^{-3}$

$f(x) = \frac{-3}{x^5} = -3x^{-5} \Rightarrow f'(x) = 15x^{-6}$

**قاعدة:**

$f(x) = \frac{a}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-a}{x^2}$ : $a \neq 0$

Q لتكن $y = \frac{x^2+3}{2x}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 1$

Q لتكن $y = \frac{3x^2+7}{8x^2}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = -1$

**الدوال الجذرية:**

**إذا كانت $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ حيث $m, n$ عددان صحيحان مختلفان $n \neq 0$ فإن :** $f'(x) = \frac{m}{n}x^{(\frac{m}{n}-1)}$

$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$

**إذا كانت $f(x) = \sqrt{x}$ تكون** $f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

**أوجد : $f'(x)$**

Q $f(x) = x^{\frac{3}{2}}; x > 0$

Q $f(x) = \sqrt{x^3}$

Q $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$

Q $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

Q لتكن الدالة: $f$ $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & ,x\leq 1\\ 2x+1 & ,x>1\end{cases}$ دالة متصلة على مجالها أوجد $f'(x)$ إن أمكن

Q أوجد المشتقة إن أمكن لكل من الدوال التالية:

- $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & ,x\leq 2\\ 4x-3 & ,x>2\end{cases}$

صفوة معلمي الكويت

- $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & ,x<1\\ 2\sqrt{x} & ,x\geq 1\end{cases}$

**من كراسة التمارين:**

13. أوجد معادلة المماس و معادلة العمودي (الناظم) لمنحنى الدالة $y=\frac{8}{4+x^2}$ عند النقطة $(2,1)$.

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

14. لتكن الدالة : $f(x)=\begin{cases} x-\frac{4}{x} & ,x\geq 2 \\ x^2-4 & ,x<2 \end{cases}$ أوجد $f'(x)$ وعين مجالها

**معلق**

# قواعد الاشتقاق - التمارين الموضوعية

**ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة**

1. إذا كانت $y=-x^2+3$ فإن $\frac{dy}{dx}=-2$ (a) (b)
2. إذا كانت $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{3}+x$ فإن $\frac{dy}{dx}=x^2+\frac{2}{3}x+1$ (a) (b)
3. إذا كانت $y=\frac{2x+5}{3x-2}$ فإن $\frac{dy}{dx}=\frac{12x+11}{(3x-2)^2}$ (a) (b)
4. إذا كانت $y=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$ فإن $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{x^4}$ (a) (b)

***ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.***

5. إذا كانت $y=1-x+x^2-x^3$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

(a) $-1+2x-3x^2$ (b) $2-3x$ (c) $-6x+2$ (d) $1-x$

6. إذا كانت $f(x)=5x^3-3x^5$ فإن $f'(x)$ تساوي :

(a) $20x+60x^2$ (b) $15x^2-15x^4$ (c) $30x-30x^4$ (d) $30x-60x^3$

7. إذا كانت $y=\frac{x^2+5x-1}{x^2}$ فإن $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ تساوي :

ⓐ $\frac{-7}{2}$ ⓑ $-3$ ⓒ $3$ ⓓ $\frac{7}{2}$

8. ميل مماس منحنى $y=x^2+5x$ عند $x=3$ تساوي :

ⓐ $24$ ⓑ $-\frac{5}{2}$ ⓒ $11$ ⓓ $8$

9. ميل مماس منحنى الدالة $f(x)=\frac{2}{x}$ عند $x=-2$ تساوي :

ⓐ $-1$ ⓑ $-\frac{1}{2}$ ⓒ $\frac{1}{2}$ ⓓ $1$

10. ميل مماس منحنى الدالة $f(x)=\frac{-1}{x-1}$ عند $x=0$ تساوي :

ⓐ $-1$ ⓑ $0$ ⓒ $1$ ⓓ $2$

11. للدالة $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ مماس رأسي معادلته :

ⓐ $x=0$ ⓑ $y=0$ ⓒ $x=1$ ⓓ $y=1$

12. ميل الناظم لمنحنى الدالة $y=x^3-3x+1$ عند النقطة $(2,3)$ هي :

ⓐ $9$ ⓑ $3$ ⓒ $-\frac{1}{3}$ ⓓ $\frac{-1}{9}$

13. النقاط على منحنى الدالة $y=2x^3-3x^2-12x+20$ التي يكون المماس عندها موازياً لمحور السينات هي :

ⓐ $(-1,27)$ ⓑ $(2,0)$ ⓒ $(2,0),(-1,27)$ ⓓ $(-1,27),(0,20)$

14. لتكن الدالة $f$ : $f(x)=\begin{cases}x^2+2x & : \ x\geq 1\\ 4x-1 & : \ x<1\end{cases}$ فإن مجال $f'$ هو :

ⓐ $\{1\}$ ⓑ $\mathbb{R}-\{1\}$ ⓒ $[1,\infty)$ ⓓ $\mathbb{R}$

15. إن معادلة المماس لمنحنى الدالة $f$: $f(x)=2x^2-13x+2$ عند $x=3$ هي :

ⓐ $y=x-16$ ⓑ $y=-x+16$ ⓒ $y=-x-13$ ⓓ $y=-x-16$

16. إذا كانت $f(2)=3$ ، $f'(2)=5$ عند النقطة $P$ على منحنى الدالة $f$ فإن :

ⓐ معادلة خط المماس : $y=5x+7$ ⓑ معادلة الخط العمودي : $y=-\frac{1}{5}x+7$

ⓒ معادلة الخط العمودي : $y=-\frac{1}{5}x+\frac{17}{5}$ ⓓ معادلة خط المماس : $y=5x+3$

تـدرب و تـفـوق
اختبارات الكترونية ذكية
UULA
صفوة معلمي الكويت
UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

# مشتقات الدوال المثلثية

$$(\sin x)' = \cos x \quad , \quad (\cos x)' = -\sin x$$

**أوجد مشتقات الدوال التالية:**

- $y = x^2 . \sin x$
- $u = \frac{\cos x}{1-\sin x}$
- $f(x) = \sin^2 x$
- $h(x) = \cos^2 x$
- $g(x) = \frac{x}{\cos x}$
- $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

صفوة معلمي الكويت

$$(\tan x)' = \sec^2 x \quad , \quad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x \ , (\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$$

**أوجد مشتقات الدوال التالية:**

- $h(x) = \csc x + \sin x \cdot \tan x$
- $g(x) = \sec x(1 + \sin x)$
- $f(x) = \tan x + \cot x$
- $f(x) = \frac{1+\tan x}{\tan x}$
- $g(x) = \sec x + \csc x$
- $h(x) = \frac{\sec x}{\csc x}$

**من كراسة التمارين:**

- في التمارين أوجد $\frac{dy}{dx}$

2. $y = 4 - x^2 \sin x$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

3. $y = \frac{\cot x}{1+\cot x}$

4. $y = \frac{\cos x}{1+\sin x}$

أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \tan x$ عند النقطة $p\left(\frac{\pi}{4},1\right)$

أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \sec x$ عند النقطة $p\left(\frac{\pi}{3},2\right)$

**من كراسة التمارين:**

7. لتكن : $y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sin x} + \cot x$ أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة عند $P\left(\frac{\pi}{4},4\right)$

صفوة معلمي الكويت

## ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. إذا كانت $y = 1 + x - \cos x$ فإن $\frac{dy}{dx} = 1 + \sin x$ (a) (b)
2. إذا كانت $y = \frac{4}{\cos x}$ فإن $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{\cos^2 x}$ (a) (b)
3. ميل المماس لمنحنى الدالة $y = \sin x + 3$ عند $x = \pi$ هو 1 (a) (b)
4. إن منحنى الدالة $y = \tan x$ ومنحنى الدالة $y = \cot x$ ليس لهما مماسات أفقية (a) (b)

معلق

## ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

5. إذا كانت $y = \frac{1}{x} + 5\sin x$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

(a) $-\frac{1}{x^2} - 5\cos x$ (b) $\frac{1}{x^2} + 5\cos x$ (c) $-\frac{1}{x^2} + 5\cos x$ (d) $\frac{1}{x^2} - 5\cos x$

6. إذا كانت $f(x) = 3x + x\tan x$ فإن $f'(0)$ يساوي :

(a) $-3$ (b) $0$ (c) $1$ (d) $3$

7. إذا كانت $y = \frac{x}{1+\cos x}$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

(a) $-\frac{x\sin x}{(1+\cos x)^2}$ (b) $\frac{1+\cos x - x\sin x}{(1+\cos x)^2}$

(c) $\frac{1+\cos x - x\sin x}{1+\cos^2 x}$ (d) $\frac{1+\cos x + x\sin x}{(1+\cos x)^2}$

8. معادلة المستقيم العمودي على المماس لبيان الدالة $y = 2\cos x$ عند النقطة $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ هي :

(a) $y = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$ (b) $y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$

(c) $y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$ (d) $y = -\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$

9. إذا كانت $y = \frac{1}{\sin x}$ فإن $y'$ تساوي :

(a) $\cot x \cdot \csc x$ (b) $\cos x$ (c) $-\cot x \cdot \csc x$ (d) $-\cos x$

تـدرب و تـفـوق
اختبارات الكترونية ذكية
صفوة معلمي الكويت

# قاعدة السلسلة

**الشكل الأول لقاعدة السلسلة:**

$$(fog)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

**إذا كانت $f(x) = 3x^2 + 1$ , $g(x) = x^{10}$ فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة :**

- $(f \circ g)'(x)$
- $(g \circ f)'(-1)$

**إذا كانت $f(x) = -2x^3 + 4$ , $g(x) = x^{13}$ فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة :**

- $(f \circ g)'(x)$
- $(g \circ f)'(0)$

صفوة معلمي الكويت

إذا كانت $f(x)=\frac{2x+1}{x}$ ، $g(x)=x^2+1$ فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f\circ g)'(x)$

إذا كانت $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$ ، $g(x)=\sqrt{x}$ فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة : $(f\circ g)'(1)$

**من كراسة التمارين:**

**أوجد $(f\circ g)'$ عند القيم المعطاة لـ $x$ .**

5. $f(x)=x+\frac{1}{\cos^2 x}$ ، $g(x)=\pi x$ ، $x=\frac{1}{4}$

صفوة معلمي الكويت

**الشكل الثاني لقاعدة السلسلة:**

إذا كانت: $u = g(x)$, $y = f(u)$ فإن: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

## أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة السلسلة

Q $y = u^3 - 3u + 1$ , $u = 5x^2 + 2$

Q $y = u^2 + 4u - 3$ , $u = 2x^3 + x$

**من كراسة التمارين:**

7. أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

a) $y = \cos u$ , $u = 6x + 2$

b) $y = 5u^3 + 4$ , $u = 3x^2 + 1$

صفوة معلمي الكويت

**قاعدة:** في الدوال المثلثية التي من الشكل $y = cos\big(f(x)\big)$ يمكن إيجاد المشتقة وفق الطريقة التالية:

- $\big(cos\big(f(x)\big)\big)' = -\boldsymbol{sin\big(f(x)\big).f'(x)}$

**وبالمثل يمكن تعميم هذه القاعدة على كل الدوال المثلثية:**

- $\big(sin\big(f(x)\big)\big)' = \boldsymbol{cos\big(f(x)\big).f'(x)}$
- $\big(tan\big(f(x)\big)\big)' = \boldsymbol{sec^2\big(f(x)\big).f'(x)}$
- $\big(cot\big(f(x)\big)\big)' = \boldsymbol{-csc^2\big(f(x)\big).f'(x)}$
- $\big(sec\big(f(x)\big)\big)' = \boldsymbol{sec\big(f(x)\big).tan\big(f(x)\big).f'(x)}$
- $\big(csc\big(f(x)\big)\big)' = \boldsymbol{-csc\big(f(x)\big).cot\big(f(x)\big).f'(x)}$

Q يتحرك جسيم على محور السينات بحيث إن موضعه عند أي لحظة $t \geq 0$ يعطى بالدالة : $S = \cos(t^2 + 1)$ . أوجد السرعة اللحظية للجسيم كدالة في $t$

Q أوجد مشتقة $y = \sin(x^2 + x)$ بالنسبة إلى المتغير $x$

**من كراسة التمارين:**

**أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:**

8. $s = \sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}t\right)$

9. $y = \tan(2x - x^3)$

10. $y = \sin(3x + 1)$

**الشكل الثالث لقاعدة السلسلة: قاعدة سلسلة القوى:**

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)\big)^n = n\big(f(x)\big)^{n-1}.f'(x)$$

Q أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \sin^3 x$ باستخدام قاعدة السلسلة

Q أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \cos^5 x$ باستخدام قاعدة السلسلة

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

لتكن $y = \sqrt[5]{(x^2+3x+5)^3}$ أوجد $y'$

لتكن $y = \sqrt[4]{(2x^4-3x^2+4)^3}$ أوجد $y'$

**من كراسة التمارين:**

**أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:**

11. $y = (\tan x + \sec x)^2$

12. $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$

13. $y = (1-6x)^{\frac{2}{3}}$

14. $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

15. $y = \sin^2(3x-2)$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

Q أوجد ميل مماس المنحنى $y = \sin^5 x$ عند $x = \frac{\pi}{3}$

Q بين أن ميل أي مماس للمنحنى $y = \frac{1}{(-2x-1)^3}$ دائما يكون موجباً حيث $x \neq -\frac{1}{2}$

**من كراسة التمارين:**

**أوجد معادلة المماس ومعادلة الخط العمودي على المماس في كل مما يلي:**

16. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ , $(2,3)$

17. $g(x) = (x^3 + 1)^8$ , عند $(0,1)$

صفوة معلمي الكويت

## ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. إذا كانت $y = cos(\sqrt{3}x)$ فإن $\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}\, sin(\sqrt{3}x)$ (a) (b)

2. إذا كانت $y = 5\, cot\left(\frac{2}{x}\right)$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{10}{x^2} csc^2\left(\frac{2}{x}\right)$ (a) (b)

3. إذا كانت $y = (x + \sqrt{x})^{-2}$ فإن $\frac{dy}{dx} = -2(x + \sqrt{x})^{-1}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ (a) (b)

4. إذا كانت $s = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3t\right)$ فإن $\frac{ds}{dt} = 3\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3t\right)$ (a) (b)

## ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

5. إذا كانت $y = \sin^{-5} x - \cos^3 x$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

(a) $5\sin^{-6} x \cos x - 3\cos^2 x \sin x$
(b) $5\sin^{-6} x \cos x + 3\cos^2 x \sin x$
(c) $-5\sin^{-6} x \cos x - 3\cos^2 x \sin x$
(d) $-5\sin^{-6} x \cos x + 3\cos^2 x \sin x$

6. إذا كانت $y = \frac{3}{\sqrt{2x+1}}$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

(a) $3(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$
(b) $-3(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$
(c) $-3(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$
(d) $3(2x+1)^{-1}$

7. إذا كانت $s = \frac{4}{3\pi}\sin 3t + \frac{4}{5\pi}\cos 5t$ فإن $\frac{ds}{dt}$ تساوي :

(a) $\frac{4}{\pi}\sin 3t - \frac{4}{\pi}\cos 5t$
(b) $\frac{4}{\pi}\cos 3t + \frac{4}{\pi}\sin 5t$
(c) $\frac{4}{\pi}\cos 3t - \frac{4}{\pi}\sin 3t$
(d) $\frac{4}{\pi}\cos 3t - \frac{4}{\pi}\sin 5t$

8. إذا كانت $r = \tan(2 - \theta)$ فإن $\frac{dr}{d\theta}$ تساوي :

(a) $\sec^2(2-\theta)$ (b) $-\sec^2(2-\theta)$ (c) $\sec^2(\theta+2)$ (d) $\sec(2-\theta)$

9. إذا كانت $f(u) = \cot\frac{\pi u}{10}$ و $u = g(x) = 5\sqrt{x}$ فإن $(f \circ g)'(x)$ عند $x = +1$ تساوي :

(a) $\frac{3\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $-\frac{\pi}{4}$ (d) $-\frac{3\pi}{4}$

⚠ معلق

تدرب و تفوق
اختبارات الكترونية ذكية

# المشتقات ذات الرتب العليا

Q أوجد المشتقات حتى الرتبة الرابعة للدالة:
$y = 2x^7 - 4x^2 + 3x - 5$
بدلالة المتغير $x$

Q إذا كانت: $y = \sin x$ فبين أن:
$y^{(4)} = y$

Q إذا كانت $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$
فأوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة

Q لتكن الدالة: $y = \cos x$ بين أن:
$y^{(4)} + y'' = 0$

Q أوجد $y''$ حيث: $y = \frac{1}{\cos x}$

Q أوجد $y''$ حيث: $y = \frac{1}{\sin x}$

**من كراسة التمارين:**

3. $y = \frac{3}{(x-2)}$

4. $y = \sin 2x$

5. $y = \cos 4x$

6. $y = \sin^2 x$

صفوة معلمي الكويت

# الاشتقاق الضمني

أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ في الحالات التالية:

a) $y^2 + xy = 7x$

b) $y = x + x^2y^5$

لتكن $y^2 = x^2 - 2x$ أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$

أوجد ميل المماس لمنحنى الدائرة الذي معادلته: $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(3, -4)$

أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1,1)$

UULA
صفوة معلمي الكويت

Q أوجد ميل المماس $\frac{dy}{dx}$ للمنحنى الذي معادلته : $2y = x^2 + \sin y$ عند النقطة $(2\sqrt{\pi}, 2\pi)$

Q أوجد ميل المماس $\frac{dy}{dx}$ للمنحنى الذي معادلته : $x^2 + y^2 - 2xy = 1$ حيث $x \neq y$ عند النقطة $(2,1)$

Q للمنحنى الذي معادلته : $2\sqrt{y} + y = x$ أوجد $y'$ ، ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(3,1)$

Q للمنحنى الذي معادلته : $y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$ أوجد $y'$ ،ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1,1)$

**من كراسة التمارين:**

**أوجد معادلة المماس ومعادلة الخط العمودي عند النقطة المحددة:**

12. $2xy + \pi \sin y = 2\pi, \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

صفوة معلمي الكويت

إذا كانت $y = x.\sin x$ فأثبت أن:
$y''' + y' + 2\sin x = 0$

إذا كانت $y = \sqrt{1-2x}$
أثبت أن: $yy'' + (y')^2 = 0$

لتكن : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ أثبت أن : $(1+x^2)f'''(x) + 6xf''(x) + 6f'(x) = 0$

**معلق**

لتكن $f(x) = \frac{1}{1-x}$ فأثبت أن: $f'''(x) = \frac{3!}{(1-x)^4}$

**من كراسة التمارين:**

15. إذا كانت $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ فأثبت أن: $4x^2 f''(x) - 3f(x) = 0$

صفوة معلمي الكويت

# المشتقات ذات الرُّتب العُليا & الاشتقاق الضمني
# التمارين الموضوعية

**ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة**

1. إذا كانت $y = \frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$ فإن $\frac{d^2y}{dx^2} = -2x$ (a) (b)

2. إذا كانت $y = \frac{-3x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 4x$ فإن $\frac{d^3y}{dx^3} = -18x$ (a) (b)

3. معادلة المماس لمنحنى $x^2 - y^2 - x^2y = 7$ عند النقطة $(2\ ,-1)$ هي : $y = 4x - 9$ (a) (b)

**ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.**

4. إذا كانت : $f(x) = (1+6x)^{\frac{2}{3}}$ فإن : $f''(x)$ تساوي :

(a) $\frac{8}{27}(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$ (b) $8(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

(c) $-8(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$ (d) $-64(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

5. إذا كانت $f(x) = \frac{2x+1}{3x+2}$ فإن $f^{(4)}(x)$ تساوي :

(a) $24(3x+2)^{-5}$ (b) $(3x+2)^{-5}$

(c) $648(3x+2)^{-5}$ (d) $-648(3x+2)^{-5}$

معلق

6. ميل الخط العمودي على المماس (الناظم) عند النقطة $A(3\ ,2)$ على منحنى : $x^2 - y^2 - 2xy = -7$ هو :

(a) $-5$ (b) $-\frac{1}{5}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) $5$

7. ميل المماس عند النقطة $A(1\ ,1)$ على منحنى : $x^2 - 3y^2 + 2xy = 0$ هي :

(a) $-1$ (b) $0$ (c) $1$ (d) $2$


تـدرب و تـفـوق
اختبارات الكترونية ذكية

# القيم القصوى (العظمى والصغرى) للدوال

## تعريف (1): القيم القصوى المطلقة

إذا كانت $f$ دالة مجالها $D$, $c \in D$ فإن $f(c)$ تسمى :

- قيمة عظمى مطلقة للدالة $f$ على $D$ عندما $f(c) \geq f(x)$ , $\forall x \in D$
- قيمة صغرى مطلقة للدالة $f$ على $D$ عندما $f(c) \leq f(x)$ , $\forall x \in D$

## نظرية (1): نظرية القيمة القصوى

إذا كانت $f$ دالة متصلة على فترة مغلقة $[a,b]$ فإن $f$ تكون لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة

**ملاحظة :**

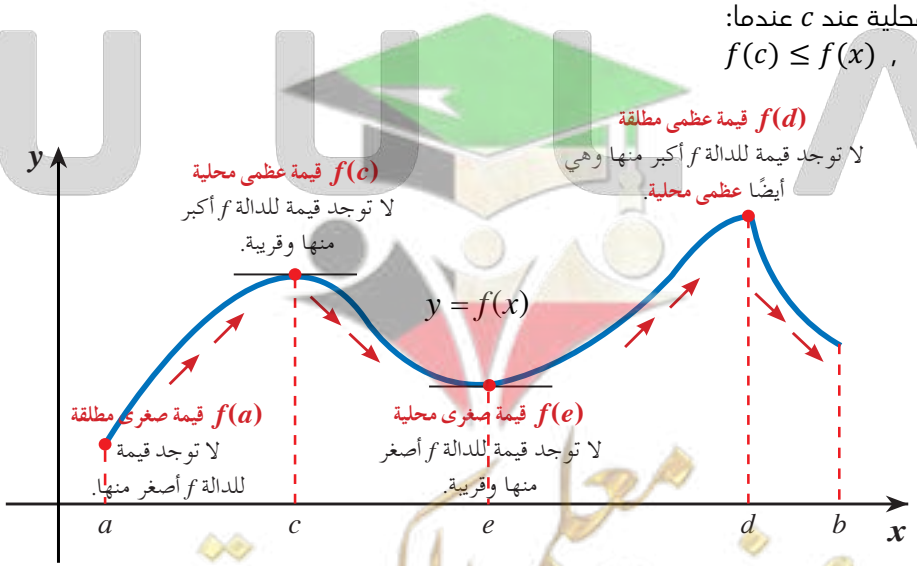
لتكن الدالة $f$ المعرفة على $[a,b]$ , $c \in (a,b)$ فإننا نسمي:

- $(b,f(b))$ ,$(a,f(a))$ نقاطا طرفية
- $(c,f(c))$ نقطة داخلية

## تعريف (2): القيمة القصوى المحلية:

لتكن $(c,f(c))$ نقطة داخلية للدالة $f$، $D$ فترة مفتوحة تحوي $c$ ، تكون $f(c)$ :

- قيمة عظمى محلية عند $c$ عندما:
  $f(c) \geq f(x)$ , $\forall x \in D$
- قيمة صغرى محلية عند $c$ عندما:
  $f(c) \leq f(x)$ , $\forall x \in D$




UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

النقطة الداخلية للدالة $f$، $(c,f(c))$ تسمى نقطة حرجة عندما $f'(c)=0$ أو $f'(c)$ غير موجودة

**أوجد النقاط الحرجة لكل من الدوال المتصلة التالية:**

Q $g(x)=x^3-3x^2+5$

Q $f(x)=x^4-4x^3-8x^2+10$

صفوة معلمي الكويت

$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 , x < 1 \\ 3x - 1 \ , \ x \geq 1 \end{cases}$

⚠ معلق

صفوة معلمي الكويت

$f(x) = |x - 5|$

## ⚠ معلق

### نظرية (2): نظرية القيم القصوى المحلية

إذا كانت للدالة $f$ قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محلية عند $x = c$ فإن $(c, f(c))$ نقطة حرجة

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[0,3]$

صفوة معلمي الكويت

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة: $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[-2,1]$

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ في الفترة $[-2,3]$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة: $f(x)=\frac{1}{x^2}$ في الفترة $[1,3]$

لتكن $f$ ، $a,b\in R$ ، $f(x)=x^3+ax^2+bx+5$ و كان للدالة قيمة قصوى محلية عند كل من : $x=\frac{1}{3}$ ، $x=1$ المطلوب : أوجد قيمة كل من الثابتين $a,b$

## معلق

لتكن $f$ ، $a,b\in R$ ، $f(x)=2x^3+ax^2+bx+1$ و كان للدالة قيمة قصوى محلية عند كل من: $x=2$ ، $x=-1$ المطلوب : أوجد قيمة كل من الثابتين $a,b$

UULA
صفوة معلمي الكويت

# القيم القصوى للدوال - التمارين الموضوعية

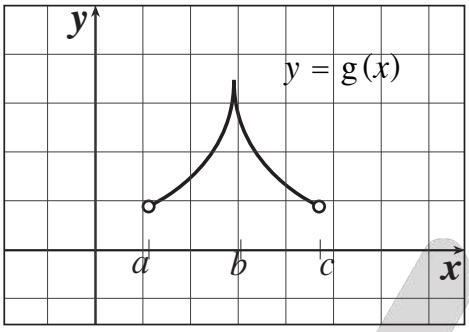
## ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. إذا كانت $f$ دالة متصلة على $(a, b)$ فإن $f$ لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة.

(a) (b)

2. في الشكل التالي، للدالة g قيمة قصوى محلية عند $x = c$

(a) (b)




3. الدالة $g : g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ لها قيمة عظمى في مجالها

(a) (b)

4. الدالة $f : f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ لها قيمة عظمى في مجالها

(a) (b)

5. الدالة $h : h(x) = |3x - 5|$ لها قيمة حرجة عند $x = 5$

(a) (b)

معلق

## ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. لتكن $y = |x|$ فإن الدالة $y$:

(a) لها قيمة عظمى مطلقة فقط
(b) لها قيمة صغرى مطلقة فقط
(c) لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة
(d) ليس لها قيمة صغرى مطلقة وليس لها قيمة عظمى مطلقة

معلق

7. عدد النقاط الحرجة للدالة $y = 3x^3 - 9x - 4$ على الفترة $(0, 2)$ هو:

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 0

8. الدالة $k : k(x) = |x^2 - 4|$ لها:

(a) قيمة عظمى مطلقة
(b) قيمة صغرى مطلقة
(c) نقطتان حرجتان فقط
(d) ليس أي مما سبق

معلق

9. إذا كانت $f(x) = ax^2 - 25x$ لها قيمة قصوى محلية عند $x = \frac{5}{2}$ فإن $a$ تساوي:

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

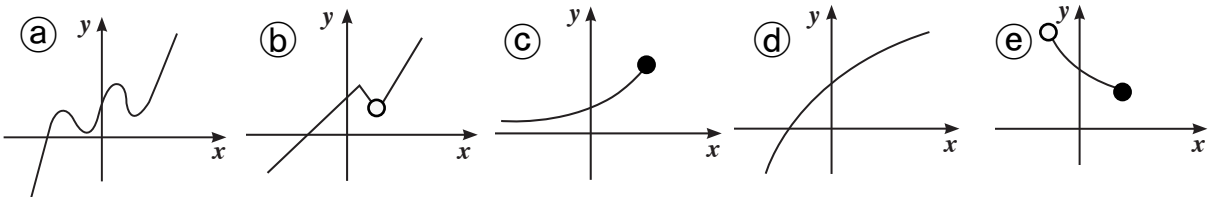
صفوة تعلمي الكويت

## اختر من القائمة ما يناسب كل عبارة من التمثيلات البيانية أدناه

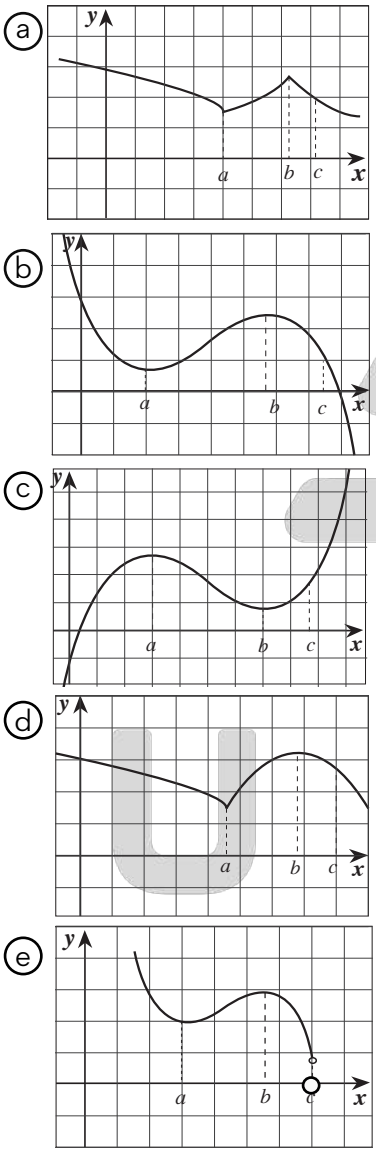
10. لها قيمة عظمى مطلقة

11. لها أكثر من قيمة قصوى محلية

12. ليس لها قيم قصوى محلية أو مطلقة




## اختر من القائمة ما يناسب كل عبارة من التمثيلات البيانية




13.

| $x$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $a$ | $0$ |
| $b$ | $0$ |
| $c$ | أكبر من الصفر |

14.

| $x$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $a$ | $0$ |
| $b$ | $0$ |
| $c$ | أصغر من الصفر |

15.

| $x$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $a$ | غير موجودة |
| $b$ | $0$ |
| $c$ | أصغر من الصفر |

16.

| $x$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $a$ | غير موجودة |
| $b$ | غير موجدة |
| $c$ | أصغر من الصفر |


**تـدرب و تـفـوق**

اختبارات الكترونية ذكية

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

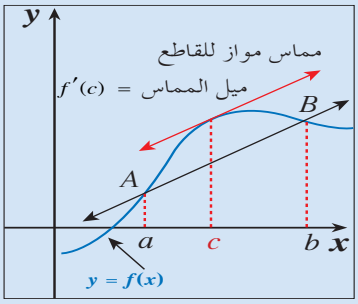
# تزايد وتناقص الدوال

## نظرية (3) نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت $f$ دالة:

- متصلة على الفترة $[a,b]$
- قابلة للاشتقاق على الفترة $(a,b)$ فإنه يوجد على الأقل $c \in (a,b)$ بحيث :

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$




**Q** بين أن الدالة: $f(x) = x^2$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0,2]$ ثم أوجد $c$ الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك

**Q** بين أن الدالة: $f(x) = x^2 + 2x$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3,1]$ ثم أوجد $c$ الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك

صفوة معلمي الكويت

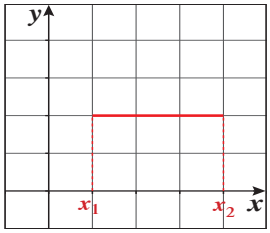
- بين أن الدالة: $f(x) = x^3 + 1$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3,3]$ ثم أوجد $c$ الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك

- بين أن الدالة : $f(x) = x^3 - 3x + 2$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0,4]$ ثم أوجد $c$ الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك

صفوة معلمي الكويت

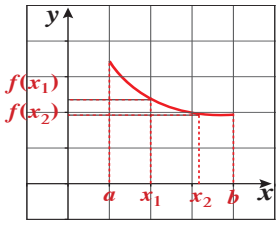
**تزايد وتناقص الدوال :** لتكن $f$ دالة معرفة على الفترة $I$ نقول إن الدالة

دالة ثابتة



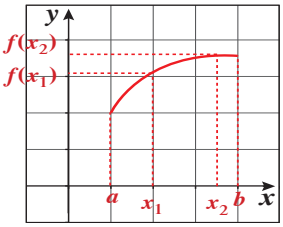

$\forall x_1, x_2 \in I \implies f(x_1) = f(x_2)$

دالة متناقصة




$\forall x_1, x_2 \in I$
$x_1 < x_2 \implies$
$f(x_1) > f(x_2)$

دالة متزايدة




$\forall x_1, x_2 \in I$
$x_1 < x_2 \implies$
$f(x_1) < f(x_2)$

**الدالة المطردة:** هي الدالة التي تكون دائماً متزايدة على فترة أو دائماً متناقصة على فترة

**نظرية (4) الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة والدوال الثابتة**

لتكن $f$ دالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(a,b)$

- إذا كانت $f'(x) > 0$ عند كل $x$ تنتمي للفترة $(a,b)$ فإن $f$ تتزايد على $(a,b)$
- إذا كانت $f'(x) < 0$ عند كل $x$ تنتمي للفترة $(a,b)$ فإن $f$ تتناقص على $(a,b)$
- إذا كانت $f'(x) = 0$ عند كل $x$ تنتمي للفترة $(a,b)$ فإن $f$ ثابتة على $(a,b)$

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة:

- $f(x) = x^2 - 5x + 6$

صفوة معلمي الكويت

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة:

- $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x) = x^3 - 6x$

صفوة معلمي الكويت

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$

صفوة معلمي الكويت

# تزايد وتناقص الدوال - التمارين الموضوعية

**ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة**

1. *الدالة* $g: g(x) = x^2 - x - 3$ *متزايدة على* $(-\infty, \frac{1}{2})$ (a) (b)

2. *الدالة* $f: f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ *متناقصة على كل من الفترة* $(-\infty, -\sqrt{5})$ *والفترة* $(\sqrt{5}, \infty)$ (a) (b)

3. *الدالة* $f: f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ *تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على* $[0, 1]$ (a) (b)

4. *الدالة* $f: f(x) = x^3 + 1$ *مطردة على* $\mathbb{R}$ (a) (b)

⚠ معلق

**ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.**

5. *تكون الدالة* $k: k(x) = \frac{x}{x^2-4}$

(a) متزايدة على كل فترة من مجال تعريفها
(b) متناقصة على كل فترة من مجال تعريفها
(c) متناقصة على كل من $(-\infty, -2)$ , $(-2, 2)$ ومتزايدة على $(2, \infty)$
(d) ليس أي مما سبق

6. *الدالة* $R: R(x) = |x|$

(a) متزايدة على مجال تعريفها
(b) متناقصة على مجال تعريفها
(c) متزايدة على الفترة $(0, \infty)$ ومتناقصة على الفترة $(-\infty, 0)$
(d) متناقصة على الفترة $(0, \infty)$ ومتناقصة على الفترة $(-\infty, 0)$

⚠ معلق

7. *إذا كانت* $f': f'(x) = -x^2$ *فإن الدالة* $f$ :

(a) متزايدة على مجال تعريفها
(b) متزايدة على الفترة $(-\infty, 0)$ فقط
(c) متناقصة على مجال تعريفها
(d) متناقصة على الفترة $(0, \infty)$ فقط

8. *إذا كانت* $f': f'(x) = -3x$ *فإن الدالة* $f$ :

(a) متزايدة على الفترة $(0, \infty)$
(b) متناقصة على الفترة $[0, -\infty)$
(c) متزايدة على مجال تعريفها
(d) متزايدة على الفترة $(0, -\infty)$ ومتناقصة على الفترة $(0, \infty)$


**تـدرب و تـفـوق**
اختبارات الكترونية ذكية

# ربط $f'$ و $f''$ بمنحى الدالة $f$

## نظرية (5) اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية

لتكن $f$ دالة متصلة على مجالها وكانت $(c,f(c))$ نقطة حرجة:

- إذا كانت إشارة $f'$ تتغير من الموجب إلى السالب عند $x=c$، فإن للدالة قيمة عظمى محلية عند $c$
- إذا كانت إشارة $f'$ تتغير من السالب إلى الموجب عند $x=c$، فإن للدالة قيمة صغرى محلية عند $c$
- إذا لم تتغير إشارة $f'$ عند $x=c$، فإنه لا يكون لـ $f$ قيمة قصوى محلية عند $c$

**Q** لتكن الدالة $f(x)=x^3-12x-5$ أوجد :

النقاط الحرجة للدالة ، الفترات التي تكون الدالة f متناقصة أو متزايدة عليها ، القيم القصوى المحلية

**Q** لتكن الدالة $f(x)=-x^3+3x^2-4$ أوجد كلا مما يلي :

النقاط الحرجة للدالة ، الفترات التي تكون الدالة f متناقصة أو متزايدة عليها ، القيم القصوى المحلية

صفوة معلمي الكويت

لتكن الدالة $f(x) = x - 3 + \frac{4}{x-1}$ أوجد كلا مما يلي:

النقاط الحرجة للدالة ، الفترات التي تكون الدالة fمتناقصة أو متزايدة عليها ، القيم القصوى المحلية

## ⚠ معلق

لتكن الدالة $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ أوجد كلا مما يلي:

النقاط الحرجة للدالة ، الفترات التي تكون الدالة fمتناقصة أو متزايدة عليها ، القيم القصوى المحلية

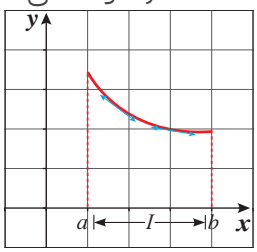
صفوة معلمي الكويت

# التقعر

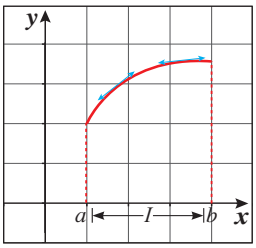
## تعريف التقعر:

- إذا وقع منحنى الدالة أعلى جميع مماساته على فترة $I$ فإنه يكون مقعراً لأعلى على هذه الفترة
- إذا وقع منحنى الدالة أسفل جميع مماساته على فترة $I$ فإنه يكون مقعراً لأسفل على هذه الفترة

التقعر نحو الأعلى

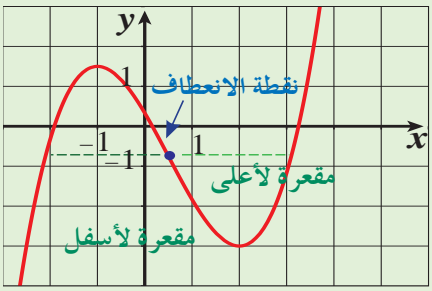



التقعر نحو الأسفل




## اختبار التقعر

- إذا كانت $\forall x \in I, f''(x) > 0$ فإنه يكون مقعراً لأعلى على الفترة $I$
- إذا كانت $\forall x \in I, f''(x) < 0$ فإنه يكون مقعراً لأسفل على الفترة $I$




## نقطة الانعطاف:

تُسمى النقطة $(c,f(c))$ نقطة انعطاف لبيان الدالة $f$ إذا كانت الدالة متصلة عند $c$ ومنحنى الدالة يغير تقعّره عند هذه النقطة من أعلى إلى أسفل أو بالعكس

## ملاحظة:

إذا كانت $(c,f(c))$ نقطة انعطاف لبيان الدالة $f$ فإن: $f''(c) = 0$ أو $f"(c)$ غير موجودة

**أوجد فترات التقعر ونقطة الانعطاف لمنحى الدالة**

Q $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

صفوة معلمي الكويت

Q $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

## نظرية (6): اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية

إذا كانت $f'(c) = 0$, $f''(c) < 0$ فإن $f$ تكون لها قيمة عظمى محلية عند $x = c$

إذا كانت $f'(c) = 0$, $f''(c) > 0$ فإن $f$ تكون لها قيمة صغرى محلية عند $x = c$

**أوجد القيم القصوى المحلية للدالة:**

Q $f(x) = x^3 - 12x - 5$

Q $f(x) = 4x^3 - 12x^2$

UULA
صفوة معلمي الكويت

# ربط $f''$ , $f$ بمنحنى الدالة $f$ - التمارين الموضوعية

## ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. الدالة $y = x^3 - 3x^2 + 5$ على الفترة $(0\ ,3)$ مقعرة لأسفل (a) (b)

2. الدالة $y = \frac{x}{x-1}$ على $(-\infty\ ,0)$ مقعرة لأعلى (a) (b)

معلق ⚠

3. إذا كانت $f''(c) = 0$ ، فإن لمنحنى الدالة f نقطة انعطاف هي $(c\ ,f(c))$ (a) (b)

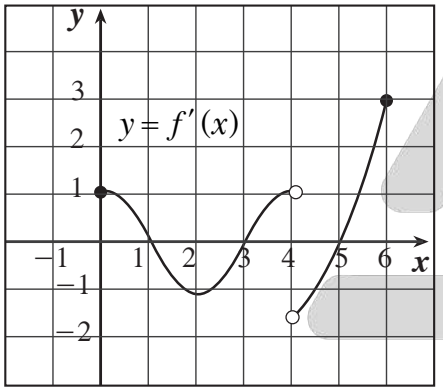
4. إذا كان لمنحنى الدالة f نقطة انعطاف هي $(c\ ,f(c))$ فإن $f''(c) = 0$ (a) (b)

5. يمكن أن تكون النقطة الحرجة نقطة انعطاف (a) (b)

6. منحنى الدالة $y = -3x^8$ مقعرة للأعلى (a) (b)

## ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

7. إذا كان الشكل المقابل يمثل بيان دالة المشتقة $(f')$ فإن الدالة f تكون



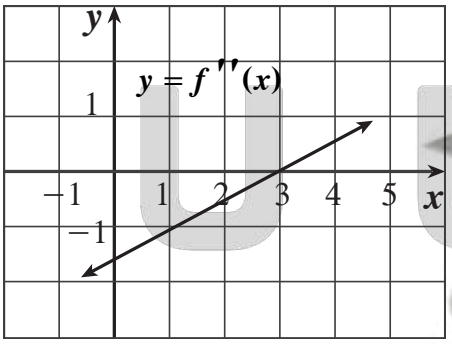

(a) متزايدة على كل من $(4\ ,5)$, $(1\ ,3)$

(b) متناقصة على كل من $(4\ ,5)$, $(1\ ,3)$

(c) لها قيمة صغرى محلية عند $x = 3$ فقط

(d) لها نقطة انعطاف عند كل من $x = 2\ ,x = 4$

8. إذا كانت f دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة والشكل المقابل يوضح بيان $f''$ فإن منحنى f مقعر للأسفل في الفترة:




(a) $(-\infty\ ,3)$ (b) $(3\ ,\infty)$

(c) $(-1\ ,4]$ (d) $(3\ ,5)$

9. أي من منحنيات الدوال التالية يكون مقعراً لأسفل في الفترة $(-1\ ,1)$

(a) $f(x) = x^2$ (b) $f(x) = x|x|$ (c) $f(x) = -x^3$ (d) $f(x) = -x^2$

10. إذا كانت f دالة كثيرة الحدود، $(c\ ,f(c))$ نقطة انعطاف لها فإن:

(a) $f''(c) = 0$ (b) $f'(c) = 0$ (c) $f(c) = 0$ (d) $f''(c)$ غير موجودة

UULA.COM © جميع الحقوق محفوظة

11. أي من الدوال التالية ليس لها نقطة انعطاف:

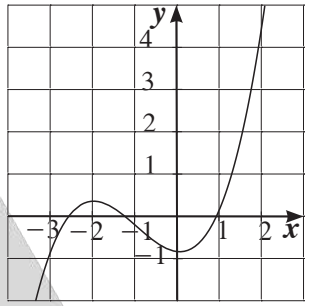
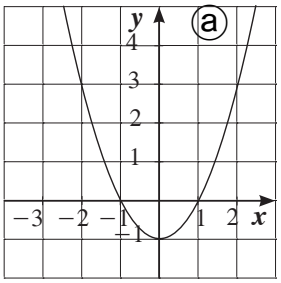
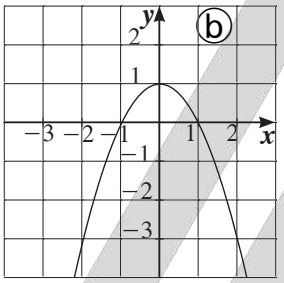
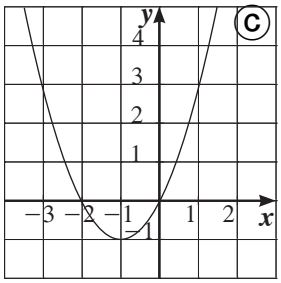
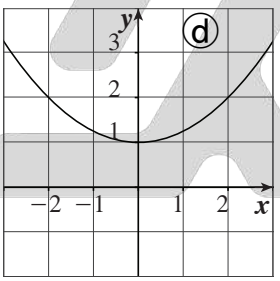
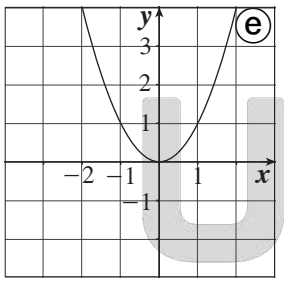
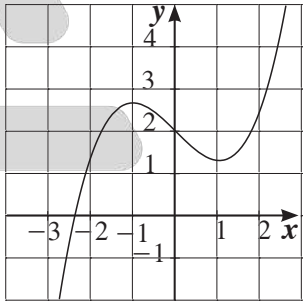
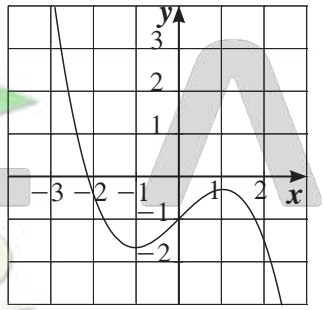
ⓐ $f(x) = x^3 + 5x$ ⓑ $f(x) = 4x^2 - 2x^4$

ⓒ $f(x) = x^3$ ⓓ $f(x) = (x-2)^4$

12. *للدالة* $f$ : $f(x) = (x^2-3)^2$ *نقاط انعطاف عددها:*

ⓐ 1 ⓑ 2 ⓒ 3 ⓓ 4

**اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1)**

| | منحنى الدالة $f$ | منحنى دالة المشتقة $f'$ |
|---|---|---|
| 13. |  | ⓐ  ⓑ  ⓒ  ⓓ  ⓔ  |
| 14. |  | |
| 15. |  | |


**تـدرب و تـفـوق**

اختبارات الكترونية ذكية

UULA UULA

صفوة معلمي الكويت

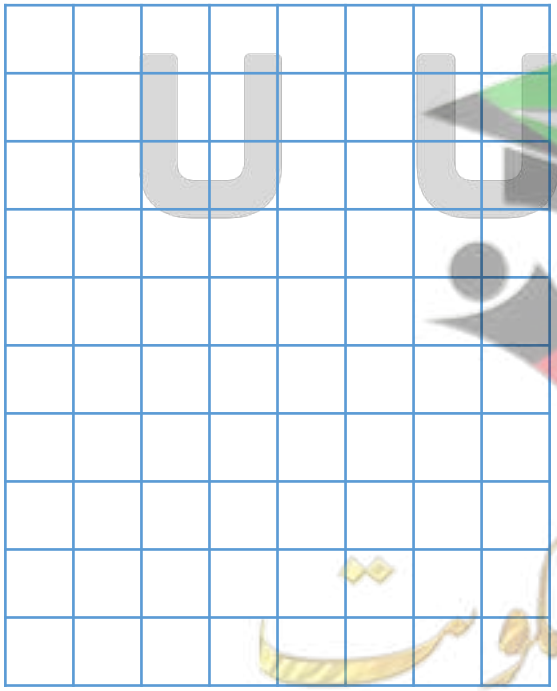
# رسم بيان دوال كثيرات الحدود

ادرس تغير الدالة: $f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بيانها

٨

صفوة معلمي الكويت

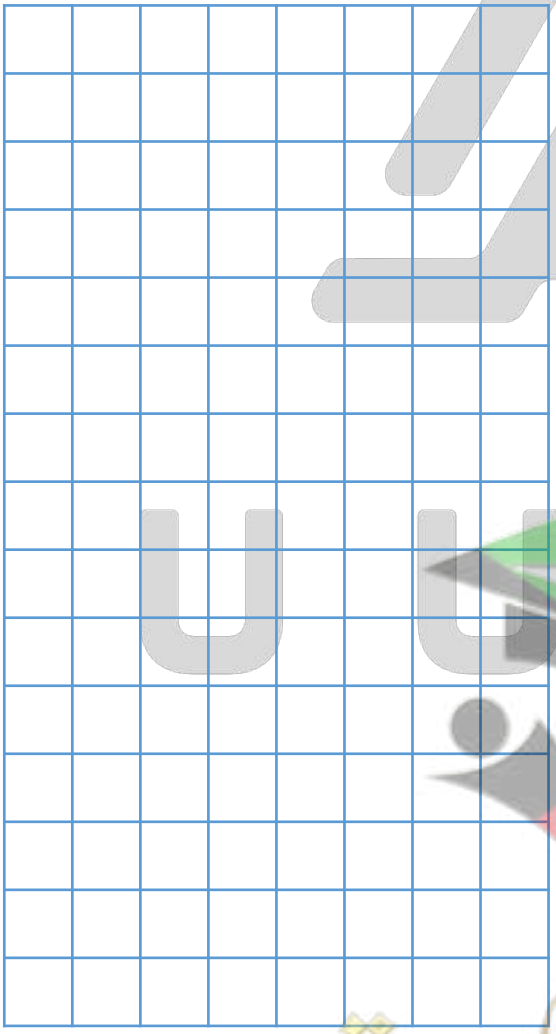
ادرس تغير الدالة: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها



٨

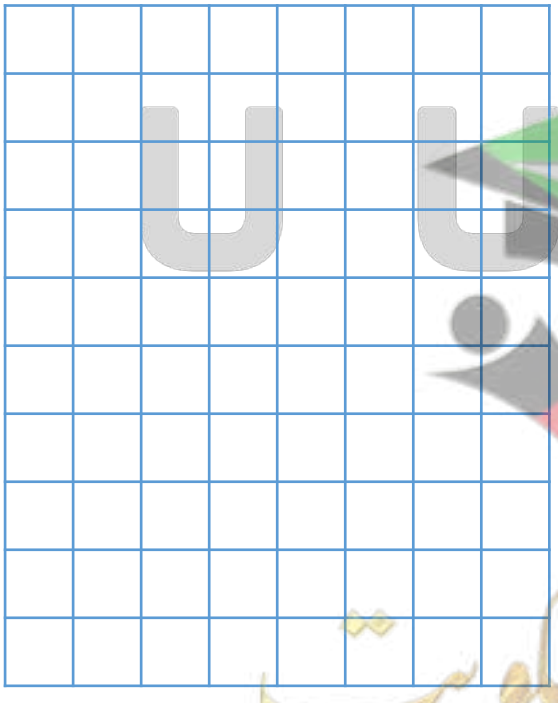
UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

ادرس تغير الدالة: $f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها



UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

ادرس تغير الدالة: $f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها



UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

## ⚠ معلق

صفوة معلمي الكويت

⚠ معلق

صفوة معلمي الكويت

ادرس تغير الدالة: $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ وارسم بيانها

## ⚠ معلق

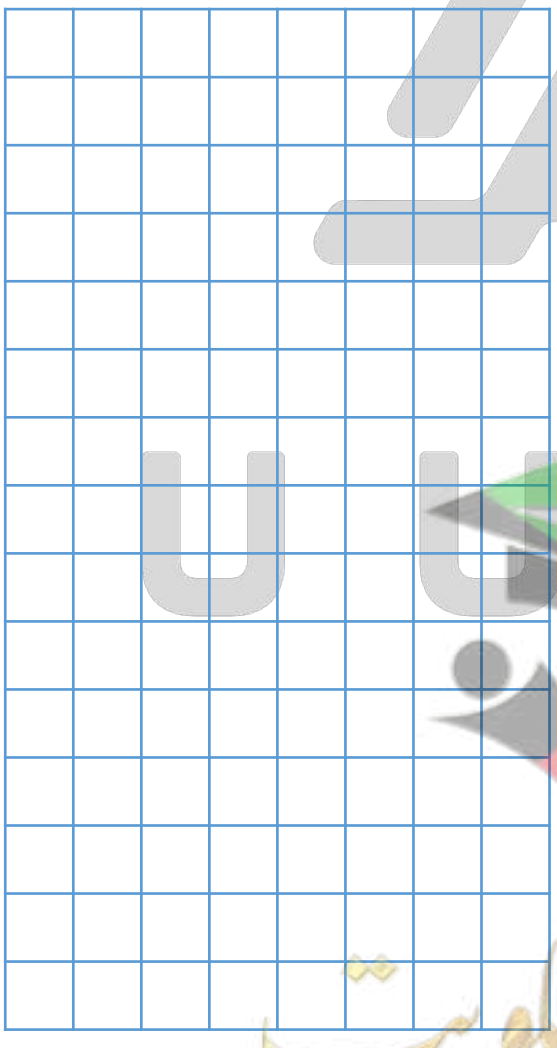
صفوة معلمي الكويت

## ⚠ معلق

صفوة معلمي الكويت

**من كراسة التمارين:**

6) ادرس تغير الدالة: $f(x) = -x^3 - 3x$ وارسم بيانها

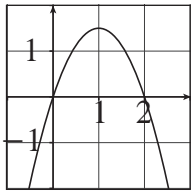


UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

# رسم بيان دوال كثيرات الحدود-التمارين الموضوعية

**ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة**

**لتكن $f : f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2$ و $(C)$ منحناها**




1. يمر المنحنى (C) بنقطة الأصل (a) (b)
2. الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة f′ (a) (b)
3. المماس عند النقطة التي إحداثيها السيني يساوي 2 موازٍ لمحور السينات (a) (b)
4. 4 هي قيمة عظمى محلية (a) (b)
5. المنحنى (C) مقعر لأعلى على الفترة $(-\infty, 1)$ (a) (b)

**ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.**

**في التمارين التالية، الدالة $f$ دالة كثيرة حدود جدول تغيرها:**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $5$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\infty$ | ↘ | $-5$ | ↗ | $3$ | ↘ | $-\infty$ |

6. العبارة الصحيحة فيما يلي هي:

(a) $f(-2) > f(0)$ (b) $f(0) < f(6)$

(c) $f(-9) > f(-2)$ (d) $f(-1) > f(8)$

7. للمعادلة $f(x) = 0$

(a) لا حل لها (b) ثلاثة حلول (c) حلان (d) حل واحد

8. جدول تغير الدالة f يوضح أن:

(a) -5 قيمة صغرى مطلقة

(b) 3 قيمة عظمى مطلقة

(c) -5 قيمة صغرى محلية، 3 قيمة عظمى محلية

(d) -1 قيمة صغرى محلية، 5 قيمة عظمى محلية

9. لتكن الدالة $f : f(x) = -x^2 + 7x + 1$

(a) لمنحنى $f$ قيمة عظمى محلية (b) لمنحنى $f$ نقطة انعطاف

(c) منحنى $f$ مقعر لأعلى (d) لمنحنى $f$ قيمة صغرى محلية

صفوة معلمي الكويت

10. لتكن $f : f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d , a \neq 0$ لمنحنى f دائماً

ⓐ قيمة عظمى محلية وقيمة صغرى محلية
ⓑ نقطة انعطاف
ⓒ تقعر لأسفل ثم تقعر لأعلى
ⓓ لا تمر بنقطة الأصل

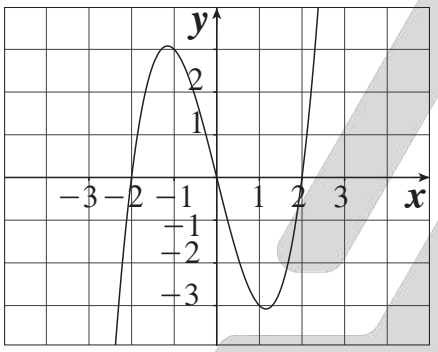
11. الدالة f كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة:

ⓐ لمنحنى $f$ دائماً نقطة انعطاف
ⓑ لمنحنى $f$ أكثر من قيمة عظمى محلية
ⓒ منحنى $f$ يقطع دائماً محور السينات
ⓓ قد لا يكون لمنحنى $f$ قيمة صغرى محلية

**معلق** ⚠

**اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1)**

الشكل المقابل يمثل بيان الدالة $f$




12. $f'(x) = 0$ .....

13. $f'(x) > 0$ في .....

14. $f''(x) < 0$ في .....

ⓐ $(-\infty , 0)$

ⓑ $(-\infty , -1) , (1 , \infty)$

ⓒ $-2 , 0 , \quad 2$

ⓓ $-1 , 1$

ⓔ $(0 , \infty)$

**تـدرب و تـفـوق**

اختبارات الكترونية ذكية

صفوة معلمي الكويت

# تطبيقات على القيم القصوى

Q عددان موجبان مجموعهما 100 ومجموع مربعيهما أصغر ما يمكن، ما العددان؟

Q أوجد عددين مجموعهما 14 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن؟

**من كراسة التمارين:**

1. مجموع عددين غير سالبين هو 20 أوجد العددين إذا كان

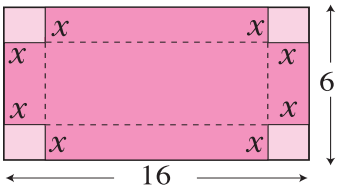
a) مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن

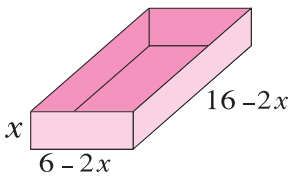
b) أحد العددين مضافا إليه الجذر التربيعي للآخر أكبر ما يمكن

معلق
صفوة معلمي الكويت

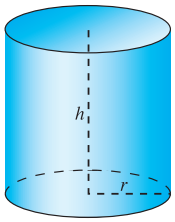
Q يراد صنع صندوق بدون غطاء بقص مربعات متطابقة طول ضلع كل منها $x$ من أركان طبقة صفيح أبعادها $6cm$ ,$16cm$ و ثني جوانبها إلى أعلى (الشكل جانبا) المطلوب:

- أوجد قيمة x بحيث يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن وما هو حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة



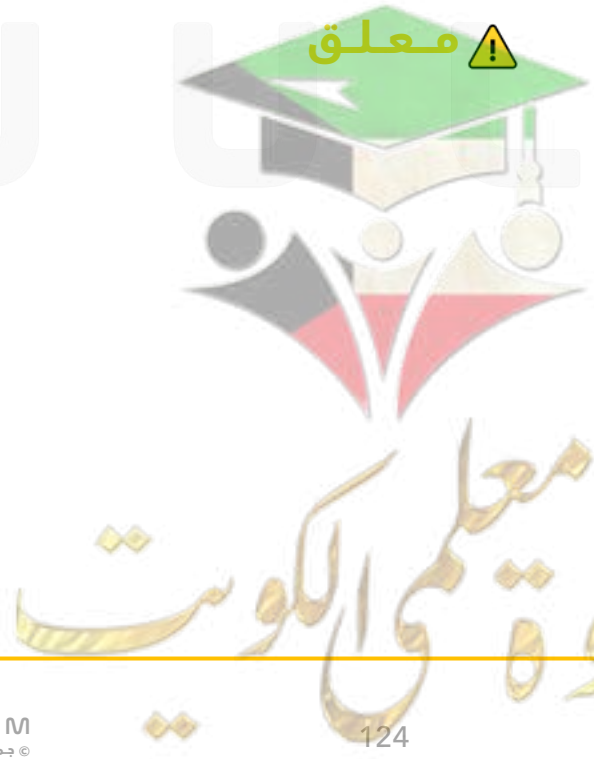

Q طلب إليك تصميم علبة زيت تسع لترا واحدا تكون على شكل أسطوانة دائرية قائمة ما أبعادها لتكون كمية المعدن المستخدم لصنعها أقل ما يمكن




صفوة معلمي الكويت

- تعطي الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها $h$
  - أوجد الارتفاع $h(cm)$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة
  - ما قيمة هذا الحجم

- أوجد أقصر مسافة بين النقطة $p(x,y)$ على المنحى الذي معادلته $y^2 - x^2 = 16$ والنقطة $Q(6,0)$




صفوة معلمي الكويت

أوجد أقصر مسافة بين النقطة $A(x,y)$ على المنحى الذي معادلته $y=\sqrt{x}$ والنقطة $B(3,0)$

معلق

**من كراسة التمارين:**

3. أثبت أن من بين المستطيلات التي محيطها $8m$ واحدا منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعا ؟

7. ضلعان في مثلث طولاهما $a,b$ والزاوية بينهما $\theta$ المطلوب: ما قيمة $\theta$ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن؟ ( إرشاد : مساحة المثلث $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$ )

معلق

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

# تطبيقات القيم القصوى-التمارين الموضوعية

## ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. أصغر محيط ممكن لمستطيل مساحته $16\ cm^2$ هو $16\ cm$

(a) (b)

2. أكبر مساحة لمستطيل قاعدته على محور السينات ورأساه العلويان على القطع المكافئ الذي معادلته $y = 12 - x^2$ هي $24\ units^2$

(a) (b)

معلق

## ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

3. مستطيل مساحته $36\ cm^2$ فإن أبعاده التي تعطي أصغر محيط هي:

(a) $9\ cm, 4\ cm$
(b) $12\ cm, 3\ cm$
(c) $6\ cm, 6\ cm$
(d) $18\ cm, 2\ cm$

4. أبعاد أكبر مساحة لمستطيل قاعدته على محور السينات ورأساه العلويان على القطع المكافئ $y = 4 - x^2$ هي:

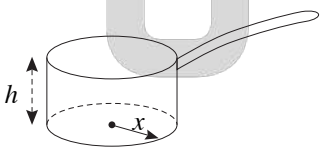
(a) $8, \frac{4\sqrt{3}}{3}$
(b) $\frac{8}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}$
(c) $4, 4$
(d) $\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{8}{3}$

معلق

5. أردت التخطيط لصنع صندوق على هيئة شبه مكعب بدون غطاء من قطعة ورق مقوّى مستطيلة أبعادها $16\ cm$ , $10\ cm$، وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة عند الرؤوس، ثم طي الأجزاء البارزة.
أبعاد الصندوق الذي له أكبر حجم يمكن صنعه على أساسها هي:

(a) $2\ cm, 6\ cm, 12\ cm$
(b) $3\ cm, 4\ cm, 12\ cm$
(c) $2\ cm, 8\ cm, 12\ cm$
(d) $3\ cm, 6\ cm, 8\ cm$

6. تعطي المساحة الكلية لوعاء أسطواني الشكل بالمعادلة $s = \pi x^2 + \frac{2v}{x}$ ، حيث x طول نصف قطر قاعدته و V حجمه (تذكر: $V = \pi x^2 h$)
إذا كان حجم الوعاء ثابتا فإن القيمة الدنيا لمساحته هي عندما:




(a) $x > h$
(b) $x = h$
(c) $x < h$
(d) ليس أي مما سبق

**تـدرب و تـفـوق**
اختبارات الكترونية ذكية

صفوة معلمي الكويت

# التقدير

درسنا سابقاً المجتمع الإحصائي والعينة

المتوسط الحسابي: للمجتمع هو $\mu$ ، للعينة هو $\bar{x}$
التباين: للمجتمع هو $\sigma^2$ ، للعينة هو $s^2$
الانحراف المعياري: للمجتمع هو $\sigma$ ، للعينة هو $s$

**المعلمة**: هي ثابت يصف **المجتمع** أو يصف توزيع المجتمع كالمتوسط الحسابي $\mu$ أو الانحراف المعياري $\sigma$

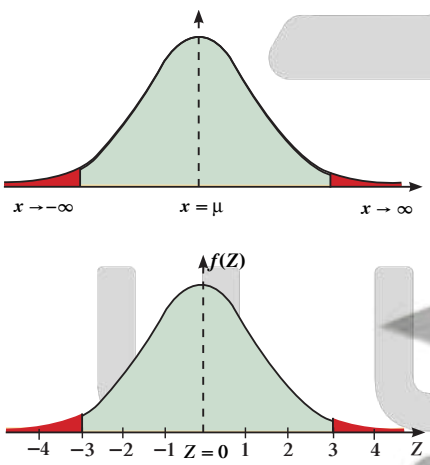
**الإحصاءة**: هو اقتران تتعين قيمته من **العينة** كالمتوسط الحسابي $\bar{x}$ أو الانحراف المعياري $s$

**تقدير المعلمة** : هو إحصاءة تعتمد على قيم العينة وتعكس قيمة قريبة لمعلمة المجتمع
سنتعلم طريقتين للتقدير ( التقدير بنقطة - التقدير بفترة ثقة)

**التقدير بنقطة:** هي قيمة وحيدة محسوبة من العينة تُستخدم لتقدير معلمة مجهولة من المجتمع

**فترة الثقة:** هي فترة طرفاها متغيران عشوائيان تحوي إحدى معالم المجتمع بنسبة معينة نسميها درجة الثقة (مستوى الثقة)
**التقدير بفترة الثقة:** هو إيجاد فترة معينة يتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة

## خواص التوزيع الطبيعي:




- المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال
- المنحنى على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول محوره $x = \mu$
- يمتد المنحنى من طرفيه إلى $\infty, -\infty$
- المساحة تحت المنحنى تساوي 1 وحدة مساحة
- عندما يكون $\sigma = 1, \mu = 0$ فإن التوزيع الطبيعي يصبح اسمه "**التوزيع الطبيعي المعياري**"

**أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لكل من درجات الثقة التالية، وذلك باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:**

- 97%
- 99.2%
- 95%

صفوة معلمي الكويت

# التقدير بفترة الثقة للمتوسط الحسابي $\mu$ للمجتمع الإحصائي

## أولا: إذا كان التباين $\sigma^2$ للمجتمع معلوما

Q أجريت الدراسة على عينة من الإناث حجمها (25) والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 3.6$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 18.4$ ، باستخدام مستوى ثقة 95%

- أوجد هامش الخطأ
- أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي $\mu$
- فسر فترة الثقة

Q أجريت الدراسة على عينة من الإناث حجمها (40) والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 12.5$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 76.3$ ، باستخدام مستوى ثقة 95%

- أوجد هامش الخطأ
- أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي $\mu$
- فسر فترة الثقة

صفوة معلمي الكويت

## ثانيا: إذا كان التباين $\sigma^2$ غير معلوم و $n > 30$

**Q** أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 81$ ومتوسطها الحسابي $\bar{x} = 50$ وانحرافها المعياري $S = 9$ ، مستوى ثقة 95%

- أوجد هامش الخطأ
- أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي $\mu$
- فسر فترة الثقة

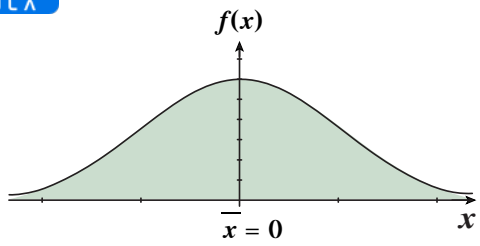
**Q** عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها 36ومتوسطها الحسابي 60 وتباينها 16 ، عند مستوى ثقة 95%

- أوجد هامش الخطأ
- أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي $\mu$
- فسر فترة الثقة

صفوة معلمي الكويت

# ثالثا: إذا كان التباين $\sigma^2$ غير معلوم $n \leq 30$

## خواص التوزيع $t$:




- متماثل حول متوسطه الحسابي
- يمتد المنحنى من طرفيه إلى $\infty, -\infty$
- المتوسط الحسابي = صفر
- انحرافه المعياري أكبر من 1
- يعتمد على درجات الحرية $(n-1)$

**Q** أوجد فترة ثقة 95% للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي $\mu$ علما أن العينة أخذت من مجتمع طبيعي. إذا كان لدينا $\bar{x} = 8.4, S = 0.3, n = 13$

**Q** أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها 25 ، فإذا كان الانحراف المعياري للعينة s يساوي 10 ومتوسطها الحسابي $\bar{x}$ يساوي 15 ، باستخدام فترة ثقة 95٪ أوجد:

- هامش الخطأ
- فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي $\mu$

صفوة معلمي الكويت

1. إن القيمة الحرجة $Z_{\frac{a}{2}}$ لدرجة الثقة 96% هي ... معلق ⚠ (a) (b)

2. إذا أخذنا عينة من 225 هاتفاً، ووجدنا أن متوسط صلاحية استخدامها $\bar{x}$ هو 1.7 سنة، والانحراف المعياري s=0.5 ، ودرجة الثقة 95% فنجد أن فترة الثقة هي: $2.63 < \mu < 2.76$ (a) (b)

**ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.**

3. إن القيمة الحرجة $Z_{\frac{a}{2}}$ لدرجة الثقة 96.6% هي:

(a) 2.12 (b) 2.17 (c) 21.2 (d) 21%

4. المتوسط الحسابي لدرجات 9 طلاب هو $\bar{x} = 2.76$ حيث النهاية العظمى 4 درجات والانحراف المعياري s=0.87 إن فترة الثقة للمتوسط الحسابي $\mu$ للمجتمع الإحصائي عند درجة ثقة 95% هي:

(a) (2.1916 , 3.3284) (b) (1.6232 , 3.8968)
(c) (2.1916 , 3.8968) (d) (2.0913 , 3.4287)

5. لنفترض أن متوسط مجتمع إحصائي يقع ضمن الفترة $62.84 < \mu < 69.46$ فمتوسط هذه العينة يساوي:

(a) 56.34 (b) 62.96 (c) 6.62 (d) 66.15

6. إن حجم العينة المطلوبة لتقدير المتوسط الحسابي للمجتمع مع هامش خطأ وحدتين، ومستوى ثقة 95% وانحراف معياري للمجتمع $\sigma = 8$ يساوي:

(a) 65 (b) 62 (c) 8 (d) 26

7. أنجز 16 طالباً في كلية الطب قياس ضغط الدم لدي الشخص نفسه فحصلوا على النتائج التالية: 130 , 140 , 150 , 134 , 138 , 130 , 135 , 120 , 125 , 120 , 130 , 135 , 144 , 143 , 140 , 130 على افتراض أن الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي $\sigma = 10mm\ Hg$ فإن فترة الثقة عند درجة ثقة 95% للمتوسط الحسابي $\mu$ للمجتمع الإحصائي هي: ... معلق ⚠

(a) (129.1 , 131.55) (b) (129.1 , 138.9)
(c) (131.55 , 136.45) (d) (136.45 , 138.9)

8. تتقارب قيمتي t , Z المتناظرة في جدول التوزيع الطبيعي المعياري إذا زادت درجات الحرية عن:

(a) 29 (b) 28 (c) 27 (d) 26


**تـدرب و تـفـوق**

اختبارات الكترونية ذكية

صفوة معلمي الكويت

UULA.COM © جميع الحقوق محفوظة

# اختبارات الفروض الإحصائية

**الفرض الإحصائي:** هو ادعاء مبني على حيثيات معقولة حول معلمة من معالم المجتمع مثل $\mu$ , $\sigma$

**المقياس الإحصائي:** هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة تحت شروط معينة

**اختبارات الفروض الإحصائية:** هي طريقة معيارية لاختبار ادعاء ما حول معلمة من معالم المجتمع

## أولا: إذا كان التباين $\sigma^2$ للمجتمع معلوما

Q بينت الدراسة أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل أسلاك معدنية هو$\mu = 1800$ kg مع انحراف معياري $\sigma = 150$kg ويؤكد الأخصائيون في المصنع المنتج لهذه الأسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة تحمل هذه الأسلاك وتأكيدا على ذلك تم اختبار عينة من 40 سلكا فتبين أن متوسط قوة تحمل هذه الأسلاك يساوي 1840 kg والمطلوب :
هل يمكن قبول مثل هذا الفرض بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$

Q تزعم شركة أن متوسط رواتب موظفيها يساوي 4000 د.ك ، إذا أخذت عينة من 25 موظفاً ، ووجد أن متوسط رواتب العينة هو 3950 د.ك ، علماً أن الانحراف المعياري للمجتمع $\sigma$ يساوي 125 د.ك
وضح كيفية إجراء الاختبار الإحصائي بمستوى ثقة 95٪

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

# ثانيا: إذا كان التباين $\sigma^2$ غير معلوم و $n > 30$

إذا كانت $S = 1.79$ , $\bar{x} = 37.2$ , $n = 80$
اختبر الفرض بأن $\mu = 37$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

متوسط العمر بالساعات لعينة من 100 مصباح كهربائي مصنعة في أحد المصانع $\bar{x} = 1570$ بانحراف معياري: S = 120 يقول صاحب المصنع إن متوسط العمر بالساعات $\mu = 1600$ للمصابيح المصنعة في المصنع ،اختبر صحة الفرض $\mu = 1600$ مقابل الفرض $\mu \neq 1600$ باختيار مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

صفوة معلمي الكويت

## ثالثا: إذا كان التباين $\sigma^2$ غير معلوم و $n \leq 30$

Q يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الانفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة يساوي 290دينارا كويتيا إذا أجريت دراسة إحصائية لعينة من 10 منازل وتبين من خلالها أن متوسطها الحسابي $\bar{x} = 283$ وانحرافها المعياري $S = 32$ مع استخدام مستوى ثقة 95% فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟

Q يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الانفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة يساوي 290 دينارا كويتيا إذا أجريت دراسة إحصائية وتبين من خلالها أن $S = 5$ ، $\bar{x} = 296$ لعينة من 10 منازل مع استخدام مستوى ثقة 95% فهل يبقى افتراض المدير عند الشركة صحيحا أم لا ؟ وضح إجابتك .

## اختبارات الفروض الإحصائية-التمارين الموضوعية

**ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة**

1. في مجتمع إحصائي إذا كان المتوسط الحسابي $\mu = 860$ وعينة من هذا المجتمع حجمها $n = 25$ والمتوسط الحسابي $\bar{x} = 900$ والانحراف المعياري $s=125$ فإن المقياس الإحصائي هو $t=1.6$ (a) (b)

2. متوسط العمر لعينة من 100 مصباح كهربائي بالساعات في أحد المصانع هو $\bar{x} = 1600$ بانحراف معياري $s=125$ . يقول صاحب المصنع أن متوسط عمر المصابيح بالساعات هو $\mu = 1640$ إن المقياس الإحصائي هو $Z=3.2$ . (a) (b)

3. متوسط عمر الإطارات في أحد المصانع $\mu = 25000$ ، في دراسة لعينة عشوائية تبين أن المتوسط الحسابي هو $\bar{x} = 27000$ مع انحراف معياري $s=5000$ . إذا كان المقياس الإحصائي $t=2$ فإن حجم العينة $n = 25$

ⓐ ⓑ

4. أخذت عينة عشوائية من مجتمع إحصائي حجمها $n = 81$ مع متوسط حسابي $\bar{x} = 3.6$ وانحراف معياري $s=1.8$ . إذا كان المقياس الإحصائي $Z=-1.5$ فإن المتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي $\mu = 3.3$

ⓐ ⓑ

**ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.**

5. إذا كان القرار رفض فرض العدم، وفترة الثقة (1.96 , -1.96) فإن قيمة الاختبار Z ممكن أن تكون:

ⓐ 1.5 ⓑ $-2.5$ ⓒ 1.87 ⓓ $-1.5$

6. إذا كانت قيمة الاختبار الإحصائي $Z = -1.5$ وفترة القبول (1.96 , -1.96) فإن القرار يكون:

**معلق** ⚠

ⓐ رفض فرض العدم ⓑ قبول فرض العدم
ⓒ قبول الفرض البديل ⓓ Z لا تنتمي للفترة

7. في دراسة حول متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة هو (دينار) $\mu = 320$ وقد تبين أن المتوسط الحسابي لعينة حجمها $n = 25$ منزلاً من هذه المدينة هو (دينار) $\bar{x} = 310$ مع انحراف معياري $s = 40$ . إن المقياس الإحصائي هو:

ⓐ 1.25 ⓑ $-1.25$ ⓒ 0.8 ⓓ $-0.8$

8. في دراسة على عينة أسلاك معدنية حجمها $n = 64$ تبين أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل السلك $\bar{x} = 360\ kg$ مع انحراف معياري $s=50\ kg$ إذا كان المقياس الإحصائي لقوة تحمل كافة الأسلاك المعدنية $Z = -2.4$ فإن المتوسط الحسابي $\mu$ هو:

ⓐ 346 ⓑ 396 ⓒ 376 ⓓ 326

9. هدف إحدى الشركات الكبرى هو ربح صاف متوسطه الحسابي (دينار) $\mu = 200000$ في كل فرع من فروعها المنتشرة في عدد من الدول. في دراسة لعينة من عدد لهذه الفروع أعطت متوسطاً حسابياً (دينار) $\bar{x} = 195000$ مع انحراف معياري (دينار) $s=80000$ إذا كان المقياس الإحصائي $Z = -0.625$ فإن حجم العينة $\pi$ هو:

ⓐ 100 ⓑ 125 ⓒ 90 ⓓ 110

10. في دراسة لمجتمع إحصائي تبين أن متوسطه الحسابي $\mu = 125$ أخذت عينة من هذا المجتمع حجمها $n = 36$ فتبين أن متوسطها الحسابي $\bar{x} = 130$ . إذا كان المقياس الإحصائي $Z=3.125$ فإن الانحراف المعياري $\sigma$ هو:

ⓐ $-9.6$ ⓑ 6.9 ⓒ 9.6 ⓓ $-6.9$


**تـدرب و تـفـوق**
اختبارات الكترونية ذكية
UULA UULA