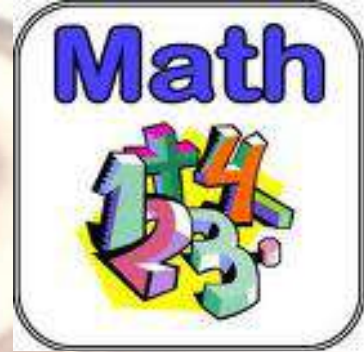




# العبقري في الرياضيات

الصف العاشر  
الفصل الدراسي الأول  
2024



إعداد/  
عبد السلام البيومي



# خواص نظام الأعداد الحقيقية

## ١ - الأعداد الحقيقية

# الوحدة الأولى

<p>الأعداد غير النسبية</p> <p>أمثلة:</p> $\sqrt{3}$ $\pi$ $\sqrt[3]{5}$ $1,34334\dots$	<p>الأعداد النسبية</p> <p>أمثلة: <math>\frac{1}{3}, 14, 0, -\frac{2}{3}</math></p> <p>الأعداد الصحيحة</p> <p><math>\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots</math></p> <p>الأعداد الطبيعية (الكلية):</p> <p><math>\dots, 0, 1, 2, 3, \dots</math></p>
---	--

حدد أيًا من الأعداد التالية عددًا نسبيًا وأيها عددًا غير نسبي.

مثال (١)

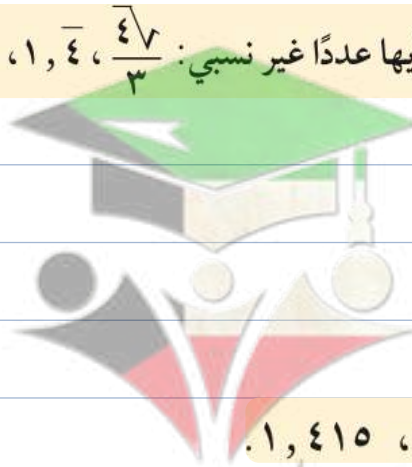
ب  $\sqrt{41}$

أ  $\frac{18}{5}$

د  $1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots$

ج  $0, 333\dots$

حدد أيًا من الأعداد التالية عددًا نسبيًا وأيها عددًا غير نسبي:  $\frac{4}{3}, \sqrt{4}, 1, \pi, 0$ .



أعط ستة أعداد حقيقية بين ٤١٤، ١، ٤١٥، ١.

صفوة معلم الكويت

## 0 - الفترات

### أولاً: الفترات المحدودة

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
$[a, b]$	مغلقة	$a \leq x \leq b$	
$(a, b)$	مفتوحة	$a < x < b$	
$(a, b]$	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	$a < x \leq b$	
$[a, b)$	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	$a \leq x < b$	

الأعداد  $a, b$  هما نقطتا الحدود لكل فترة حيث  $a$  الحد الأدنى للفترة،  $b$  الحد الأعلى للفترة.

### ثانياً: الفترات غير المحدودة

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
$(-\infty, a]$	نصف مغلقة وغير محدودة من الأعلى	$x \leq a$	
$(-\infty, a)$	مفتوحة وغير محدودة من الأعلى	$x < a$	
$[a, \infty)$	نصف مفتوحة وغير محدودة من الأسفل	$x \geq a$	
$(a, \infty)$	مفتوحة وغير محدودة من الأسفل	$x > a$	

اكتب نوع الفترة ورمز المتباينة والتمثيل البياني لكل من الفترات التالية:

ب [٥، ٤]

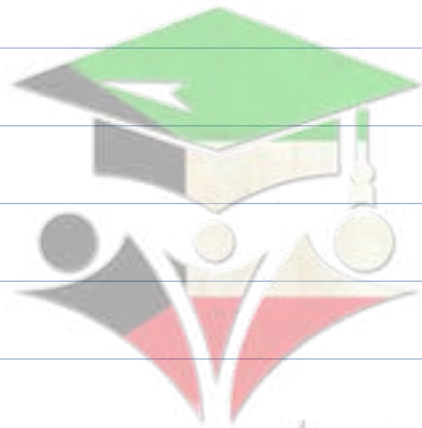
مثال (٣) أ (-١، ٣]

د [٤، ∞)

ج (-∞، ٢)

ب (-∞، ٣]

أ (-٢، ١)



صفوة معلم الكويت

## حل المتباينات

١ أوجد مجموعة حل المتباينة ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد لكل مما يلي:

ب  $12 \geq s - 5$

أ ص -  $1 \leq 4$

٣ أوجد مجموعة حل المتباينة  $\frac{b}{4} \leq 1$ ، ومثل الحلول بيانياً على خط الأعداد.



صفوة معلم الكويت

٥ أوجد مجموعة حل المتباينة ثم مثل الحل على خط الأعداد:

أ  $3(س + ٤) + ٥ \geq ٢$

حاول أن تحل

ب  $٣ - ١ \geq ٢س > ٣$

أ  $٢(٢س - ٨) < ٤س + ٢$

صفوة معلمة الكويت

## القيمة المطلقة

تعريف:

- إذا كان  $s < 0$
- إذا كان  $s = 0$
- إذا كان  $s > 0$

$$\left. \begin{array}{l} s \\ 0 \\ -s \end{array} \right\} = |s|$$

لكل عدد حقيقي  $s$  يكون:

## بعض خواص القيمة المطلقة للأعداد الحقيقية

ليكن  $a, b \in \mathbb{R}$ 

$$|a| \times |b| = |a \times b| \quad ٣$$

$$|a| = |-a| \quad ٢$$

$$0 \leq |a| \quad ١$$

$$|a - b| = |b - a| \quad ٦$$

$$a \leq |a| \quad ٥$$

$$\frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right|, \text{ حيث } b \neq 0 \quad ٤$$

أعد تعريف  $|s - ٤|$  دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

ب |٤ - ٢|

٢ أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين، ثم تحقق من صحة الحل.

$$٨ = |٣ + s| \quad ١$$

صفوة معلم الكويت

٣ أوجد مجموعة حل المعادلة:  $٠ = |٤ + ٢س - ٥|$

حاول أن تحل

أوجد مجموعة حل المعادلة  $١١ = ٥ - |٣ + ٢س|$



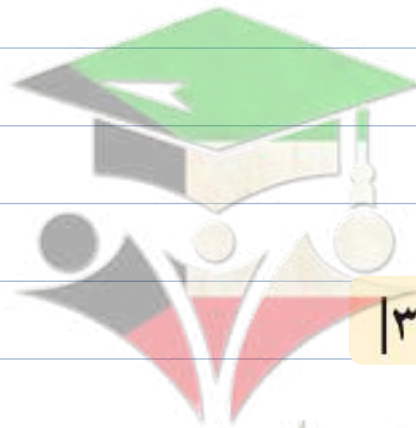
صفوة معلم الكويت



$$٠ = ٦ - |٤ + ٣س| \text{ أ}$$

$$٠ = ٣ + |٤ - ٥س| \text{ ب}$$

أوجد مجموعة حل المعادلة:  $|١ + م| = |٣ - ٢م|$

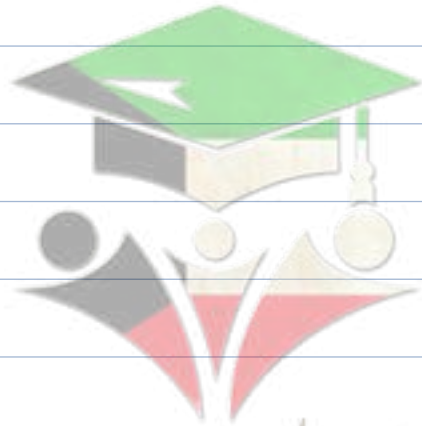


$$|٣ + ٢ص| = |٥ - ص| \text{ أ}$$

صفوة معلمى الكويت

أوجد مجموعة حل المعادلة:  $|3 + 2s| = 3 - s - 2$

٦ أوجد مجموعة حل المعادلة:  $|4s - 1| = s + 2$ .



صفوة معلم الكويت

## تعميم

## حل متباينات تتضمن قيمة مطلقة

ليكن  $p$  عددًا حقيقيًا موجبًا.

١  $|s| \geq p$  تكافئ  $s \geq p$  أو  $s \leq -p$

٢  $|s| \leq p$  تكافئ  $s \leq p$  أو  $s \geq -p$

أوجد مجموعة حل المتباينة  $|4s + 1| + 4 \geq 12$ ، ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد.

أوجد مجموعة حل المتباينة:  $|2 - 3m - 4| - 1 < 5$ ، ومثل الحل على خط الأعداد.



صفوة معلمي الكويت

عبد السلام البيومي

٨ أوجد مجموعة حل المتباينة:  $\left|س - \frac{٣}{٤}\right| \leq \frac{٧}{٨}$  ومثل الحل على خط الأعداد.



صفوة معلم الكويت

## دالة القيمة المطلقة

رأس منحنى الدالة  $v = |اس + ب|$  + ج هو النقطة  $(-\frac{ب}{م}, ج)$

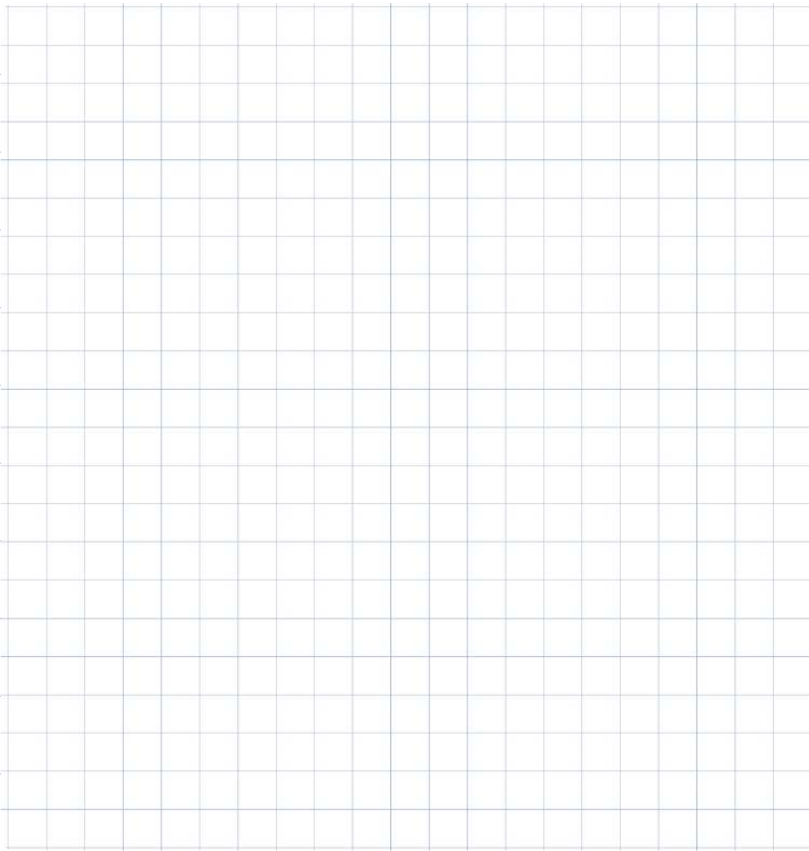
**ملاحظة:** رأس منحنى الدالة  $v = |اس + ب|$  هو النقطة  $(-\frac{ب}{م}, ٠)$

ارسم بيانياً الدالة:  $v = |٢س + ٤|$ .

٥ استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة  $v = |س + ٥|$ .



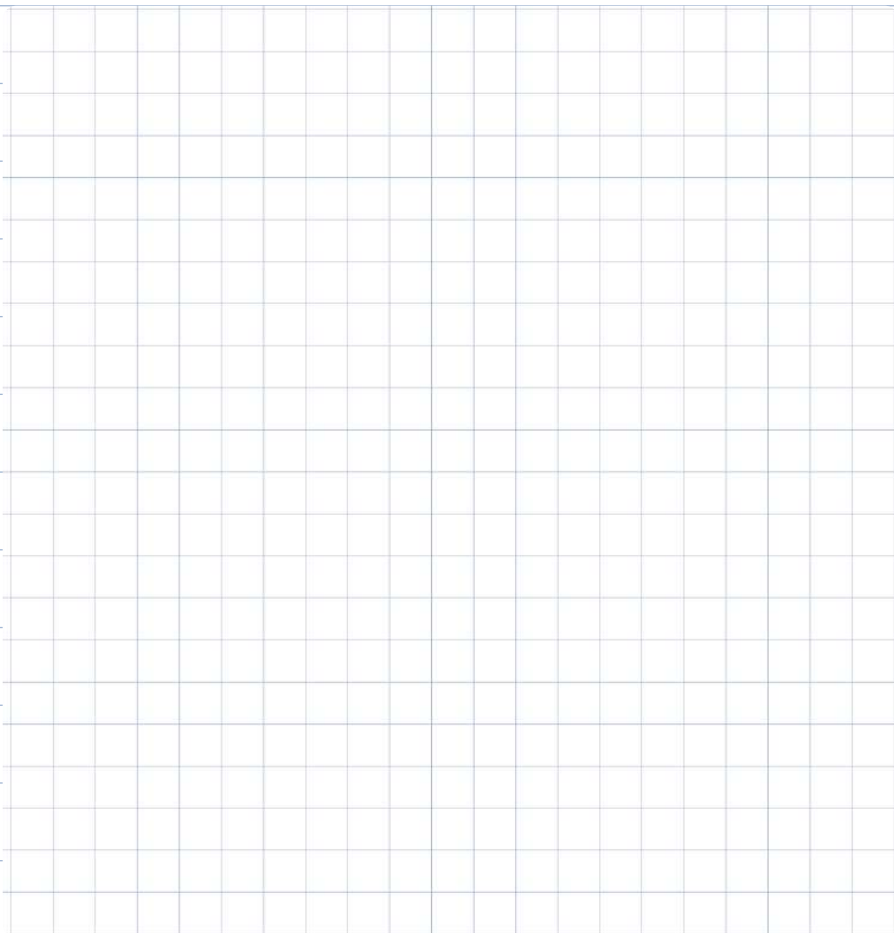
٦ استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة  $v = |s + \frac{5}{2}|$ .



١ ص  $v = |s + 4| + 3$

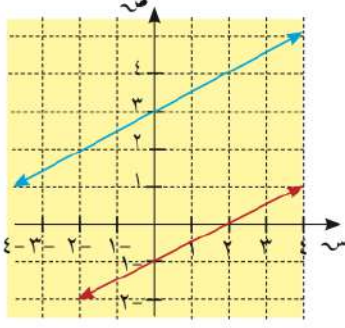


صفوة معلم الكويت

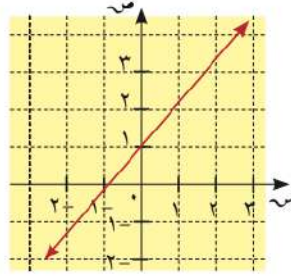


صفوة معلم الكويت

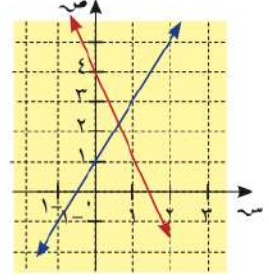
## حل نظام معادلتين خطيتين



المستقيمان متوازيان غير منطبقين  
لا حل للنظام



المستقيمان منطبقان  
للنظام عدد لا نهائي من الحلول



المستقيمان متقاطعان  
للنظام حل واحد

١ أوجد مجموعة حل النظام  $\left. \begin{array}{l} 2س + ص = 5 \\ -س + ص = 1 \end{array} \right\}$  بيانيًا وتحقق من الحل.

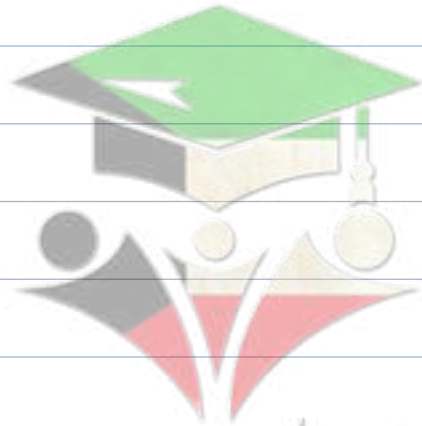


صفوة معلم الكويت



استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام  
استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام  
استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام

استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام  
استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام  
استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام



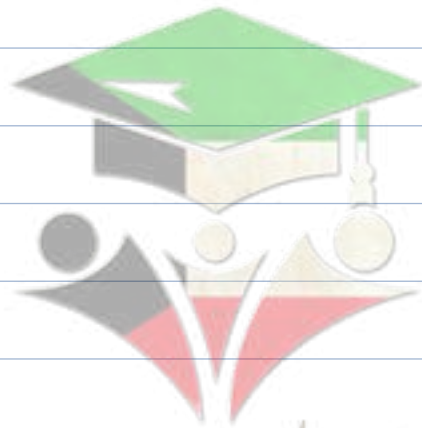
صفوة معلم الكويت

٣ استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام  $\left. \begin{array}{l} 12 = 3ص + 2س \\ 13 = 5ص - 3س \end{array} \right\}$



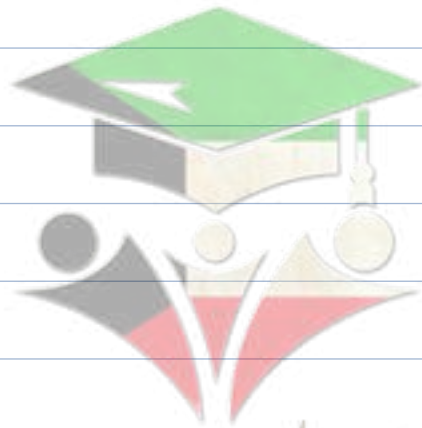
صفوة معلم الكويت

استخدم طريقة التعويض لحل النظام  
$$\begin{cases} 1 = L - M^3 \\ 5 = L^2 - M^3 \end{cases}$$



صفوة معلم الكويت

٤ حل النظام  $\left. \begin{array}{l} ٣ + ٢ر = ت \\ ٥ر - ٤ت = ٦ \end{array} \right\}$  مستخدمًا طريقة التعويض.



صفوة معلم الكويت

## حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد

القانون العام لحل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد:  
حلّ المعادلة:  $اس^2 + ب س + ج = ٠$ ، حيث  $ا \neq ٠$  هو:  $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ ا ج}}{٢ ا}$

**استخدام المميز  $\Delta$ :** يسمى  $\Delta = ب^2 - ٤ ا ج$  المميز،

: عددان حقيقيين مختلفين، إذا كان المميز موجباً  
أو عددان حقيقيين متساويين، إذا كان المميز يساوي صفرًا  
أو عددان غير حقيقيين، إذا كان المميز سالبًا.

حلّ المعادلة:  $س^2 + ١٠ س - ١٦ = ٠$  باستخدام القانون.

٢ باستخدام القانون، أوجد مجموعة حل المعادلة:

أ  $س^2 - ٦ س + ٥ = ٠$

صفوة معلمى الكويت

ب)  $7 = (2 - s)$

٣) أوجد مجموعة حلّ المعادلة:  $4s^2 = 13s - 9$



صفوة معلم الكويت

٥ حدد نوع جذري المعادلة:  $٢س^٢ - ٥س + ٢ = ٠$

٦ حدد نوع جذري المعادلة:  $٢س^٢ + ١٠س + ٢٥ = ٠$

اكتب أمثلة من عندك  
عن معادلات من الدرجة  
الثانية توضح الأنواع  
الثلاثة للمعادلات (من  
حيث جذرا المعادلة)  
المبيّنة في الجدول  
المجاور.

المميز	نوع جذري المعادلة	التمثيل البياني للدالة
$٠ < ٤ - ٢ج$ (عدد موجب)	الجذران حقيقيان (مختلفان)	
$٠ = ٤ - ٢ج$	الجذران حقيقيان متساويان	
$٠ > ٤ - ٢ج$ (عدد سالب)	جذران غير حقيقيين	

١ إذا كانت إشارة معامل  $س^٢$  موجبة يكون المنحنى بالشكل

٢ إذا كانت إشارة معامل  $س^٢$  سالبة يكون المنحنى بالشكل

مفتوح  
مفتوح  
مفتوح

## 0- مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة التربيعية:

إذا كان جذرا المعادلة:  $أس^2 + ب س + ج = ٠$  هما  $م$ ،  $ن$   
فإن:  $م + ن = -\frac{ب}{أ}$  ،  $م \times ن = \frac{ج}{أ}$

بدون حل المعادلة، أوجد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة:  $أس^3 + ٢س^2 - ٣ = ٠$  إذا وجد.

١ بدون حل المعادلة، أوجد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة:  $أس^4 - ٢س^2 + ٣ = ٠$  إذا وجد.

٢ إذا كان مجموع جذري المعادلة:  $أس^2 + ب س - ٥ = ٠$  يساوي ١. فأوجد قيمة  $ب$ ، ثم حل المعادلة.

٩ إذا كان ناتج ضرب جذري المعادلة:  $أس^2 - ٥س + ٢ = ٠$  يساوي  $\frac{٢}{٣}$ . فأوجد قيمة  $أ$ ، ثم حل المعادلة.

صفوة معلمى الكويت

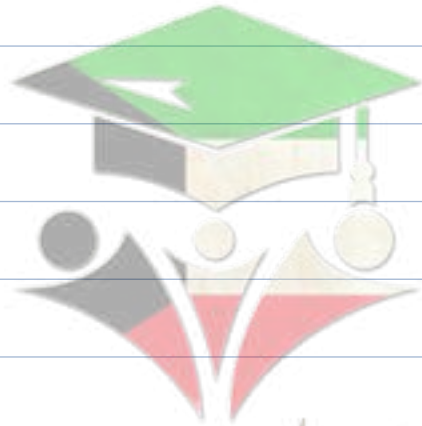


٧- إيجاد المعادلة التربيعية إذا علم جذراها:

$$\text{المعادلة على الصورة: } س^2 - (م + ن)س + م ن = ٠$$

أوجد معادلة تربيعية جذراها ٣، ٥.

١٠ إذا كان جذرا المعادلة  $س^2 - ٥س + ٦ = ٠$  هـمال، م فكون معادلة تربيعية جذراها ٢ل، ٢م.



صفوة معلم الكويت

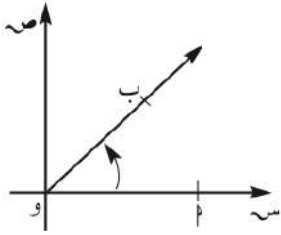
## الزوايا وقياساتها

## الزاوية الموجهة في الوضع القياسي:

تكون الزاوية الموجهة في الوضع القياسي إذا كان الضلع الابتدائي لها ينطبق على الجزء الموجب من محور السينات ورأسها نقطة الأصل كما في الشكل المقابل.

## الزاوية الربعية

هي زاوية موجهة في الوضع القياسي ينطبق ضلعها النهائي على أحد محوري الإحداثيات مثل الزوايا  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$  أو  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ .



## أنظمة قياس الزاوية:

## أولاً: القياس الستيني:

١ اكتب كلاً مما يلي بالقياس الستيني.

ب)  $625^\circ$ , الزاوية القائمة

أ)  $\frac{7}{32}$  الزاوية القائمة

## ثانياً: القياس الدائري (الراديان):

تعريف:

القياس الدائري لزاوية مركزية في دائرة =  $\frac{\text{طول القوس الذي تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$  ويرمز إليه بالرمز  $هـ$ .

$$ل = هـ \cdot ر$$

$$هـ = \frac{ل}{ر}$$

## تعريف الزاوية النصف قطرية:

هي زاوية مركزية في دائرة تحصر قوساً طوله يساوي طول نصف قطر هذه الدائرة. وقياس الزاوية النصف القطرية يساوي ١ راديان (١<sup>ر</sup>).

٣ دائرة طول نصف قطرها ٦ سم. أوجد طول القوس الذي تحصره زاوية مركزية قياسها

أ (١, ٢)°

ب (١, ٥٧)°

### العلاقة بين القياسين الدائري والستيني :

فانون: إذا كان لدينا زاوية قياسها الدائري هـ° وقياسها الستيني س° فإن:

$$\frac{\pi}{180} \times \text{س}^\circ = \text{هـ}^\circ$$

$$\frac{180}{\pi} \times \text{هـ}^\circ = \text{س}^\circ$$

$$\frac{\text{س}^\circ}{180} = \frac{\text{هـ}^\circ}{\pi}$$

زاوية قياسها ٧٥°، أوجد القياس الدائري لها.

أوجد القياس الستيني للزاوية  $\frac{\pi^3}{4}$ .

صفوة معلمى الكويت

٤ أوجد بدلالة  $\pi$  القياس الدائري للزوايا التي قياساتها:

حاول أن تحل

ب ٣٠٠°

أ ٤٥°

٥ أوجد القياس الستيني للزوايا التالية:

ب ٥٠,٧٥°

أ  $\pi \times \frac{5}{8}$

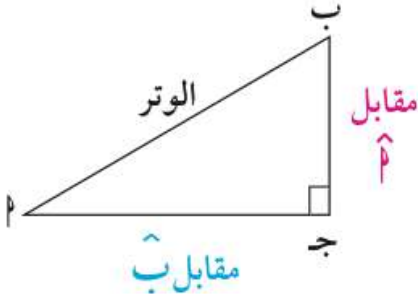
٦ أوجد القياس الستيني للزوايا التالية:

ب  $\frac{\pi}{3}$

أ  $\frac{\pi}{2}$

٧ حدّد الزوايا الربعية من بين الزوايا التالية:  $\pi$ ،  $٢٥٠^\circ$ ،  $\frac{\pi 5}{7}$ ،  $\frac{\pi}{2}$ ،  $٣٣٠^\circ$ .

## النسب المثلثية: الجيب وجيب التمام ومقلوباتهما



$$\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \text{جيب تمام الزاوية}$$

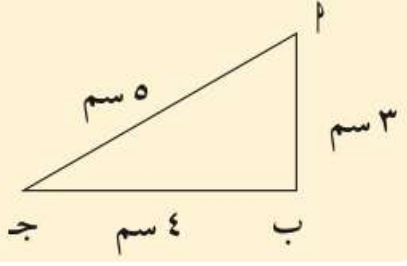
$$\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \text{جيب الزاوية}$$

$$\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \text{ظل الزاوية}$$

في الشكل المقابل:

مثال (١)

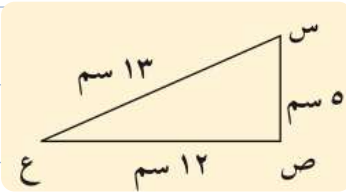
أثبت أن المثلث ا ب ج قائم الزاوية في ب، ثم أوجد جا، جاج.

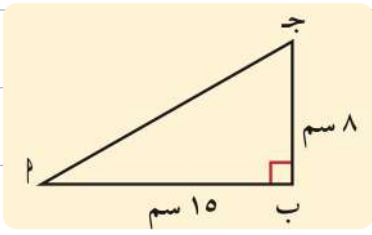


١ أ) أثبت أن المثلث س ص ع قائم في ص.

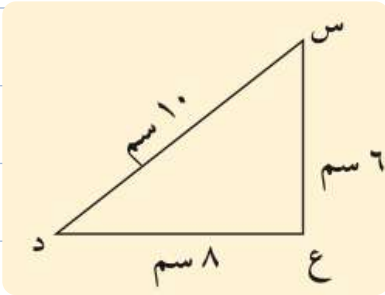
ب) أوجد جاس، جاج.

حاول أن تحل





Δ ب ج قائم في ب، أوجد كلاً من: الج، جتا، جتا، جتا. ماذا تستنتج؟



- ٢
- أ أثبت أن المثلث س ع د قائم الزاوية في ع.
- ب أوجد كلاً من: جا(س)، جتا(س)، جا(د)، جتا(د).
- ج ماذا تلاحظ بالنسبة إلى النسب المثلثية للزاويتين س، د.



مقلوبات الجيب وجيب التمام:

$$\text{قتا} ٢ \times \text{جا} ٢ = ١$$

$$\text{قتا} ٢ = \frac{١}{\text{جا} ٢} \quad \text{جا} ٢ \neq ٠$$

$$\text{قا} ٢ \times \text{جتا} ٢ = ١$$

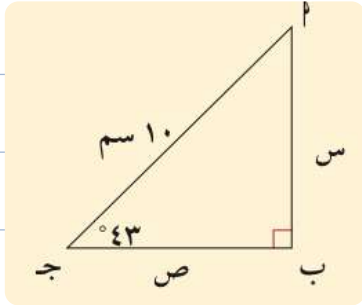
$$\text{قا} ٢ = \frac{١}{\text{جتا} ٢} \quad \text{جتا} ٢ \neq ٠$$

$$\text{ظا} ٢ \times \text{ظتا} ٢ = ١$$

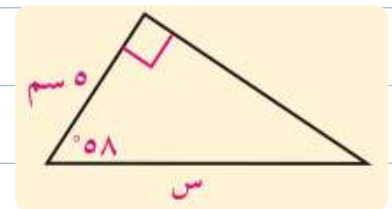
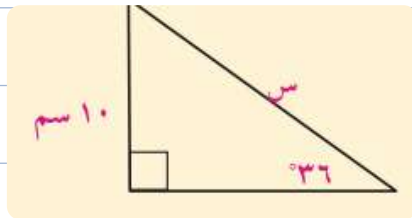
$$\text{ظا} ٢ = \frac{١}{\text{ظتا} ٢} \quad \text{ظتا} ٢ \neq ٠$$

صفحة من الواجب

أب ج مثلث فيه:  $AB = 7$  سم،  $BC = 24$  سم،  $AC = 25$  سم.  
 أثبت أن  $\triangle ABC$  قائم الزاوية، ثم أوجد  $\angle A$ ،  $\angle B$ ،  $\angle C$ ،  $\sin A$ ،  $\cos A$ ،  $\tan A$ .

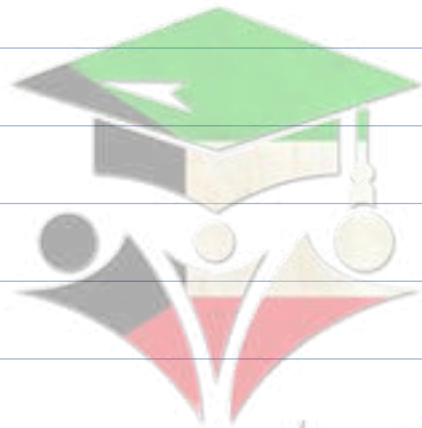
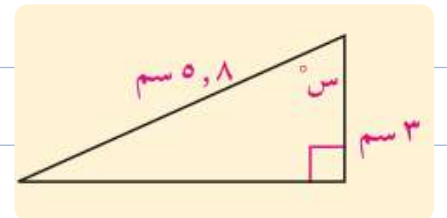
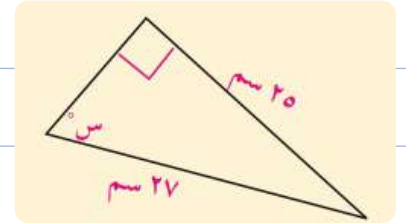
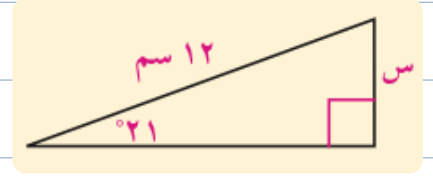
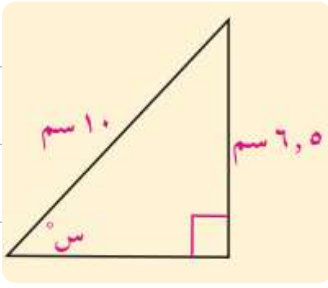


مثال (٤) في الشكل المجاور، أوجد  $\sin A$ ،  $\cos A$ ،  $\tan A$ .



صفوة معلم الكويت

٦ أوجد قيمة  $\theta$  لأقرب درجة.

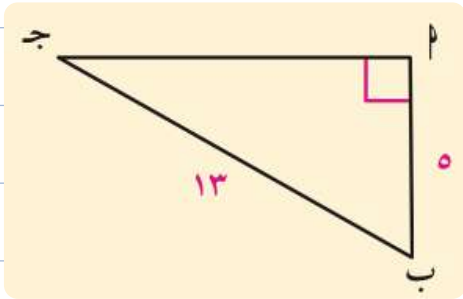
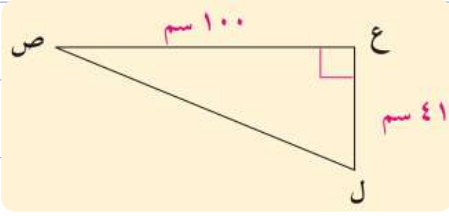


صفوة معلم الكويت



أوجد  $\hat{S}$  (س) حيث ظاس = ٥, ٠

في الشكل المقابل، أوجد  $\hat{L}$  (ل) لأقرب درجة.



في الشكل المقابل أوجد ظاج، ظناج.

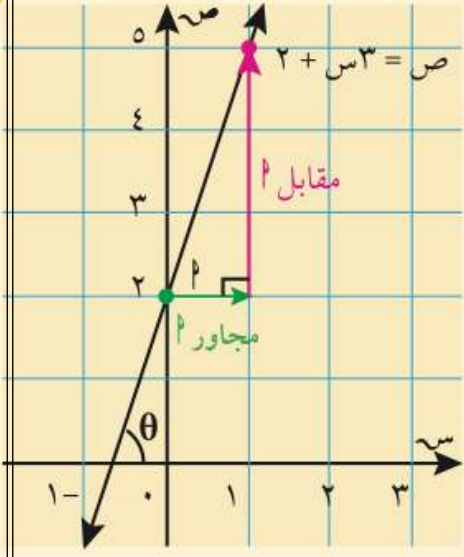


صفوة معلم الكويت

إذا كانت معادلة المستقيم:  $ص = م س + ب$  فإن ميل المستقيم  $= م$ .

$$\theta = \text{ميل المستقيم} = \frac{\text{التغير الراسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$

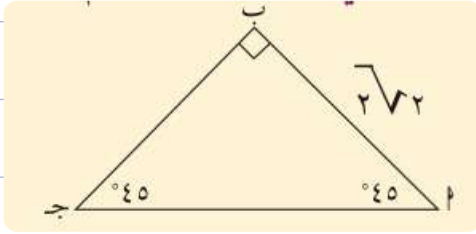
في الشكل المقابل: احسب قياس الزاوية الحادة الموجبة  $\theta$  التي يصنعها المستقيم  $ص = 3س + 2$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.



احسب قياس الزاوية الحادة الموجبة التي يصنعها المستقيم  $ص = \frac{1}{4}س + 6$  مع الاتجاه الموجب للمحور السيني.

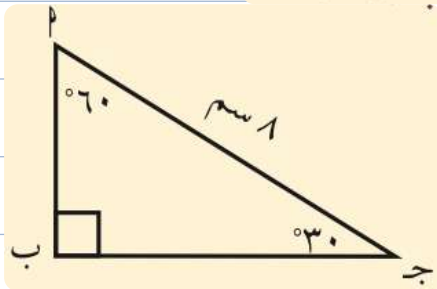


## النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة



١ في المثلث المرسوم، أوجد طول الوتر  $\overline{ج د}$ .

٢ أ ب ج مثلث ثلاثيني ستيني. طول الوتر = ٨ سم. أوجد طول كل من الضلعين  $\overline{أ ب}$ ،  $\overline{ب ج}$ .



## حل المثلث قائم الزاوية

حلّ المثلث  $\Delta$  ج د القائم في  $\hat{ب}$  إذا علم أن:  $\Delta$  ج د =  $\Delta$  ب ج =  $\Delta$  ج د =  $\Delta$  ج د

١ حل المثلث  $\Delta$  ج د القائم الزاوية في  $\hat{ج}$  حيث:  $\Delta$  ب ج =  $\Delta$  ج د =  $\Delta$  ج د =  $\Delta$  ج د



صفوة معلمي الكويت

حلّ المثلث أ ب ج القائم في (ج) إذا علم أن: أ ب = ٤٠ سم، ح (ب) = ٢٥°

٢ حلّ المثلث أ ب ج القائم في ج حيث: أ ج = ٢٠ سم، ح (ب) = ٧٥°



صفوة معلم الكويت

## زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض

لقياس طول إحدى المسلات قام مرشد سياحيّ برصد قمة المسلة من خلال جهاز للرصد، فوجد أنّ قياس زاوية الارتفاع  $48^\circ$ . إذا كان الجهاز يبعد عن قاعدة المسلة مسافة ١٨ م فاحسب ارتفاع المسلة.

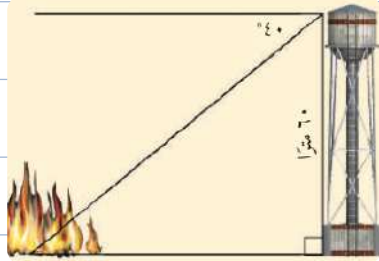
١ من نقطة على سطح الأرض تبعد ١٠٠ متر عن قاعدة مئذنة، وجد أن قياس زاوية ارتفاع المئذنة  $12^\circ$ . أوجد ارتفاع المئذنة عن سطح الأرض.



تحلق مروحية فوق محمية طبيعية على ارتفاع ٢٥٠ مترًا وتواكبها على الأرض سيارة حرس المحمية. شاهد ربان المروحية قطعًا من القبلة بزاوية انخفاض قياسها  $48^\circ$ . ما المسافة بين المروحية والقطيع في تلك اللحظة علمًا بأن السيارة مباشرة تحت المروحية؟

يقف مراقب فوق برج ارتفاعه ٦٠ مترًا. شاهد حريقًا بزاوية انخفاض قياسها  $40^\circ$ . ما المسافة بين قاعدة برج المراقبة

وموقع الحريق؟

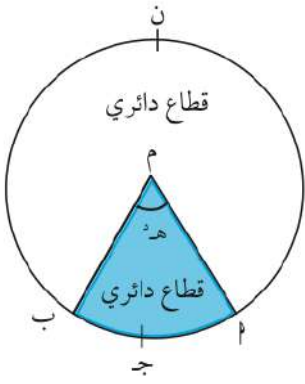


صفوة معلم الكويت

## القطاع الدائري والقطعة الدائرية

تعريف:

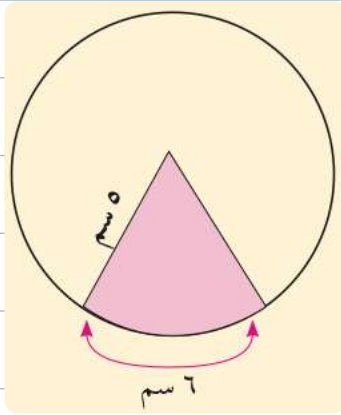
القطاع الدائري هو جزء من سطح الدائرة محدود بنصفي قطرين وقوس.



مساحة القطاع الدائري:

$$\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{1}{2} \times \text{ل} \times \text{ن}$$

أوجد مساحة القطاع الأصغر في الشكل المقابل:



١ أوجد مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطر دائرته ١٠ سم وطول قوسه ٤ سم.

تذكر:

محيط الدائرة =  $2\pi \times \text{ن}$

مساحة الدائرة =  $\pi \times \text{ن}^2$

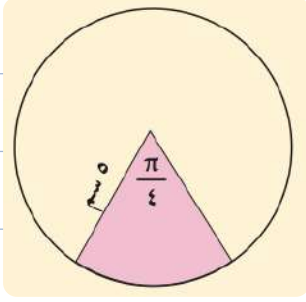
طول القوس ل =  $\text{ن} \times \theta$

$$\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{1}{2} \times \text{ن} \times \text{ل}$$

صفوة معلم الكويت



أوجد مساحة القطاع الدائري الأصغر في الشكل المقابل:



**القطعة الدائرية:** القطعة الدائرية هي جزء من سطح الدائرة محدود بقرس فيها ووتر.

$$\text{مساحة القطعة الدائرية} = \frac{1}{4} \text{ نر}^2 (\text{هـ}^\circ - \text{جاه}^\circ)$$

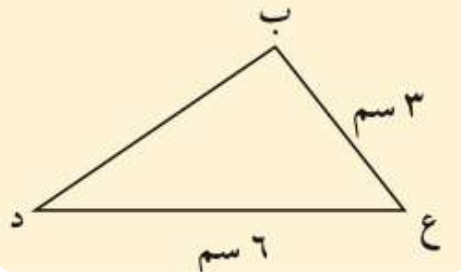
احسب مساحة قطعة دائرية زاويتها المركزية  $60^\circ$  وطول نصف قطر دائرتها 10 سم.

أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها 10 سم وقياس زاويتها المركزية  $70^\circ$ .

صفوة معلم الكويت

**مساحة المثلث** = مساحة المثلث =  $\frac{1}{2}$  حاصل ضرب طولي أي ضلعين  $\times$  جيب الزاوية المحددة بهما

ب ع د مثلث فيه ب ع = ٦ سم، ب د = ٤ سم،  $\angle$  (ب) =  $70^\circ$ .  
أوجد مساحة هذا المثلث.



في المثلث المقابل إذا كانت مساحته = ٧ سم<sup>٢</sup>. فأوجد  $\angle$  (ع).



صفوة معلم الكويت



إذا كان  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  فإنه يقال أن  $a, b, c, d$  أعداد متناسبة.

وإذا كانت  $a, b, c, d$  أعداد متناسبة فإن  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  ويسمى  $a, d$  طرفي التناسب، كما يسمى  $b, c$  وسطى التناسب.

أثبت أن  $4, 2, 2, 0.4, 7, 3, 4$  أعداد متناسبة.

إذا كانت  $a, b, c$  أعدادًا متناسبة مع الأعداد  $2, 5, 7$ . فأوجد القيمة العددية للمقدار  $\frac{a+3b}{b+c}$ .

إذا كانت الأعداد  $a, b, c$  متناسبة مع  $3, 5, 11$ . فأوجد القيمة العددية للمقدار  $\frac{a+3b}{b+5c}$ .



صفوة معلم الكويت

## التناسب المتسلسل الهندسي

إذا كان  $\frac{ب}{ج} = \frac{د}{هـ}$  فإنه يقال إن  $هـ$ ،  $ب$ ،  $ج$  في تناسب متسلسل (أو تناسب هندسي)

وبالعكس: إذا كانت  $هـ$ ،  $ب$ ،  $ج$  في تناسب متسلسل فإن:  $\frac{ب}{ج} = \frac{د}{هـ}$

ويسمى  $ب$  الوسط المتناسب للعددين  $هـ$ ،  $ج$  أو الوسط الهندسي لهما كما يسمى  $هـ$ ،  $ج$  طرفي التناسب.

إذا كانت الأعداد  $هـ$ ،  $س$ ،  $٢٠$  في تناسب متسلسل، أوجد قيمة  $س$ ، ثم تحقق.

هل يمكن إيجاد قيمة  $س$  بحيث تكون الأعداد  $٩$ ،  $س$ ،  $٤$  في تناسب متسلسل؟ فسّر.



فإن  $ب^٢ = هـ ج$

إذا كان  $\frac{ب}{ج} = \frac{د}{هـ}$  (أي أن  $هـ$ ،  $ب$ ،  $ج$  في تناسب متسلسل)

إذا كان:

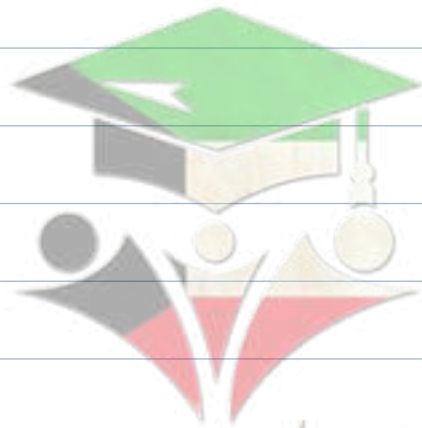
$\frac{ب}{ج} = \frac{د}{هـ} = \frac{م}{ن}$  (أي أن  $هـ$ ،  $ب$ ،  $ج$ ،  $د$  في تناسب متسلسل) حيث  $م$  عدد ثابت

فإن:

$$ج = د \times م، ب = د \times م^٢، هـ = د \times م^٣$$

إذا كانت الأعداد ٦، س، ٥٤، ١٦٢ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س.

١٠ إذا كانت الأعداد ٤، س - ٢، ١،  $\frac{1}{٢}$  في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س.



صفوة معلم الكويت

## التغير الطردي

## Direct Variation

## التغير الطردي

هو دالة خطية يمكن أن تكتب بالصورة:  $ص = ك س$  حيث  $ك \neq ٠$  ويسمى  $ك$  ثابت التغير أو معدل التغير. ويمكن التعبير عن العلاقة  $ص = ك س$  على الصورة  $ص = \alpha س$ .

إذا كانت  $ص = \alpha س$  فمعنى ذلك أن  $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢} = \frac{ص_٣}{س_٣} = \alpha$  : المقام  $\neq$  صفر

إذا كانت  $ص = \alpha س$  وكانت  $ص = ٣٠$  عندما  $س = ١٠$ ، فأوجد قيمة  $ص$  عندما  $س = ٤٠$ ، ثم مثل العلاقة بين  $س$ ،  $ص$  بيانياً.

أي من المعادلتين التاليتين تمثل تغيراً طردياً؟ أوجد ثابت التغير في حالة التغير الطردي.

أ  $٥س - ٣ص = ٣س + ٥ص$

ب  $٩ = ٥س + ٢ص$

ج  $٣س + ٢ص = ٢(س + ٢ص)$

معلمة الكويت  
صفوة الكويت

## التغير العكسي

### ١ - التغير العكسي

إذا تغيرت كمية س مع تغيّر كمية أخرى ص بحيث كان حاصل ضرب الكميتين ثابتاً، فإن هذا التغير يسمى تغيّراً عكسياً. ويسمى حاصل الضرب س ص ثابت التغيّر، ويرمز إلى ذلك:

$$س ص = ك \text{ أو } ص = \frac{ك}{س}, \text{ ك} \neq 0$$

ويمكن التعبير عن التغيّر العكسي بالصورة  $ص = \frac{1}{س} \alpha$

١٠	٦	٥	٤	٣	٢	س	١
٦	١٠	١٢	١٥	٢٠	٣٠	ص	

بالنظر إلى الجدول أعلاه، هل س  $\times$  ص يعبر عن تغيّر عكسي؟ اشرح إجابتك.

**ملاحظة:** استخدام التناسب في التعبير عن التغيّر العكسي. إذا كان (س<sub>١</sub>، ص<sub>١</sub>)، (س<sub>٢</sub>، ص<sub>٢</sub>) زوجين مرتبين في تغيّر عكسي.

$$ص = \frac{1}{س} \alpha, \text{ أي } ص = \frac{ك}{س} \text{ فإن}$$

$$س_١ ص_١ = س_٢ ص_٢ = ك$$

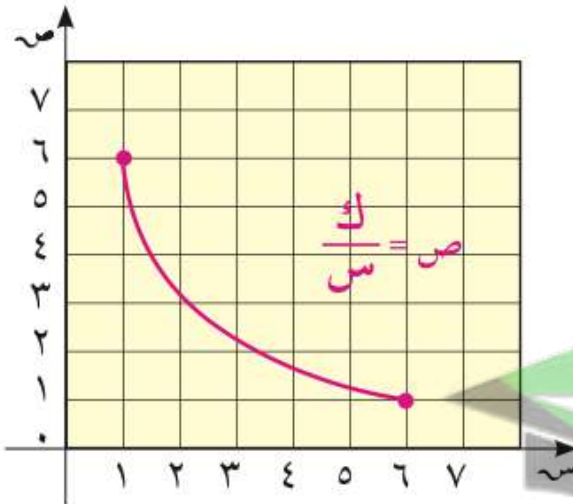
$$\text{ومن ذلك نستنتج أن } \frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢}$$

معلمي الكويت  
صفوة الكويت

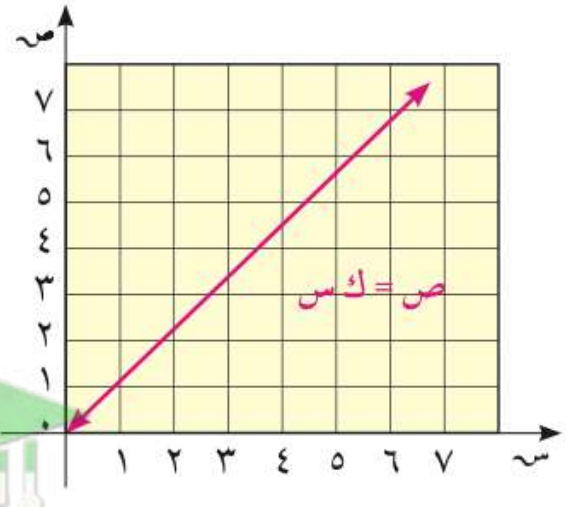


في تغيّر عكسي ص  $\alpha$  س إذا كانت ص = ٢, ٠ عندما س = ٧٥. أوجد س عندما ص = ٣.

تغيّر عكسي



تغيّر طردي



ص  $\alpha$  س  $\frac{1}{س}$   
 ص =  $\frac{ك}{س}$  : ك < ٠  
 ك = س ص  
 = ثابت التغيّر

ص  $\alpha$  س  
 ص = ك س  
 ك =  $\frac{ص}{س}$   
 = ثابت التغيّر

صفوة معلم الكويت

## المضلعات المتشابهة

يقال لمضلعين (لهما العدد نفسه من الأضلاع) إنهما متشابهان إذا تحققت الشرطان التاليان معاً:

- قياسات زواياهما المتناظرة متساوية.
- أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

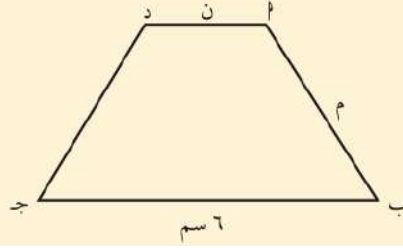
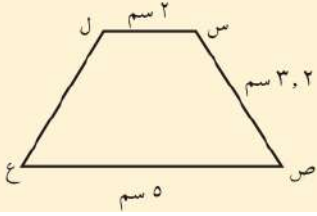
والعكس صحيح.

### ملاحظة:

الرمز ~ يعني تشابه

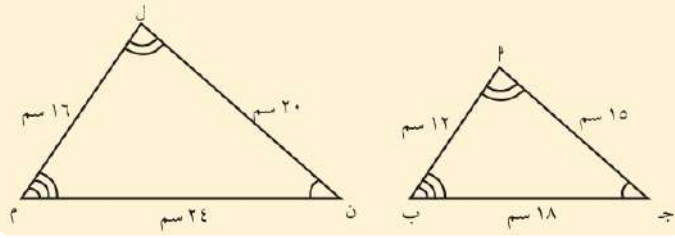
المضلعان المتطابقان يكونان متشابهين.

في الشكل المقابل: إذا كان  $أب \sim ج د$  ~  $س ص$   $ع ل$ ، أوجد قيمة  $ن$ ،  $م$ .



صفوة معلم الكويت

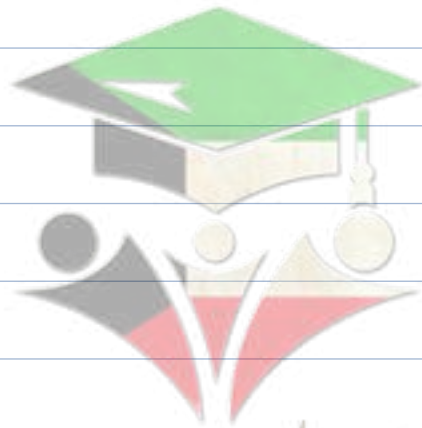
حدّد فيما إذا كان المثلثان أ ب ج، ل م ن متشابهين.  
إذا كان المثلثان متشابهين،  
اكتب قاعدة التشابه ونسبة التشابه.



٢ المثلثان أ ب ج، د ه و فيهما:  $\hat{L} = \hat{P}$ ،  $\hat{M} = \hat{Q}$ ،  $\hat{N} = \hat{R}$ ،  $\hat{L} = \hat{P}$ ،  $\hat{M} = \hat{Q}$ ،  $\hat{N} = \hat{R}$

أ ب = ١٢ سم، ب ج = ١٤ سم، ج د = ١٦ سم، د ه = ١٨ سم، ه و = ٢١ سم، و ز = ٢٤ سم.

هل يمكنك استنتاج أن المثلثين متشابهان؟ وضّح إجابتك.



صفوة معلمى الكويت

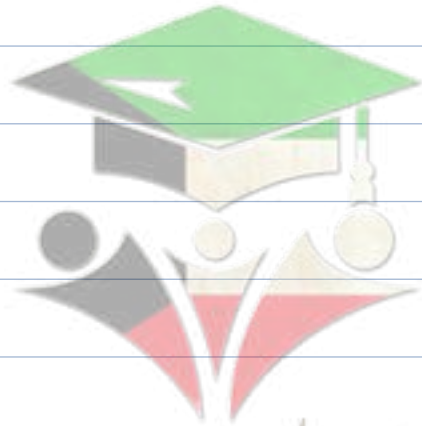
## المستطيل الذهبي

هو مستطيل يمكن تقسيمه إلى جزئين، أحدهما مربع والآخر مستطيل.  
والمستطيل الناتج يكون مستطيلاً ذهبياً آخر ويكون مشابهاً للمستطيل الأصلي.

## النسبة الذهبية

في كل مستطيل ذهبي، نسبة طول الضلع الأكبر إلى طول الضلع الأصغر  
تسمى النسبة الذهبية وتساوي  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$  أي حوالي ١,٦١٨.

قطعة نقدية ورقية مستطيلة الشكل أبعادها ٥ سم، ١٠ سم، ٥ سم، ٦ سم. هل نسبة طولها إلى عرضها تساوي النسبة الذهبية؟

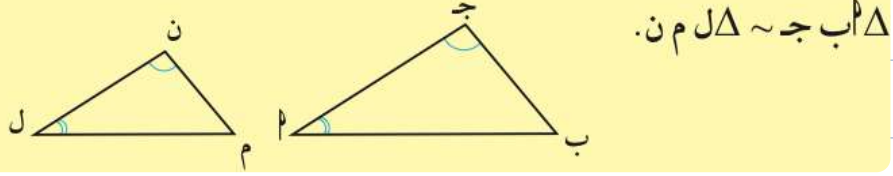


صفوة معلم الكويت

## تشابه المثلثات

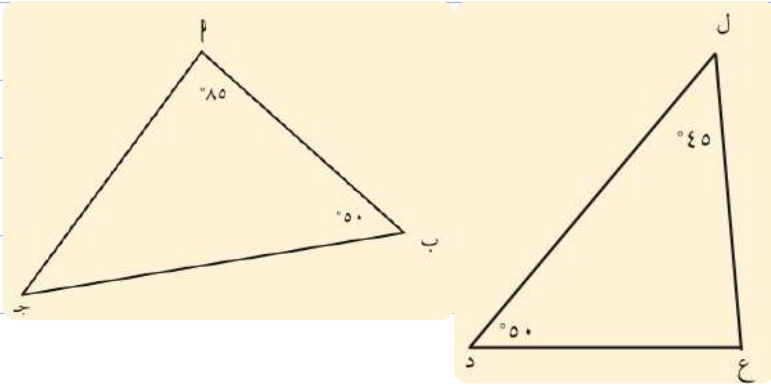
### نظرية (١)

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثين مع زاويتين في المثلث الآخر.



$\Delta ل م ن \sim \Delta ج ب د$ .

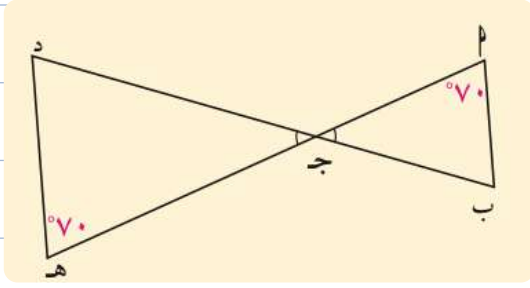
في الشكل المقابل  $\Delta ب ج د$ ،  $\angle ج = 50^\circ$ ،  $\angle ب = 85^\circ$ ، فإذا كان:  $\angle ل = 50^\circ$ ،  $\angle د = 45^\circ$ ، أثبت تشابه المثلثين  $\Delta ب ج د$ ،  $\Delta ل م ن$ .



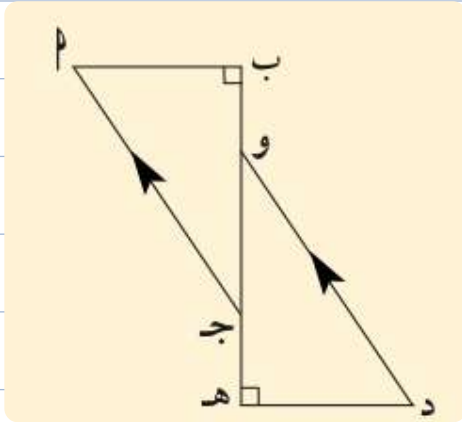
المثلث  $\Delta ب ج د$  قائم الزاوية  $\angle ب = 50^\circ$ ، المثلث  $\Delta ل م ن$  قائم الزاوية  $\angle ل = 35^\circ$ .

أثبت تشابه المثلثين  $\Delta ب ج د$ ،  $\Delta ل م ن$ .

أثبت أن المثلثين في الشكل المقابل متشابهان. اكتب عبارة التشابه.

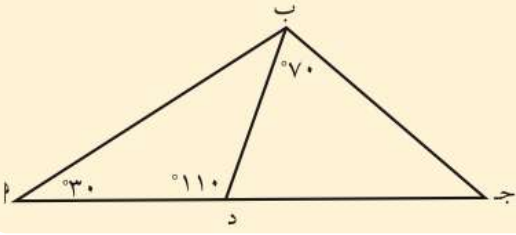


في الشكل المقابل، أثبت تشابه المثلثين  $\triangle ABC$ ،  $\triangle DEB$ .

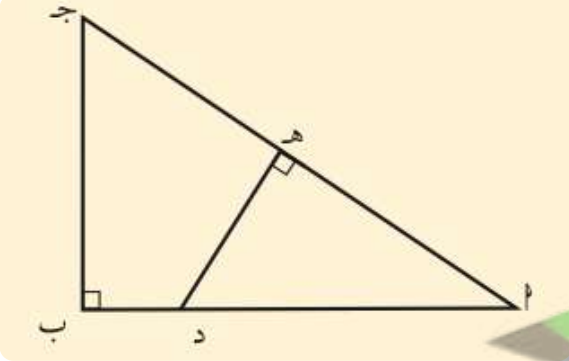


صفوة معلم الكويت

أثبت أن المثلثين  $\triangle ABD$ ،  $\triangle BDC$  متشابهان. اكتب عبارة التشابه.



في الشكل المقابل، أثبت تشابه المثلثين  $\triangle ABD$ ،  $\triangle BDC$ ، واكتب عبارة التشابه.



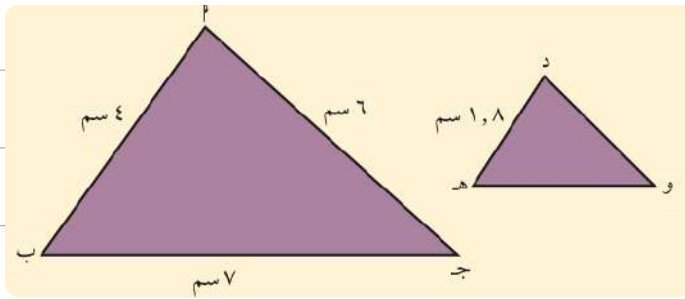
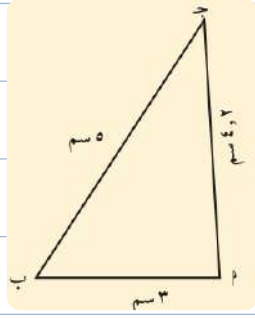
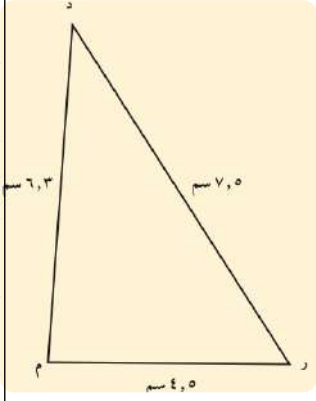
صفوة معلم الكويت

يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فيهما.

نظرية (٢)

في الشكل المقابل، أثبت تشابه المثلثين أ ب ج، م ر د،

ب اكتب أزواج الزوايا متساوية القياس.



في الشكل المقابل المثلثان أ ب ج، د ه و متشابهان.

أوجد طول كل من د و، وهـ.



صفوة معلم الكويت



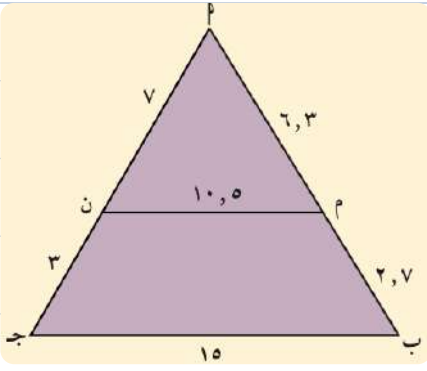
في الشكل المرسوم،

أولاً: أثبت أن:

أ)  $\Delta ب ج \sim \Delta م ن$ .

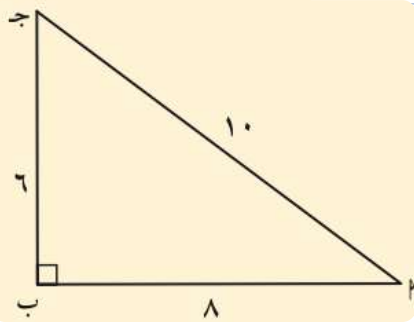
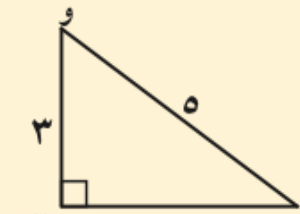
ب)  $\overline{ب ج} // \overline{م ن}$ .

ثانياً: أوجد النسبة بين محيطي المثلثين



في الشكل المقابل، أثبت أن المثلثين متشابهان.

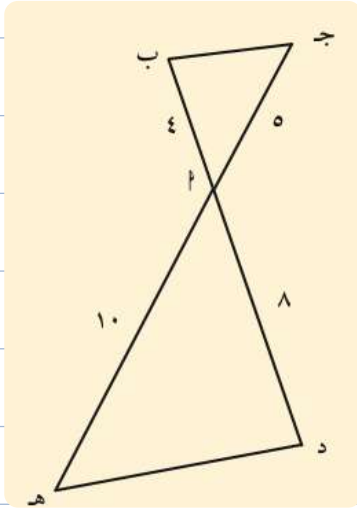
ثم أوجد العلاقة بين نسبة مساحتي المثلثين ونسبة التشابه.



صفوة معلم الكويت

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاوية في أحدهما مع زاوية في المثلث الآخر، وتناسب طول الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين.

في الشكل المقابل  $\overline{ب د} \cap \overline{ج ه} = \{١\}$ ، أثبت أن المثلثين  $\triangle ب ج ه$ ،  $\triangle د ج ه$  متشابهان.

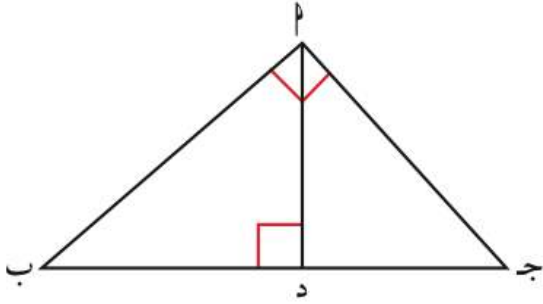


صفوة معلم الكويت

## التشابه في المثلثات قائمة الزاوية

**نظرية (١)** العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكل منهما يشابه المثلث الأصلي.

**نتيجة (١)** مربع طول العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي ناتج ضرب طولي القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما الوتر بهذا العمود.

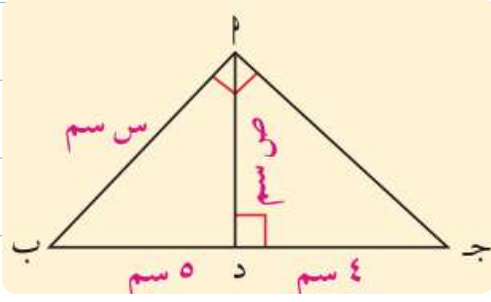


$$PD^2 = BD \times DJ$$

$$PB^2 = BD \times BJ$$

$$PJ^2 = JD \times BJ$$

$$PB \times PJ = BD \times JD$$

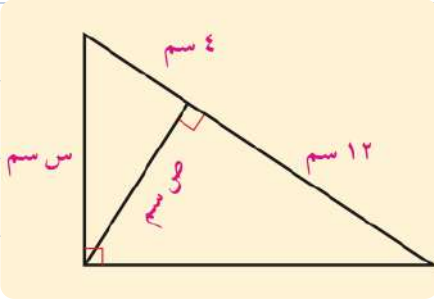


أوجد س، ص بحسب المعطيات في الشكل.



صفوة معلم الكويت

أوجد من الشكل المرسوم س، ص في أبسط صورة.

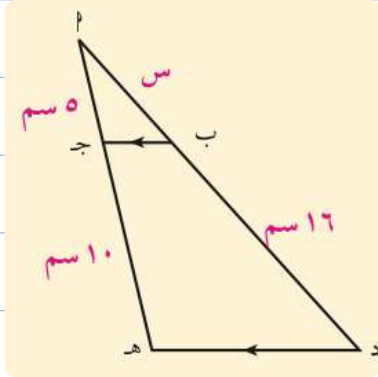


## التناسبات والمثلثات المتشابهة

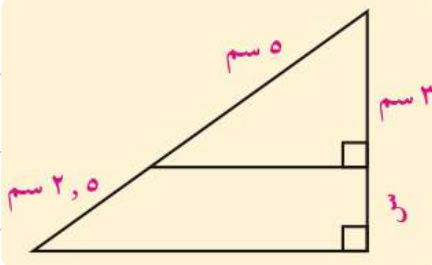
### نظرية (١)

إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطولها متناسبة.

استخدم نظرية المستقيم الموازي السابقة لإيجاد قيمة س.

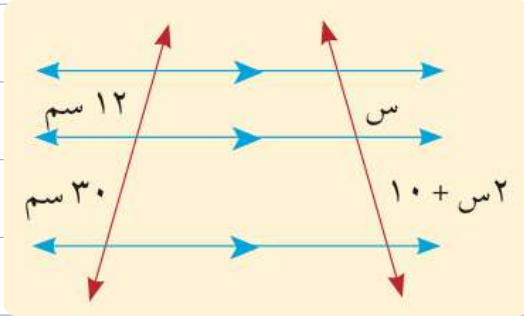


في الشكل المقابل، استخدم نظرية المستقيم الموازي السابقة لإيجاد قيمة س.

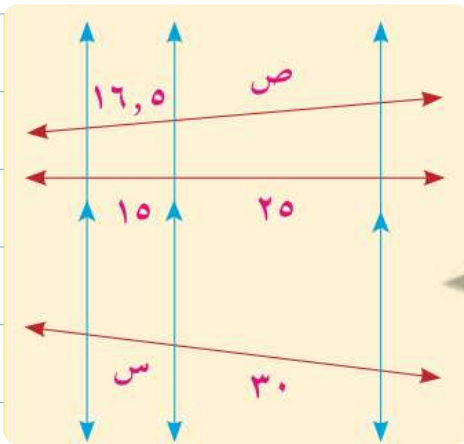


صفوة معلم الكويت

إذا قطع مستقيمان ثلاثة مستقيمتان متوازيتان أو أكثر فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.



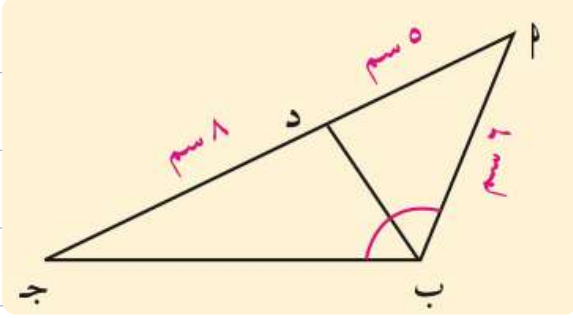
من الشكل المقابل أوجد قيمة س.



أوجد في الشكل المقابل س، ص في أبسط صورة.

إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث.

أوجد ج ب في الشكل المبين حيث ب د ينصف  $\hat{A}$  ج.



٥ أ ب ج مثلث حيث  $AB = 6$  سم،  $BC = 8$  سم، ثم رسم  $AD$  منصف  $\hat{A}$  ج ويقطع  $BC$  في د. إذا كان  $BD = 3$  سم،

أوجد ج د.



## الأنماط الرياضية والمتاليات (المتابعات)

الوحدة  
الخامسة

يُبين في ما إذا كانت هذه الدالة متتالية، ثم أوجد حدودها.

لتكن الدالة  $t$  :  $\{1, 2, 3, 4\} \leftarrow h$  حيث  $t(n) = n^3 + 1$

٣ لتكن  $t$  :  $h \leftarrow$  دالة معرفة بالقاعدة  $t(n) = \frac{n}{n+1}$ .  
بين في ما إذا كانت  $t$  متتالية، ثم أوجد الحدود الثلاثة الأولى منها.

صفوة معلمى الكويت

## المتتالية الحسابية

تعريف:

المتتالية (المتتابعة) الحسابية هي متتالية ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة عددًا ثابتًا. يسمى هذا الناتج أساس المتتالية ويرمز إليه بالرمز  $s$ . وعلى ذلك  $u_{n+1} = u_n - s$  أو  $u_{n+1} = u_n + s$ .

بين أن المتتالية (٦، ١٢، ١٨، ٢٤) هي متتالية حسابية.

١ هل المتتاليتان التاليتان حسابيتان؟ إذا كانتا كذلك، فأوجد أساس كل منهما.

أ المتتالية (٢، ٥، ٧، ١٢)

ب المتتالية (٤٨، ٤٥، ٤٢، ٣٩)



صفوة معلم الكويت



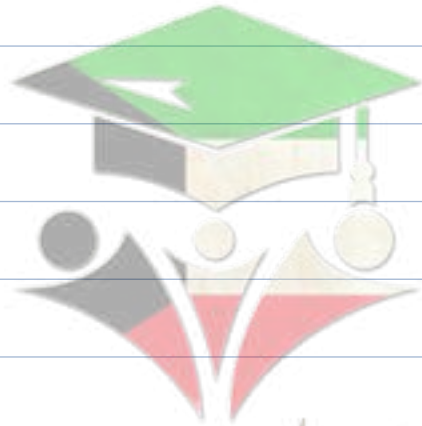
إذا كان  $ح_1 = 5$ ،  $ح_7 = 5$  في متتالية حسابية فاكتب الحدود الستة الأولى من المتتالية.

$$ح_n = ح_1 + s(n - 1)$$

$$s = \frac{ح_n - ح_k}{n - k} : n \neq k$$

الحد النوني للمتتالية الحسابية

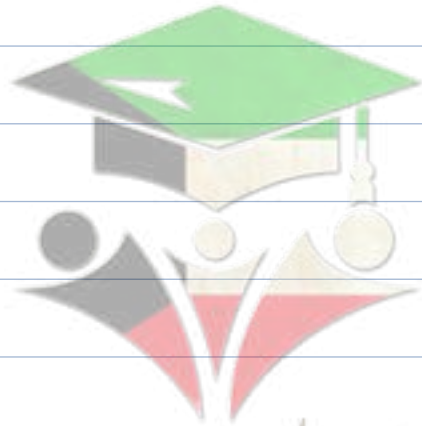
أوجد الحد العاشر والحد المائة من المتتالية الحسابية (8، 6، 4، ...).



صفوة معلم الكويت

أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٩٩ من المتتالية الحسابية (٧، ٩، ١١، ...).

في المتتالية الحسابية (٢، ٥، ٨، ١١، ...): أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٧١.



صفوة معلم الكويت

ب) أوجد عدد حدود المتتالية الحسابية (٧، ١١، ١٥، ...، ٤٧).

في المتتالية (ح) حيث  $7 - 3 = n$  لكل  $n \in \mathbb{N}^+$ ، أثبت أن المتتالية حسابية.

في المتتالية (ح) حيث  $3n + 5 = n$   $\forall n \in \mathbb{N}^+$ ، أثبت أن المتتالية حسابية.

صفوة معلم الكويت

إذا كان الحد الخامس من متتالية حسابية يساوي ٩ والحد الثامن يساوي ١٥ ، فأوجد أساس المتتالية.

إذا كان الحد الثاني من متتالية حسابية يساوي ٩ والحد السادس يساوي -٣ ، فأوجد أساس المتتالية ثم أوجد المتتالية الحسابية مكتملاً بالحدود الأربعة الأولى منها.



## الأوساط الحسابية

إذا كونت أ، ب، ج متتالية حسابية حيث أ، ب، ج هي عناصر من ح (أعداد حقيقية):  $\frac{أ + ج}{٢} = ب$

إذا كانت (٨٤، س، ١١٠) متتالية حسابية، فأوجد قيمة س.

أدخل ثلاثة أوساط حسابية بين -٩، ٣.

ب) أدخل خمسة أوساط حسابية بين ١، ١٣



صفوة معلم الكويت

## مجموع ن حدًا الأولى من حدود متتالية حسابية

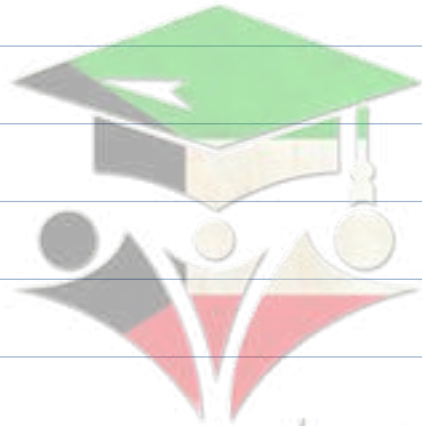
مجموع ن حدًا الأولى من حدود متتالية حسابية (ح<sub>ن</sub>) يعطى بالقاعدة:

$$ج_n = \frac{n}{2} (ح_1 + ح_n) \quad \text{أو} \quad ج_n = \frac{n}{2} [2ح_1 + (n-1)س]$$

حيث ح<sub>ن</sub> هو الحد الذي ترتيبه ن من المتتالية الحسابية وحدها الأول ح<sub>1</sub>.

أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الحسابية التي حدها الأول -٧ وحدها العاشر ٢٤.

متتالية حسابية حدها الأول -٧ وأساسها ٤. أوجد مجموع أول خمسة وعشرين حدًا منها.



صفوة معلم الكويت

ب أوجد مجموع حدود المتتالية الحسابية (٥، ٧، ٩، ١١، ١٣، ١٥، ١٧، ١٩، ٢١، ٢٣، ٢٥، ٢٧، ٢٩، ٣١، ٣٣، ٣٥، ٣٧، ٣٩، ٤١، ٤٣، ٤٥، ٤٧، ٤٩، ٥١، ٥٣، ٥٥، ٥٧، ٥٩، ٦١، ٦٣، ٦٥، ٦٧، ٦٩، ٧١، ٧٣، ٧٥، ٧٧، ٧٩، ٨١، ٨٣، ٨٥، ٨٧، ٨٩، ٩١، ٩٣، ٩٥).

كم حدًا يلزم أخذه من المتتالية الحسابية (١٠، ١٥، ٢٠، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع ٤٥٠؟

كم حدًا يلزم أخذه من المتتالية الحسابية التي حدها الأول ٥ وأساسها ٣ ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع ٩٤٨؟

صفوة معلمى الكويت

## المتتالية الهندسية

تعريف:

المتتالية الهندسية: هي متتالية ناتج قسمة أي حد فيها على الحد السابق له مباشرة، يساوي عددًا حقيقيًا ثابتًا غير صفري،

$$\text{حيث } r = \frac{a_{n+1}}{a_n} \neq 0$$

لكل  $n \in \mathbb{N}$ ،  $r$  عدد حقيقي ثابت يسمى أساس المتتالية الهندسية common ratio

١ اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية (ح).

لتكن (ح) متتالية حيث  $a_3 = 27$ .

ب أثبت أن (ح) متتالية هندسية.

أثبت أن المتتالية (ح) حيث  $a_n = (2)^n$ ، هي متتالية هندسية.



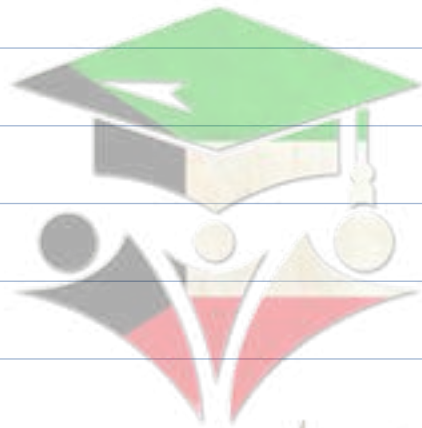
صفوة معلم الكويت



$$ح_n = ح_{ن-1} \times ر$$

## الحد النوني للمتتالية الهندسية

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٩ وأساسها ٣.



صفوة معلم الكويت

متتالية هندسية حدها الأول ٤ وحدها السادس ١٢٨ . اكتب المتتالية الهندسية مكثفياً بالحدود الأربعة الأولى منها.

متتالية هندسية حدها الأول ٢٧ وحدها الخامس  $\frac{1}{3}$  . اكتب المتتالية مكثفياً بالحدود الخمسة الأولى منها.



متتالية هندسية حدودها موجبة، ومجموع الحدين الأول والثاني ٣٦، وحدها الثالث يساوي ٣. أوجد الحد الخامس.

(ح) متتالية هندسية، مجموع حديها الأول والثاني يساوي ٢، ومجموع حديها الثالث والرابع يساوي ٨. أوجد الحد الأول والحد الخامس منها.



## الأوساط الهندسية بين عددين

إذا كَوَّنت  $ل$ ،  $ب$ ،  $ج$  متتالية هندسية حيث  $ل$ ،  $ب$ ،  $ج$  أعداد حقيقية غير صفرية وحيث  $ل < ج < ب$  فإن:  $\frac{ب}{ل} = \frac{ج}{ب}$  ومنه  $ب^2 = ل ج$

$$\therefore ب = \sqrt{\pm ل ج}$$

٥ أوجد وسطاً هندسياً بين العددين في كل ما يلي:

ج ٣ ، ١٨,٧٥

ب ٢٠ ، ٨٠

أ ٣- ، ٧٢-

أدخل خمسة أوساط هندسية موجبة بين العددين ٥١٢ ، ٨.



صفوة معلم الكويت

## مجموع ن حدا الأولى من متتالية هندسية

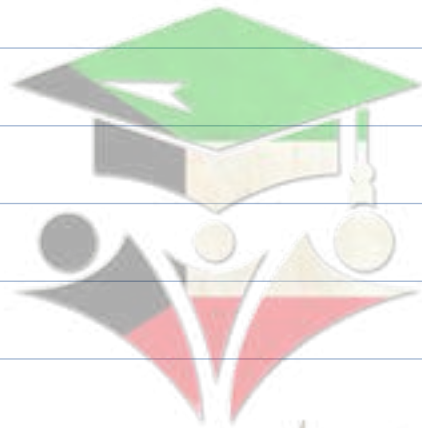
قانون

إذا كانت (ح<sub>ن</sub>) متتالية هندسية، ج<sub>ن</sub> = ح<sub>١</sub> + ح<sub>٢</sub> + ح<sub>٣</sub> + ... + ح<sub>ن</sub> هو مجموع ن حداً الأولى، فإن:

١ ج<sub>ن</sub> = ح<sub>١</sub> ×  $\frac{١ - ر^n}{١ - ر}$  أو ج<sub>ن</sub> = ح<sub>١</sub> ×  $\frac{١ - ر^n}{ر - ١}$  ،  $ر \neq ١$

٢ إذا كانت  $ر = ١$  فإن ج<sub>ن</sub> = ن ح<sub>١</sub>

أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الهندسية (٢، ٤، ٨، ...).



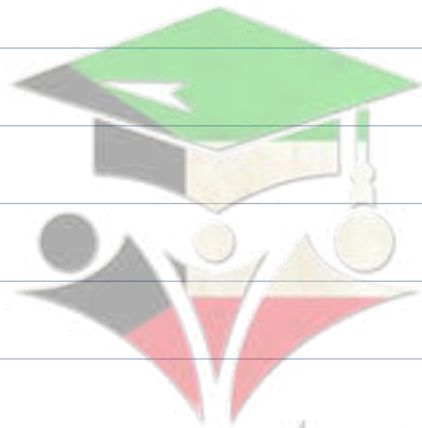
صفوة معلم الكويت

أوجد مجموع الحدود الثمانية الأولى من المتتالية الهندسية (٣، ٩، ٢٧، ...)

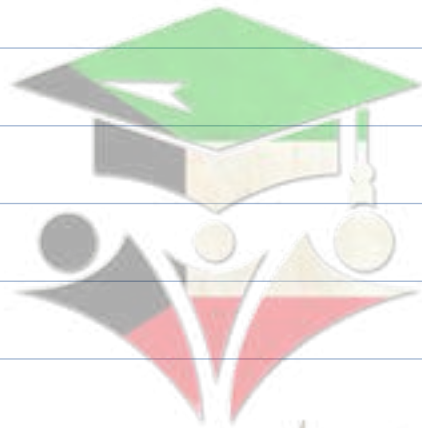
الحد الأول من متتالية هندسية يساوي ٨ والحد الثالث منها يساوي  $\frac{8}{9}$ . أوجد مجموع الحدود الستة الأولى منها.



أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الهندسية  $(\dots, \frac{1}{4}, \blacksquare, 1, \blacksquare, 4, \dots)$

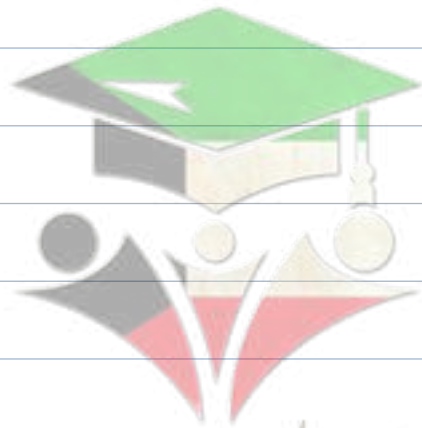


صفوة معلم الكويت



صفوة معلمي الكويت





صفوة معلمي الكويت