



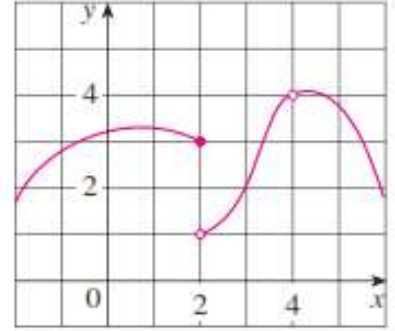
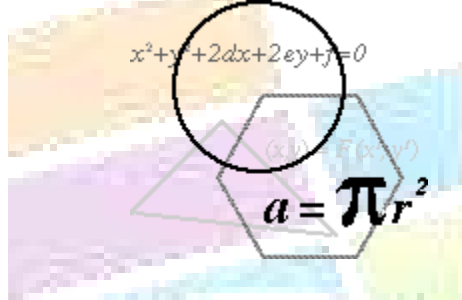
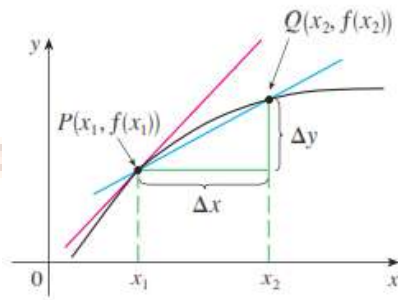
الصف الثاني عشر علمي



دفتر الطالب

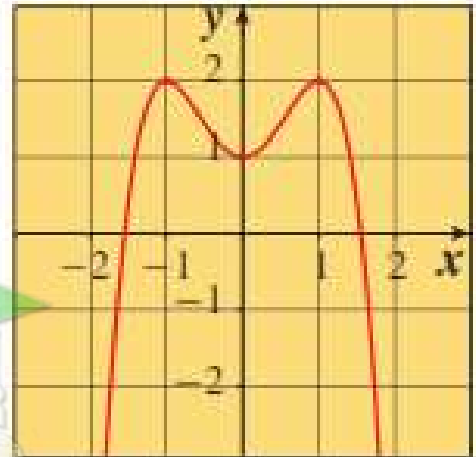
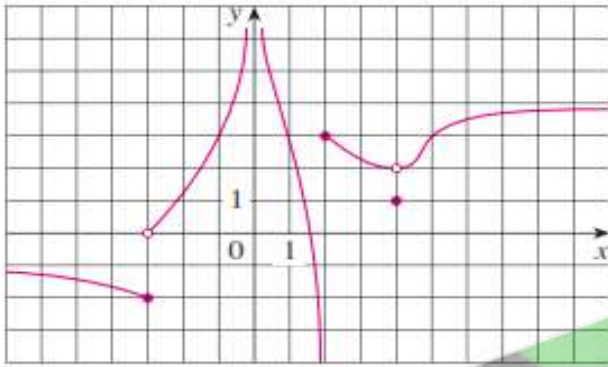
لأمثلة الكتاب وحاول أن تحل

مدرسة أحمد البشر الرومي الثانوية بنين



الرياضيات

الفصل الدراسي الأول



العام الدراسي ٢٠٢٣ \ ٢٠٢٤ هـ

إعداد رئيس القسم: أ. محمود حامد العلو

الموجه الفني: أ. حسن علي أكبر

مدير المدرسة: أ. صلاح عباس الناصر

أسم الطالب: صفوة علمي الكويت، الصف: ١٢ع /

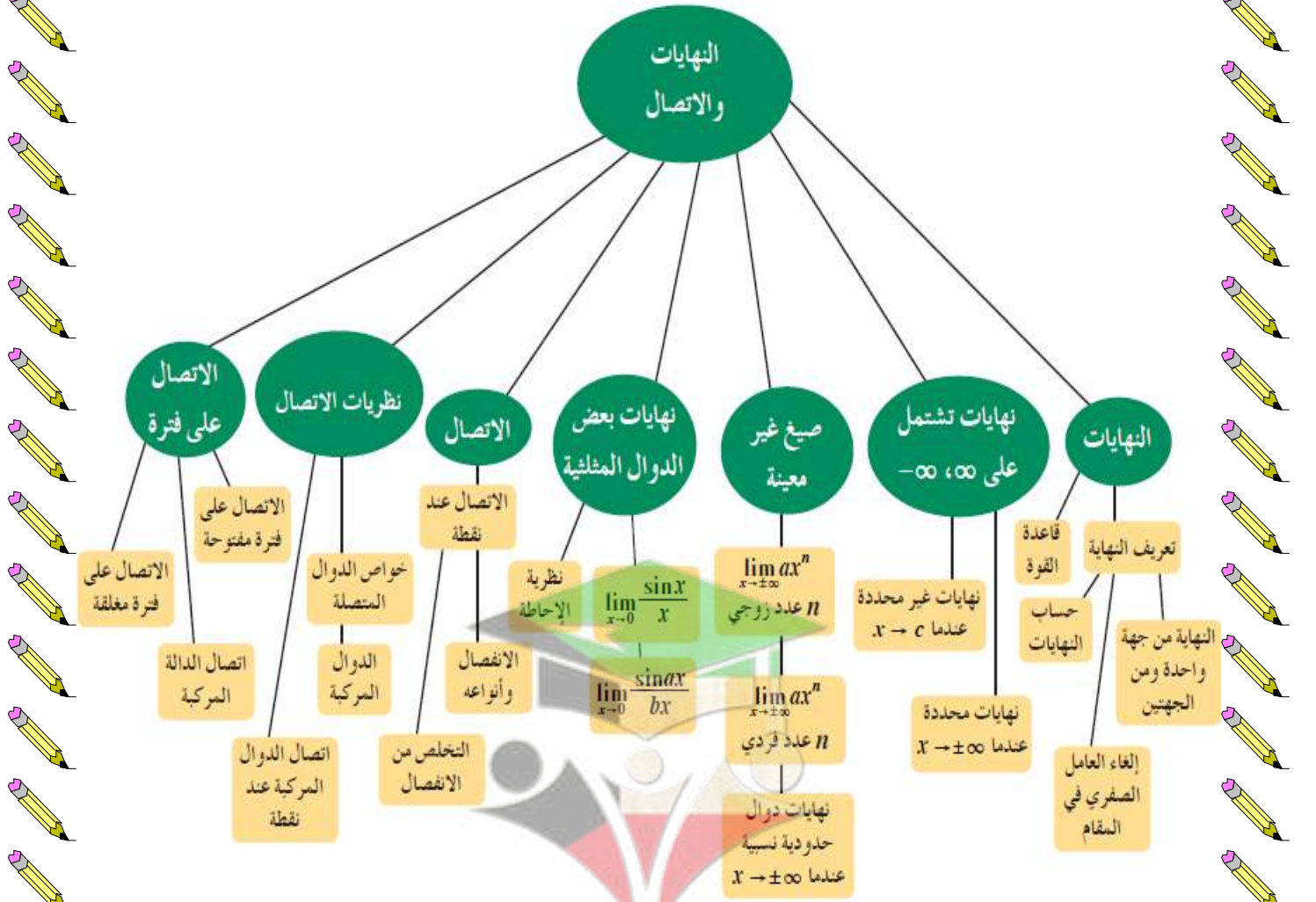
الكتاب الاول

"مادة الرياضيات"

الوحدة الاولى

النهايات والاتصال

Limits and Continuity



النهايات	نهايات تشتمل على $-\infty, \infty$	صغ غير معينة	نهايات بعض الدوال المثالية	الاتصال	نظريات الاتصال	الاتصال على فترة
1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6	1-7

أوراق متابعة الوحدة الأولى (النهايات والاتصال)

1 - 1) تمارين متابعة للنهايات

تعريف (١):

لتكن x كمية متغيرة، c عدد ثابت
نقول إن x تقترب من c باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكمية $|x - c|$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب

تعريف النهاية:

إذا كان L ، c عددين حقيقيين، f دالة حقيقية فإن:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \text{The limit of } f(x) \text{ as } x \text{ approaches } c \text{ equals } L$$

تعني أن: عندما تقترب x من c باطراد، فإن $f(x)$ تقترب باطراد من L .

ملاحظة ١: إن حقيقة وجود نهاية عندما $x \rightarrow c$ لا تعتمد على كون الدالة معرفة أو غير معرفة عند c

النهاية من جهة اليسار:

إذا كانت $f(x)$ تؤول إلى العدد L_1 عندما تؤول x إلى العدد c من جهة اليسار

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L_1 \quad \text{فإننا نكتب:}$$

النهاية من جهة اليمين:

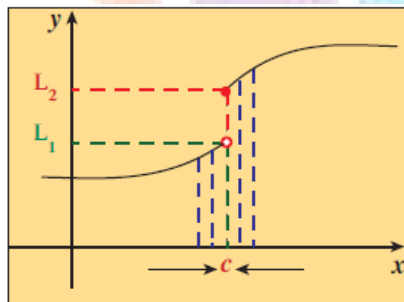
إذا كانت $f(x)$ تؤول إلى العدد L_2 عندما تؤول x إلى العدد c من جهة اليمين

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L_2 \quad \text{فإننا نكتب:}$$

نظرية 1:

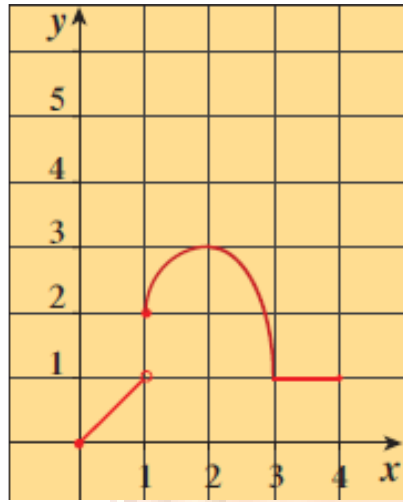
يكون للدالة f نهاية عندما تقترب x من c **إذا وفقط إذا** كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة اليسار

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \quad \text{ويعبر عن ذلك:}$$



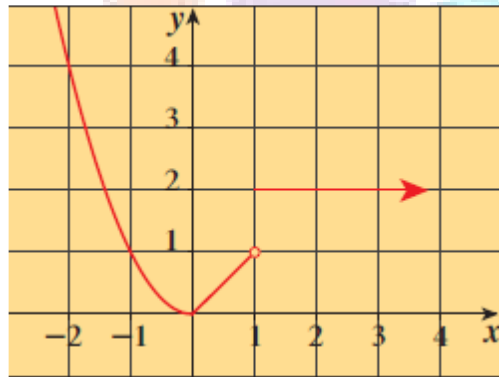
$$L_1 \neq L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$



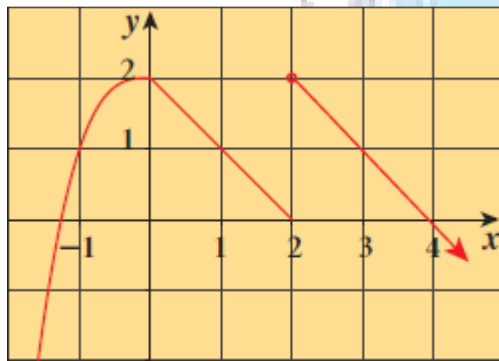
تدريب (1) : الشكل المقابل يمثل بيان الدالة: $f: [0,4] \rightarrow R$ أكمل ما يلي: صفحة 15

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$ | 2) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$ |
| 3) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$ | *) $f(1) =$ |
| 4) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$ | 5) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$ |
| 6) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ | *) $f(2) =$ |
| 7) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$ | 8) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$ |
| 9) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$ | *) $f(3) =$ |
| 10) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$ | 11) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) =$ |
| | *) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) =$ |



مثال (1) : الشكل المقابل يمثل بيان الدالة f . أوجد إن أمكن: صفحة 15

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ | 2) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$ |
| 3) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ | 4) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) =$ |

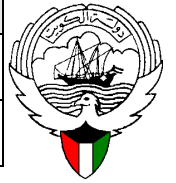


حاول أن تحل (1) : الشكل المقابل يمثل بيان الدالة f . أوجد إن أمكن: صفحة 16

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$ | 2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ |
| 3) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ | 4) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$ |



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
..... /
الموضوع		



نظرية 2: إذا كان k عدداً ثابتاً، c عدداً حقيقياً فإن: $\lim_{x \rightarrow c} k = k$

نظرية 3: إذا كانت: $f(x) = x$ ، حيث c عدداً حقيقياً فإن: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} x = c$

نظرية 4: (قواعد حساب النهايات):

إذا كان k, c, M, L أعداداً حقيقية، $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ فإن:

(a) قاعدة الجمع (الفرق): $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \pm M$

(b) قاعدة الضرب: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \cdot M$

(c) قاعدة الضرب في ثابت: $\lim_{x \rightarrow c} (kf(x)) = k \cdot \lim_{x \rightarrow c} f(x) = k \cdot L$

(d) قاعدة ناتج القسمة: $\lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \frac{L}{M}, M \neq 0$

صفوة معلمى الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



مثال (2) : بفرض أن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 5$. أوجد: صفحة 17

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x))$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)}{g(x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)+4}{f(x) \cdot g(x)}$

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢ع /
الموضوع		



حاول أن تحل (2) : بفرض أن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -3$. أوجد: صفحة 17

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x))$

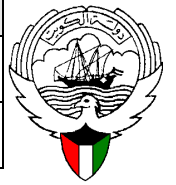
b) $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) \cdot g(x))$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{8f(x) \cdot g(x)}{f(x) + g(x)} \right)$

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصّة	الصف
.....	م ٢٠٢٣ / /		١٤١٢ /
الموضوع		



نظرية 5: (قواعد حساب النهايات):

(a) إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ دالة كثيرة الحدود، حيث c عدداً حقيقياً فإن:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0$$

(b) إذا كانت $f(x)$, $g(x)$ كثيرتي حدود، c عدداً حقيقياً فإن:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} \quad . \quad g(c) \neq 0$$

مثال (3): أوجد:
صفحة 18

a) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^4 - 2x^3 + 5)$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2(2 - x))$

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٤٢ /
الموضوع		



حاول أن تحل (3) : أوجد:
صفحة 18

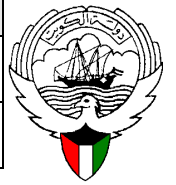
a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 3x^2 - 2x - 17)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

صفوة المعلم الكويتي



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / /		١٢ع /
الموضوع		



$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & : x < 1 \\ 5 & : x = 1 \\ \frac{5}{x} & : x > 1 \end{cases}$$

مثال (4) : إذا كانت الدالة f :
صفحة 19

أوجد (إن أمكن) : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & : x < 2 \\ x - 1 & : x > 2 \end{cases}$$

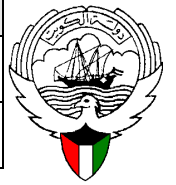
حاول أن تحل (4) : إذا كانت الدالة f :
صفحة 19

أوجد (إن أمكن) : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
..... / / ٢٠٢٣م		١٢ع /
الموضوع		



$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & : x \leq 0 \\ 1 - 2x & : x > 0 \end{cases}$$

مثال (5) : إذا كانت الدالة g :
صفحة 19

أوجد (إن أمكن) : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + x & : x > 1 \\ \frac{x}{x^2+1} & : x \leq 1 \end{cases}$$

حاول أن تحل (5) : إذا كانت الدالة g :
صفحة 19

أوجد (إن أمكن) : $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

صفوة معلمى الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٢ / ع
الموضوع		



مثال (6) : لتكن الدالة $f(x) = |x - 3| + 2x$: صفحة 20

(a) اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

(b) أوجد: $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

(c) هل للدالة f نهاية عندما $x \rightarrow 3$ ؟

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



حاول أن تحل (6) : لتكن الدالة: $f(x) = x^2 - |x + 2|$ صفحة 20

(d) اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

(e) أوجد: $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$. $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

(f) هل للدالة f نهاية عندما $x \rightarrow -2$

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصّة	الصف
..... /
الموضوع		



نظرية 6: (قاعدة القوة): إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً وكانت c موجودة فإن $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$:

a) $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n$

b) $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$

في حالة n عدداً زوجياً يشترط أن يكون $c > 0$

c) $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$

في حالة n عدداً زوجياً يشترط أن يكون $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$

مثال (7): أوجد:
صفحة 21

a) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 3x - 1)^5$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x - 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x^2 - 2}}{x - 2}$

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢ع /
الموضوع		



حاول أن تحل (7) : أوجد:
صفحة 22

a) $\lim_{x \rightarrow 5} (\sqrt{x^2 - 5})$

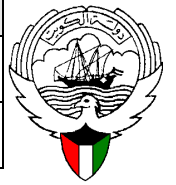
b) $\lim_{x \rightarrow 4} (x + \sqrt{x})^4$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 4x + 5}}{x - 2}$

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٤٢٢ /
الموضوع		



مثال (8) : أوجد إن أمكن:
صفحة 22

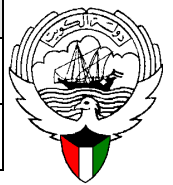
a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^3 - 8}{x}$

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	م ٢٠٢٣ / /		١٢ع /
الموضوع		



c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x^2-1}$

حاول أن تحل (8) : أوجد إن أمكن:
صفحة 23

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

صفوة معلمى الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	١ / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



تابع حاول أن تحل (8) : أوجد إن أمكن:
صفحة 23

b) $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{(x+4)^2 - 9}{x^2 + 7x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x+2| - 7}{x^2 - 25}$

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٤٢٢ /
الموضوع		



مثال (9) : أوجد:
صفحة 24

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-3} - 1}{x-2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

صفحة 17 من 172
معلمي الكويت
إبراهيم الأمان: محرو عامر العلو



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢ع /
الموضوع		



تابع مثال (9) : أوجد:
صفحة 24

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt[3]{x + 2}}$

صفوة الأمانة
معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٤٢ /
الموضوع		



حاول أن تحل (9) : أوجد إن أمكن:
صفحة 25

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 2x}$



صفوة الأمل في الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٢ / ع
الموضوع		



تابع حاول أن تحل (9) : أوجد إن أمكن:
صفحة 25

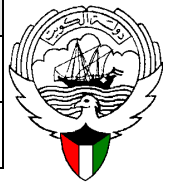
b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1}}{\sqrt[3]{x + 1}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{3 - \sqrt{x}}$

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / /		١٢ /
الموضوع		



مثال (10) : أوجد :
صفحة 25

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^3 + 6x^2 + 2x - 3}{x + 1} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^5 + 32}{x + 2} \right)$

صفوة الامتحان
معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٤٢ /
الموضوع		



حاول أن تحل (10) : أوجد:
صفحة 26

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x - 3} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{-x^5 + x^3 + x + 22}{x - 2} \right)$

صفوة المعلم الكويت

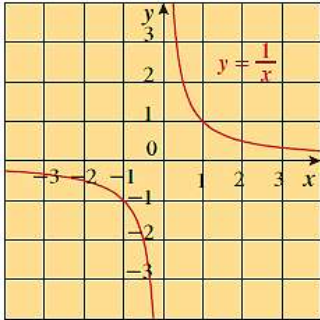
(2 - 1) تمارين متابعة للنهايات تشمل على $\pm\infty$

تعريف (1):

لتكن f دالة معرفة في الفترة (a, ∞) فإن: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$
يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى ∞ .

تعريف (2):

لتكن f دالة معرفة في الفترة $(-\infty, b)$ فإن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$
يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى $-\infty$.



نظرية 7:

$$f: f(x) = \frac{1}{x} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

نظرية 8:

$$f: f(x) = \frac{k}{x^n} \quad n \in \mathbb{Z}^+ \quad k \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

ملاحظات:

(1) تبقى قواعد حساب النهايات (نظرية 4) وقاعدة القوة (نظرية 6) صحيحة عند ايجاد $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$

(2) تبقى نظرية 2 أيضاً صحيحة أي أن: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} k = k$



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢ع /
الموضوع		



مثال (1) : أوجد:
صفحة 29

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x+4} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+5}{x^2+25} \right)$

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	١ / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x^3}{5-7x^3} \right)$

تابع مثال (1) : أوجد: صفحة 29

صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢ع /
الموضوع		



حاول أن تحل (1) : أوجد:
صفحة 30

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x-2} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+2}{x^2+9} \right)$

صفوة علمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



تابع حاول أن تحل (1) : أوجد:
صفحة 30

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 3x + 1}{x^3 + 5} \right)$

صفوة الكويت
معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
..... / / ٢٠٢٣ م		١٢ / ع
الموضوع		



(3 - 1) تمارين متابعة للنهايات تشمل على صيغ غير معينة

تكن: $f(x) = ax^n$. $n \in \mathbb{Z}^+$. $a \in \mathbb{R}^*$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n = \begin{cases} \infty & : a > 0 \\ -\infty & : a < 0 \end{cases}$$

(1) إذا كان n عدد زوجي فإن:

(2) إذا كان n عدد فردي فإن:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ax^n = \begin{cases} \infty & : a > 0 \\ -\infty & : a < 0 \end{cases} , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = \begin{cases} -\infty & : a > 0 \\ \infty & : a < 0 \end{cases}$$

ملاحظات هامة جداً:

إذا كانت: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. $a_n \in \mathbb{R}^*$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n \quad \text{فإن}$$

لا يجوز تطبيق هذه القاعدة عندما تؤول x إلى عدد حقيقي c

مثال (1) : أوجد:
صفحة 37

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - 3x + 1)$$

حاول أن تحل (1) : أوجد:
صفحة 37

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^2 + 2x - 4)$$

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
..... / / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



نظرية 11:

إذا كانت كل من f, g دالة حدودية حيث

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0 \quad \text{فإن:}$$

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$: \quad n < m$$

تستخدم في الأسئلة الموضوعية

أو إيجاد الثوابت a, b فقط

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m}$$

$$: \quad n = m$$

مثال (2): استخدم النظرية السابقة في حساب: صفحة 39

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4 - 3x^3}{2x^3 + 5} \right)$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + x - 1}{3x^4 - x} \right)$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^4 - 1}{7 - 2x^4} \right)$$

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / /		١٢ /
الموضوع		



حاول أن تحل (2) : استخدم النظرية السابقة في حساب:
صفحة 39

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x^2 + 5x + 1}{6x^2 - x + 1} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x + 1}{4x^3 - 2x + 3} \right)$

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



مثال (3): إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{ax^2 + bx + 3}{2x + 5} \right) = 3$ صفحة 39

فأوجد قيمة كل من الثابتين a, b .

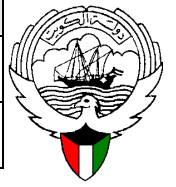
حاول أن تحل (3): إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - 2}{ax^2 + bx - 3} \right) = -1$ صفحة 40

فأوجد قيمة كل من الثابتين a, b .

صفوة معلمى الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	1 / 2023 م		12ع /
الموضوع		



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}} \right)$$

مثال (4) : أوجد: صفحة 40

صفوة معلمى الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٤١٢ /
الموضوع		



حاول أن تحل (4) : أوجد:
صفحة 41

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{2x^2 - x}}{x+1} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}} \right)$

صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحنة	الصف
.....	م ٢٠٢٣ / /		١٢ع /
الموضوع		



(4 - 1) تمارين متابعة لنهايات بعض الدوال المثلثية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \quad . \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \quad . \quad \lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0$$

نظرية 12: إذا كانت x بالراديان

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

نتائج:

إذا كان a, b عددين حقيقيين، $a, b \neq 0$ فإن:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \quad \text{أو} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	م ٢٠٢٣ / /		١٤١٢ /
الموضوع		



مثال (1) : أوجد:
صفحة 43

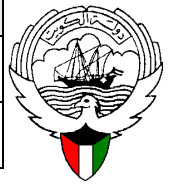
b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-3}{\cos x} \right)$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x}{2x} \right)$

صفوة تعليمية الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢ع /
الموضوع		



$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{1 - \cos x} \right)$$

تابع مثال (1) : أوجد:
صفحة 43

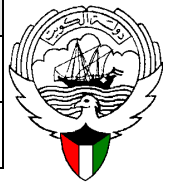
$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{2x^2 - x} \right)$$

حاول أن تحل (1) : أوجد:
صفحة 43

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / /		١٢ /
الموضوع		



c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \sin x}{\cos x - 1} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{3x \cos x} \right)$

تابع حاول أن تحل (1) : أوجد:
صفحة 43

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	١ / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



مثال (2) : أوجد:
صفحة 44

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5 \tan x - 3 \sin x}{4x} \right)$

صفوة علمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٤٢٢ /
الموضوع		



حاول أن تحل (2) : أوجد:
صفحة 44

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{2 \tan x} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \tan x + x^2 \cos x}{5x} \right)$

صفوة الامانة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٤٢٢ /
الموضوع		



مثال (3) : أوجد:
صفحة 44

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5x + \sin x}{x} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x \tan x - 2x \cos x}{3x} \right)$

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٤٢٢ /
الموضوع		



حاول أن تحل (3) : أوجد:
صفحة 45

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \sin x - x^2}{3x^2} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 2x + 3x \cos 4x}{5x} \right)$

صفوة الأستاذة الدكتورة
معلمة الكوئيت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / /		١٤٢٢ /
الموضوع		



تمارين متابعة الاتصال عند نقطة (5 - 1)

تعريف (٨): "الاتصال عند نقطة"

تكون الدالة f متصلة عند $x = c$ في مجالها إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

أي أن: $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$

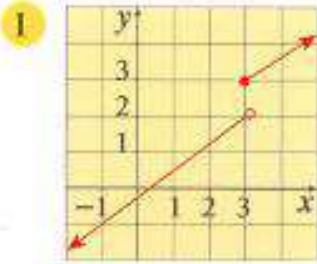
نتائج:

(١) تكون الدالة متصلة من جهة اليسار عند $x = c$ إذا كان $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$

(٢) تكون الدالة متصلة من جهة اليمين عند $x = c$ إذا كان $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$

(٣) تكون الدالة متصلة عند $x = c$ **إذا و فقط إذا** كانت متصلة من اليسار ومن اليمين عند $x = c$

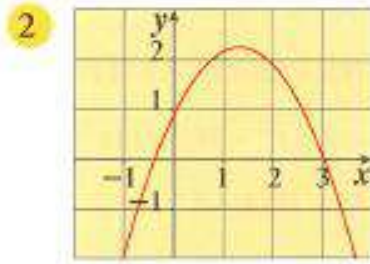
تدريب



$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \dots\dots\dots$$

$$f(3) \dots\dots\dots$$

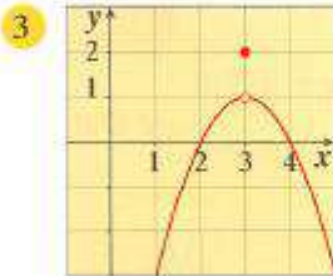
ماذا تلاحظ؟



$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \dots\dots\dots$$

$$f(3) \dots\dots\dots$$

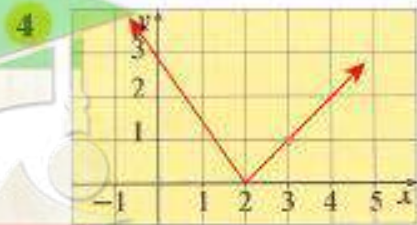
ماذا تلاحظ؟



$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \dots\dots\dots$$

$$f(3) \dots\dots\dots$$

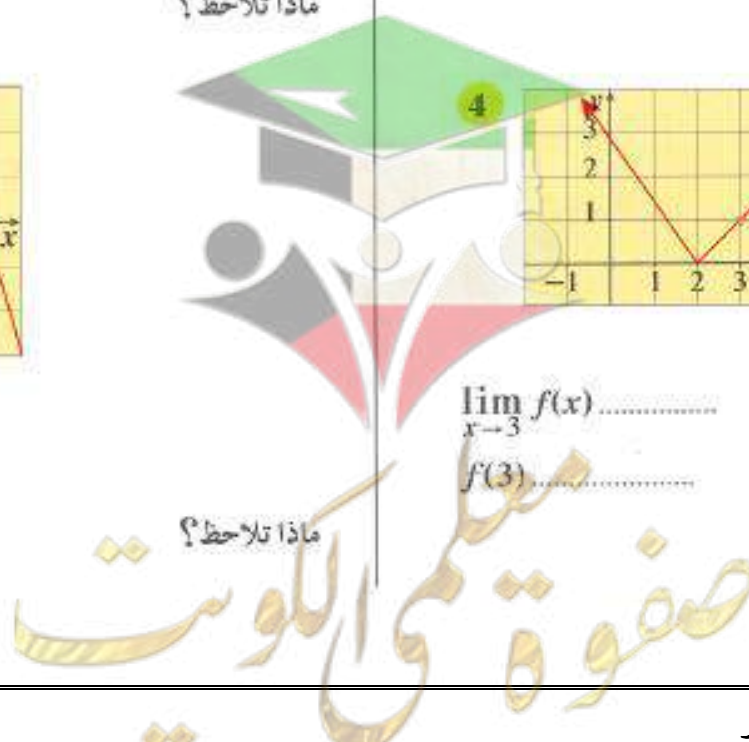
ماذا تلاحظ؟



$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \dots\dots\dots$$

$$f(3) \dots\dots\dots$$

ماذا تلاحظ؟





اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & : x \geq 1 \\ 5x - 1 & : x < 1 \end{cases}$$

مثال (1) : نتكن f :
صفحة 49

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 1$

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣م		١٢ع /
الموضوع		



$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x & : x \leq 0 \\ \frac{x^2}{x+1} & : x > 0 \end{cases}$$

حاول أن تحل (1) : لتكن f :
صفحة 50

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

صفوة الأمانة
معلمة الكوئيت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} : x > 3 \\ 7 : x \leq 3 \end{cases}$$

مثال (2) : لتكن f :
صفحة 50

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 3$

صفحة 45 من 172

معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



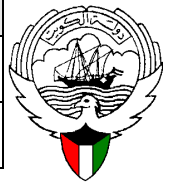
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & : x < 2 \\ 1 & : x = 2 \\ x^2 + 1 & : x > 2 \end{cases}$$

حاول أن تحل (2) : ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$. حيث :
صفحة 50

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٢ / ع
الموضوع		



مثال (3) : ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$. حيث : $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{|x-2|} : x \neq 2 \\ 1 : x = 2 \end{cases}$: **صفحة 51**

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
..... /
الموضوع		



كراسة التمارين (8) : ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$. حيث : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & : x \neq 0 \\ |x| & : x = 0 \\ -3 & : x = 0 \end{cases}$ صفحة 19

صفوة المعلم الكويتي



اليوم	التاريخ	الحصّة	الصف
..... /
الموضوع		



(6 - 1) تمارين متابعة نظريات الاتصال عند نقطة

نظرية ٤١: إذا كانت f, g دالتين متصلتين عند $x = c$ ، فإن الدوال التالية هي دوال متصلة عند $x = c$

- الطرح : 2) $f - g$ الجمع : 1) $f + g$
- الضرب : 4) $f \cdot g$ الضرب في ثابت : 3) $c \cdot f$, $c \in \mathbb{R}$
- القسمة : 5) $\frac{f}{g}$, $g(c) \neq 0$

دوال متصلة:

(١) الدالة الثابتة: $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$ متصلة عند كل عدد $c \in \mathbb{R}$.

(٢) الدالة كثيرة الحدود متصلة عند كل عدد $c \in \mathbb{R}$.

(٣) الدالة الحدودية النسبية متصلة عند كل عدد حقيقي في مجالها $c \in \mathbb{D}$.

(٤) دالة المطلق $f(x) = |x|$ متصلة عند كل عدد $c \in \mathbb{R}$.

(٥) الدوال المثلثية متصلة عند كل عدد حقيقي في مجالها $c \in \mathbb{D}$.

(٦) الدالة الجذرية $y = \sqrt[n]{x}$:

(a) متصلة عند كل عدد $c \in \mathbb{R}^+$ ، n عدد صحيح زوجي موجب.

(b) متصلة عند كل عدد $c \in \mathbb{R}$ ، n عدد صحيح فردي أكبر من ١.

(٧) الدالة الجذرية $g(x) = \sqrt{f(x)}$: إذا كانت الدالة f متصلة عند $x = c$ وكانت $f(c) > 0$

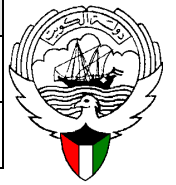
فإن الدالة: $g(x) = \sqrt{f(x)}$ متصلة عند $x = c$

نظرية ١٥

صفوة معلمى الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



مثال (1) : ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي: صفحة 55

a) $f(x) = x^2 + |x|$, $c = -1$

b) $f(x) = \sin x - \cos x$, $c = \frac{\pi}{2}$

صفوة معلمى الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / /		١٢ / ع
الموضوع		



حاول أن تحل (1) : ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي: صفحة 55

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3 + |x|$, $c = 3$

b) $f(x) = \frac{\tan x}{x+1}$, $c = \frac{\pi}{4}$

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣م		١٢ع /
الموضوع		



مثال (2) : ابحث اتصال الدالة f : $f(x) = \frac{x-2}{x^2+9} - \frac{1}{x}$ عند $x = 3$.
صفحة 55

حاول أن تحل (2) : ابحث اتصال الدالة f : $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{2x}{x-2}$ عند $x = 1$.
صفحة 55

صفحة 53 من 172

معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٢ / ع
الموضوع		



مثال (3) : ابحث اتصال الدالة كل من الدالتين عند العدد الميبن :
صفحة 56

a) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$, $c = 1$

b) $f(x) = \sqrt{x+3}$, $c = -1$

صفوة الامانة
معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / /		١٢ /
الموضوع		



حاول أن تحل (3) : ابحث اتصال الدالة كل من الدالتين عند $x = -2$:
صفحة 56

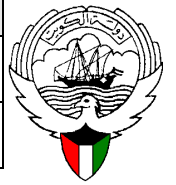
a) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+4}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

صفحة 55 من 172
معلمة الكويت
صفوة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



الدالة المركبة:

إذا كانت كل من f, g دالتين حقيقيتين وكان مدى الدالة f مجموعة جزئية من مجال الدالة g فإنه يتعين دالة مركبة h :

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

نظرية ١٦: إذا كانت f دالة متصلة عند $x = c$ ، و g متصلة عند $f(c)$.

فإن الدالة المركبة $g \circ f$ هي دوال متصلة عند $x = c$

ملاحظة: $(g \circ f)(c) \neq (f \circ g)(c)$ إلا في بعض الحالات الخاصة

مثال (4): الدالتين f, g معرفتان على R كما يلي: $g(x) = x^2 - 1$ ، $f(x) = 1 + x$ أوجد: صفحة 58

a) $(gof)(x)$ ، b) $(gof)(2)$ ، c) $(fog)(x)$ ، d) $(fog)(2)$

صفوة تعليم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	1 / 2023 م		12ع /
الموضوع		



حاول أن تحل (4) : الدالتين f ، g معرفتان على R كما يلي: $g(x) = x^2 + 3$ ، $f(x) = 2x + 3$ أوجد :
صفحة 58

a) $(gof)(x)$ ، b) $(gof)(-1)$ ، c) $(fog)(x)$ ، d) $(fog)(-1)$

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢ع /
الموضوع		



مثال (5) : لتكن: $g(x) = x^4 + 2$, $f(x) = \sqrt{x}$ أوجد:

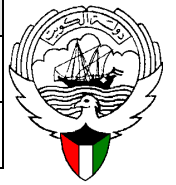
صفحة 58

a) $(f \circ g)(x)$, b) $(f \circ g)(0)$, c) $(g \circ f)(x)$, d) $(g \circ f)(0)$

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣م		١٢ع /
الموضوع		



حاول أن تحل (5) : الدالتين f ، g معرفتان على R كما يلي: $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ ، $g(x) = \frac{3}{x^2+4}$ أوجد :

صفحة 59

a) $(f \circ g)(x)$

b) $(g \circ f)(\sqrt{3})$

صفوة معلمى الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	1 / 2023 م		12ع /
الموضوع		



مثال (6) : لتكن: $f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = \sqrt{x}$.

صفحة 59

ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$.

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢ع /
الموضوع		



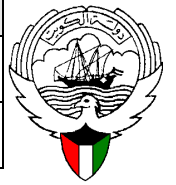
حاول أن تحل (6): لتكن: $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$, $g(x) = 2x + 3$.
صفحة 60

ابحث اتصال الدالة $f \circ g$ عند $x = 1$.

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	1 / 2023م		12ع /
الموضوع		



مثال (7) : لتكن : $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$: صفحة 60

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$.

حاول أن تحل (7) : لتكن : $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$: صفحة 60

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$.

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / /		١٤٢ /
الموضوع		



(7 - 1) تمارين متابعة الاتصال على فترة

تعريف (٩): "الاتصال على فترة مفتوحة"

لتكن الدالة f معرفة على الفترة (a, b) فإننا نقول إن الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة (a, b) إذا كانت f متصلة عند كل x تنتمي إلى الفترة (a, b)

تعريف (١٠): "الاتصال على فترة مغلقة"

لتكن الدالة f معرفة على الفترة $[a, b]$ فإننا نقول إن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

(١) الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة (a, b)

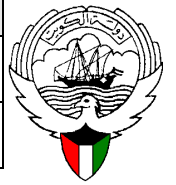
(٢) الدالة f متصلة عند $x = a$ من جهة اليمين أي أن: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

(٣) الدالة f متصلة عند $x = b$ من جهة اليسار أي أن: $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
..... / / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



مثال (1) : ادرس اتصال الدالة f على الفترة $[1, 3]$ حيث.

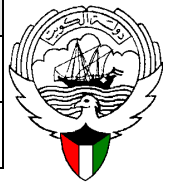
صفحة 62

$$f(x) = \begin{cases} -2 & : & x = 1 \\ x^2 - 3 & : & 1 < x < 3 \\ 6 & : & x = 3 \end{cases}$$

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
..... / / ٢٠٢٣ م		١٢٤ /
الموضوع		



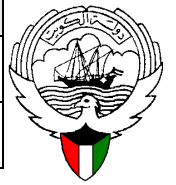
حاول أن تحل (1) : ادرس اتصال الدالة f على الفترة $[1, 5]$ حيث.
صفحة 62

$$f(x) = \begin{cases} 2 & : x = 1 \\ x^2 + 1 & : 1 < x < 5 \\ \frac{x}{5} & : x = 5 \end{cases}$$

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / /		١٢٤ /
الموضوع		



مثال (2) : ابحث اتصال كل من الدوال التالية على الفترة المبينة:
صفحة 63

a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $[-1, 5]$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$, $[0, 5]$

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / /		١٢ع /
الموضوع		



حاول أن تحل (2) : ابحث اتصال الدالة f على الفترة المبيينة:
صفحة 63

a) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$, $[0, 3]$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$, $[0, 2]$

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢ع /
الموضوع		



مثال (3) : ادرس اتصال الدالة f على مجالها ، حيث :
صفحة 63

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & : x \leq -1 \\ \frac{4}{x+3} & : x > -1 \end{cases}$$

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



مثال (4) : لتكن الدالة f متصلة على مجالها R .
صفحة 63

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a & : x < 0 \\ 2 & : x = 0 \\ ax + b & : x > 0 \end{cases}$$

أوجد قيمة الثابتين a ، b .

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢ع /
الموضوع		



حاول أن تحل (4) : لتكن الدالة f متصلة على $[1, 4]$.
صفحة 65

$$f(x) = \begin{cases} 5 & : x = 1 \\ ax + b & : 1 < x < 4 \\ b + 8 & : x = 4 \end{cases}$$

أوجد قيمة الثابتين a ، b .

صفوة المعلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	1 / 2023 م		12ع /
الموضوع		



مثال (5) : لتكن الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$:
صفحة 65

أوجد مجال الدالة f (D_f) ثم ادرس اتصالها على الفترة $[-5, 0]$.

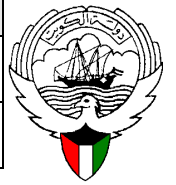
حاول أن تحل (5) : لتكن الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$:
صفحة 66

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصالها على الفترة $[6, 10]$.

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣م		١٢ع /
الموضوع		



مثال (6): لتكن الدالة $f : f(x) = \sqrt{9 - x^2}$. ادرس اتصال الدالة f على الفترة $[-3, 3]$.
صفحة 66

حاول أن تحل (6): لتكن الدالة $f : f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$. ادرس اتصال الدالة f على الفترة $[1, 3]$.
صفحة 66

صفوة على الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



مثال (7) : لتكن الدالة $f : f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4}$. ادرس اتصال الدالة f على R .
صفحة 67

حاول أن تحل (7) : لتكن الدالة $f : f(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x + 5}$. ادرس اتصال الدالة f على R .
صفحة 67

صفوة الأمل
معلمي الكويت

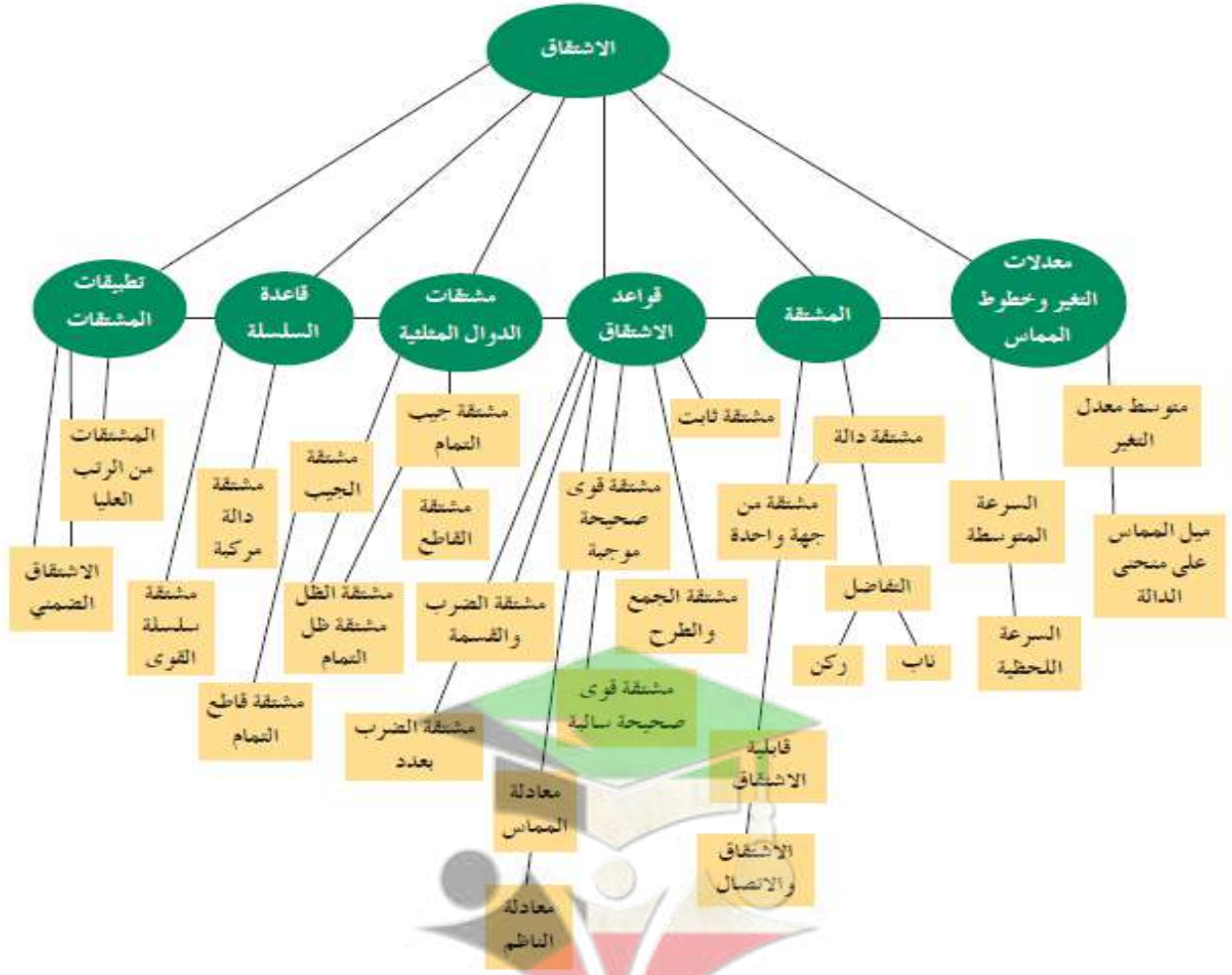
الكتاب الاول

"مادة الرياضيات"

الوحدة الثانية

الاشتقاق

The Derivatives



المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني	قاعدة السلسلة	مشتقات الدوال المثلثية	قواعد الاشتقاق	المشتقة	معدلات التغير وخطوط المماس
2-6	2-5	2-4	2-3	2-2	2-1

رئيس القسم: محمود حامد العلو



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٤١٢ /
الموضوع		



أوراق متابعة الوحدة الثانية (الاشتقاق)

(1 - 2) تمارين متابعة معدلات التغير وخطوط المماس

متوسط معدل التغير للدالة y بين نقطتين $(x_1, f(x_1))$ و $(x_2, f(x_2))$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ميل المماس للمنحنى عند النقطة $P(a, f(a))$:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مثال (1): أوجد ميل المماس للقطع المكافئ: $y = x^2$ عند النقطة $p(2, 4)$.
صفحة 77



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢ع /
الموضوع		

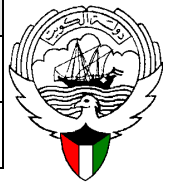


حاول أن تحل (1) : أوجد ميل المماس للقطع المكافئ: $y = (x - 2)^2 + 2$ عند النقطة $A(1, 3)$.
صفحة 78

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



(2 - 2) تمارين متابعة المشتقة عند نقطة

تعريف: "مشتقة الدالة عند نقطة"

مشتقة الدالة f عند $x = a$ هي $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

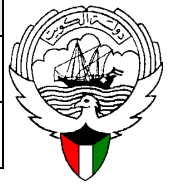
شرط وجود النهاية.

مثال (1): باستخدام التعريف، أوجد مشتقة الدالة $f(x) = 2x^2 + 1$ عند $x = 1$.
صفحة 80

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



حاول أن تحل (1) : باستخدام التعريف، أوجد مشتقة الدالة $f : f(x) = 3x^2$ عند $x = -2$.
صفحة 80

صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصّة	الصف
..... /	١٤٢٢ /
الموضوع		



تعريف بديل:

مشتقة الدالة f عند $x = a$ هي $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

شرط وجود النهاية.

مثال (2): باستخدام التعريف البديل، أوجد مشتقة الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ عند $x = a$ حيث $a > 0$.
صفحة 80

صفوة تعليم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٤٢ /
الموضوع		

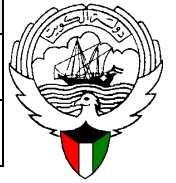


حاول أن تحل (2) : باستخدام التعريف البديل، أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = \frac{1}{x}$ عند $x = b$ حيث $b \neq 0$.
صفحة 81

صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٢ / ع
الموضوع		



المشتقة من جهة واحدة

مشتقة الدالة f من اليمين ويرمز لها "إن وجدت" بالرمز $f'_+(a)$ وهي:

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مشتقة الدالة f من اليسار ويرمز لها "إن وجدت" بالرمز $f'_-(a)$ وهي:

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

إن الدالة لها مشتقة عند نقطة إذا فقط إذا كانت المشتقتان لجهة اليمين ولجهة اليسار موجودتين ومتساويتين عند تلك النقطة.

مثال (3): بيّن أن الدالة f لها مشتقة لجهة اليمين ومشتقة لجهة اليسار عند $x = 0$ ، لكن ليس لها مشتقة عند $x = 0$.
صفحة 81

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : x \leq 0 \\ 2x & : x > 0 \end{cases}$$

صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		

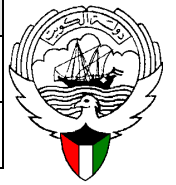


حاول أن تحل (3) : لتكن الدالة f : $f(x) = |x - 2|$. ابحث قابلية اشتقاق الدالة f عند $x = 2$.
صفحة 82

صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



إذا وضعنا x بدلاً من a في تعريف المشتقة عند النقطة نحصل على $f'(x)$ حيث:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مثال (5): لتكن الدالة: $f(x) = x^3$ ، أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة إن وجدت. صفحة 83

صفوة تعليم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	١ / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



حاول أن تحل (5): لتكن الدالة: $f(x) = x^2 + 2$ ، أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة. صفحة 84

صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٤٢٢ /
الموضوع		



نظرية: "الاشتقاق والاتصال"

إذا كانت الدالة f لها مشتقة عند نقطة، فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة "عكس النظرية ليس صحيح دائماً".

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : x < 2 \\ 2x - 1 & : x \geq 2 \end{cases}$$

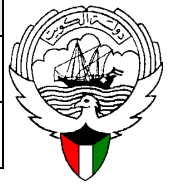
مثال (6): لتكن الدالة f :
صفحة 85

ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x = 2$.

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢ع /
الموضوع		



$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & : x \leq 2 \\ 3x - 2 & : x > 2 \end{cases}$$

حاول أن تحل (6) : لتكن الدالة f :
صفحة 86

ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x = 2$.

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
..... / / ٢٠٢٣ م		١٢ / ع
الموضوع		



$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & : x \leq 3 \\ x^2 - 1 & : x > 3 \end{cases}$$

مثال (9) : لتكن الدالة f :
صفحة 89

أوجد إن أمكن $f'(3)$.

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	م ٢٠٢٣ / /		١٢٤ /
الموضوع		



$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & : x \leq -1 \\ x^2 - x - 2 & : x > -1 \end{cases}$$

حاول أن تحل (9) : لتكن الدالة f :
صفحة 89

أوجد إن أمكن $f'(-1)$.

صفوة علمية الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



(3 - 2) تمارين متابعة قواعد الاشتقاق

قواعد الاشتقاق:

$$1) f(x) = c \implies f'(x) = 0 \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

$$2) f(x) = x^n \implies f'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad ; \quad n \in \mathbb{Q}^* \cdot x \neq 0$$

$$3) [k f(x)]' = k f'(x)$$

$$4) [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$5) [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$6) \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad ; \quad g(x) \neq 0$$

مثال (1): أوجد $\frac{dy}{dt}$ ، حيث: $y = t^3 + 6t^2 - \frac{5}{3}t + 16$.
صفحة 92

حاول أن تحل (1): أوجد $\frac{dy}{dx}$ ، حيث: $y = 5x^3 - 4x^2 + 6$.
صفحة 92

صفحة 92
معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصّة	الصف
.....	٢٠٢٣ / /		١٢ع /
الموضوع		



مثال (2) : أوجد $f'(x)$ إذا كان $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$ صفحة 93

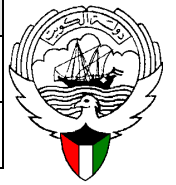
حاول أن تحل (2) : أوجد $f'(x)$ صفحة 93

1) $f(x) = (2x + 1)(3x - 2)$ 2) $f(x) = 4x^2(x + 6)$ 3) $f(x) = (x^3 - 4)^2$

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	١ / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



مثال (3) : أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \frac{x^3-1}{5x^2+1}$.
صفحة 94

حاول أن تحل (3) : أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \frac{4x^2+2x}{2x^3+5}$.
صفحة 95

صفوة على الكويت
معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



معادلة المماس ومعادلة العمودي (الناظم):

- ميل المماس عند a هو $m = f'(a)$

- معادلة المماس لمنحنى الدالة f عند a :
 $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

- معادلة الناظم لمنحنى الدالة f عند a :
 $y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a)$

- إذا كان للدالة f مماس أفقي عند a فإن:
 $f'(a) = 0$

مثال (4): أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم عند النقطة $(1, \frac{2}{3})$ لمنحنى الدالة: $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+2}$.
صفحة 95

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
..... / / ٢٠٢٣م		١٢ع /
الموضوع		



حاول أن تحل (4) : أوجد معادلة المماس ومعادلة الناقص على منحنى الدالة f حيث : $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ عند النقطة $(1, 0)$ صفحة 96

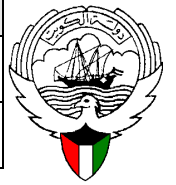
مثال (5) : أوجد $f'(x)$ حيث : $f(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$ صفحة 96

حاول أن تحل (5) : أوجد $f'(x)$ حيث : $f(x) = \frac{-4}{x^2 + 2x + 5}$ صفحة 96

صفوة معلمى الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



مثال (6): لتكن: $y = \frac{x^2+3}{2x}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$.
صفحة 97

حاول أن تحل (6): لتكن: $y = \frac{3x^2+7}{8x^2}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = -1$.
صفحة 98

مثال (7): أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = x^{\frac{3}{2}}, x > 0$.
صفحة 98

حاول أن تحل (7): أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$.
صفحة 98

صفوة تعليمية الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / /		١٢ / ع
الموضوع		



دالة متصلة على مجالها.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & : x \leq 1 \\ 2x + 1 & : x > 1 \end{cases}$$

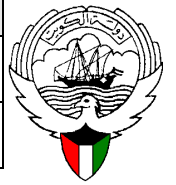
مثال (8) : لتكن الدالة f :
صفحة 98

أوجد $f'(x)$ إن أمكن.

صفوة تعليمية الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
..... / / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



دالة متصلة على مجالها. $a) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : x \leq 2 \\ 4x - 3 & : x > 2 \end{cases}$

حاول أن تحل (8) : لتكن الدالة f :
صفحة 99

أوجد $f'(x)$ إن أمكن:



صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
..... / / ٢٠٢٣م		١٢ع /
الموضوع		



تابع حاول أن تحل (8): لتكن الدالة f :
صفحة 99

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : x < 1 \\ 2\sqrt{x} & : x \geq 1 \end{cases}$$

دالة متصلة على مجالها.

أوجد $f'(x)$ إن أمكن.

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصّة	الصف
..... /
الموضوع		



(2 - 4) تمارين متابعة مشتقات الدوال المثلثية

$$(\sin x)' = \cos x \quad . \quad (\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad . \quad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \quad . \quad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

مثال (1) : أوجد المشتقات للدوال التالية:
صفحة 100

$$a) y = x^2 \sin x$$

$$b) u = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

$$c) f(x) = \sin^2 x$$

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	م ٢٠٢٣ / /		١٢ /
الموضوع		



حاول أن تحل (1) : أوجد المشتقات للدوال التالية:
صفحة 101

a) $h(x) = \cos^2 x$

b) $g(x) = \frac{x}{\cos x}$

c) $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / /		١٢ع /
الموضوع		



مثال (2) : أوجد مشتقات للدوال التالية:
صفحة 102

a) $f(x) = \tan x + \cot x$

b) $g(x) = \sec x \cdot (1 + \sin x)$

c) $h(x) = \csc x + \sin x \cdot \tan x$

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٤٢٢ /
الموضوع		



$$a) f(x) = \frac{1+\tan x}{\tan x}$$

حاول أن تحل (2) : أوجد مشتقات للدوال التالية:
صفحة 102

$$b) g(x) = \sec x + \csc x$$

$$c) h(x) = \frac{\sec x}{\csc x}$$





اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢ع /
الموضوع		



مثال (3) : أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \tan x$ عند النقطة $p(\frac{\pi}{4}, 1)$.
صفحة 102

حاول أن تحل (3) : أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \sec x$ عند النقطة $F(\frac{\pi}{3}, 2)$.
صفحة 102

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصّة	الصف
..... /
الموضوع		



(5 - 2) تمارين متابعة قاعدة السلسلة

قاعدة السلسلة (التسلسل) $(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

- صورة أخرى لقاعدة السلسلة: $u = g(x)$. $y = f(u)$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

- قاعدة سلسلة القوى: $\frac{d}{dx} (f(x))^n = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$

مثال (1): إذا كان: $g(x) = x^{10}$. $f(x) = 3x^2 + 1$. فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة: صفحة 104

a) $(f \circ g)'(x)$

b) $(g \circ f)'(-1)$

صفوة محمد الكوييت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢ع /
الموضوع		



حاول أن تحل (1) : لتكن $g(x) = x^{13}$. $f(x) = -2x^3 + 4$. أوجد باستخدام قاعدة السلسلة: صفحة 104

a) $(g \circ f)'(0)$

b) $(f \circ g)'(x)$

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	م ٢٠٢٣ / /		١٢ع /
الموضوع		



مثال (2) : لتكن: $g(x) = x^2 + 1$, $f(x) = \frac{2x+1}{x}$ ($x \neq 0$) . أوجد باستخدام قاعدة السلسلة: $(f \circ g)'(x)$ صفحة 104

حاول أن تحل (2) : لتكن: $g(x) = \sqrt{x}$. $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$. أوجد باستخدام قاعدة السلسلة: $(f \circ g)'(1)$ صفحة 105



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



مثال (3) : لتكن: $y = u^3 - 3u + 1$, $u = 5x^2 + 2$. أوجد: $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل. صفحة 105

حاول أن تحل (3) : لتكن: $y = u^2 + 4u - 3$, $u = 2x^3 + x$. أوجد: $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل. صفحة 105

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	م ٢٠٢٣ / /		١٤٢ /
الموضوع		



مثال (6) : لتكن: $y = \sqrt[5]{(x^2 + 3x + 5)^3}$ ، أوجد: y' صفحة 107

حاول أن تحل (6) : لتكن: $y = \sqrt[4]{(2x^4 - 3x^2 + 4)^3}$ ، أوجد: y' صفحة 107

صفحة 106 من 172

معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	١ / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



مثال (7) : أوجد ميل مماس المنحنى: $y = \sin^5 x$ ، عند $x = \frac{\pi}{3}$ صفحة 107

صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



(6 - 2) تمارين متابعة المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

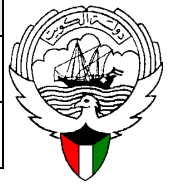
مثال (1) : أوجد مشتقات حتى الرتبة الرابعة للدالة: $y = 2x^7 - 4x^2 + 3x - 5$ بدلالة المتغير x .
صفحة 109

حاول أن تحل (1) : إذا كانت: $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$. فأوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة.
صفحة 109

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٢ /
الموضوع		



مثال (2) : إذا كانت: $y = \sin x$ ، بين ان: $y^{(4)} = y$ صفحة 109

حاول أن تحل (2) : لتكن الدالة: $y = \cos x$ ، بين ان: $y^{(4)} + y'' = 0$ صفحة 109

صفحة 109 من 172

معلمي الكويت

إبراهيم الأستاف: محوّر عامر العلو



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



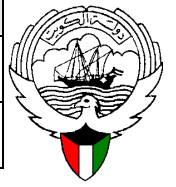
مثال (3) : أوجد y'' حيث $y = \frac{1}{\cos x}$.
صفحة 110

حاول أن تحل (3) : أوجد y'' حيث $y = \frac{1}{\sin x}$.
صفحة 110

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / /		١٢٤ /
الموضوع		



مثال (4) : أوجد: $y' = \frac{dy}{dx}$ في الحالات التالية: صفحة 111

a) $y^2 + xy = 7x$

b) $y = x + x^2y^5$

حاول أن تحل (4) : لتكن: $y^2 = x^2 - 2x$ ، أوجد: $y' = \frac{dy}{dx}$. صفحة 112

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٤٢٢ /
الموضوع		



مثال (5) : أوجد ميل المماس للمنحنى (الدائرة) الذي معادلته: $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(-4, 3)$.
صفحة 112

حاول أن تحل (5) : أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند النقطة $(1, 1)$.
صفحة 112

معلمي الكويت
صفوة



اليوم	التاريخ	الحصّة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٤٢٢ /
الموضوع		



مثال (6) : أوجد ميل المماس $(\frac{dy}{dx})$ للمنحنى الذي معادلته: $2y = x^2 + \sin y$ عند النقطة $(2\sqrt{\pi}, 2\pi)$.
صفحة 113

حاول أن تحل (6) : أوجد ميل المماس $(\frac{dy}{dx})$ للمنحنى الذي معادلته: $x^2 + y^2 - 2xy = 1$ حيث $x \neq y$
صفحة 113

عند النقطة $(2, 1)$.

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢ع /
الموضوع		



مثال (7) : للمنحنى الذي معادلته: $2\sqrt{y} + y = x$. أوجد y' .
صفحة 113

ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة (3 , 1) .





اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢ع /
الموضوع		



حاول أن تحل (7): للمنحنى الذي معادلته: $y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$. أوجد y' .
صفحة 114

ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة (1, 1) .

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣م		١٢ع /
الموضوع		



مثال (8) : إذا كانت: $y = \sqrt{1 - 2x}$. فأثبت ان: $yy'' + (y')^2 = 0$.
صفحة 114

صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٢ /
الموضوع		



حاول أن تحل (8) : إذا كانت: $y = x \sin x$ ، فأثبت ان: $y''' + y' + 2 \sin x = 0$.
صفحة 114

صفوة معلم الكويت

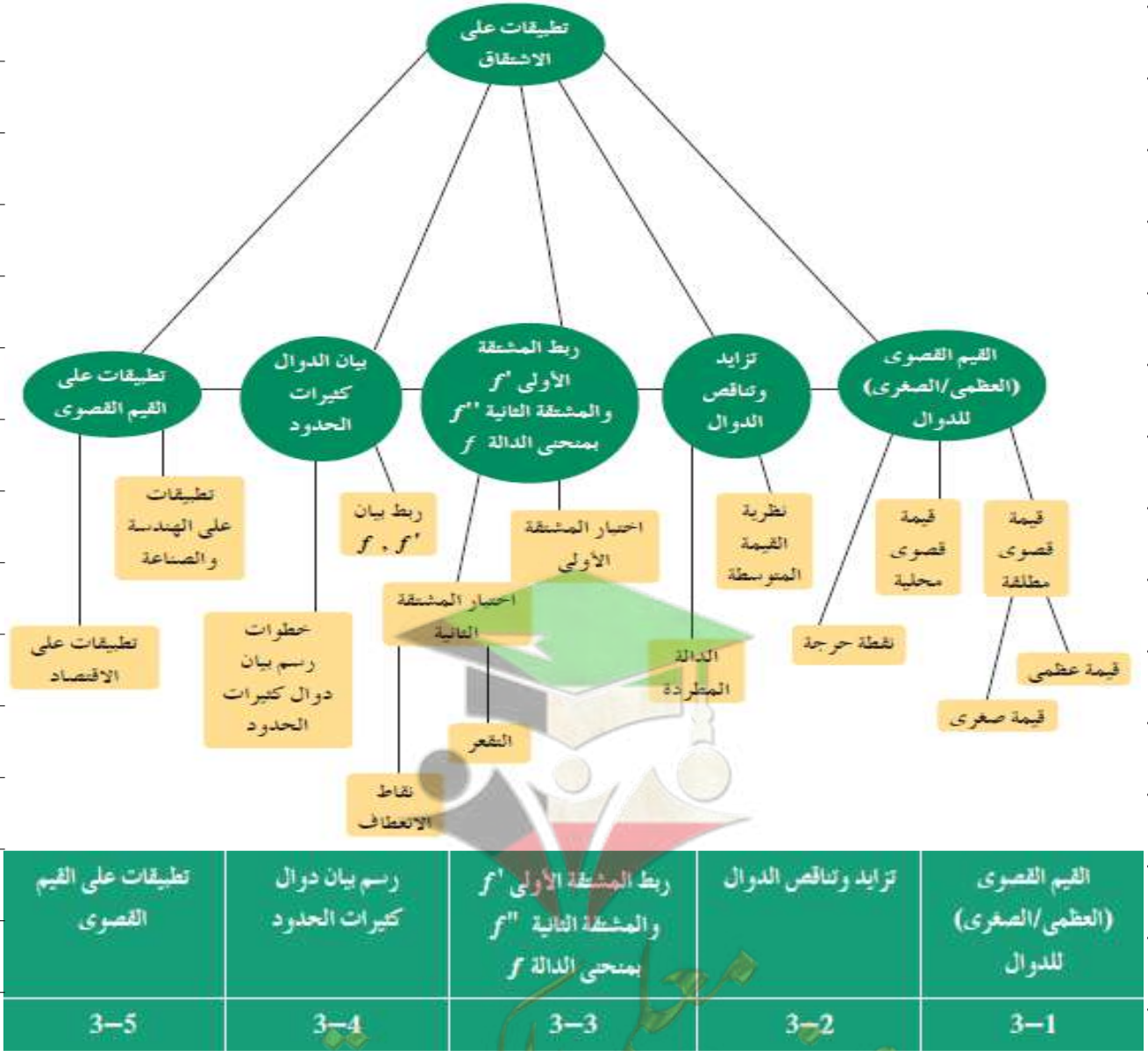
الكتاب الاول

"مادة الرياضيات"

الوحدة الثالثة

تطبيقات على الاشتقاق

Applications on Differentiation



رئيس القسم: محمود حامد العلو

أوراق متابعة الوحدة الثالثة (تطبيقات على الاشتقاق)

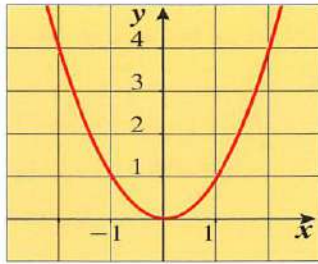
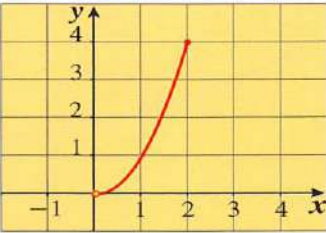
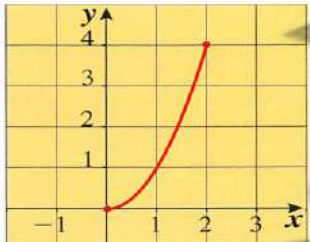
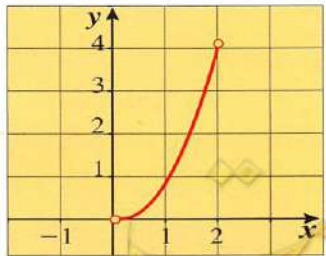
(1 - 3) تمارين متابعة القيم القصوى للدوال

مثال (1)
صفحة 123

لكن الدالة: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^2$ ، أوجد إن أمكن القيم القصوى للدالة f مع رسم بيانيها عندما:

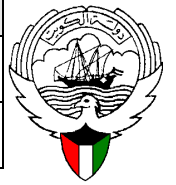
- a $D = (-\infty, \infty)$ b $D = (0, 2]$ c $D = [0, 2]$ d $D = (0, 2)$

الحل:

بيان الدالة: $f(x) = x^2$	المجال D	القيم القصوى المطلقة للدالة f على D
<p>a</p> <p>$y = x^2$</p> 	$(-\infty, \infty)$	لا توجد قيمة عظمى مطلقة. توجد قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x = 0$
<p>b</p> <p>$y = x^2$</p> 	$(0, 2]$	توجد قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 عند $x = 2$ لا توجد قيمة صغرى مطلقة.
<p>c</p> <p>$y = x^2$</p> 	$[0, 2]$	توجد قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 عند $x = 2$ قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x = 0$
<p>d</p> <p>$y = x^2$</p> 	$(0, 2)$	لا توجد قيم قصوى مطلقة.



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



لتكن $(c, f(c))$ نقطة داخلية للدالة f ، D فترة مفتوحة تحوي c تكون $f(c)$:

(a) قيمة عظمى محلية عند c عندما: $f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in D$

(b) قيمة صغرى محلية عند c عندما: $f(c) \leq f(x) \quad \forall x \in D$

تعريف "النقطة الحرجة":

النقطة الداخلية للدالة f $(c, f(c))$ تسمى نقطة حرجة عندما $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة،

مثال (2): أوجد النقاط الحرجة للدالة: $a) g(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ صفحة 125

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٢ / ع
الموضوع		



حاول أن تحل (2) : أوجد النقاط الحرجة للدالة: $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 10$ a) صفحة 127



صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣م		١٢ع /
الموضوع		



خطوات إيجاد القيم القصوى المطلقة على فترة مغلقة $[a, b]$

- (١) إيجاد قيم الدالة عند النقاط الطرفية: $x = a$. $x = b$
- (٢) إيجاد النقاط الحرجة للدالة f في الفترة (a, b) إن وجدت.
- (٣) أكبر قيمة للدالة في الخطوتين ١، ٢ هي قيمة عظمى مطلقة في $[a, b]$ وأصغر قيمة للدالة هي قيمة صغرى مطلقة في $[a, b]$

مثال (3): أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة $f : f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[0, 3]$.
صفحة 128

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



حاول أن تحل (3) : أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة $f : f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[-2, 1]$.
صفحة 128

صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		

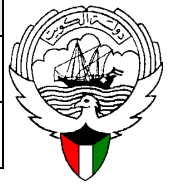


مثال (4) : أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ في الفترة $[-2, 3]$.
صفحة 129

صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



حاول أن تحل (4) : أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = \frac{1}{x^2}$ في الفترة $[1, 3]$.
صفحة 129

صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / /		١٢ /
الموضوع		



(2 - 3) تمارين متابعة تزايد وتناقص الدوال

نظرية القيمة المتوسطة:

إذا كانت f دالة:

(١) متصلة على الفترة $[a, b]$

(٢) قابلة للاشتقاق على الفترة (a, b)

فإنه يوجد على الأقل $c \in (a, b)$ بحيث: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

مثال (1): بين أن الدالة $f: f(x) = x^2$. تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 2]$ ،
صفحة 133

ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية. فسر إجابتك.

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢ / ع
الموضوع		



حاول أن تحل (1) : بين أن الدالة $f: f(x) = x^2 + 2x$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3, 1]$ ،
صفحة 133

ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية. فسر إجابتك.





اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



مثال (2) : بين أن الدالة $f: f(x) = x^3 + 1$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3, 3]$ ،
صفحة 133

ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية. فسر إجابتك.





اليوم	التاريخ	الحصّة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



حاول أن تحل (2) : بين أن الدالة $f: f(x) = x^3 - 3x + 2$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 4]$ ،
صفحة 134

ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية. فسر إجابتك.

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٢ / ع
الموضوع		



نظرية:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a, b) :

(١) إذا كانت: $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ ، فإن الدالة f تتزايد على (a, b)

(٢) إذا كانت: $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$ ، فإن الدالة f تتناقص على (a, b)

(٣) إذا كانت: $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$ ، فإن الدالة f ثابتة على (a, b)

مثال (3): أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x) = x^2 - 5x + 6$. صفحة 135



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		

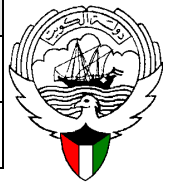


حاول أن تحل (3) : أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.
صفحة 135

صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / /		١٢ /
الموضوع		



مثال (4) : لتكن الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.
صفحة 136

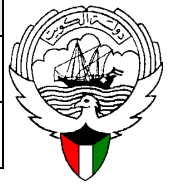
حدد الفترات حيث تكون f متزايدة والفترات حيث تكون f متناقصة .

حاول أن تحل (4) : إذا كانت الدالة $f(x) = x^3 - 6x$. حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f .
صفحة 136

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٤٢٢ /
الموضوع		



مثال (5) : إذا كانت الدالة f : $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f .
صفحة 137

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٢ / ع
الموضوع		



حاول أن تحل (5) : حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$.
صفحة 137

صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



(3 - 3) تمارين متابعة ربط المشتقة الأولى والمشتقة الثانية بمنحنى الدالة

اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية:

نظرية:

لتكن f دالة متصلة على مجالها وكانت $(c, f(c))$ نقطة حرجة:

(١) إذا كانت إشارة المشتقة f' تتغير من الموجب إلى السالب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة عظمى محلية عند c .

(٢) إذا كانت إشارة المشتقة f' تتغير من السالب إلى الموجب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة صغرى محلية عند c .

(٣) إذا لم تتغير إشارة المشتقة f' عند $x = c$ ، فإن f لا يكون لها قيم قصوى محلية عند c .

صفوة معلمى الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	١ / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



مثال (1) : إذا كانت الدالة $f : f(x) = x^3 - 12x - 5$. أوجد كلا مما يلي: صفحة 139

(a) أوجد النقاط الحرجة للدالة.

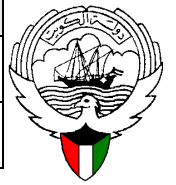
(b) الفترات التي تكون الدالة f متزايد أو متناقصه عليها.

(c) القيم القصوى المحليّة.

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	١ / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



حاول أن تحل (1) : إذا كانت الدالة f : $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$. أوجد كلا مما يلي: صفحة 140

(a) أوجد النقاط الحرجة للدالة.

(b) الفترات التي تكون الدالة f متزايد أو متناقصه عليها.

(c) القيم القصوى المحليّة.

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣م		١٤٢٢ /
الموضوع		



اختبار التقعر:

(a) إذا كانت $f''(x) > 0$ ، $\forall x \in I$ فإن منحنى الدالة f مقعراً للأعلى على I

(b) إذا كانت $f''(x) < 0$ ، $\forall x \in I$ فإن منحنى الدالة f مقعراً للأسفل على I

تعريف نقطة الانعطاف:

تسمى النقطة $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f إذا كانت f دالة متصلة عند c ، ومنحنى الدالة f يغير تقعره عند هذه النقطة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى.

مثال (3): أوجد فترات التقعر ونقاط الانعطاف لمنحنى الدالة: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$. صفحة 143

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٢ / ع
الموضوع		



حاول أن تحل (3) : أوجد فترات التقعر ونقاط الانعطاف لمنحنى الدالة: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.
صفحة 144

صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٢ / ع
الموضوع		



اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية

نظرية:

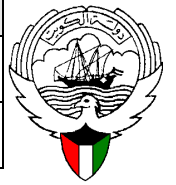
- (a) إذا كانت $f'(c) = 0$, $f''(c) < 0$ ، فإن تكون لها قيمة **عظمى** محلية عند $x = c$
- (b) إذا كانت $f'(c) = 0$, $f''(c) > 0$ ، فإن تكون لها قيمة **صغرى** محلية عند $x = c$

مثال (4) : استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للدالة: $f(x) = x^3 - 12x - 5$.
صفحة 146

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



حاول أن تحل (4) : استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للدالة: $f(x) = 4x^3 - 12x^2$.
صفحة 146

صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



(4 - 3) تمارين متابعة رسم بيان دوال كثيرات الحدود

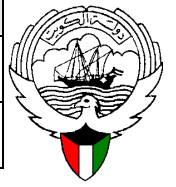
خطوات دراسة تغير دالة ورسم بيانها

- (١) عيّن مجال الدالة.
- (٢) أوجد النهايات عند الحدود المفتوحة لمجال الدالة.
- (٣) عيّن النقاط الحرجة للدالة.
- (٤) كوّن جدولاً لدراسة إشارة المشتقة الأولى وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية.
- (٥) كوّن جدولاً لدراسة إشارة المشتقة الثانية وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت.
- (٦) أوجد نقاطاً إضافية لتساعد في الرسم "نقاط التقاطع مع المحاور إن لم تكن موجودة".
- (٧) ارسم بيان الدالة مستخدماً نتائج الخطوات السابقة في الرسم.

صفوة معلمى الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	١ / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



مثال (1) : ادرس تغير الدالة $f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بيانها. صفحة 148

صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	2023 / 1 /		1 / 2 /
الموضوع		



.....

.....

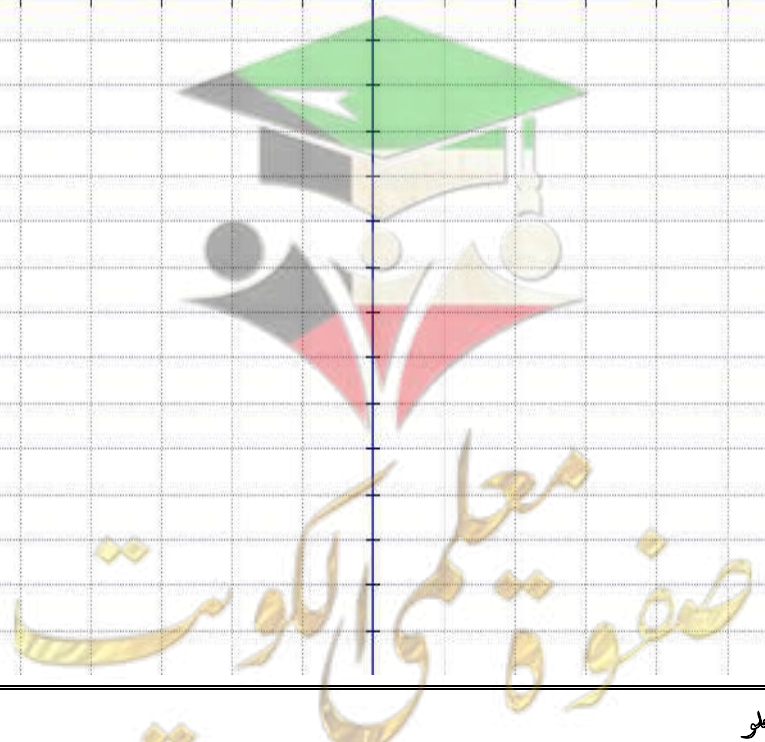
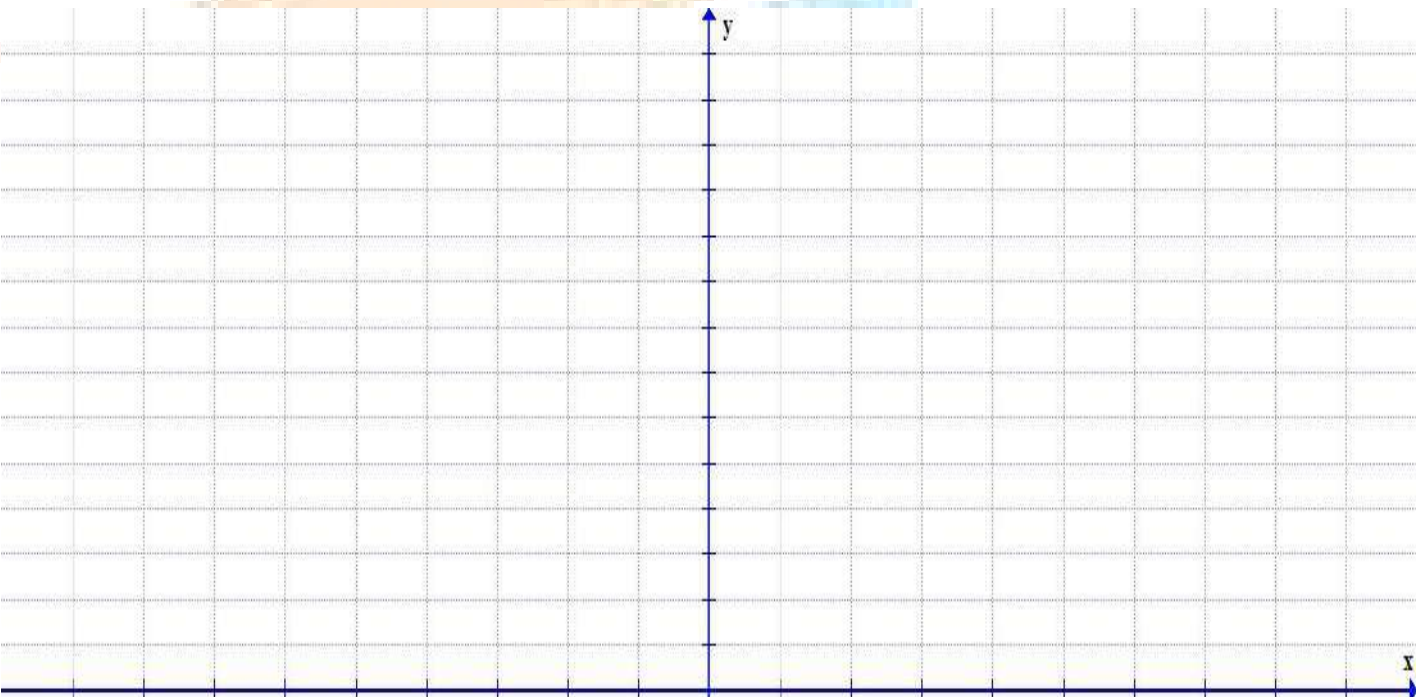
.....

.....

.....

.....

.....





اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / /		١٢ /
الموضوع		



حاول أن تحل (1) : ادرس تغير الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها. صفحة 149

صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصّة	الصف
.....	١ / ٢٠٢٣ م		١٢ / ع
الموضوع		



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

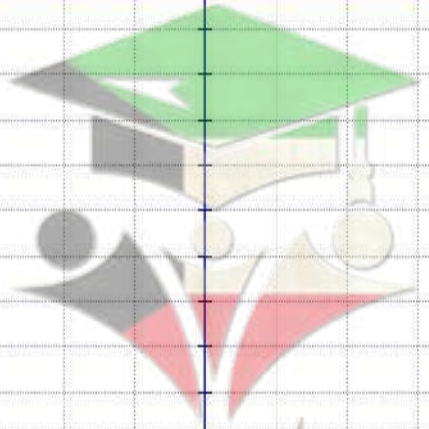
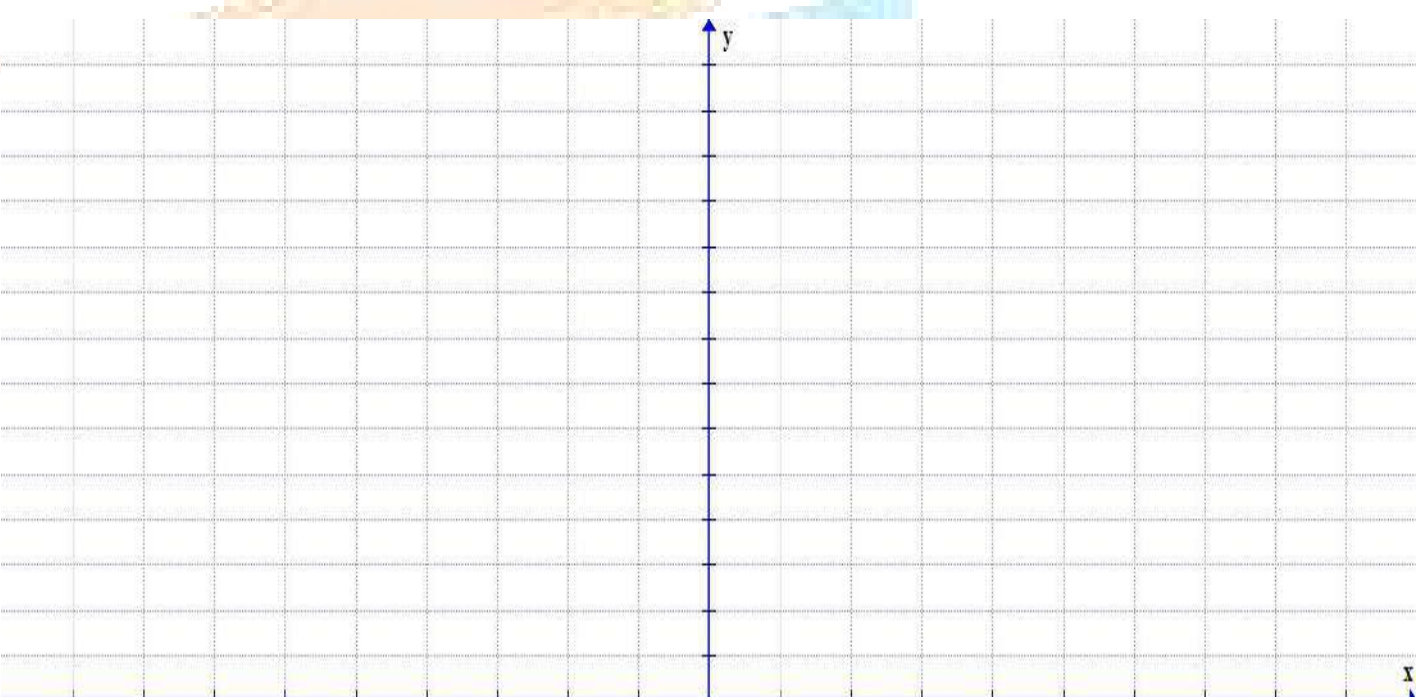
.....

.....

.....

.....

.....



صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	١ / ٢٠٢٣ م		١٢ع /
الموضوع		



مثال (2) : ادرس تغير الدالة $f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها. صفحة 149

صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



.....

.....

.....

.....

.....

.....

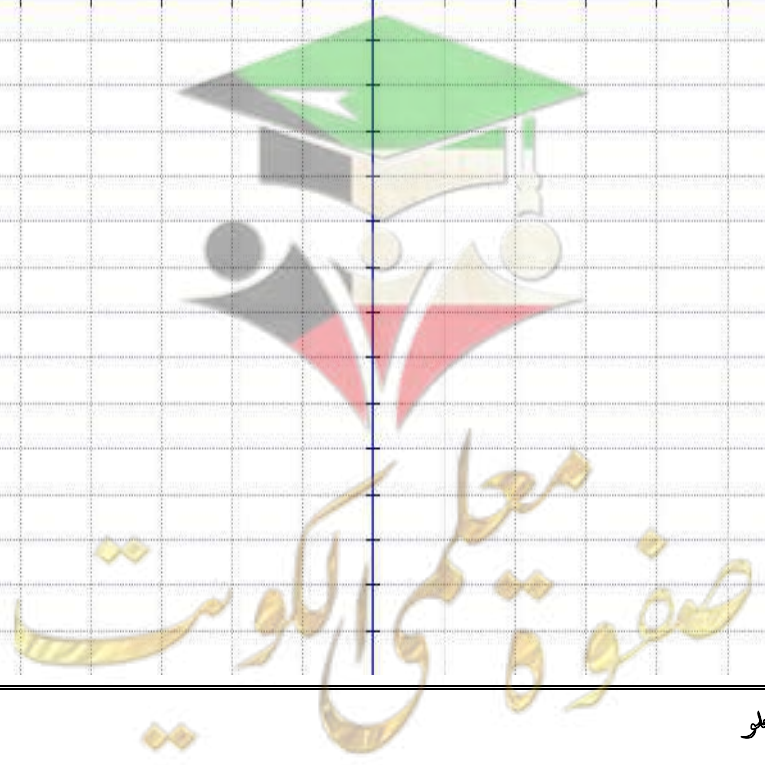
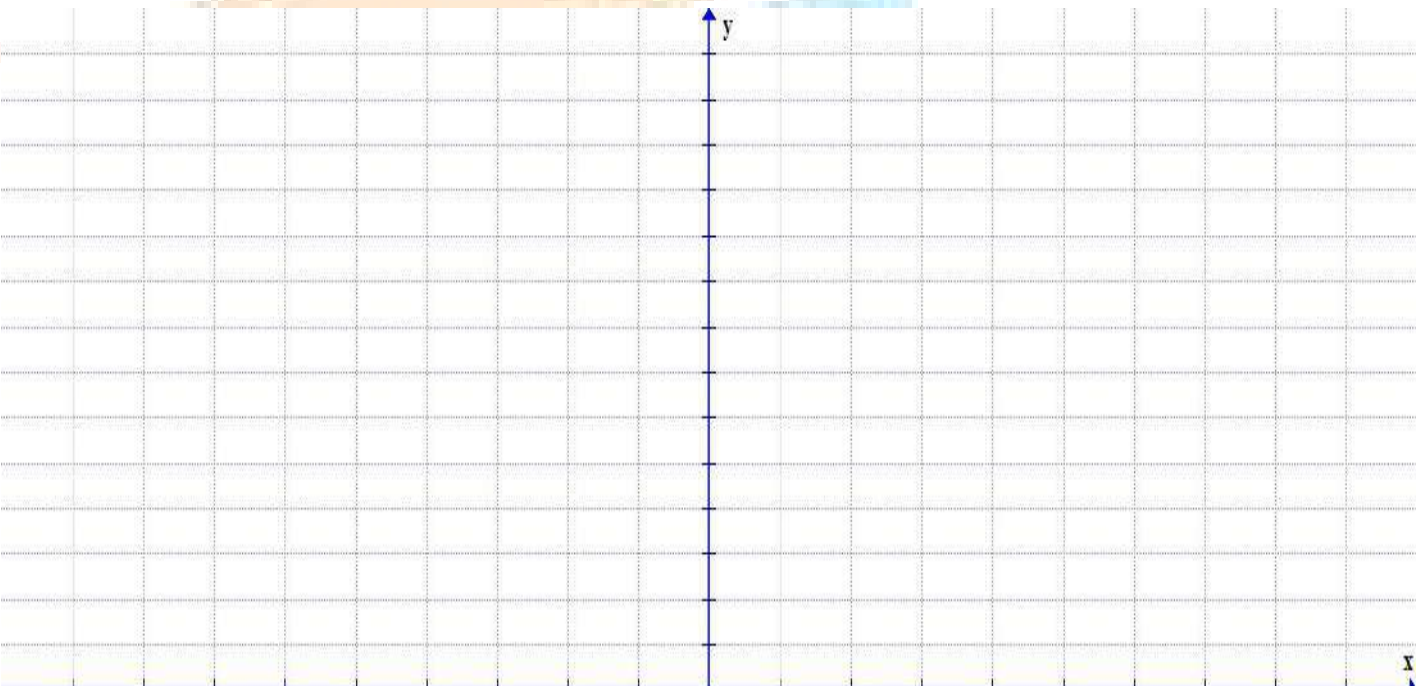
.....

.....

.....

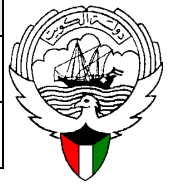
.....

.....





اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣م		١٢ع /
الموضوع		



حاول أن تحل (2) : ادرس تغير الدالة $f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها.
صفحة 150

صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



.....

.....

.....

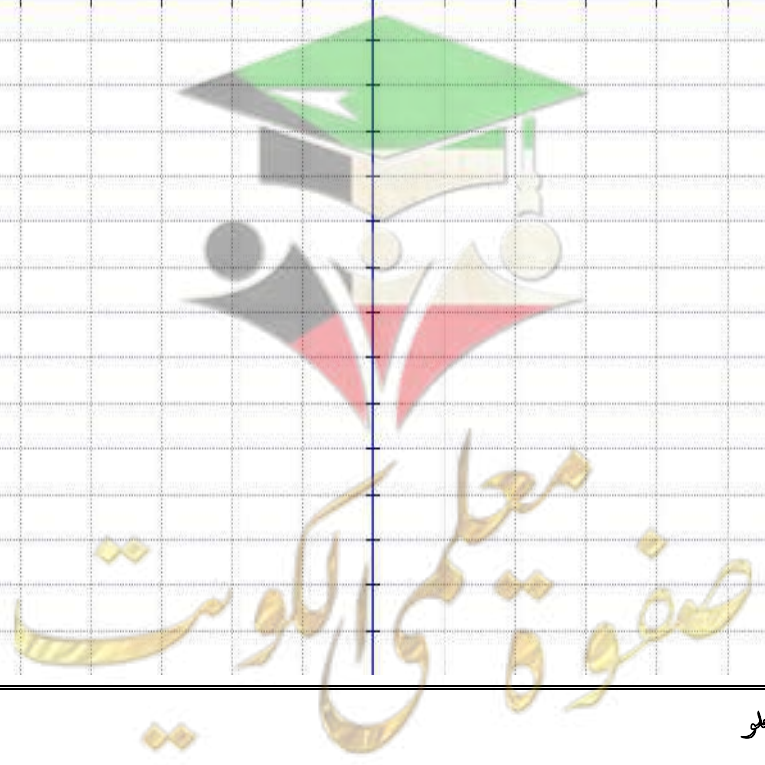
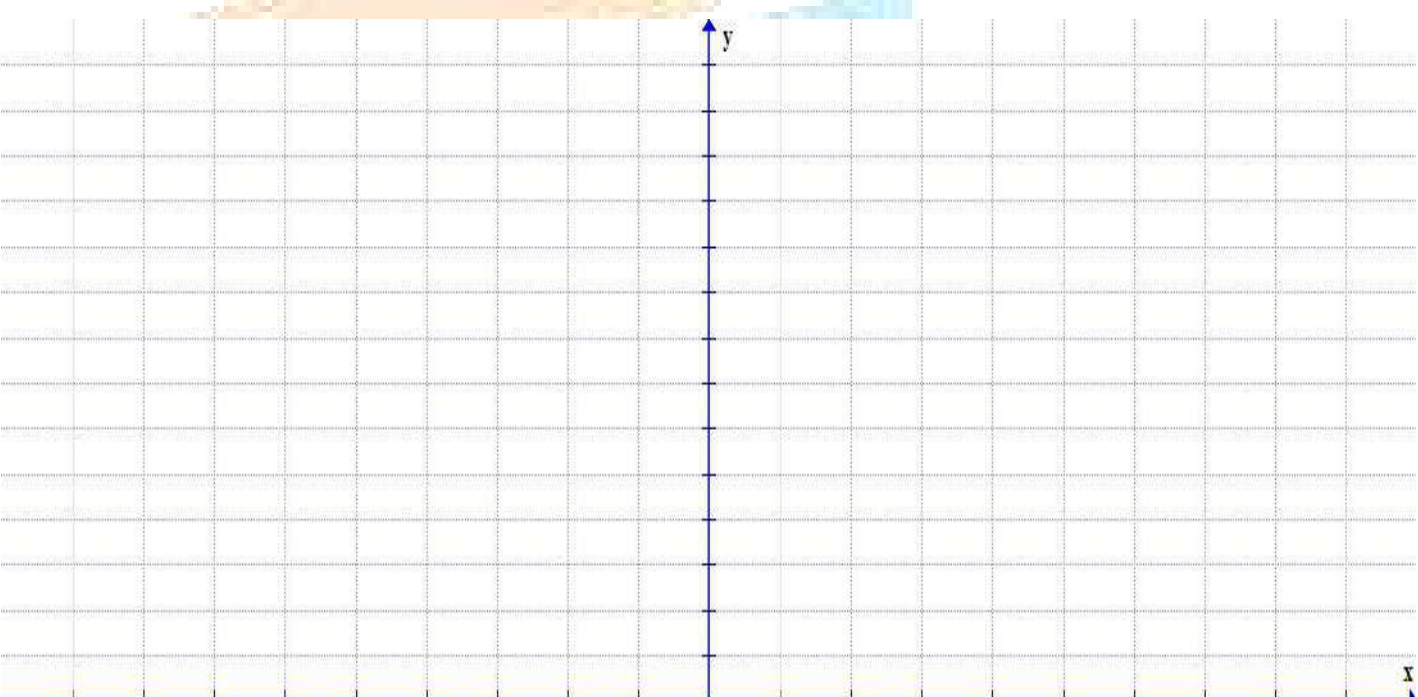
.....

.....

.....

.....

.....





اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



تمارين متابعة تطبيقات على القيم القصوى (3 - 5)

مثال (1) : عددان موجبان مجموعهما 100 ومجموع مربعيهما أصغر ما يمكن، ما العددان؟
صفحة 155



صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	1 / 2023 م		12ع /
الموضوع		



حاول أن تحل (1) : أوجد عددين مجموعهما 14 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن.
صفحة 156

صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	1 / 2023 م		12ع /
الموضوع		



كراسة التمارين (2) : ما أكبر مساحة ممكنة لمثلث قائم الزاوية وطول وتره يساوي 6 cm ؟ وما أبعاده ؟
صفحة 63

صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	1 / 2023 م		12ع /
الموضوع		



كراسة التمارين (3) : أثبت أن من بين المستطيلات التي محيطها 8 cm . واحد منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعاً.
صفحة 63

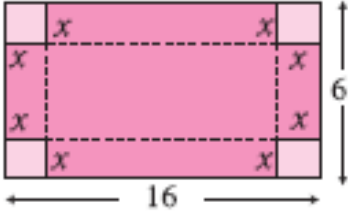
صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣م		١٢ع /
الموضوع		



مثال (2) : يراد صنع صندوق بدون غطاء بقصّ مربّعات متطابقة طول ضلع كلّ منها x من أركان طبقة صفيح صفحة 156



أبعادها $6\text{ cm}, 16\text{ cm}$ وثني جوانبها إلى أعلى (انظر الشكل المقابل).

أوجد قيمة x بحيث يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن.

وما هو حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة؟





اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



حاول أن تحل (2) : يراد صنع صندوق بدون غطاء بقصّ مربّعات متطابقة طول ضلع كلّ منها x من أركان طبقة صفيح أبعادها $8\text{ cm}, 15\text{ cm}$ وثني جوانبها إلى أعلى .

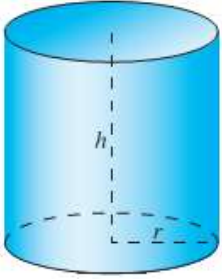
أوجد قيمة x بحيث يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن. وما هو حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة؟



صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٤٢٢ /
الموضوع		



مثال (3) : طلب إليك تصميم علبة زيت تسع لترًا واحدًا تكون على شكل أسطوانة دائرية قائمة
صفحة 157

(كما في الشكل المقابل). ما أبعادها لتكون كمية المعدن المستخدم لصنعها أقل ما يمكن؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصّة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



حاول أن تحل (3) : تعطي الدالة: $v(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$. حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h .
صفحة 158

(a) أوجد الارتفاع h (cm) للحصول على أكبر حجم للأسطوانة.
(b) ما قيمة هذا الحجم؟



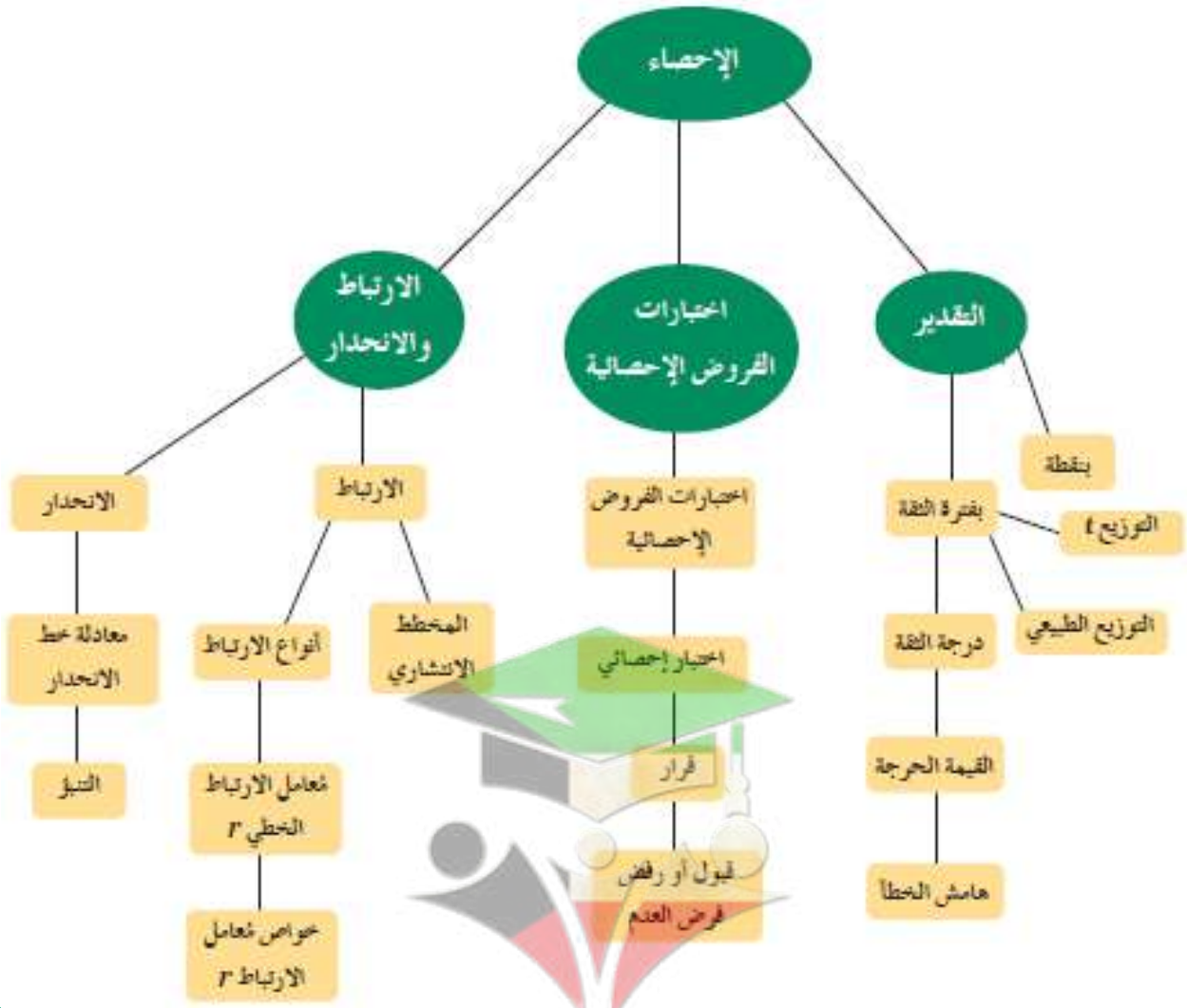
الكتاب الاول

"مادة الرياضيات"

الوحدة الرابعة

الإحصاء

Statistics



الارتباط والانحدار	اختبارات الفروض الإحصائية	التقدير
4-3	4-2	4-1

رئيس القسم: محمود حامد العلو

أوراق متابعة الوحدة الرابعة (الإحصاء)

(1 - 4) تمارين متابعة التقدير بفترة ثقة

تعريف

المعلمة: هي ثابت يصف المجتمع أو يصف توزيع المجتمع كالمتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ

الإحصاء: هو اقتران تتعين قيمته من العينة كالمتوسط الحسابي \bar{x} أو الانحراف المعياري s

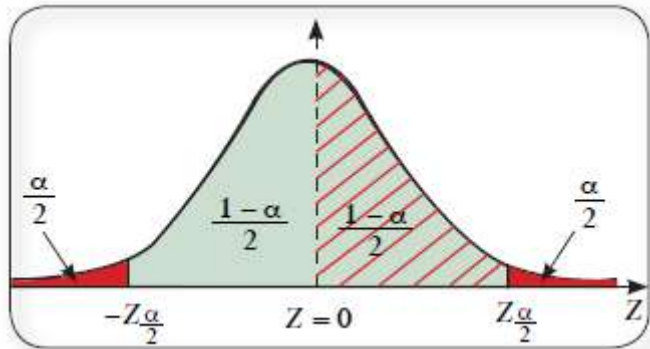
تقدير المعلمة: هو إحصاء تعتمد على قيم العينة وتعكس قيمة قريبة لمعلمة المجتمع ككل وتوزيعه.

فترة الثقة: هي فترة طرفاها متغيران عشوائيان (أي أنها فترة عشوائية) تحوي معالم المجتمع بنسبة معينة تسمى درجة الثقة (مستوى الثقة).

التقدير بفترة الثقة: هو إيجاد فترة معينة يتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة أو احتمال معين

α : نسبة الخطأ في التقدير وتسمى **مستوى المعنوية** أو **مستوى الدلالة**.

$1 - \alpha$: درجة الثقة أو مستوى الثقة



$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$$

القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ ملاحظة:

المجتمع	العينة	
μ	\bar{x}	المتوسط الحسابي
σ	s	الانحراف المعياري
σ^2	s^2	التباين

مثال (1): أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى الثقة 95% . باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري. صفحة 171

حاول أن تحل (1): أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى الثقة 97% . باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري. صفحة 171

هامش الخطأ E

عند استخدام بيانات عينة لتقدير المتوسط الحسابي μ لمجتمع، يكون هامش الخطأ، يرمز إليه بـ E ، القيمة العظمى الأكثر ترجيحاً عند درجة ثقة $(1 - \alpha)$ للفرق بين المتوسط الحسابي \bar{x} للعينة والمتوسط الحسابي μ للمجتمع.

التقدير بفترة الثقة للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الاحصائي

فترة الثقة	هامش الخطأ E	حجم العينة n	الانحراف المعياري σ
$(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$	$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$n > 30$ $n \leq 30$	معلوم
	$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{S}{\sqrt{n}}$	$n > 30$	غير معلوم
	$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{S}{\sqrt{n}}$	$n \leq 30$ درجات الحرية $(n-1)$	

ملاحظة: عند إيجاد فترة الثقة سنكتفي بدرجة الثقة 95% والتي تناظرها القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ (من جدول التوزيع الطبيعي المعياري).



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



مثال (2) : أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهم فإذا كان حجم عينة الإناث $n = 40$ والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 12.5$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 76.3$ باستخدام مستوى ثقة 95% .

- (1) أوجد هامش الخطأ.
- (2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الاحصائي μ
- (3) فسر فترة الثقة.

صفحة 160 من 172

معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	1 / 2023 م		12ع /
الموضوع		



حاول أن تحل (2) : أجريت دراسة لعينة على عينة أخرى من الإناث حجمها 25 ،
صفحة 173

والانحراف المعياري لمجتمع الاناث $\sigma = 3.6$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 18.4$ باستخدام مستوى ثقة 95%.

(1) أوجد هامش الخطأ.

(2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الاحصائي μ

(3) فسر فترة الثقة.

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



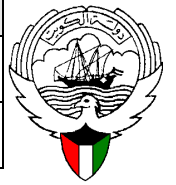
مثال (3) : عينة عشوائية حجمها 36 ، فإذا كان المتوسط الحسابي للعينة 60 وتباينها 16 ، باستخدام مستوى ثقة 95% .
صفحة 174

- أوجد هامش الخطأ.
- أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الاحصائي μ
- فسر فترة الثقة.

صفوة تعليم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



حاول أن تحل (3) : أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 81$ ومتوسطها الحسابي $\bar{x} = 50$ ،
صفحة 174

وانحرافها المعياري $S = 9$ ، باستخدام مستوى ثقة 95%.

(1) أوجد هامش الخطأ.

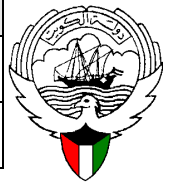
(2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الاحصائي μ

(3) فسر فترة الثقة.

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



مثال (4) : أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 25$ ، فإذا كان الانحراف المعياري للعينة (s) يساوي 10
صفحة 176

ومتوسطها الحسابي (\bar{x}) يساوي 15 ، استخدام مستوى ثقة 95% . لإيجاد:

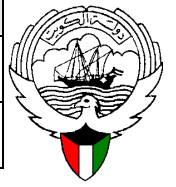
(1) أوجد هامش الخطأ.

(2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الاحصائي μ





اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢ / ع
الموضوع		



حاول أن تحل (4) : أوجد فترة ثقة 95% للمتوسط الحسابي للمجتمع الاحصائي μ علماً أن العينة أخذت من مجتمع طبيعي. صفحة 176

إذا كان لدينا $n = 13$ ، $S = 0.3$ ، $\bar{x} = 8.4$.



(2 - 4) تمارين متابعة اختبار الفروض الاحصائية

تعريف

الفرض الإحصائي: هو ادعاء معيّن مبني على حيثيات معقولة حول معلمة من معالم المجتمع مثل المتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ .

المقياس الإحصائي: هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة تحت شروط معينة.

اختبارات الفروض الإحصائية (اختبار المعنوية): هي طريقة معيارية لاختبار ادعاء ما حول معلمة من معالم المجتمع.

ملاحظة: سنكتفي في هذا الموضوع بدراسة معلمة واحدة من معالم المجتمع وهي المتوسط الحسابي μ

الخطوات المتبعة لإجراء اختبار الفروض الإحصائية:

(1) صياغة الفروض الإحصائية (فرض العدم H_0 والفرض البديل H_1).

(2) التحقق من الانحراف المعياري σ للمجتمع (معلوم أم غير معلوم) وتحديد حجم العينة (n) ومن ثم إيجاد المقياس الإحصائي للاختبار (Z أو t) كما في الجدول التالي:

المقياس الإحصائي للاختبار الفروض (Z أو t)	حجم العينة n	الانحراف المعياري σ
$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	$n \leq 30$ $n > 30$	معلوم
$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$n > 30$	غير معلوم
$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$n \leq 30$	

(3) تحديد مستوى المعنوية α وحساب القيمة الجدولية $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري ،

أو القيمة الجدولية من جدول $t_{\frac{\alpha}{2}}$.

(4) تحديد منطقة القبول: $(-Z_{\frac{\alpha}{2}}, Z_{\frac{\alpha}{2}})$ أو $(-t_{\frac{\alpha}{2}}, t_{\frac{\alpha}{2}})$.

(5) اتخاذ القرار الإحصائي (قبول فرض العدم) أو (رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل).

ملاحظة: ستقتصر دراستنا على مستوى ثقة 95 %.



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



مثال (1) : تزعم شركة أن متوسط رواتب موظفيها يساوي 4000 دينار كويتي. إذا أخذت عينة من 25 موظفاً ، ووجد
صفحة 179 أن متوسط رواتب العينة هو 3950 ديناراً كويتياً. فإذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع (ديناراً)
 $\sigma = 125$. وضح كيفية إجراء الاختبار الاحصائي بمستوى ثقة 95%.

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢٤ /
الموضوع		



حاول أن تحل (1) : بيّنت الدراسة أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل أسلاك معدنية هو $\mu = 1800 \text{ kg}$ مع انحراف معياري صفحة 179
 $\sigma = 150 \text{ kg}$ ، ويؤكد الأخصائيون في المصنع المنتج لهذه الاسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة تحمل هذه الأسلاك، وتأكيداً على ذلك تمّ اختبار عينة من 40 سلكاً . فتبين أن متوسط قوة تحمل هذه الأسلاك يساوي 1840 kg . هل يمكن قبول مثل هذا الفرض بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

صفوة معلمة الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / /		١٢٤ /
الموضوع		



مثال (2) : إذا كانت $n = 80$ ، $\bar{x} = 37.2$ ، $S = 1.79$ ،
صفحة 180
اختبر الفرض بأن $\mu = 37$ ، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

صفوة معلم الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	/ / ٢٠٢٣م		١٢ع /
الموضوع		



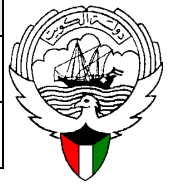
حاول أن تحل (2) : متوسط العمر بالساعات لعينة من 100 مصباح كهربائي مصنعة في أحد المصانع $\bar{x} = 1570$ صفحة 180

بانحراف معياري $S = 120$. يقول صاحب المصنع إن متوسط العمر بالساعات $\mu = 1600$ للمصابيح المصنعة في المصنع. اختبر صحة الفرض $\mu = 1600$ مقابل الفرض $\mu \neq 1600$ وباختيار مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

صفوة معلمي الكويت



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٤١٢ /
الموضوع		



مثال (3) : يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة يساوي 290 ديناراً كويتياً. فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 منازل تبين أن متوسطها الحسابي (ديناراً) $\bar{x} = 283$ وانحرافها المعياري (ديناراً) $S = 32$. فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟ استخدم مستوى ثقة 95% .

صفوة معلمي الكويت

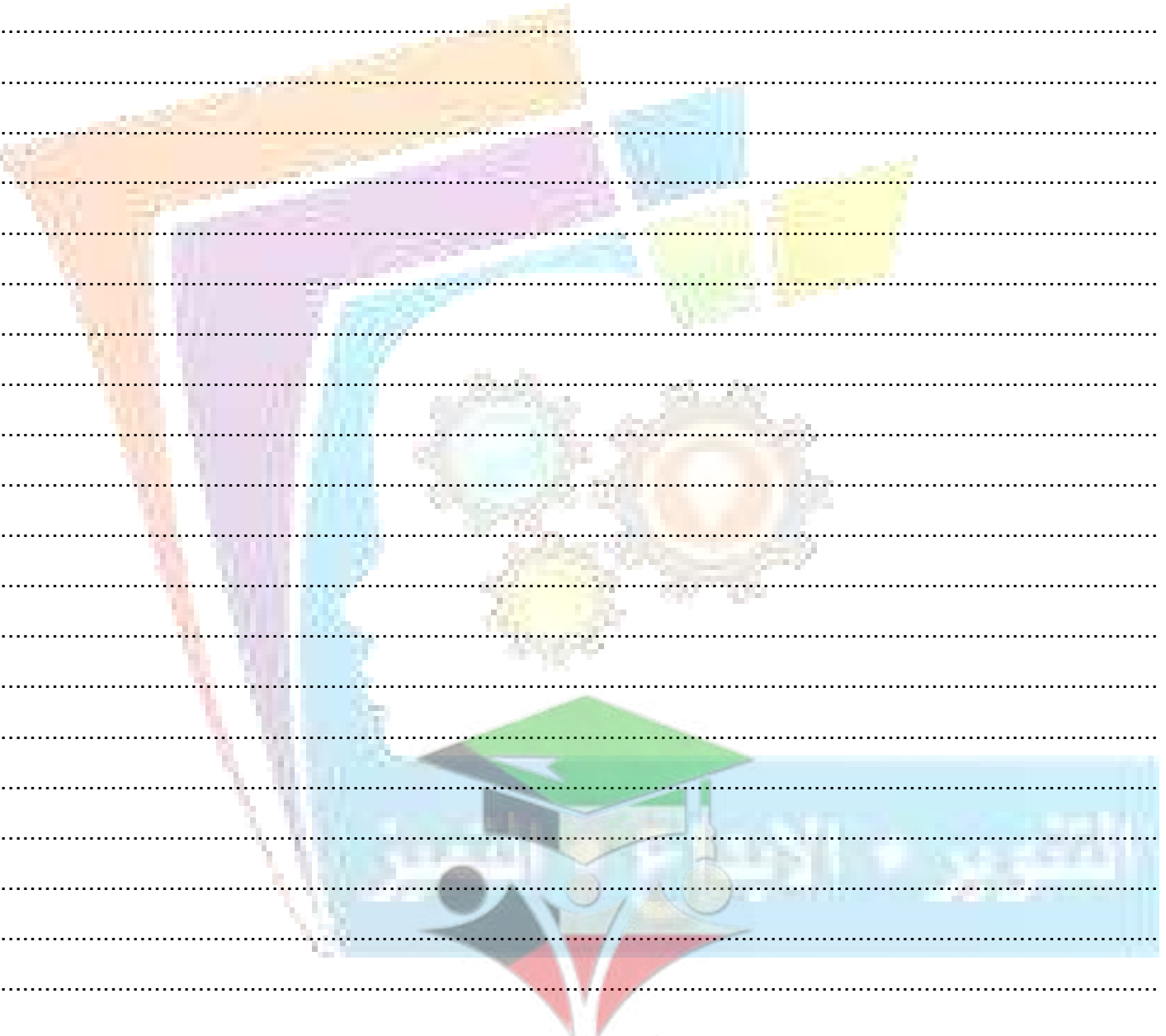


اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
.....	٢٠٢٣ / ١ /		١٢ع /
الموضوع		

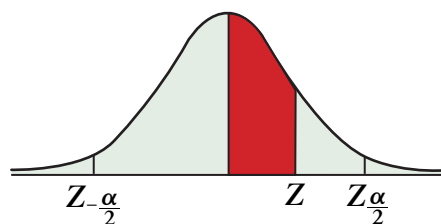


حاول أن تحل (3) : إذا أجريت دراسة إحصائية أخرى على المدينة ذاتها وتبين من خلالها أن $S = 5$ ، $\bar{x} = 296$.
صفحة 181

لعينة من 10 منازل مع استخدام درجة الثقة نفسها . فهل يبقى افتراض المدير عند الشركة صحيحاً أم لا ؟ . وضح اجابتك.



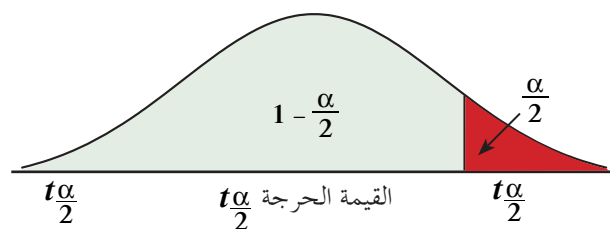
صفوة معلّم الكوّة
تمت بحمد الله



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (Z)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.10	0.4999									
وأكثر										

ملاحظة: استخدم 0.4999 عندما تزيد قيمة Z عن 3.09



جدول التوزيع t						
$\frac{\alpha}{2}$						
درجات الحرية ($n - 1$)	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.25
1	63.657	31.821	12.706	6.314	3.078	1.000
2	9.925	6.965	4.303	2.920	1.886	0.816
3	5.841	4.541	3.182	2.353	1.638	0.765
4	4.604	3.747	2.776	2.132	1.533	0.741
5	4.032	3.365	2.571	2.015	1.476	0.727
6	3.707	3.143	2.447	1.943	1.440	0.718
7	3.500	2.998	2.365	1.895	1.415	0.711
8	3.355	2.896	2.306	1.860	1.397	0.706
9	3.250	2.821	2.262	1.833	1.383	0.703
10	3.169	2.764	2.228	1.812	1.372	0.700
11	3.106	2.718	2.201	1.796	1.363	0.697
12	3.054	2.681	2.179	1.782	1.356	0.696
13	3.012	2.650	2.160	1.771	1.350	0.694
14	2.977	2.625	2.145	1.761	1.345	0.692
15	2.947	2.602	2.132	1.753	1.341	0.691
16	2.921	2.584	2.120	1.746	1.337	0.690
17	2.898	2.567	2.110	1.740	1.333	0.689
18	2.878	2.552	2.101	1.734	1.330	0.688
19	2.861	2.540	2.093	1.729	1.328	0.688
20	2.845	2.528	2.086	1.725	1.325	0.687
21	2.831	2.518	2.080	1.721	1.323	0.686
22	2.819	2.508	2.074	1.717	1.321	0.686
23	2.807	2.500	2.069	1.714	1.320	0.685
24	2.797	2.492	2.064	1.711	1.318	0.685
25	2.787	2.485	2.060	1.708	1.316	0.684
26	2.779	2.479	2.056	1.706	1.315	0.684
27	2.771	2.473	2.052	1.703	1.314	0.684
28	2.763	2.467	2.048	1.701	1.313	0.683
29	2.756	2.462	2.045	1.699	1.311	0.683
30 وأكثر	2.575	2.327	1.960	1.645	1.282	0.675