العبقري
فى الرياضيات

الصف الحادي عشر علمي
الفصل الدراسي الأول
2024

إعداد/
عبد السلام البيومي

الجذور والتعبيرات الجذرية

أوجد الجذر التكعيبي لكل من الأعداد التالية دون استخدام الآلة الحاسبة:

a -27 b 64 c -0.008 d $\frac{343}{216}$

حتى يكون التعبير الجذري في **أبسط صورة** يجب مراعاة ما يلي:

- ألا يكون للمجذور عوامل مرفوعة لقوة أكبر من أو تساوي دليل الجذر. فمثلًا $\sqrt{8a^6b^7}$ «ليس في أبسط صورة».
- ألا يكون المقام جذرًا. مثل: $\frac{5}{\sqrt{2}}$ «ليس في أبسط صورة».
- ألا يكون المجذور كسرًا. مثل: $\sqrt{\frac{4}{7}}$ «ليس في أبسط صورة».
- أن يكون دليل الجذر أصغر عدد صحيح موجب ممكن. مثل: $\sqrt[10]{32}$ «ليس في أبسط صورة».

بسّط كلًا من التعبيرات الجذرية التالية لكل عدد حقيقي x:

a $\sqrt{4x^6}$ b $\sqrt[3]{8x^3}+3x$

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية حيث x، y عددان حقيقيان:

a $\sqrt{9x^2y^4}$

b $\sqrt[3]{-27x^6}+3x^2$

c $\sqrt{x^8y^6}$

جمع وطرح التعبيرات الجذرية

4 أوجد الناتج في أبسط صورة:

a $4\sqrt[3]{8} + 2\sqrt[3]{128}$

b $2\sqrt{75} - \sqrt{48}$

c $\sqrt{12} + \sqrt{147} - \sqrt{27}$

d $\sqrt[3]{320} + \sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{135}$

عبد السلام البيومي

ضرب وقسمة الجذور التربيعية والجذور التكعيبية

الجذور التربيعية

$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$\sqrt{x^2} = |x| = x$

$(\sqrt{x})^2 = x$

$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$

$\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\ ,\ y \neq 0$

الجذور التكعيبية

$\forall x, y \in \mathbb{R}$

$\sqrt[3]{x^3} = x$

$(\sqrt[3]{x})^3 = x$

$\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$

$\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}\ , y \neq 0$

5 بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\sqrt{50x^4}$

b $\sqrt[3]{18x^3}$

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\sqrt{5x^3} \times \sqrt{40x}\quad , \quad x \geq 0$

b $\sqrt[3]{5x^3y^4} \times \sqrt[3]{64x^2y^3}$

6 بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $3\sqrt{7x^3} \times 2\sqrt{x^3y^2} \quad , \qquad x \geq 0$

b $4\sqrt[3]{x^4y} \times 3\sqrt[3]{x^2y}$

بسط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\dfrac{\sqrt[3]{162x^5}}{\sqrt[3]{3x^2}}, \qquad x \neq 0$

b $\dfrac{\sqrt[3]{250x^7y^3}}{\sqrt[3]{2x^2y}}, \ x \neq 0, \ y \neq 0$

7 أوجد ناتج كل من التعبيرات الجذرية التالية:

$$\frac{\sqrt[3]{128x^{15}}}{\sqrt[3]{2x^{2}}}\ ,\ x \neq 0$$

$$\frac{\sqrt{12x^{4}}}{\sqrt{3x}}\ ,\ x > 0$$

تبسيط كسر مقامه يتضمن جذرًا

اكتب كل كسر بحيث يكون المقام عددًا نسبيًّا:

$$\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

b $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}}$

c $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}}$

حاول أن تحل

8 أوجد ناتج كل من التعبيرات التالية في أبسط صورة:

a $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

b $\dfrac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

c $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$

عبد السلام البيومي

الأسس النسبية

1 بسّط كل عدد من الأعداد التالية مستخدمًا الصورة الجذرية:

a $64^{\frac{1}{3}}$

b $(2^{\frac{1}{2}})(2^{\frac{1}{2}})$

c $(8^{\frac{1}{2}})(2^{\frac{1}{2}})$

اكتب العدد $25^{\frac{3}{2}}$ بالصورة الجذرية.

إذا كان a عددًا حقيقيًا، $n \geq 2$ ، $n \in \mathbb{Z}^+$:

وكان $\sqrt[n]{a}$ عددًا حقيقيًا يساوي b حيث يرمز له بالرمز $b = \sqrt[n]{a}$ فإن $a = b^n$

إذا كان الجذر النوني لعدد x هو عددًا حقيقيًا، m عددًا صحيحًا، $n \geq 2$ ، $n \in \mathbb{Z}^+$ فإن:

1. $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
2. $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$ حيث $\frac{m}{n}$ في أبسط صورة
3. $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x| & \text{إذا كان } n \text{ عددًا زوجيًا} \\ x & \text{إذا كان } n \text{ عددًا فرديًا} \end{cases}$

a اكتب بالصورة الجذرية كلًّا من:

1. $x^{\frac{2}{5}}$
2. $y^{-2.5}\ ,\ \forall y > 0$

b اكتب بالصورة الأسية كلًّا من:

1. $(\sqrt[5]{y})^2$
2. $\sqrt{b^3}\ ,\quad \forall b \geq 0$

قوانين الأسس النسبية

المثال	القانون
$8^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{3}{3}} = 8^1 = 8$	$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$
$(5^{\frac{1}{2}})^4 = 5^{\frac{1}{2}\times 4} = 5^2 = 25$	$(b^m)^n = b^{m \cdot n}$
$(4 \times 5)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 2 \times 5^{\frac{1}{2}}$	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
$9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3}$	$b^{-n} = \frac{1}{b^n}\ ,\ b \neq 0$
$\frac{9^{\frac{3}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}} = 9^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = 9^1 = 9$	$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}\ ,\ b \neq 0$
$\left(\frac{-125}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{-125^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{-5}{3}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\ ,\ b \neq 0$

بسِّط كلًّا مما يلي مستخدمًا قوانين الأسس:

a $(-32)^{\frac{3}{5}}$

b $(x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{5}{6}}) \div x^{\frac{2}{3}}\quad ,\quad x > 0$

بسِّط كلًّا من الأعداد التالية مستخدمًا قوانين الأسس:

a $25^{-\frac{3}{2}}$

b $(-32)^{\frac{4}{5}}$

c $\left(\dfrac{16x^{14}}{81y^{18}}\right)^{\frac{1}{2}}$, $x \geq 0$, $y > 0$

قوانين الجذور النونية

إذا كان: $\sqrt[n]{y}$, $\sqrt[n]{x}$ عددين حقيقيين، فإن:

1. $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$
2. $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$, $y \neq 0$
3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$, $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} \in \mathbb{R}$

بسط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7}$

b $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$

c $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

عبد السلام البيومي

حل المعادلات

لحل معادلة جذرية اتبع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: أفصل الجذر إلى أحد طرفي المعادلة.

الخطوة الثانية: حدد شرط الحل

— إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًا فإن قيمة ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر وكلًّا من طرفي المعادلة أكبر من أو يساوي الصفر أيضًا.

— إذا كان دليل الجذر عددًا فرديًّا فإن قيمة ما تحت الجذر ينتمي إلى $\mathbb{R}$.

الخطوة الثالثة: ارفع طرفي المعادلة إلى أس مناسب يحذف الجذر.

الخطوة الرابعة: تأكد من أن الحل يحقق الشرط.

مثال (1)

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية

a $2 + \sqrt{3x - 2} = 6$

b $6 + \sqrt{x - 1} = 3$

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية

a $\sqrt{5x+4}-7=0$

b $\sqrt{x-2}+9=0$

إذا كان m عددًا زوجيًا فإن : $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}} = |x|$

إذا كان m عددًا فرديًا فإن : $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}} = x$

ملاحظة: مقام الأس النسبي هو دليل الجذر.

أوجد مجموعة الحل: $2(x-2)^{\frac{2}{3}} = 50$

أوجد مجموعة الحل:

a $2(x+3)^{\frac{3}{2}} = 54$

b $(1-x)^{\frac{2}{5}} - 4 = 0$

أوجد مجموعة الحل: $5 + \sqrt{x - 3} = x$

أوجد مجموعة الحل: $\sqrt{5x - 1} + 3 = x$

أوجد مجموعة الحل لكل معادلة:

a $\sqrt{8x} - 2\sqrt{4x - 16} = 0$

b $\sqrt{x} + \sqrt{2x - 4} = 0$

أوجد مجموعة الحل لكل معادلة:

a $\sqrt{5x} - \sqrt{2x+9} = 0$

b $\sqrt{x-7} + \sqrt{3x-21} = 0$

ثانيًا: المعادلات الأسية

ليكن a عدد حقيقي حيث $a \notin \{-1, 0, 1\}$

m، n عددان صحيحان

إذا كان $a^m = a^n$، فإن $m = n$

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a) $3^x = 243$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{128}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{81}{16}$

a) $3^{x^2-1} = 27$

b) $7^{x^2-3x} = \frac{1}{49}$

حاول أن تحل

7 حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $5^{x^2-4} = 1$

b $3^{x^2+5x} = \frac{1}{81}$

c $2^{x^2-4} = 32$

عبد السلام البيومي

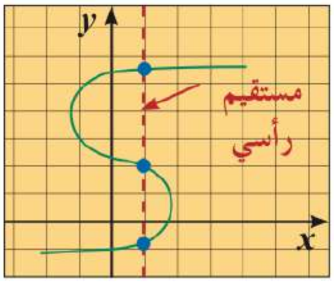
الوحدة الثانية

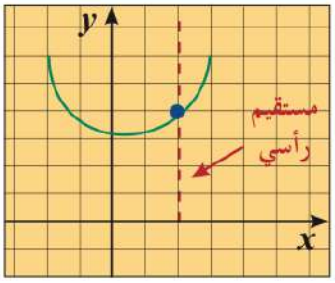
مجال الدالة

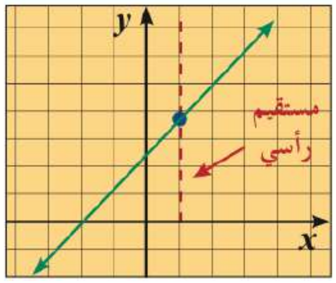
اختبار المستقيم الرأسي:

إذا تقاطع كل مستقيم رأسي مع بيان علاقة ما بنقطة واحدة على الأكثر، فإن هذه العلاقة تكون دالة.

استخدم اختبار المستقيم الرأسي لتحديد ما إذا كان بيان كل علاقة مما يلي يمثل بيان دالة أم لا:

a


b


c


حدّد مجال كل من الدوال التالية:

a $f(x) = 2x + 1$

b $g(x) = x^2 + 3x + 1$

c $t(x) = \sqrt{3x - 4}$

d $h(x) = \dfrac{x+2}{x-4}$

e $u(x) = \sqrt[3]{2x+1}$

f $v(x) = \dfrac{\sqrt{3x-4}}{x-2}$

تساعدنا القواعد التالية على تحديد مجال الدالة:

1 مجال الدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

2 مجال الدالة الحدودية النسبية هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ عدا مجموعة أصفار المقام.

3 مجال الدالة $f(x) = |x|$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

4 مجال الدالة $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد زوجي هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق الشرط $g(x) \geq 0$.

5 مجال الدالة $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد فردي هو مجال الدالة g.

6 مجال الدالة $f(x) = g(x) \pm h(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين h, g.

أي أن مجال f = مجال g $\cap$ مجال h.

7 مجال الدالة $f(x) = g(x) . h(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين h, g.

أي أن مجال f = مجال g $\cap$ مجال h.

8 مجال الدالة $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين h, g عدا أصفار المقام $(h(x) \neq 0)$.

أي أن مجال f = (مجال g $\cap$ مجال h)/مجموعة أصفار المقام.

أوجد مجال كل دالة مما يلي:

a $f_1(x)=\dfrac{2x+5}{x-4}$

b $f_2(x)=x^3-4x^2-4+\sqrt{x-9}$

c $f_3(x)=\dfrac{\sqrt{5-4x}}{x^2+4}$

d $f_4(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2-5x}{x}}$

عبد السلام البيومي

الدوال التربيعية ونمذجتها

الصورة العامة للدالة التربيعية هي:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0$$

حد من الدرجة الثانية — حد من الدرجة الأولى — حد مطلق (ثابت)

تمثل الدالة التربيعية بيانيًّا بمنحنى متماثل حول المستقيم الرأسي الذي يمر برأس المنحنى، ويسمى شكل المنحنى **قطعًا مكافئًا** (parabola).

والإحداثي السيني لرأس هذا المنحنى $x = \frac{-b}{2a}$ وهو معادلة المستقيم الرأسي الذي يسمى **محور التماثل**.

1 **حدّد ما إذا كانت الدالة خطية أم تربيعية.**

a $f(x) = 2x(x-3)$

b $f(x) = (x-2)(2x+1)$

c $f(x) = (2x+3)^2 - 4x^2 - 7x$

d $f(x) = 3(x^2 - 4x) - 3x^2 + 4$

الدوال التربيعية والقطوع المكافئة

عبد السلام البيومي

معادلة الدالة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0, 0)$ هي: $y = ax^2$

1 كل نقطة مما يلي تقع على قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل.

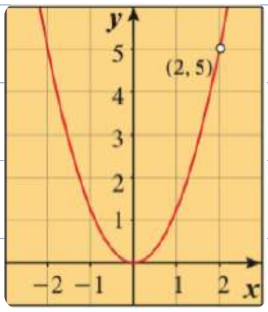
اكتب معادلة تربيعية لهذا القطع المكافئ واذكر ما إذا كان بيانه مفتوحًا إلى أعلى أم إلى أسفل.

a $E(4, 2)$

b $D(1, -5)$

2 البيان المقابل يمثل دالة: $y = ax^2$

أوجد معادلة هذه الدالة.



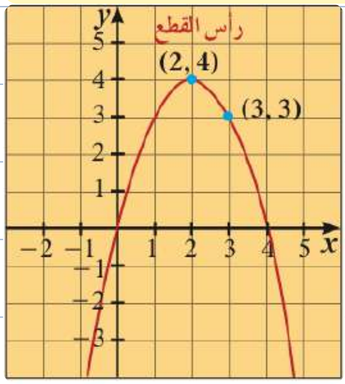
معادلات بعض القطوع المكافئة بدلالة إحداثيات رؤوسها وخواصها

بعض خواص القطوع المكافئة

المعادلة على الصورة: $y = a(x-h)^2 + k$ ، هي دالة مكتوبة بدلالة إحداثيات الرأس، وهذه المعادلة تمدك بالمعلومات التالية:

- رأس المنحنى هو النقطة (h, k)، ومحور التماثل هو الخط: $x = h$
- تكون فتحة القطع المكافئ إلى الأعلى عندما تكون a موجبة، وتكون فتحة القطع المكافئ إلى الأسفل عندما تكون a سالبة.
- إذا كان $|a| < 1$ ، فإن الرسم سوف يكون أوسع من رسم الدالة: $y = x^2$
- إذا كان $|a| > 1$ ، فإن الرسم سوف يكون أضيق من رسم الدالة: $y = x^2$

أوجد معادلة القطع المكافئ في الرسم المقابل.



ارسم منحنى الدالة: $y = 2(x+1)^2 - 2$ مستخدمًا خواص القطوع المكافئة.

4 ارسم منحنى الدالة: $y=(x+3)^2+1$.

5 ارسم منحنى الدالة: $y=-2(x-3)^2-1$

عبد السلام البيومي

المعكوسات ودوال الجذر التربيعي

إذا كانت النقطة (a, b) تنتمي إلى بيان دالة فإن النقطة (b, a) تنتمي إلى بيان معكوس هذه الدالة. ولكي ترسم معكوس الدالة بيانيًّا اعكس الترتيب لكل زوج مرتب ينتمي لبيان الدالة.

1 ارسم الدالة $y = -3x + 5$ ومعكوسها، ثم اكتب معادلة المعكوس.

أوجد معكوس الدالة $y = 5x - 4$

2 أوجد معكوس الدالة:

a $y = \frac{2x - 1}{3}$

b $y = 2(x + 1) - 3$

دوال الجذر التربيعي

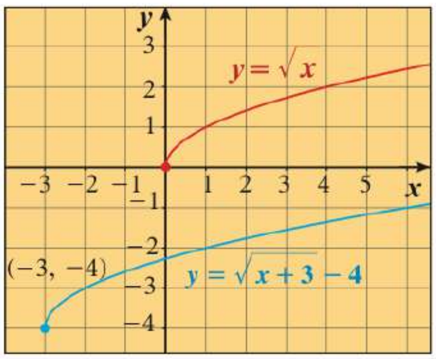
المعادلة $y = \sqrt{x}$ دالة جذر تربيعي.

الشكل المرسوم يمثل بيان هذه الدالة ويبدأ من $(0, 0)$، حيث إن الدالة معرفة فقط بالنسبة إلى صفر وإلى القيم الموجبة لـ x. أي أنها معرّفة عندما $x \geq 0$.

فيكون مجالها $[0, \infty)$. والمدى هو $[0, \infty)$ لأن $y \geq 0$ وهي قيم الدالة عند المجال المعطى.

التمثيل البياني لدالة الجذر التربيعي $y = \sqrt{x - h} + k$

ينتج من إزاحة لبيان دالة المرجع $y = \sqrt{x}$ كالتالي:



- عندما تكون k, h موجبتين فإن الإزاحة تكون بعدد h من الوحدات يمينًا وعدد k من الوحدات إلى الأعلى.
- وعندما تكون h سالبة يزاح البيان إلى اليسار.
- وعندما تكون k سالبة يزاح البيان إلى الأسفل.

فمثلًا بيان الدالة: $y = \sqrt{x - (-3)} - 4$ أو $y = \sqrt{x + 3} - 4$ ينتج من إزاحة بيان الدالة $y = \sqrt{x}$ ثلاث وحدات إلى اليسار وأربع وحدات إلى الأسفل.

مثال (4)

ارسم الدالة: $y = \sqrt{x-4} - 2$ ، وعيّن المجال والمدى للدالة.

حاول أن تحل

4 a ارسم بيانيًا: $y = \sqrt{x-2} + 1$

عيّن المجال والمدى للدالة.

b إذا تم إزاحة بيان الدالة: $y = \sqrt{x}$ ، 5 وحدات يمينًا 2 وحدة إلى الأسفل.

اكتب معادلة الدالة الناتجة عن الإزاحة.

عبد السلام البيومي

حل المتباينات

أوجد مجموعة حل المتباينة: $x^2 - x - 6 < 0$.

أوجد مجموعة حل المتباينة: $x^2 + 4x + 3 \leq 0$.

أوجد مجموعة حل المتباينة: $-x^2 + 7x - 10 \leq 0$

أوجد مجموعة قيم x التي تحقق المتباينة: $-2x^2 + 5x - 3 > 0$.

أوجد مجال كل دالة مما يلي:

1 $h(x)=\sqrt{x^2-x}$

2 $q(x)=\sqrt{9-x^2}$

عبد السلام البيومي

أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{3x+7}{x+2} \geq 2$

5 أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{3x-5}{-2x+3} \geq 0$

أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{x^2+5x}{x+3} > -2$.

أوجد مجموعة حل المتباينة $\frac{x^2-5x+6}{x-3} > 0$.

أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{x^2-49}{x+7} \leq 0$.

دوال القوى ومعكوساتها

الوحدة الثالثة

الدوال الزوجية والدوال الفردية

تعريف

تكون الدالة $y = f(x)$ التي مجالها D دالة زوجية إذا وفقط إذا كان:

1. $\forall x \in D\ ,\ -x \in D$
2. $f(-x) = f(x)$

تعريف

تكون الدالة $y = f(x)$ التي مجالها D دالة فردية إذا وفقط إذا كان:

1. $\forall x \in D\ ,\ -x \in D$
2. $f(-x) = -f(x)$

بيّن ما إذا كانت كل دالة مما يلي زوجية أو فردية أو ليست زوجية وليست فردية.

a. $f_1(x) = x^5$

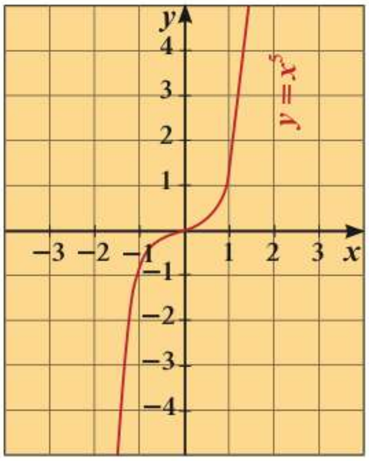
b. $f_2(x) = x$

c. $f_3(x) = 2x^4$

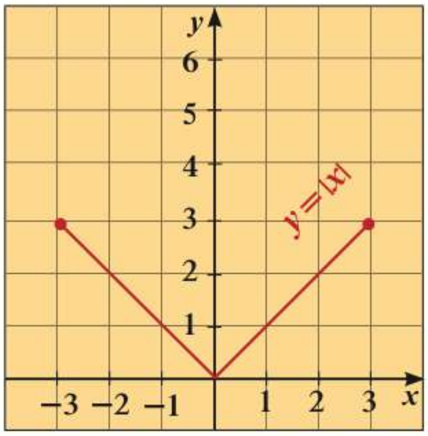
d. $f_4(x) = (x+3)^3$

الأشكال التالية تمثل دوال. صف تماثل كل دالة ثم وضّح هل هي زوجية أم فردية أم ليست زوجية وليست فردية.

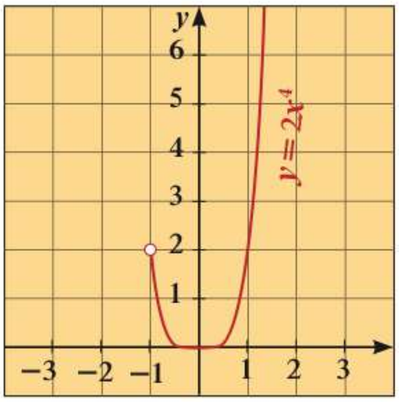
a $y = x^5, \quad x \in \mathbb{R}$



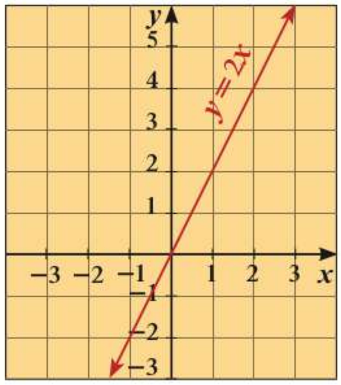
b $y = |x|, \quad x \in [-3, 3]$



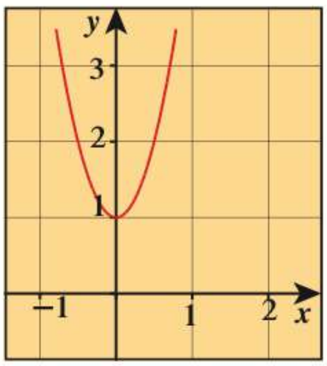
c $y = 2x^4, \quad x \in (-1, \infty)$



d $y = 2x, \quad x \in \mathbb{R}$

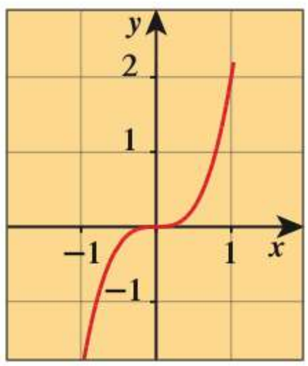


b



$y = 4x^2 + 1$

c



$y = 2x^3$

أوجد معكوس الدالة: $f(x) = \sqrt{x + 2}$

أوجد معكوس الدالة: $f(x) = \sqrt{x - 4}$

عبد السلام البيومي

الدوال الحدودية

دالة كثيرة حدود

$$P(x) = \boxed{2}x^3 - 5x^2 - 2x - 5$$

المعامل الرئيسي — حد تكعيبي — حد تربيعي — حد خطي — حد ثابت

الحدودية	الدرجة	الاسم باستخدام الدرجة	عدد الحدود	الاسم باستخدام عدد الحدود
6	الصفرية	ثابتة	1	أحادية
$x + 3$	الأولى	خطية	2	ثنائية
$3x^2 + 5x - 2$	الثانية	تربيعية	3	ثلاثية
$2x^3 - 5x^2$	الثالثة	تكعيبية	2	ثنائية
$-x^4 + x^3 - 1$	الرابعة	ذات القوة الرابعة	3	ثلاثية

اكتب كل كثيرة حدود بالصورة العامة ثم صنفها تبعًا للدرجة وعدد الحدود.

a $-7x + 5x^4$

b $5x^3 - (4x^2 + 5x^3) + 2x^2$

c $(2l - 5)(l^2 - 1)$

عبد السلام البيومي

العوامل الخطية لكثيرات الحدود

اكتب التعبير: $(2-x)(x+1)(x+1)(1+x)$ في شكل كثيرة حدود في الصورة العامة.

حلّل كثيرة الحدود: $2x^3 + 10x^2 + 12x$ إلى عوامل ثم تحقق.

2 حلّل كثيرة الحدود: $12x^3 - 12x^2 + 3x$ إلى عوامل، ثم تحقق.

عوامل وأصفار دالة كثيرة الحدود

نظرية العامل

المقدار $(x - a)$ هو عامل خطي لكثيرة الحدود $\Leftrightarrow$ a صفر من أصفار كثيرة الحدود.

اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث أصفارها: $0 , -2 , -4$

اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث 3 صفر مكرر مرتين و $1-$ صفر بسيط.

عبد السلام البيومي

قسمة كثيرات الحدود

$x^2+3x-12$ على $(x-2)$

b $x-8\overline{\left)2x^2-19x+24\right.}$

استخدام القسمة التركيبية

استخدم القسمة التركيبية لقسمة $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ على $(x + 2)$

استخدم القسمة التركيبية لقسمة $x^3 + 4x^2 + x - 6$ على $(x + 1)$

نظرية الباقي

إذا قسمت كثيرة الحدود $f(x)$ من الدرجة $n \geq 1$ على $(x - a)$ حيث a ثابت، فإن باقي القسمة هو $f(a)$

استخدم نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $f(x) = 2x^4 + 6x^3 - 5x^2 - 60$ على $(x + 1)$، ثم تحقق من صحة الإجابة باستخدام القسمة التركيبية.

أوجد مجموعة حل المعادلة: $2x^3 - 4x^2 = 10x$

أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي:

$x^3 - x^2 - 3x = 0$

$x^3 - 3x = 6 - 2x^2$

حاول أن تحل

3 أوجد مجموعة حل المعادلة: $x^3 + 2x^2 - 4x = 8$

الأصفار النسبية الممكنة

الأصفار النسبية الممكنة لِـ:

a $f(x) = x^3 + 5x - 3$

هي: ....

b $g(x) = x^3 - 27$

هي: ....

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

$$x^3 - 4x^2 + 3 = 0$$

$$x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x = 2$$

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$$

2 $x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x = 18$

عبد السلام البيومي

الوحدة الرابعة

استكشاف النماذج الأسية

الدالة:

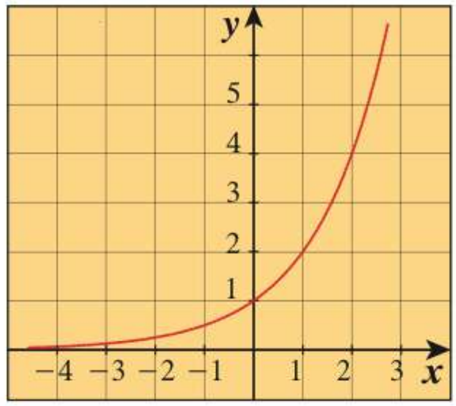
$y = ab^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

(عدد ثابت) $a \in \mathbb{R}^*$

(الأساس) $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

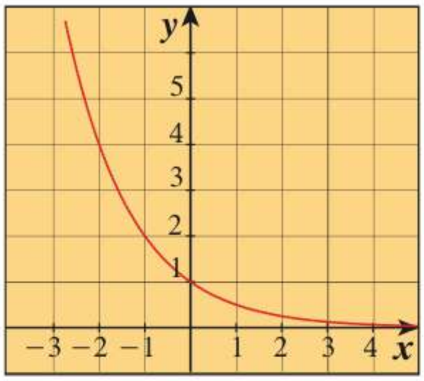
تسمى دالة أسية.

نمو أسي



عندما تكون $1 < b$، فإن الدالة تمثل نموًّا أسيًّا، وتكون b هي عامل النمو.

تضاؤل أسي



عندما تكون $0 < b < 1$، فإن الدالة تمثل تضاؤلًا أسيًّا، وتكون b هي عامل التضاؤل.

مثال (1)

مثّل بيانيًّا الدالة $y = 2^x$. ثم بيّن ما إذا كانت الدالة تمثل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا وحدّد العامل.

مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال التالية، ثم بيّن ما إذا كانت تمثل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا وحدّد العامل.

$y = 4(2)^x$

$y = 3^x$

مثّل بيانيًّا الدالة $y = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x$

ثم بيّن ما إذا كانت الدالة تمثل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا وحدّد العامل.

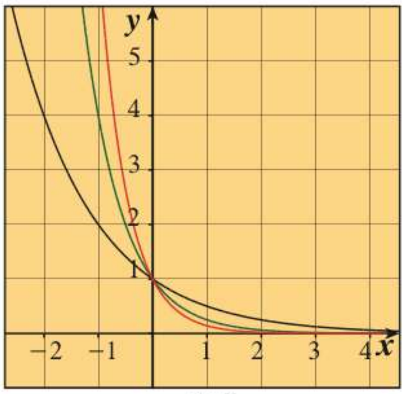
b $y = 2(0.1)^x$

اكتب دالة أسية بالصورة $y = ab^x$ يمر بيانها بالنقطتين: $S(3, 16)$ ، $H(2, 4)$

الدوال الأسية وتمثيلها بيانيًا

التمثيل البياني للدوال الأسية

أولًا: عندما a موجب

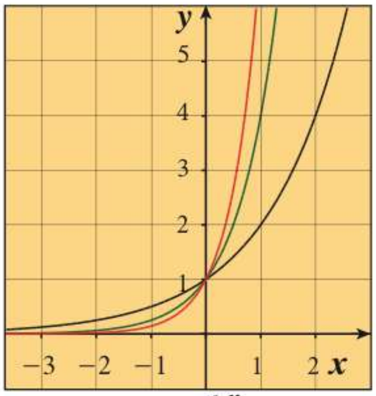


$y = b^{-x}$

(4) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2)^{-x}$

(5) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x = (4)^{-x}$

(6) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x = (7)^{-x}$



$y = b^x$

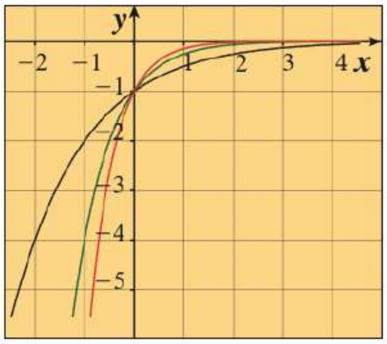
(1) $y = 2^x$

(2) $y = 4^x$

(3) $y = 7^x$

نلاحظ أن بيان الدالة $y = b^{-x}$ حيث $b \neq 1$, $b > 0$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = b^x$ في المحور الصادي.

ثانيًا: عندما a سالب

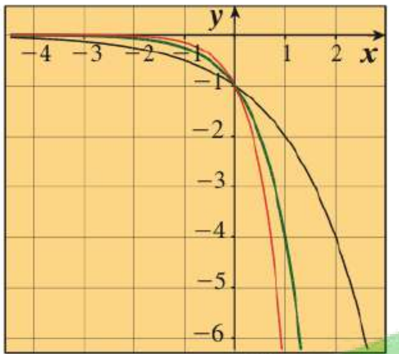


$y = -b^{-x}$

(4) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x = -(2)^{-x}$

(5) $y = -\left(\frac{1}{4}\right)^x = -(4)^{-x}$

(6) $y = -\left(\frac{1}{7}\right)^x = -(7)^{-x}$



$y = -b^x$

(1) $y = -2^x$

(2) $y = -4^x$

(3) $y = -7^x$

نلاحظ أيضًا أن بيان الدالة $y = -b^{-x}$ حيث $b \neq 1$, $b > 0$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = -b^x$ في المحور الصادي.

ملاحظة: من أولًا وثانيًا نلاحظ أن بيان الدالة $y = -b^x$ حيث $b \neq 1$, $b > 0$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = b^x$ في المحور السيني.

مثّل بيانيًا كلًّا من: $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $y = 5^x$ في نفس المستوى الإحداثي.

مثّل بيانيًا في نفس المستوى الإحداثي.

① $y = -4(2)^x$

② $y = 4(2)^x$

3 مثّل كل دالة مما يلي وذلك بانسحاب لبيان دالة المرجع: $y = 2(3)^x$

a $y_1 = 2(3)^{x+1}$

$y_2 = 2(3)^x - 4$

$y_3 = 2(3)^{x-3} + 1$

الرمز e

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد القيم التالية (مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من ألف):

e^{2}, e^{-1}, $e^{\frac{1}{3}}$, $e^{\frac{3}{4}}$, $4e^{-1.5}$

عبد السلام البيومي

الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانيًّا

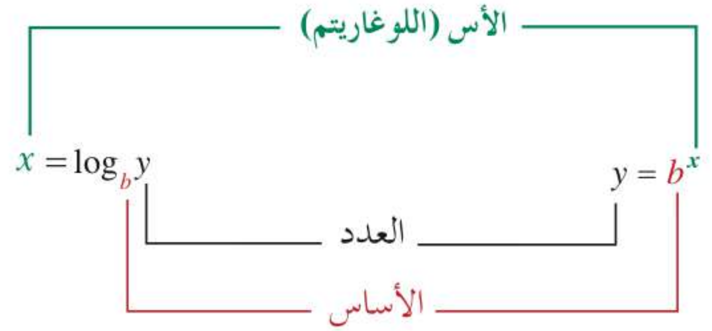
تعريف

يتعين عدد حقيقي x بحيث يكون:

$$\forall y \in \mathbb{R}^+ \quad , \quad b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

$$y = b^x \iff \log_b y = x$$

الصورة الأسية	الصورة اللوغاريتمية
$7^2 = 49$	$\log_7 49 = 2$
$10^3 = 1\,000$	$\log_{10} \ldots = \ldots$
$3^5 = 243$	$\log_3 \ldots = \ldots$
$4^{\cdots} = \ldots$	$\log_4 2 = \frac{1}{2}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$	
$\ldots$	$\log_5 \frac{1}{25} = -2$
$12^0 = 1$	$\ldots$



مثال (2) أوجد قيمة $\log_8 16$.

حاول أن تحل 2 أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

a $\log_{10} 100$

b $\log_9 27$

c $\log_{64} \frac{1}{32}$

التمثيل البياني للدوال اللوغاريتمية

تعريف: الدالة اللوغاريتمية

$\forall x > 0 \ , \ b \in \mathbb{R}^{+} - \{1\}$

فإن الدالة:

$f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R} \ , \ f(x) = \log_b x$

تسمى دالة لوغاريتمية أساسها b

مثال (4) أوجد مجال تعريف كل من الدوال التالية:

a) $y = \log_5 (6x)$

b) $f(x) = \log(3 - x)$

c) $g(x) = \log_2 (x^2)$

d) $h(x) = 4\log_3 (5 - 3x)$

حاول أن تحل 4 أوجد مجال تعريف كل من الدوال التالية:

a) $y = 2 + \log_5 (x - 2)$

b $f(x) = \log_4(x^2 + 1)$

c $g(x) = \log_7(1 - x)$

مثال (5) استخدم خواص الانعكاس لرسم بيان الدالة: $y = \log_2 x$ ومعكوسها.

انسحاب الدوال اللوغاريتمية

التمثيل البياني للدالة: $y=\log_b(x-h)+k$ هو انسحاب لبيان دالة المرجع: $y=\log_b x$، h وحدة أفقيًا، k وحدة رأسيًا.

ارسم بيان الدالة: $y=\log_6(x+2)-3$ مستخدمًا دالة المرجع.

ارسم بيان الدالة: $y=\log_3(x-3)+1$ مستخدمًا دالة المرجع.

خواص اللوغاريتمات

خواص اللوغاريتمات

$\forall m,n,b \in \mathbb{R}^+ , b \neq 1$

خاصية الضرب $\log_b mn = \log_b m + \log_b n$

خاصية القسمة $\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$

خاصية القوى $\log_b m^k = k \log_b m \ , k \in \mathbb{R}$

أعد كتابة كل مقدار لوغاريتمي مما يلي بصورة لوغاريتم واحد:

1. $\log_5 2 + \log_5 6$

2. $3\log_b 4 - 3\log_b 2$

3. $4\log_3 2 - \log_3 5 + \log_3 10$

أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي حيث a، b، c أعداد حقيقية موجبة.

a. $\log_2 (7b)$

b. $\log\left(\frac{c}{3}\right)^2$

c. $\log_7 (a^3 b^4)$

ملاحظات:

1. $\log_b 1 = 0$
2. $\log_b b = 1$
3. $\log_b b^m = m$

حيث b , m عددان حقيقيان موجبان $b \neq 1$

إذا كان $\log 2 \approx 0.301 \quad , \quad \log 3 \approx 0.477 \quad , \quad \log 5 \approx 0.699$

استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة.

(قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف).

a $\log 20$

b $\log 0.5$

c $\log \frac{8}{3}$

d $\log 600$

a $\log 30$

b $\log 4.5$

المعادلات الأسية واللوغاريتمية

حل معادلات أسيّة

$$\forall a , b \in \mathbb{R}^+ , m \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$
$$a = b \Leftrightarrow \log_m a = \log_m b$$

حل المعادلة التالية، ثم تحقق:

$$7^{3x} = 20$$

$$3^{x+4} = 101$$

حل كلًّا من المعادلات التالية:

$$x^{\frac{2}{3}} = 25 \ , \quad x > 0$$

$$\sqrt[3]{u^4} - 5 = 11 \ , \quad u > 0$$

قاعدة تغيير الأساس

$\forall m, b, c \in \mathbb{R}^+, \ b \neq 1, \ c \neq 1$

$\log_b m = \frac{\log_c m}{\log_c b}$

استخدم قاعدة تغيير الأساس لحل المعادلة: $7^{5x} = 3\,000$

حل معادلات لوغاريتمية

حل المعادلة: $\log(3x+1) = 5$

حل المعادلة: $\log(7-2x) = -1$

حل المعادلة: $\log 6-\log 3x=-2$

$$\log_2(x-1)-\log_2(x+3)=\log_2\left(\frac{1}{x}\right) \qquad , \qquad x\in(1,\infty)$$

$\log_{x+1} 32 = 5 \quad , \quad x \in (0,\infty)$

$\log x^2 - \log(x^2 - x) = 1 \ , \ x \in (1,\infty)$

$$\log_4(x+6)-\log_4 12=\log_4 2-\log_4(x-4), \quad x\in(4,\infty)$$

اللوغاريتم الطبيعي

تدريب

أكمل ما يلي حيث $k, m, n \in \mathbb{R}^+$.

1. $ln(mn) = ...$ (خاصية ....)
2. $ln\frac{m}{n} = ...$ (خاصية ....)
3. $ln\, m^k = ...$ (خاصية ....)
4. $ln\ \mathrm{e} = ...$
5. $ln\ \mathrm{e}^k = ...$
6. $\mathrm{e}^{ln\ k} = ...$

مثال (1) استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل: $8\mathrm{e}^{2x}=20$

استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل: $e^{4(x+1)} = 32$.

حل المعادلة: $ln(3x+5) = 4$

$5 + ln\left(\frac{x+2}{3}\right) = 7$

$e^{\frac{2x}{5}} + 7.2 = 9.1$

استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل $7e^{2x} + 2.5 = 13$

a $e^{x+1} = 30$

b $2^{2x-3} + 4 = 7$

المتجه في المستوى

الكميات القياسية والكميات المتجهة

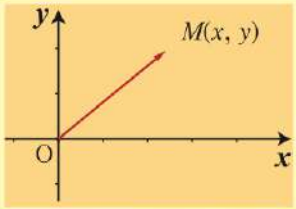
كميات قياسية (عددية): هي كميات يلزم لتعريفها **مقدار عددي ووحدة قياس**.

مثل: الحرارة – المسافة – العمر – الحجم – الزمن – الكتلة.

كميات متجهة: هي كميات يلزم لتعريفها **مقدار عددي واتجاه**.

مثل: السرعة – العجلة – الإزاحة – القوة – الوزن.

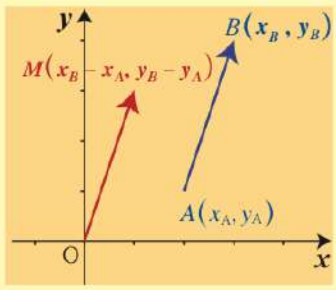
متجه الموضع



تعريف

القطعة الموجهة $\overrightarrow{OM}$ التي بدايتها نقطة الأصل ونهايتها

$M(x\ ,y)$ تسمى «متجه الموضع» ويمثّلها الزوج المرتب $(x\ ,y)$



تعريف

$\overrightarrow{AB}$ قطعة موجهة في المستوى الإحداثي

حيث $A(x_A, y_A)\ ,\ B(x_B, y_B)$

متجه الموضع لهذه القطعة هو القطعة الموجهة $\overrightarrow{OM}$

حيث $M(x_B - x_A\ ,\ y_B - y_A)$

مثال (1)

ليكن: $A(2, -1), B(7, 3), C(4, 2), M(3, -2)$

a) عيّن الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضع لكل من: $\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{BC}\ ,\ \overrightarrow{CA}$

b) إذا كان متجه الموضع $\overrightarrow{OM}$ يمثّل القطعة الموجهة $\overrightarrow{AE}$، فأوجد إحداثيات E

حاول أن تحل

1 ليكن: $A(1,-3),\ B(2,2),\ C(2,3),\ D(-2,-1)$

a عيّن الزوج المرتب الذي يمثّل متجه الموضع لكل من: $\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{BD}$

b متجه الموضع $\overrightarrow{DC}$ يمثّل القطعة الموجهة $\overrightarrow{KD}$. أوجد إحداثيات K

تكافؤ قطعتين موجهتين

تكون قطعتان موجهتان متكافئتين إذا كان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه ولكل قطعتين موجهتين متكافئتين متجه الموضع نفسه.

خاصية

إذا كانت القطعتان الموجهتان $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ متكافئتين، فإن الشكل $ABDC$ هو متوازي أضلاع حيث النقاط A, B, C, D ليست على استقامة واحدة.

2 إذا كانت $F(5,13), E(3,11), D(-2,-7)$

فأوجد مركبات كل من المتجهات التالية: $<\overrightarrow{DE}>\ ,\ <\overrightarrow{ED}>\ ,\ <\overrightarrow{EF}>$

طول (معيار) متجه واتجاهه

تعريف

لكل متجه $\overrightarrow{U} = < x, y >$ معيار (طول) يرمز له بالرمز $\| \overrightarrow{U} \|$

ويعطى بالعلاقة: $\| \overrightarrow{U} \| = \sqrt{x^2 + y^2}$

يحدد اتجاه المتجه $\overrightarrow{U}$ بالزاوية الموجهة θ التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

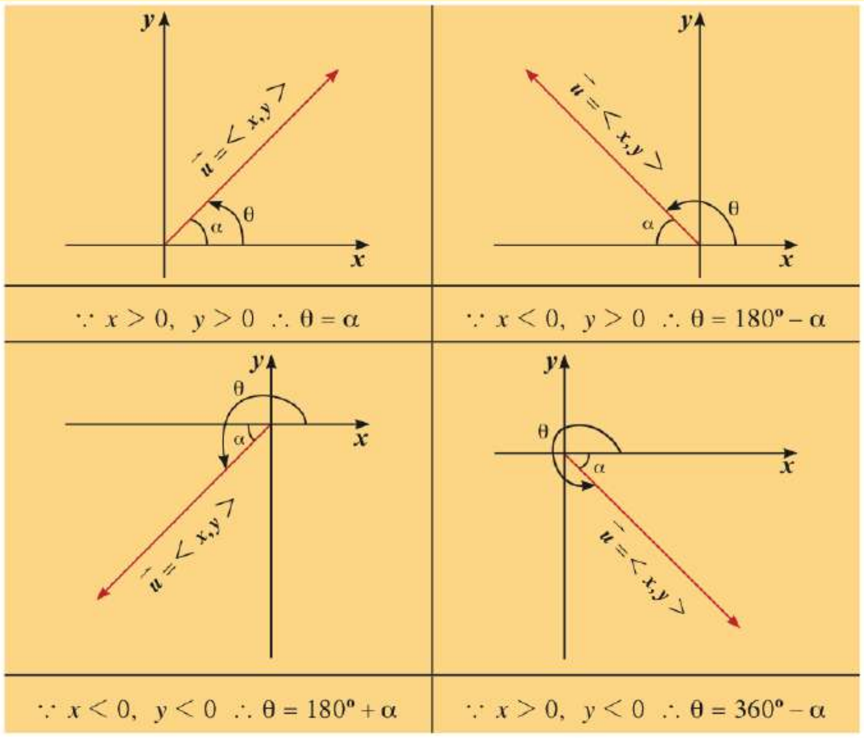
حيث $0^\circ \le \theta < 360^\circ$

$\| \vec{u} \| = \sqrt{x^2 + y^2}$

إذا كانت α زاوية الإسناد للزاوية θ فإن:

$$\theta = \begin{cases} \alpha & \text{عندما } x > 0 \, , \, y > 0 \\ 180^\circ - \alpha & \text{عندما } x < 0 \, , \, y > 0 \\ 180^\circ + \alpha & \text{عندما } x < 0 \, , \, y < 0 \\ 360^\circ - \alpha & \text{عندما } x > 0 \, , \, y < 0 \end{cases}$$

وتحدد زاوية الإسناد α بالعلاقة: $\tan\alpha = \left| \dfrac{y}{x} \right|$



$\because x > 0, \ y > 0 \ \therefore \theta = \alpha$

$\because x < 0, \ y > 0 \ \therefore \theta = 180^\circ - \alpha$

$\because x < 0, \ y < 0 \ \therefore \theta = 180^\circ + \alpha$

$\because x > 0, \ y < 0 \ \therefore \theta = 360^\circ - \alpha$

لكل من المتجهات التالية ارسم متجه الموضع ثم أوجد طول (معيار) المتجه وقياس الزاوية θ التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. (استخدم آلتك الحاسبة).

$\vec{t} = < -3, -1 >$

$\vec{w} = < 1, -3 >$

متجه الوحدة

تعريف

المتجه $\overrightarrow{U} = < x, y >$ هو متجه وحدة إذا كان معياره يساوي الوحدة أي أن:

$$\|\overrightarrow{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

إذا كان $\overrightarrow{u} = < \frac{2}{\sqrt{5}}, y >$ فأوجد قيمة y بحيث يصبح $\overrightarrow{u}$ متجه وحدة.

إذا كان $\overrightarrow{v} = < x \ , \ \frac{12}{13} >$. فأوجد قيمة x بحيث يصبح $\overrightarrow{v}$ متجه وحدة.

تساوي متجهين

ليكن: $\overrightarrow{A} = < x_A , y_A > , \overrightarrow{B} = < x_B , y_B >$

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} \Longleftrightarrow x_A = x_B \ , \ y_A = y_B$$

إذا كانت $S(-1, 6)$, $R(-4, 2)$, $P(3, 4)$, $O(0, 0)$ في المستوى الإحداثي فأثبت أن: $\langle \overrightarrow{RS} \rangle = \langle \overrightarrow{OP} \rangle$.

ليكن المتجهان $\overrightarrow{A} = \langle 2x+1,\ 3y-1 \rangle ,\ \overrightarrow{B} = \langle 3, 2 \rangle$ ، حيث x , y عددان حقيقيان.

أوجد قيمتا x , y اللتين تحققان $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$.

ليكن المتجهان $\overrightarrow{A} = \langle -2x+3, 4y-1 \rangle ,\ \overrightarrow{B} = \langle -1, 3 \rangle$ ، حيث x , y عددان حقيقيان.

أوجد قيمتا x , y اللتين تحققان $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$.

إذا كان $\overrightarrow{A} = < -1, 2 >$ فأوجد:

a $2\overrightarrow{A}$

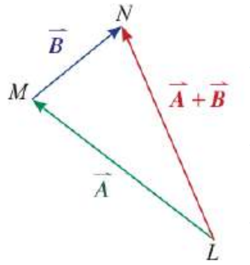
b $-\overrightarrow{A}$

c $0.5\overrightarrow{A}$

باستخدام خواص المتجهات أثبت أن النقاط $K(0,-1)$, $L(2,3)$, $M(-2,-5)$ على استقامة واحدة.

جمع المتجهات وطرحها

لأي ثلاث نقاط في المستوى تسمى العلاقة: $< \overline{LM} > + < \overline{MN} > = < \overline{LN} >$ علاقة شال.



خواص عملية جمع المتجهات في المستوي

لأي ثلاثة متجهات $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ في المستوي

- خاصية الإبدال في جمع المتجهات $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$
- خاصية العنصر المحايد $\vec{0}$ $\vec{A}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{A}=\vec{A}$
- خاصية التجميع في جمع المتجهات $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$
- خاصية المعكوس الجمعي $\vec{A}+(-\vec{A})=(-\vec{A})+\vec{A}=\vec{0}$
- خاصية الحذف $\vec{A}+\vec{C}=\vec{B}+\vec{C} \Rightarrow \vec{A}=\vec{B}$
- خاصية التوزيع مع عدد حقيقي غير الصفر $K(\vec{A}+\vec{B})=K\vec{A}+K\vec{B}$

$$\vec{K} = < \overline{AB} > + < \overline{CA} > + < \overline{BC} > + < \overline{AB} >$$

$ABCD$ مضلع. أوجد:

b $<\overrightarrow{AD}>+<\overrightarrow{CA}>+<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{DB}>$

إذا كان $\overrightarrow{A}=<4,-2>, \overrightarrow{B}=<-7,5>$ فأوجد.

a $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$

a $\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}$

b $3\overrightarrow{A}+5\overrightarrow{B}$

b $4\overrightarrow{A}-6\overrightarrow{B}$

ABC مثلث. أثبت أن: $<\overrightarrow{AB}>-<\overrightarrow{AC}>=<\overrightarrow{CB}>$

لتكن النقاط: $A(-5,1)$, $B(2,-3)$, $C(-1,0)$ على المستوى الإحداثي حيث مركزه النقطة O.

اكتب كلًّا من المتجهات $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$

الضرب الداخلي

ناتج الضرب الداخلي لهما ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}$ يساوي ناتج ضرب طولي المتجهين في جيب تمام قياس الزاوية المحددة بهما.

أي أن: $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = \|\overrightarrow{A}\| \times \|\overrightarrow{B}\| \times \cos(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B})$, $0^\circ \leqslant m(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}) \leq 180^\circ$

قانون

إذا كان $\overrightarrow{A} = < x_A , y_A >, \overrightarrow{B} = < x_B , y_B >$ متجهين في المستوي الإحداثي

فإن $\overrightarrow{A} . \overrightarrow{B} = x_A . x_B + y_A . y_B$

فإذا كان: $\overrightarrow{A} = < x_A , y_A >$ فإن $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A} = x_A^2 + y_A^2 = \|\overrightarrow{A}\|^2$

$\overrightarrow{A} \perp \overrightarrow{B} \Leftrightarrow \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = 0$ حيث $\overrightarrow{A} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{B} \neq \overrightarrow{0}$

إذا كان $\overrightarrow{u} = < 3,0 >$, $\overrightarrow{v} = < 3,3 >$ فأوجد $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$.

إذا كانت $A(-2,-3), B(1,1), C(-3,-1)$ هي رؤوس المثلث ABC.

a) اكتب كلًّا من المتجهين $< \overline{CB} >$, $< \overline{CA} >$ بدلالة متجهي الوحدة $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$.

b) أوجد قيمة $< \overline{CA} > \cdot < \overline{CB} >$

c) أثبت أن المثلث ABC قائم في $\hat{C}$

3 إذا كانت النقاط $A(6,-1)\,,\,B(3,2)\,,\,C(2,1)$

a اكتب كلًا من المتجهين $\overrightarrow{BA}\,,\overrightarrow{BC}$ بدلالة متجهي الوحدة $\vec{i}\,,\,\vec{j}$

b أوجد قيمة $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

c أثبت أن المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

إذا كان $\overrightarrow{A}=<-2,3>\,,\,\overrightarrow{B}=<1,y>$ وكان $\overrightarrow{A}\perp\overrightarrow{B}$ فأوجد قيمة y

4 إذا كان $\overrightarrow{A} = < 3, -1 >, \overrightarrow{B} = < x, -2 >$ وكان $\overrightarrow{A} \perp \overrightarrow{B}$ فأوجد قيمة x

$\overrightarrow{A} \parallel \overrightarrow{B} \Longleftrightarrow \overrightarrow{A} = k\,\overrightarrow{B}$ حيث $\overrightarrow{A} \neq \overrightarrow{0}\ ,\ \overrightarrow{B} \neq \overrightarrow{0}$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

a أثبت أن: $\overrightarrow{A} \parallel \overrightarrow{B}$ حيث $\overrightarrow{A} = < -7, 5 >\ ,\ \overrightarrow{B} = < 14, -10 >$

b إذا كان $\overrightarrow{A} \parallel \overrightarrow{B}$ حيث $\overrightarrow{A} = < 6, -8 >\ ,\ \overrightarrow{B} = < 2, y >$ فأوجد قيمة y

a أثبت أن: $\overrightarrow{A} \parallel \overrightarrow{B}$ حيث $\overrightarrow{A} = < 3, -2 > \ , \ \overrightarrow{B} = < 6, -4 >$

b إذا كان $\overrightarrow{A} \parallel \overrightarrow{B}$ ، $\overrightarrow{A} = < \frac{7}{3}, \frac{2}{3} > \ , \ \overrightarrow{B} = < x, \frac{4}{5} >$ فأوجد x

خواص الضرب الداخلي

$\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$ ثلاثة متجهات غير صفرية في المستوى، k عدد حقيقي.

- خاصية الإبدال: $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{A}$
- خاصية التجميع مع عدد حقيقي غير صفري: $\overrightarrow{A} \cdot (k\overrightarrow{B}) = (k\overrightarrow{A}) \cdot \overrightarrow{B} = k(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B})$
- خاصية توزيع الضرب الداخلي على جمع المتجهات أو طرحها: $\overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{B} \pm \overrightarrow{C}) = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} \pm \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C}$

$\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ متجهان في المستوي، حيث $\|\overrightarrow{A}\| = 3, \|\overrightarrow{B}\| = 2, \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = -3$

أوجد قيمة $(4\overrightarrow{A} - 3\overrightarrow{B}) \cdot (\overrightarrow{A} + 2\overrightarrow{B})$

6 $\vec{A}\,,\,\vec{B}$ متجهان في المستوي، حيث $\|\vec{A}\| = 3\,,\|\vec{B}\| = 4\,,\vec{A}\bullet\vec{B} = 5$

أوجد قيمة $(3\vec{A} - 2\vec{B})\bullet(-\vec{A} + 3\vec{B})$

قياس الزاوية بين متجهين

إذا كان $\vec{A}\,,\vec{B}$، متجهين وكان $\vec{A} \neq \vec{0}\,,\,\vec{B} \neq \vec{0}$ فإن:

$$\cos(\vec{A},\vec{B}) = \frac{\vec{A}\bullet\vec{B}}{\|\vec{A}\|\bullet\|\vec{B}\|} \quad , 0^\circ \leq m(\vec{A},\vec{B}) \leq 180^\circ$$

مثال (7) إذا كان $\|\vec{A}\| = 5,\ \|\vec{B}\| = 6,\ \vec{A}\bullet\vec{B} = 15$

فأوجد قياس الزاوية $(\vec{A},\,\vec{B})$

7 إذا كان $\|\overrightarrow{A}\| = 3, \|\overrightarrow{B}\| = 2, \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = -3\sqrt{3}$

فأوجد قياس الزاوية $(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})$

أوجد قياس الزاوية المحددة بالمتجهين: $\overrightarrow{A} = <2, 2\sqrt{3}>, \overrightarrow{B} = <-4, 4\sqrt{3}>$

أوجد قياس الزاوية المحددة بالمتجهين: $\vec{A} = \langle 6, 3 \rangle, \vec{B} = \langle 3, -1 \rangle$

عبد السلام البيومي

الوحدة السادسة

المجتمع الإحصائي والمعاينة

أساليب جمع البيانات

1 – الحصر الشامل

2 – المعاينة

أنواع البيانات

أنواع البيانات	الصفات	أمثلة
بيانات كيفية	اسمية	لون العيون – لون الشعر
	مرتبة	المستوى العلمي – الدرجات التقديرية
بيانات كمية	متقطعة	عدد طلاب الفصل – نقاط مباراة كرة السلة
	مستمرة	أطوال القامات – الأوزان – درجات الحرارة

حاول أن تحل

3 حدد نوع البيانات في كل مما يأتي:

a عدد أعضاء فريق كرة القدم.

b الوظيفة (ضابط، محاسب، محام، تاجر، مدرس، ...)

c أطوال قامات طلاب الصف الحادي عشر.

d تقديرات الطلاب في مادة اللغة الإنجليزية في جامعة الكويت.

طرق جمع البيانات

- المشاهدة والملاحظة
- البريد العادي أو البريد الإلكتروني
- المقابلة الشخصية
- الأبحاث التاريخية والأرشيف
- مواقع التواصل الإجتماعي
- الاستبانة
- الهاتف المنزلي أو الهاتف النقال
- الوثائق والسجلات
- قواعد البيانات

العينات

1 – العينة العشوائية البسيطة

مثال (1) عدد العاملين في مؤسسة هو 90 موظفًا مرقمين من 1 إلى 90. يراد اختيار 7 موظفين لأداء فريضة الحج على نفقة المؤسسة ويتم اختيارهم بطريقة عشوائية. المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف السادس والعمود الرابع.

2 – العينة العشوائية الطبقية

$$\text{كسر المعاينة} = \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}$$

حجم العينة من كل طبقة = كسر المعاينة × حجم الطبقة المناظرة

2 لدراسة الأداء الوظيفي والكفاءة لدى الموظفين في أحد المصارف، تم سحب عينة طبقية مكونة من 7 أفراد من 35 موظفًا موزعين كما يبين الجدول التالي:

المجموع	مستخدمون	محاسبون ومدققون	مدراء أقسام
35	5	20	10

ما حجم كل عينة عشوائية بسيطة مسحوبة من كل طبقة؟

مثال (3)

في إحدى المؤسسات يوجد 100 إداري مرقمين من 100 إلى 199، 200 مهندس وتقني مرقمين من 200 إلى 399، 600 عامل ومستخدم مرقمين من 400 إلى 999. المطلوب سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 18 فردًا لدراسة كفاءة العاملين في هذه المؤسسة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الرابع والعمود الرابع.

3 — العينة العشوائية المنتظمة

$$\text{طول الفترة} = \frac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}}$$

مثال (4)

في أحد المصانع حيث عدد العمال 900 مرقمين من 1 إلى 900، أراد صاحب هذا المصنع مناقشة هؤلاء العمال حول كيفية تحسين الأداء وزيادة الإنتاج. المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها 15، مستخدمًا جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثامن والعمود العاشر.

مثال (5)

يبلغ عدد طلاب إحدى مدارس الكويت 700 طالب مرقمين من 1 إلى 700. أراد مدير المدرسة إرسال 10 طلاب لحضور ندوة حول «حماية الحيوانات المهددة بالانقراض». المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها 10 باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثاني والعشرون والعمود الثالث.

عبد السلام البيومي

القاعدة التجريبية

مثال (1)

إذا كان المتوسط الحسابي لأرباح إحدى الشركات الصغيرة 350 دينارًا والانحراف المعياري 110 والمنحنى التكراري لأرباح هذه الشركة هو على شكل الجرس (توزيع طبيعي).

a طبق القاعدة التجريبية.

b هل وصلت أرباح الشركة إلى 690 دينارًا؟ فسّر ذلك.

الحل:

حاول أن تحل

1 لاحظت شركة تجارية أن المتوسط الحسابي لأرباحها 475 دينارًا بانحراف معياري 115 دينارًا.

a طبق القاعدة التجريبية.

b هل وصلت أرباح هذه الشركة إلى 750 دينارًا؟ فسّر ذلك.

مثال (2)

يعلن مصنع لإنتاج البطاريات المستخدمة في السيارات أن متوسط عمر البطارية من النوع (A) هو 60 شهرًا بانحراف معياري 10 أشهر.
على افتراض أن المنحنى الممثل لتوزيع عمر البطاريات يقترب كثيرًا من التوزيع الطبيعي.

a طبق القاعدة التجريبية.

b أوجد النسبة المئوية للبطاريات من النوع (A) التي يزيد عمرها عن 50 شهرًا بفرض أن ما يعلنه المصنع صحيحًا.

c أوجد النسبة المئوية للبطاريات من النوع (A) والتي يقل عمرها عن 40 شهرًا بفرض أن ما يعلنه المصنع صحيحًا.

عبد السلام البيومي

القيمة المعيارية

$$\text{القيمة المعيارية} = \frac{\text{قيمة المفردة} - \text{المتوسط الحسابي}}{\text{الانحراف المعياري}} \qquad z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

مثال (1) في أحد الاختبارات نال أحد الطلاب درجة 16 من 20 في مادة الرياضيات حيث المتوسط الحسابي 13 والانحراف المعياري 5 ونال أيضًا 16 من 20 في مادة الكيمياء حيث المتوسط الحسابي 14 والانحراف المعياري 4.

ما القيمة المعيارية للدرجة 16مقارنة مع درجات كل مادة؟ أيهما أفضل؟

حاول أن تحل

1 جاءت إحدى درجات طالب في مادة الفيزياء 15 حيث المتوسط الحسابي 14 والانحراف المعياري 3.8 وفي مادة الكيمياء 15 حيث المتوسط الحسابي 13 والانحراف المعياري 7.8

ما القيمة المعيارية للدرجة 15 مقارنة مع درجات كل مادة؟ أيهما أفضل؟

مثال (2)

في نتيجة نهاية العام الدراسي حصلت الطالبة موضي على 64 درجة في مادة اللغة العربية حيث المتوسط الحسابي 69 والانحراف المعياري 8. وحصلت على 48 درجة في مادة الجغرافيا حيث المتوسط الحسابي 56 والانحراف المعياري 10

في أي المادتين كانت موضي أفضل؟

حاول أن تحل

2 يسكن خالد في المدينة A حيث إن طول قامته 180cm والمتوسط الحسابي لأطوال قامات الرجال في هذه المدينة 174cm مع انحراف معياري 12cm. أما صالح فيسكن في المدينة B حيث إن طول قامته 172cm والمتوسط الحسابي لأطوال قامات الرجال في هذه المدينة 165cm مع انحراف معياري 15

أي منهما طول قامته أفضل من الآخر مقارنة مع أطوال الرجال في كل مدينة؟