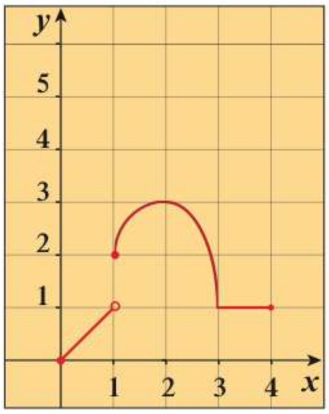
العبقري
فى الرياضيات

الصف الثاني عشر علمي
الفصل الدراسي الأول
2024


إعداد/
عبد السلام البيومي

النهايات والاتصال

تدريب (1)

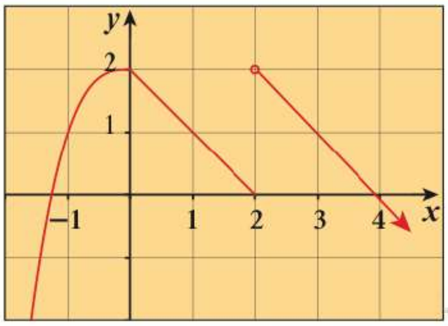


الشكل المقابل يمثّل بيان الدالة: $f:[0,4]\to\mathbb{R}$

أكمل ما يلي:

1. $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)\ldots$
2. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)\ldots$
3. $\lim\limits_{x\to1} f(x)\ldots$
4. $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)\ldots$
5. $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)\ldots$
6. $\lim\limits_{x\to2} f(x)\ldots$
7. $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)\ldots$
8. $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)\ldots$
9. $\lim\limits_{x\to3} f(x)\ldots$
10. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)\ldots$
11. $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)\ldots$

حاول أن تحل



1. يمثّل الشكل المقابل بيان الدالة f.

أوجد إن أمكن:

a. $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$

b. $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

c. $\lim\limits_{x\to2} f(x)$

d. $\lim\limits_{x\to3} f(x)$

2 بفرض أنّ: $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = -3$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 7$

أوجد:

a $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)+g(x)\right)$

b $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$

c $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{8\,f(x)\cdot g(x)}{f(x)+g(x)}\right)$

أوجد:

1 $\lim\limits_{x\to 1}(x^3+3x^2-2x-17)$

2 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$

4 إذا كانت الدالة f:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3 & : x<2 \\ x-1 & : x>2 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

مثال (5)

إذا كانت الدالة g : $g(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & : x \leqslant 0 \\ 1 - 2x & : x > 0 \end{cases}$ فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

5 إذا كانت الدالة g : $g(x) = \begin{cases} x^3 + x & : x > 1 \\ \dfrac{x}{x^2 + 1} & : x \leqslant 1 \end{cases}$ فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$

6 لتكن f : $f(x) = x^2 - |x+2|$

a اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

b أوجد: $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ ، $\lim_{x\to -2^+} f(x)$

c هل للدالة f نهاية عندما $x \to -2$ ؟

مثال (8)

أوجد إن أمكن:

a $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$

b $\lim_{x \to 0} \frac{(2+x)^3 - 8}{x}$

c $\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|}{x^2-1}$

b $\lim_{x \to -7} \frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x}$

c $\lim_{x \to 5} \frac{|x+2|-7}{x^2-25}$

أوجد:

b $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

a $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$

9 أوجد إن أمكن:

a $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$

c $\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{3-\sqrt{x}}$

أوجد:

a $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 6x^2 + 2x - 3}{x + 1}$

b $\lim_{x \to -2} \frac{x^5 + 32}{x + 2}$

10 أوجد إن أمكن:

a $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x - 3}$

b $\lim_{x \to 2} \frac{-x^5 + x^3 + x + 22}{x - 2}$

عبد السلام البيومي

نهايات تشتمل على $-\infty$ ، ∞

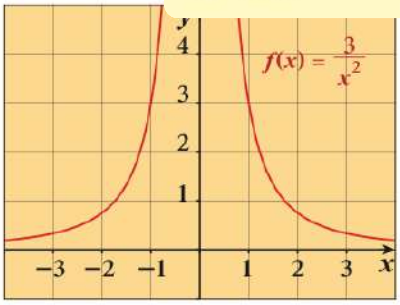
نظرية (7)

لتكن f: $f(x) = \frac{1}{x}$ فإن:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

تدريب

الشكل يمثّل بيان الدالة f : $f(x) = \frac{3}{x^2}$



أكمل ما يلي:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x^2} = ...$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x^2} = ...$$

نظرية (8)

لتكن f : $k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $f(x) = \frac{k}{x^n}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

أوجد النهايات التالية إن أمكن:

a $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+4}$

b $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+5}{x^2+25}$

c $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^3}{5 - 7x^3}$

1 أوجد النهايات التالية إن أمكن:

a $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x - 2}$

b $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + 2}{x^2 + 9}$

c $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 3x + 1}{x^3 + 5}$

صيغ غير معينة

$\lim_{x\to\infty}(-x^5)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to\infty}2x^3=\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}(5x^7)=-\infty$

$\lim_{x\to\infty}(-4x^4)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to\infty}(5x^2)=\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{3}=\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(-4x)=\infty \quad , \quad \lim_{x\to\infty}(-3x^4)=-\infty$

أوجد: $\lim_{x\to\infty}(2x^2-3x+1)$

1 أوجد: $\lim_{x\to\infty}(-3x^2+2x-4)$

نظرية (11)

إذا كانت كل من g , f دالة حدودية حيث:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$$

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_0$$ فإن:

a $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_n}{b_m} : n=m$

b $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0 : n<m$

2 استخدم النظرية السابقة في حساب كل من:

a $\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2+5x+1}{6x^2-x+1}$

b $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{4x^3-2x+3}$

c $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-1}{7-2x^4}$

عبد السلام البيومي

إذا كانت $\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+3}{2x+5} = 3$

فأوجد قيمة كل من الثابتين a , b

3 أوجد قيمة كل من الثابتين b , a إذا كانت $\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{ax^2+bx-3} = -1$

مثال (4)

أوجد: $\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$

4 أوجد:

a $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2 - x}}{x + 1}$

b $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x - 5}{\sqrt{x^2 - 9}}$

عبد السلام البيومي

نهايات بعض الدوال المثلثية

نظرية (12)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad , \quad$$ حيث x بالراديان

نتيجة (1)

إذا كان b , a عددين حقيقيين، $b\neq 0$, $a\neq 0$ فإن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b} \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{bx}{\sin ax}=\frac{b}{a}$$

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\cos x=1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\tan x=0$$

أوجد النهاية:

1 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x^2-x}$

2 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x\cos x}$

c $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$

3 $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1}$

2 أوجد:

a $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2 \tan x}$

b $\lim_{x \to 0} \frac{3 \tan x + x^2 \cos x}{5x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$

3 أوجد:

b $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x \tan x - 2x \cos x}{3x}$

a $\lim_{x \to 0} \frac{x\sin x - x^2}{3x^2}$

b $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x + 3x\cos 4x}{5x}$

الاتّصال

لتكن f :
$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x & : \quad x\geq 1 \\ 5x-1 & : \quad x<1 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x=1$.

1 لتكن الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases} x^3+x & : \quad x\leq 0 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & : \quad x>0 \end{cases}$$

ابحث اتصال f عند $x=0$

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & : x < 2 \\ 1 & : x = 2 \\ x^2+1 & : x > 2 \end{cases}$$

3 ابحث اتصال الدالة f عند $x = -1$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x+1} - 2x & : x \neq -1 \\ 2 & : x = -1 \end{cases}$$

عبد السلام البيومي

نظريات الاتصال

دوال متّصلة

1. الدالة f: $f(x) = k$ حيث k ثابت متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
2. الدالة كثيرة الحدود متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
3. الدالة الحدودية النسبية $\frac{f}{g}$ متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.
4. الدالة f: $f(x) = |x|$ متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
5. الدوال المثلثية الأساسية متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.

1 ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي:

a $f(x) = x^2 - 4x + 3 + |x| \quad , \quad c = 3$

b $f(x) = \dfrac{\tan x}{x+1} \quad , \quad c = \dfrac{\pi}{4}$

2 ابحث اتصال الدالة f: $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{2x}{x-2}$ عند $x=1$

اتصال الدوال الجذرية عند نقطة

نظرية (15)

a الدالة الجذرية $y=\sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x=c: c\in\mathbb{R}^+$ ، n عدد صحيح زوجي موجب،
ومتصلة عند كل $x=c: c\in\mathbb{R}$ ، n عدد صحيح فردي أكبر من 1.

b إذا كانت g دالة متصلة عند $x=c$ وكانت $g(c)>0$
فإن الدالة: $f(x)=\sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x=c$

3 ابحث اتصال كل من الدالتين التاليتين عند $x=-2$

a $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+4}$

b $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$

الدالة المركبة

إذا كانت كل من g , f دالتين حقيقيتين وكان مدى الدالة f مجموعة جزئية من مجال الدالة g فإنه يتعين دالة مركبة h:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

4 إذا كانت g , f معرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 3$, $f(x) = 2x + 3$ أوجد:

a $(g \circ f)(x)$ b $(g \circ f)(-1)$ c $(f \circ g)(x)$ d $(f \circ g)(-1)$

5 لتكن: $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, $g(x)=\dfrac{3}{x^2+4}$ أوجد:

a $(f\circ g)(x)$

b $(g\circ f)(\sqrt{3})$

اتصال الدوالّ المركّبة عند نقطة

نظرية (16): اتصال الدوال المركّبة

إذا كانت f متصلة عند c ، و g متصلة عند $f(c)$ فإن الدالّة المركّبة $g \circ f$ متصلة عند c.

مثال (6) لتكن: $f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = \sqrt{x}$. ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

حاول أن تحل **6** لتكن: $g(x) = 2x + 3$, $f(x) = \dfrac{|x|}{x+2}$. ابحث اتصال الدالة $f \circ g$ عند $x = 1$

7 لتكن: $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

الاتصال على فترة

تعريف (9) الاتّصال على فترة مفتوحة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة (a , b) فإننا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة (a , b) إذا كانت f متصلة عند كل x تنتمي إلى الفترة (a , b)

تعريف (10) الاتّصال على فترة مغلقة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة $[a, b]$ فإنّنا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

1. الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة (a, b)
2. الدالة f متّصلة عند $x = a$ من جهة اليمين أي أن: $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$
3. الدالة f متّصلة عند $x = b$ من جهة اليسار أي أن: $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

1. ادرس اتصال الدالة f على $[1,5]$ حيث:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & : \quad x = 1 \\ \dfrac{x^2+1}{x} & : \quad 1 < x < 5 \\ \dfrac{26}{5} & : \quad x = 5 \end{cases}$$

2 ادرس اتصال f على الفترة المبيّنة:

a $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+2}$, $[0,3]$

b $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$, $[0,2]$

مثال (3) ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x\le -1 \\ \dfrac{4}{x+3} & : \quad x>-1 \end{cases}$$

4 لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} 5 & : \quad x=1 \\ ax+b & : \quad 1<x<4 \\ b+8 & : \quad x=4 \end{cases}$$

متصلة على $[1,4]$. أوجد قيم الثابتين $a\ ,\ b$

لتكن f : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-5, 0]$.

5 لتكن f : $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[6, 10]$.

6 لتكن f : $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$.

ادرس اتصال الدالة f على $[1, 3]$.

7 لتكن: $f(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x + 5}$.

ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

عبد السلام البيومي

معدلات التغير وخطوط المماس

الوحدة الثانية

3 نحدّد ميل المماس للمنحنى عند النقطة $P(a\,,f(a))$ بالقيمة m إن وجد:

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

معدل التغير لدالة f عند النقطة $P(a\,,f(a))$ إن وجد هو:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مثال (1) أوجد ميل المماسّ للقطع المكافئ $y=x^2$ عند النقطة $P(2\,,4)$.

المشتقة

تعريف: المشتقّة عند نقطة

مشتقة الدالة f عند $x = a$ هي $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شرط وجود النهاية.

مثال (1)

باستخدام التعريف، أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = 2x^2 + 1$ عند $x = 1$

تعريف (بديل): المشتقّة عند نقطة

مشتقّة دالّة f عند $x = a$ هي :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

شرط وجود النهاية.

باستخدام التعريف البديل. أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = \sqrt{x}$ عند $x = a$ حيث $a > 0$

3 لتكن f : $f(x) = |x - 2|$ ، ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x = 2$.

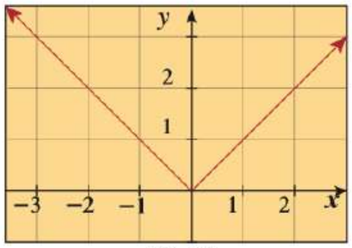
متى تكون $f'(a)$ غير موجودة؟

الدالة f لن يكون لها مشتقّة عند نقطة $P(a\,,f(a))$ إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ غير موجودة.

وتوضّح الأشكال التالية أربع حالات تكون فيها هذه النهاية غير موجودة:

a ركنًا **(Corner)**: تكون المشتقّتان من جهة اليمين ومن جهة اليسار عند التقاء الشعاعين غير متساويتين.

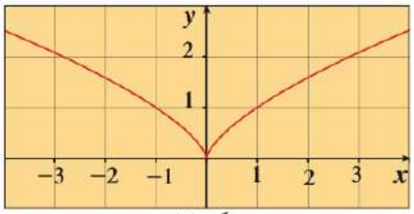
مثال: $f(x)=|x|$



شكل (3)

يوجد ركن عند $x=0$، $f'(0)$ غير موجودة

b نابًا **(Cusp)**: يكون ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطع محددة يقترب من ∞ في إحدى الجهات ويقترب من $-\infty$ في الجهة الثانية ويوجد مماس رأسي عندها. مثال: $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$

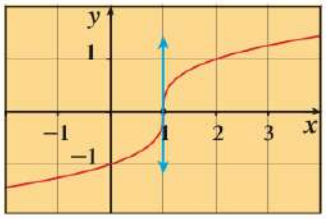


شكل (4)

يوجد ناب عند $x=0$، $f'(0)$ غير موجودة ويوجد مماس رأسي عندها

c مماسًا رأسيًا: يكون المماس للمنحنى عند نقطة محددة رأسيًا.

مثال: $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$

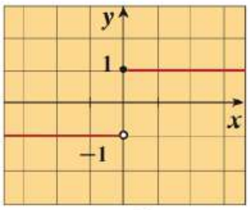


شكل (5)

يوجد مماس رأسي عند $x=1$، $f'(1)$ غير موجودة

d عدم اتصال: تكون المشتقّة من جهة واحدة أو كلّ من الجهتين غير موجودة. مثال:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & ,x<0\\ 1 & ,x\ge 0\end{cases}$$

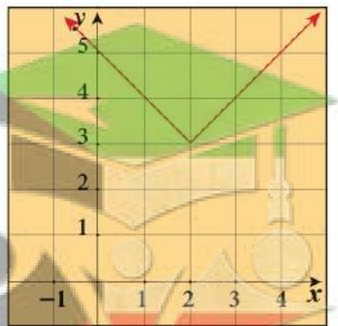


شكل (6)

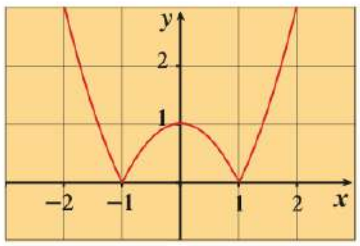
يوجد عدم اتصال عند $x=0$، $f'(0)$ غير موجودة

أوجد كل النقاط في مجال الدالة حيث تكون الدالة غير قابلة للاشتقاق في كل مما يلي:

a $f(x)=|x-2|+3$

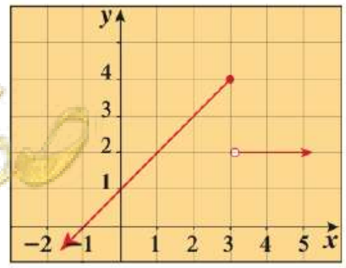


b $f(x)=|x^2-1|$



c $f(x)=(x-1)^{\frac{2}{3}}$

d $f(x)=\begin{cases}2 : x>3\\ x+1 : x\le 3\end{cases}$



معلومة:

$$|x^2-1|=\begin{cases}x^2-1 & : x\le -1\\ 1-x^2 & : -1<x<1\\ x^2-1 & : x\geqslant 1\end{cases}$$

الاشتقاق والاتصال

6 لتكن f : $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & : \quad x\le 2 \\ 3x-2 & : \quad x>2 \end{cases}$ ، ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x = 2$.

9 لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & : x \leqslant -1 \\ x^2 - x - 2 & : x > -1 \end{cases}$ أوجد إن أمكن $f'(-1)$.

قواعد الاشتقاق

عبد السلام البيومي

أوجد $f'(x)$ إذا كان:

1. $f(x) = (2x+1)(3x-2)$
2. $f(x) = 4x^2(x+6)$
3. $f(x) = (x^3-4)^2$

أوجد مشتقة $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{5x^2 + 1}$

3 أوجد مشتقة $f(x) = \dfrac{4x^2 + 2x}{2x^3 + 5}$

معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

والمستقيم العمودي (الناظم) على منحنى الدالة عند النقطة $(a, f(a))$ هو المستقيم العمودي على مماس المنحنى عند تلك النقطة ومعادلته:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم عند النقطة $\left(1 , \frac{2}{3}\right)$ لمنحنى الدالة f حيث $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 2}$

5 أوجد $f'(x)$ حيث $f(x)=\dfrac{-4}{x^2+2x+5}$

لتكن: $y=\dfrac{x^2+3}{2x}$. أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ عند $x=1$

6 لتكن: $y = \frac{3x^2+7}{8x^2}$ ، أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = -1$

لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & : x \leqslant 1 \\ 2x + 1 & : x > 1 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها.

أوجد $f'(x)$ إن أمكن

8 أوجد المشتقة إن أمكن لكل من الدوال المتصلة التالية:

a $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & : \quad x \leqslant 2 \\ 4x-3 & : \quad x > 2 \end{cases}$

b $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & : \quad x<1 \\ 2\sqrt{x} & : \quad x\geqslant 1 \end{cases}$

مشتقات الدوال المثلثية

مثال (1) أوجد المشتقّات للدوال التالية:

a) $y = x^2 \sin x$

b $u = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$

c $f(x) = \sin^2 x$

b $g(x) = \dfrac{x}{\cos x}$

c $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

أوجد مشتقات الدوال التالية:

a $f(x) = \tan x + \cot x$

b $g(x) = \sec x \cdot (1 + \sin x)$

b $g(x) = \sec x \cdot (1 + \sin x)$

2 أوجد مشتقات الدوال التالية:

a $f(x) = \dfrac{1 + \tan x}{\tan x}$

(b) $g(x) = \sec x + \csc x$

(c) $h(x) = \dfrac{\sec x}{\csc x}$

مثال (3) أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \tan x$ عند النقطة $P\left(\frac{\pi}{4}\ ,\ 1\right)$

3 أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \sec x$ عند النقطة $F\left(\frac{\pi}{3} , 2\right)$

عبد السلام البيومي

قاعدة السلسلة

مثال (1) إذا كان $g(x) = x^{10}$, $f(x) = 3x^2 + 1$. فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة

a $(f \circ g)'(x)$

b $(g \circ f)'(-1)$

لتكن: $g(x) = x^{13}$, $f(x) = -2x^3 + 4$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$ ، $(g \circ f)'(0)$

2 لتكن: $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(1)$

صورة أخرى لقاعدة السلسلة

إذا كانت $y = f(u)$, $u = g(x)$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

يتم حسابها عند $u = g(x)$

إذا كانت: $y = u^3 - 3u + 1$, $u = 5x^2 + 2$

فأوجد: $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل

3 لتكن: $y = u^2 + 4u - 3$, $u = 2x^3 + x$ أوجد: $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

6 لتكن: $y = \sqrt[4]{(2x^4 - 3x^2 + 4)^3}$ ، أوجد: y'

مثال (7) أوجد ميل مماس المنحنى $y = \sin^5 x$ عند $x = \frac{\pi}{3}$

7 بيّن أن ميل أي مماس للمنحنى $y = \frac{1}{(-2x-1)^3}$ دائمًا يكون موجبًا حيث $x \neq -\frac{1}{2}$

المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

1 إذا كانت: $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$ فأوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة.

إذا كانت $y = \sin x$. بيّن أن $y^{(4)} = y$.

2 لتكن الدالة: $y = \cos x$. بيّن أن $y^{(4)} + y'' = 0$.

3 أوجد y'' حيث $y = \dfrac{1}{\sin x}$

ثانيًا: الاشتقاق الضمنيّ

أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ في الحالات التالية:

a $y^2 + xy = 7x$

b $y = x + x^2y^5$

4 لتكن: $y^2 = x^2 - 2x$ ، أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$.

5 أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1,1)$

أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $2y = x^2 + \sin y$ عند النقطة $(2\sqrt{\pi}\ ,\ 2\pi)$

6 أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $x^2 + y^2 - 2xy = 1$ حيث $x \neq y$ عند النقطة $(2\,,1)$

للمنحنى الذي معادلته $x = y + 2\sqrt{y}$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(3\ ,\ 1)$

7 للمنحنى الذي معادلته: $y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1 , 1)$

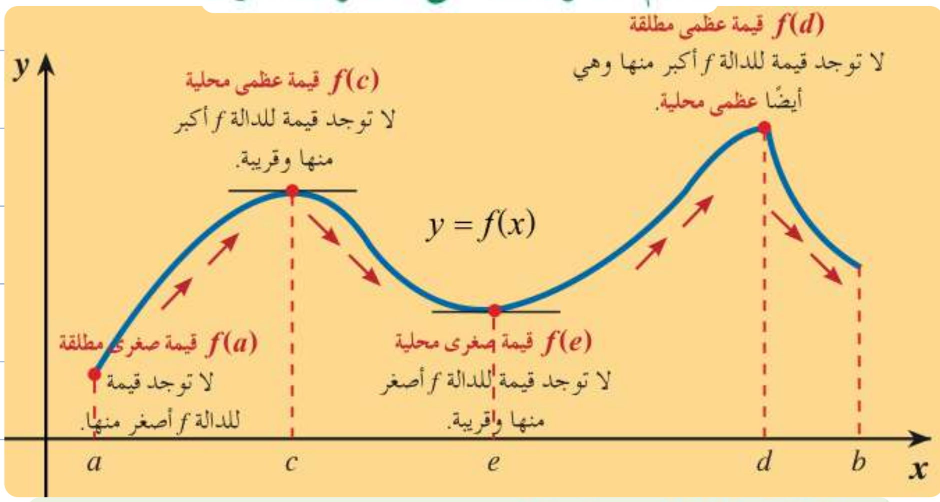
إذا كانت $y = \sqrt{1 - 2x}$ فأثبت أن: $yy'' + (y')^2 = 0$

8 إذا كانت $y = x\sin x$ فأثبت أن $y''' + y' + 2\sin x = 0$

الوحدة الثالثة

تطبيقات على الاشتقاق

القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدوال



تعريف (2): القيم القصوى المحليّة

لتكن $(c , f(c))$ نقطة داخلية للدالة f، D فترة مفتوحة تحوي c، تكون $f(c)$:

a قيمة عظمى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D \quad , \quad f(c) \geqslant f(x)$

b قيمة صغرى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D \quad , \quad f(c) \leqslant f(x)$

تعريف (3): النقطة الحرجة **Critical Point**

النقطة الداخليّة للدالّة f $(c , f(c))$ تسمى نقطة حرجة عندما $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.

2 أوجد النقاط الحرجة لكل من الدوال المتصلة التالية:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 10$$

3 أوجد القيم القصوى المطلقة للدالّة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[-2, 1]$.

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ في الفترة $[-2, 3]$

4 أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ في الفترة $[1, 3]$

تزايد وتناقص الدوال

نظريّة القيمة المتوسّطة

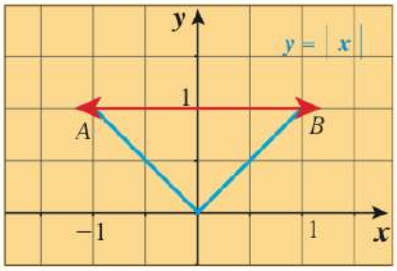
إذا كانت f دالة:

1 متّصلة على الفترة $[a , b]$

2 قابلة للاشتقاق على الفترة (a , b)

فإنّه يوجد على الأقل $c \in (a , b)$ بحيث $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

شروط نظرية القيمة المتوسطة كافية وليست لازمة، اي انه إذا توفرت الشروط فبالتاكيد يوجد c الذي تتبئ به النظرية وعدم تحقق أحد الشرطين لا يعني بالضرورة عدم وجود c والملاحظات التالية توضح ذلك.



شكل (2)

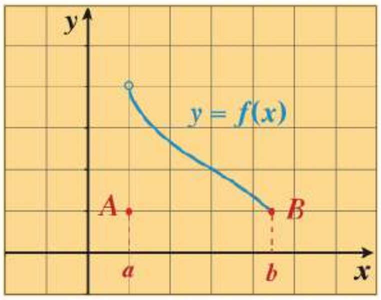
ملاحظات:

1 إذا لم يتحقق أحد شرطي النظرية (3) فإنه قد لا يكون لبيان الدالة مماسّ مواز للقاطع $\overleftrightarrow{AB}$.

فمثلًا، $f(x) = |x|$ دالة متصلة على الفترة $[-1 , 1]$

وقابلة للاشتقاق عند كل x تنتمي إلى $(-1,1)$ باستثناء عند $x = 0$.

بيان الدالة ليس له مماسّ يوازي $\overleftrightarrow{AB}$ (شكل 2).

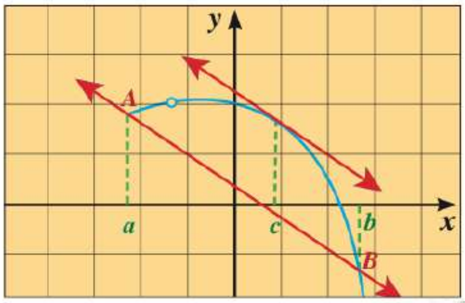


شكل (3)

2 يبيّن شكل (3) بيان دالّة f قابلة للاشتقاق عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a , b)

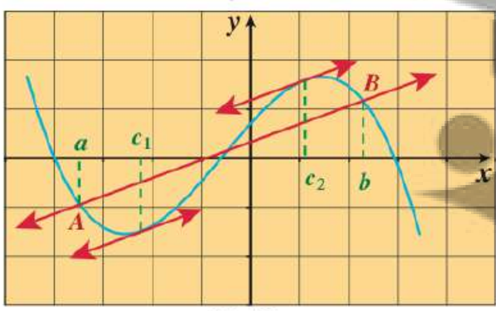
ومتّصلة على الفترة $[a , b)$.

ولكن لا يوجد مماس يوازي $\overleftrightarrow{AB}$.



شكل (4)

3 بيان الدالة في الشكل (4) يبيّن نقطة انفصال وبالرغم من عدم توفر شرط من شروط نظرية القيمة المتوسطة إلّا أنه يوجد مماس للمنحنى عند c يوازي $\overleftrightarrow{AB}$.



شكل (5)

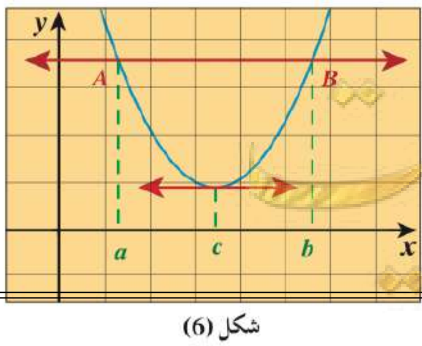
4 يمكن إيجاد أكثر من نقطة واحدة بحيث

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad , \quad c \in (a , b)$$

أي أن المماس عند كل من النقاط

$$(c_1 \, , \, f(c_1)) \; , \; (c_2 \, , \, f(c_2))$$

يوازي $\overleftrightarrow{AB}$ كما في الشكل (5).



شكل (6)

5 في نظرية القيمة المتوسطة إذا كان $f(a) = f(b)$ فإن $f'(c) = 0$ أي أن المماس للمنحنى عند c يوازي القاطع ويوازي محور السينات أي أن المماس أفقي كما في الشكل (6).

بيّن أن الدالّة f : $f(x) = x^2$ تحقّق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 2]$، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

بيّن أن الدالّة $f(x) = x^2 + 2x$ تحقّق شروط نظريّة القيمة المتوسّطة على الفترة $[-3, 1]$،
ثم أوجد قيمة c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

بيّن أن الدالّة f : $f(x) = x^3 + 1$ تحقّق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3, 3]$، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

بيّن أن الدالّة f: $f(x) = x^3 - 3x + 2$ تحقّق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 4]$، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

3 أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

4 إذا كانت f : $f(x) = x^3 - 6x$. حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f.

5 حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$

عبد السلام البيومي

ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f

1 لتكن الدالّة f : $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$. أوجد كلًّا مما يلي:

a النقاط الحرجة للدالة.

b الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.

c القيم القصوى المحلية.

أوجد فترات التقعّر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة f: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

3 أوجد فترات التقعّر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة f : $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

عبد السلام البيومي

رسم بيان دوال كثيرات الحدود

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بيانها.

1 ادرس تغير الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها.

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها.

2 ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها.

عبد السلام البيومي

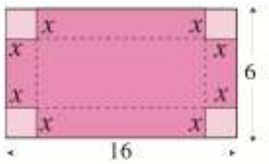
تطبيقات على القيم القصوى

مثال (1) عددان موجبان مجموعهما 100 ومجموع مربعيهما أصغر ما يمكن، ما العددان؟

3 تعطي الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h.

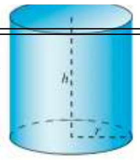
a أوجد الارتفاع $h(\text{cm})$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة.

b ما قيمة هذا الحجم؟



يراد صنع صندوق بدون غطاء بقصّ مربّعات متطابقة طول ضلع كلّ منها x من أركان طبقة صفيح أبعادها $16\ cm$, $6\ cm$ وثني جوانبها إلى أعلى (انظر الشكل المقابل).

أوجد قيمة x بحيث يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن. وما هو حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة؟



طلب إليك تصميم علبة زيت تسع لترًا واحدًا تكون على شكل أسطوانة دائرية قائمة (كما في الشكل المقابل).
ما أبعادها لتكون كمية المعدن المستخدم لصنعها أقل ما يمكن؟

التقدير

أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 95% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 97% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

أوّلًا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع معلوم

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ

إذا كانت σ^2 معلومة و $n > 30$ أو $n \leq 30$.

1. نوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لدرجة ثقة 95% وهي 1.96
2. نوجد هامش الخطأ $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$، حيث σ هي الانحراف المعياري للمجتمع.
3. نوجد فترة الثقة $(\overline{x} - E \ , \ \overline{x} + E)$.

تفسير فترة الثقة

عند اختيار عينات عشوائية مختلفة متساوية في الحجم (n) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95% من فترات الثقة هذه تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع (μ).

فمثلًا عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه (n) وفي كل مرة نحسب $\overline{x}$ وفترة الثقة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي μ الحقيقية و5 فترات لا تحويها.

مثال (2) أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهن فإذا كان حجم عينة الإناث $n = 40$ والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 12.5$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 76.3$. باستخدام مستوى ثقة 95%

1 أوجد هامش الخطأ.

2 أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

3 فسّر فترة الثقة.

2 من المثال (2) إذا أجريت الدراسة على عينة أخرى من الإناث حجمها 25 والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 3.6$
والمتوسط الحسابي للعينة $\overline{x} = 18.4$

باستخدام مستوى ثقة 95%

1. أوجد هامش الخطأ.
2. أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.
3. فسّر فترة الثقة.

ثانيًا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع غير معلوم وحجم العينة $n > 30$

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ

1. نوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لدرجة ثقة 95% وهي 1.96
2. نوجد هامش الخطأ $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ ، حيث S هي الانحراف المعياري للعينة.
3. نوجد فترة الثقة $(\overline{x} - E \ , \ \overline{x} + E)$.

عينة عشوائية حجمها 36، فإذا كان المتوسط الحسابي للعينة 60 وتباينها 16، باستخدام مستوى ثقة 95%:

1. أوجد هامش الخطأ.
2. أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.
3. فسّر فترة الثقة.

ثالثًا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع غير معلوم وحجم العينة $n \leqslant 30$

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي تباينه σ^2 غير معلوم وحجم العينة $n \leqslant 30$ فإن توزيع العينة لا يؤول إلى التوزيع الطبيعي وفي هذه الحالة يلزمنا استخدام توزيع آخر هو توزيع t **للعينات الصغيرة** التي حجمها $n \leqslant 30$ ويكون تقدير فترة الثقة $(1-\alpha)$ للمتوسط الحسابي μ هو $(\overline{x}-E\ ,\ \overline{x}+E)$.

حيث $\overline{x}$ المتوسط الحسابي للعينة، E هامش الخطأ.

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحساب μ إذا كانت σ^2 غير معلومة، $n \leq 30$:

1. نوجد درجات الحرية $(n-1)$.
2. نوجد القيمة الحرجة $t_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لدرجة ثقة 95% من جدول توزيع t.
3. نوجد هامش الخطأ $E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$
4. نوجد فترة الثقة $(\overline{x}-E\ ,\ \overline{x}+E)$.

4 **أوجد فترة ثقة 95% للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ علمًا أن العينة أخذت من مجتمع طبيعي.**

إذا كان لدينا $n = 13$, $S = 0.3$, $\overline{x} = 8.4$

اختبارات الفروض الإحصائية

الخطوات المتبعة لإجراء اختبار الفروض الإحصائية:

1. صياغة الفروض الإحصائية (فرض العدم H_0 والفرض البديل H_1).
2. التحقق من الانحراف المعياري σ للمجتمع (معلوم أم غير معلوم) وتحديد حجم العينة (n) ومن ثم إيجاد المقياس الإحصائي للاختبار (Z أو t)، (مسترشدًا بالجدول التالي):

الانحراف المعياري (σ)	المقياس الإحصائي (Z أو t)	حجم العينة (n)
معلوم	$Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	لا يشترط حجم معين للعينة
غير معلوم	$Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$n > 30$
	$t = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$n \leq 30$

3. تحديد مستوى المعنوية α وحساب القيمة الجدولية $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري أو القيمة الجدولية $t_{\frac{\alpha}{2}}$ من جدول t ذي درجات حرية.
4. تحديد منطقة القبول: $(-Z_{\frac{\alpha}{2}} , Z_{\frac{\alpha}{2}})$ أو $(-t_{\frac{\alpha}{2}} , t_{\frac{\alpha}{2}})$ كما هو موضّح بالشكل.
5. اتخاذ القرار الإحصائي (قبول فرض العدم) أو (رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل).

تزعم شركة أن متوسط رواتب موظفيها يساوي 4 000 دينار كويتي. إذا أخذت عينة من 25 موظفًا، ووجد أن متوسط رواتب العينة هو 3 950 دينارًا كويتيًّا فإذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع (دينارًا) $\sigma = 125$

وضّح كيفية إجراء الاختبار الإحصائي بمستوى ثقة 95%

1 بيّنت الدراسة أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل أسلاك معدنية هو

$\mu = 1\,800$ kg مع انحراف معياري $\sigma = 150$ kg

ويؤكد الأخصائيون في المصنع المنتج لهذه الاسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة تحمل هذه الأسلاك، وتأكيدًا على ذلك تمّ اختبار عينة من 40 سلكًا

فتبيّن أن متوسط قوة تحمل هذه الأسلاك يساوي $1\,840$ kg

هل يمكن قبول مثل هذا الفرض بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ ؟

2 متوسط العمر بالساعات لعينة من 100 مصباح كهربائي مصنعة في أحد المصانع $\overline{x} = 1570$ بانحراف معياري $S = 120$.
يقول صاحب المصنع إنّ متوسط العمر بالساعات $\mu = 1\,600$ للمصابيح المصنعة في المصنع.
اختبر صحة الفرض $\mu = 1\,600$ مقابل الفرض $\mu \neq 1600$ وباختيار مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة يساوي 290 دينارًا كويتيًا.

فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 منازل تبيّن أن متوسطها الحسابي (دينارًا) $\overline{x} = 283$ وانحرافها المعياري (دينارًا) $S = 32$.

فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟

استخدم مستوى ثقة 95% (علمًا بأن المجتمع يتبع توزيعًا طبيعيًا).

جدول التوزيع الطبيعي المعياري (Z)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.10 وأكثر	0.4999									

جدول التوزيع t

			$\frac{\alpha}{2}$			
درجات الحرية $(n-1)$	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.25
1	63.657	31.821	12.706	6.314	3.078	1.000
2	9.925	6.965	4.303	2.920	1.886	0.816
3	5.841	4.541	3.182	2.353	1.638	0.765
4	4.604	3.747	2.776	2.132	1.533	0.741
5	4.032	3.365	2.571	2.015	1.476	0.727
6	3.707	3.143	2.447	1.943	1.440	0.718
7	3.500	2.998	2.365	1.895	1.415	0.711
8	3.355	2.896	2.306	1.860	1.397	0.706
9	3.250	2.821	2.262	1.833	1.383	0.703
10	3.169	2.764	2.228	1.812	1.372	0.700
11	3.106	2.718	2.201	1.796	1.363	0.697
12	3.054	2.681	2.179	1.782	1.356	0.696
13	3.012	2.650	2.160	1.771	1.350	0.694
14	2.977	2.625	2.145	1.761	1.345	0.692
15	2.947	2.602	2.132	1.753	1.341	0.691
16	2.921	2.584	2.120	1.746	1.337	0.690
17	2.898	2.567	2.110	1.740	1.333	0.689
18	2.878	2.552	2.101	1.734	1.330	0.688
19	2.861	2.540	2.093	1.729	1.328	0.688
20	2.845	2.528	2.086	1.725	1.325	0.687
21	2.831	2.518	2.080	1.721	1.323	0.686
22	2.819	2.508	2.074	1.717	1.321	0.686
23	2.807	2.500	2.069	1.714	1.320	0.685
24	2.797	2.492	2.064	1.711	1.318	0.685
25	2.787	2.485	2.060	1.708	1.316	0.684
26	2.779	2.479	2.056	1.706	1.315	0.684
27	2.771	2.473	2.052	1.703	1.314	0.684
28	2.763	2.467	2.048	1.701	1.313	0.683
29	2.756	2.462	2.045	1.699	1.311	0.683
30 وأكثر	2.575	2.327	1.960	1.645	1.282	0.675