قسم الرياضيات
ثانوية الصباحية

وزارة التربية
الإدارة العامة لمنطقة الأحمدي التعليمية

مخططات الصف الثاني عشر علمي
الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الخامسة

التكامل

- التكامل غير المحدد
- التكامل بالتعويض
- تكامل الدوال المثلثية
- الدوال الأسية واللوغاريتمية
- التكامل بالتجزيء
- التكامل باستخدام الكسور الجزئية
- التكامل المحدد

التكامل غير المحدد

دالة واحدة

$$\int k\,dx = k\,x + c$$

حيث k عدد ثابت

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$n \in Q - \{-1\}$

ضرب دالتين

* ايجاد حاصل ضرب الدالتين

* التكامل بالتعويض

* التكامل بالتجزيء

الاولوية في اختيار ال u

Ln x

كثيرات الحدود

الدالة الأسية e^x

الدالة المثلثية

قسمة دالتين

*التحليل والاختصار

*قسمة الحدود على المقام اذا كان المقام حد

* تكامل دوال لوغارتيمية

* تكامل باستخدام الكسور الجزئية

قوانين التكامل

$$\int a\,dx = a\,x + c : a$$ ثابت

$$\int X^n \; dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int (g(x))^n . \grave{g}(x)dx = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1}$$

التعويض $$\int u^n \; \grave{u} . dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

التجزيء: $$\int u.dv = uv - \int vdu$$

$$v(t) = \int a(t)dt$$

$$s(t) = \int v(t)dt$$

الزمن $t = 0$
عند السرعة الابتدائية والمسافة الابتدائية

تصل الكرة لأعلى ارتفاع عند
$v(t) = 0$

تصل الكرة للأرض
$s(t) = 0$

التكامل بالتعويض

المشتقة كاملة

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

مثال

$$\int \sqrt[3]{x^2 - 5 \times +2}\ (2 \times -5)dx$$

U=$x^2 - 5x + 2$

du=(2X-5)dx

$$\int u^{\frac{1}{3}}\, du = \frac{3}{4} u^{\frac{4}{3}} + c$$

$$\frac{3}{4}\,(x^2 - 5x + 2)^{\frac{4}{3}}+c.$$

المشتقة ناقصة عدد أو زايدة

نضرب بالعدد داخل التكامل ومعكوسة الضربي خارج التكامل

$$\int \sqrt{4x-5}\ \ du =$$

U=4X-5

Du=4.dx

$$\frac{1}{4}\int 4u^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{4}\int 4u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{\frac{2}{3}}\ u^{\frac{3}{2}}+c$$

$$=\frac{1}{6}(4x-3)^{\frac{3}{2}}+c$$

المشتقة ناقصة او زايدة متغير

توجد قيمة x من u وقيمة dx من du

مثال

$$\int \boldsymbol{x(x+1)^5\,dx} =$$

$$\boldsymbol{U = x + 1 \rightarrow x = u - 1}$$

du=dx

$$\int(\boldsymbol{u-1})\,\boldsymbol{u^5}\ \ \boldsymbol{du}=\int(\boldsymbol{u^6} - \boldsymbol{u^5})\boldsymbol{du}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{7}u^7 - \frac{1}{6}u^6 + c}$$

ملخص إشتقاق و تكامل الدوال المثلثية

$\tan x$

+

$\sec x$ $\sec x$

تكامل حاصل ضرب رأسين يعطي الرأس الثالث

$\cot x$

-

$\csc x$ $\csc x$

$\sin x$

تكامل

إشتقاق

$-\cos x$ $\cos x$

$-\sin x$

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} + c$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a} + c$$

قوانين تكامل الدوال الاسية واللوغاريتمية

قاعدة المشتقة	التكامل غير المحدد
$\frac{d}{dx} e^x = e^x$	$\int e^x \, dx = e^x + C$
$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx} = u' e^u$	$\int u' e^u \, dx = e^u + C$
$\frac{d}{dx} \ln \lvert x \rvert = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln \lvert x \rvert + C$
$\frac{d}{dx} \ln \lvert u \rvert = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$	$\int \frac{u'}{u} \, dx = \ln \lvert u \rvert + C$

التكامل بالتجزيء

عند إيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين ليست احداهما مشتقة الأخرى .
نلجأ الى نوع آخر من التكامل هو التكامل بالتجزيء عندما تكون u,v
دالتين في x قابلة للتفاضل

$$\int u.dv = uv - \int vdu$$

التكامل بالتجزيء

تكامل بالتجزيء مرة واحدة

*دالة مثلثية . حدودية من الدرجة الأولي في المتغير x
*دالة آسية. حدودية من الدرجة الأولي في المتغير x
Ln x . حدودية من الدرجة الأولي في المتغير x

تكامل بالتجزيء مرتين

*دالة مثلثية . حدودية من الدرجة الثانية في المتغير x
* آسية . حدودية من الدرجة الثانية في المتغير x
$*(\ln(x))^2$

تكامل بالتجزيء مرتين غير منتهية

دالة مثلثية . دالة آسية

الكسور الجزئية للدالة $f(x)=\frac{r(x)}{h(x)}$

درجة البسط < درجة المقام	درجة البسط ≥ درجة المقام
- تحليل المقام وتحديد العوامل الخطية لـ $h(x)$ وتحديد فيما اذا كانت العوامل مكررة ام لا.	- قسمة البسط علي المقام قسمة مطولة
تفكيك $f(x)=\frac{r(x)}{h(x)}$ إلى كسور جزئية	- كتابة $f(x)=q(x)+\frac{p(x)}{h(x)}$
- توجد قيم البسط $A_1, A_2, \ldots\ldots$ بالتعويض عن قيم X∈R ويفضل اصفار المقام	- حيث p(x) الباقي
- توجد تكامل الكسور الجزئية	- $q(x)$ ناتج القسمة
	- توجد $\int f(x) = \int q(x)dx + \int \frac{p(x)}{h(x)}dx$
	- تعاد خطوات (1)

قانون التكامل المحدد

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x).dx\right]_a^b = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

تحديد نوع التكامل

نكامل الدالة

التعويض بالحد الأعلى

التعويض بالحد الأدنى

ايجاد قيمة التكامل

أذا كانت f,g دالتين متصلتين على [a,b]

1- $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a,b] \rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

2- $f(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in [a,b] \quad \rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq 0$

3- $f(x) \leq g(x) \qquad \forall\, x \in [a,b] \rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

الوحدة السادسة

تطبيقات التكامل

- حجوم الاجسام الدورانية
- المساحات في المستوي
- معادلة المنحني
- المعادلات التفاضلية
- طول القوس

المساحات في المستوي

مساحات منطقة : محددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة [a,b]

إذا كانت $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

إذا كانت $f(x) \leq 0 \ \forall x \in [a,b]$

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

*أذا كانت الدالة f دالة متصلة على [a,b] وكان c ∈ (a,b) حيث f(c)=0 ، فأن مساحة المنطقة المستوية المحدة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة [a,b] هي :-

$$A = \left|\int_a^c f(x)dx\right| + \left|\int_c^b f(x)dx\right|$$

مساحات منطقة : محددة بمنحنيي دالتين ومحور السينات في الفترة [a,b]

- اذا كانت كل من f ,g متصلتين على الفترة [a,b] حيث $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a,b]$

فان مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين f , g والمستقيمين x = a , x = b هي :-

$$\boldsymbol{A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx}$$

في بعض الاحيان ممكن ايجاد المساحة A باستخدام القيمة المطلقة دون الحاجة للقيمة الاختيارية

$$\boldsymbol{A = \left|\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx\right|}$$

القيم المحددة لدوال متغيرة

اذا كانت منطقة محددة بأكثر من دالة واحدة ولا يوجد تكامل واحد يعطي مساحة هذه المنطقة

A= $A_1 + A_2 + \cdots$.

ويكمل الحل كالمعتاد

حجوم الاجسام الدورانية

إذا نتج مجسم من دوران منطقة محددة بمنحنى الدالة F ومحور السينات والمستقيمين x=b ، x=a حيث a<b دورة كاملة حول محور السينات فان حجم المجسم يساوي

$$V=\int_a^b \pi(f(x))^2 dx$$

اذا نتج مجسم عن دوران منطقة محددة بمنحنى الدالتين f,g والمستقيمين x=a,x=b دورة كاملة حول محور السينات بحيث f,g لهم الاشارة نفسها في الفترة $[a,b]$ فإن حجم هذا المجسم يعطي بالقاعدة

$$V=\pi\int_a^b[(f(x))^2-(g(x))^2]dx$$

حيث $f(x)\le g(x)\le 0$ او

$f(x)\ge g(x)\ge 0$

طول القوس ومعادلة المنحنى

طول القوس

إذا كانت الدالة f متصلة علي [a,b] فإن طول القوس من منحنى الدالة $y = f(x)$ في [a,b] هو

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx$$

معادلة المنحني

$$f''(x) \xrightarrow{\text{تكامل}} f'(x) \xrightarrow{\text{تكامل}} f(x)$$

ميل المماس معادلة المنحنى

$$f'(x) = \int f''(x)\ dx$$

$$F(x) = \int f'(x)\ dx$$

حل المعادلات التفاضلية

المعادلة من رتبة اولي ودرجة اولي علي الصورة

$y` = f(x)$

الحل

Y=$\int f(x)dx$

المعادلة علي الصورة $Y`` = F(X)$

الحل بالتكامل مرتين

ثم $y` = \int F(X)dx = f(x) + C_1$

y= $\int (F(X) + C_1)dx$

المعادلة علي الصورة

$y` = ay, a \neq 0$

حلولها

Y=ke^{ax},k$\in R^*$

المعادلة علي الصورة

$y` = ay + b, a \neq 0,$

$b \neq 0$

حلولها

Y=k$e^{ax} - \frac{b}{a}$

المعادلة علي الصورة

$$\frac{dy}{dx} = g(x).h(y)$$

حلها بطريقة فصل المتغيرات بالصورة التالية :

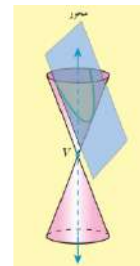
$$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx$$

ونكمل الطرفين لايجاد y وهو حل المعادلة التفاضلية

الوحدة السابعة

القطوع المخروطية

قطع مكافيء

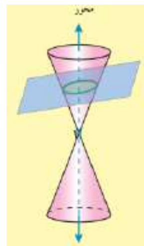


المستوى مواز لراسم ولا يحويه

تعريفه

هو مجموعة كل النقاط في المستوى المتساوية البعدين عن نقطة ثابتو معطاة (البؤرة) وعن مستقيم ثابت معطى (الدليل)

قطع ناقص

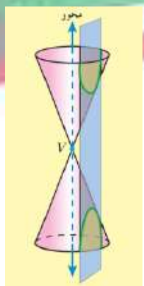


المستوى ليس عمودي على المحور وليس موازي لأي راسم

تعريفه

هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتين في امستوى ثابت

قطع زائد

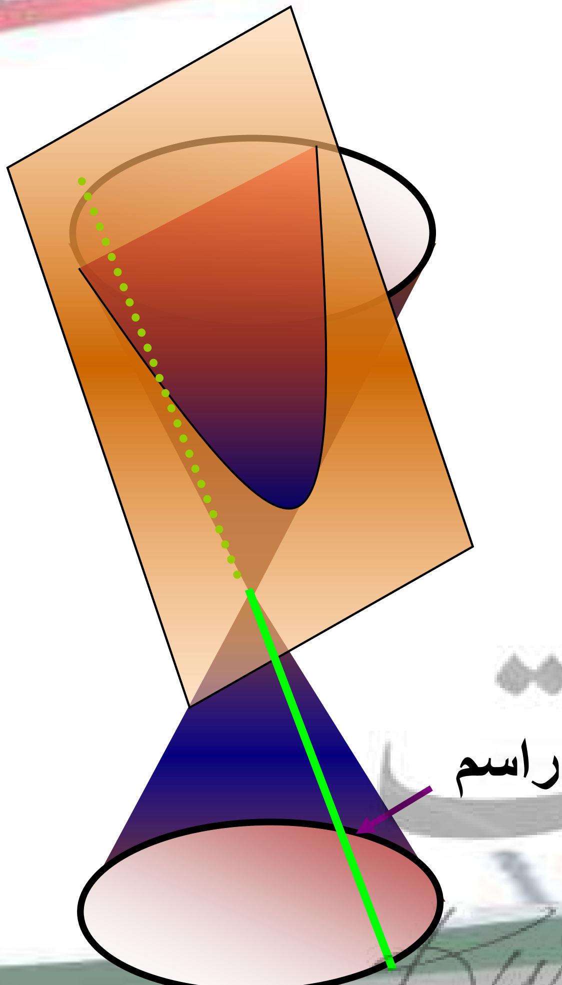


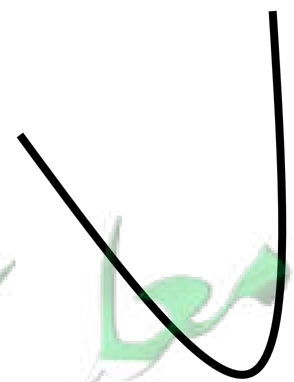
المستوى مواز للمحور ولا يحويه

تعريفه

هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي تكون القيمة المطلقة للفرق بين بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتين في المستوى ثابت

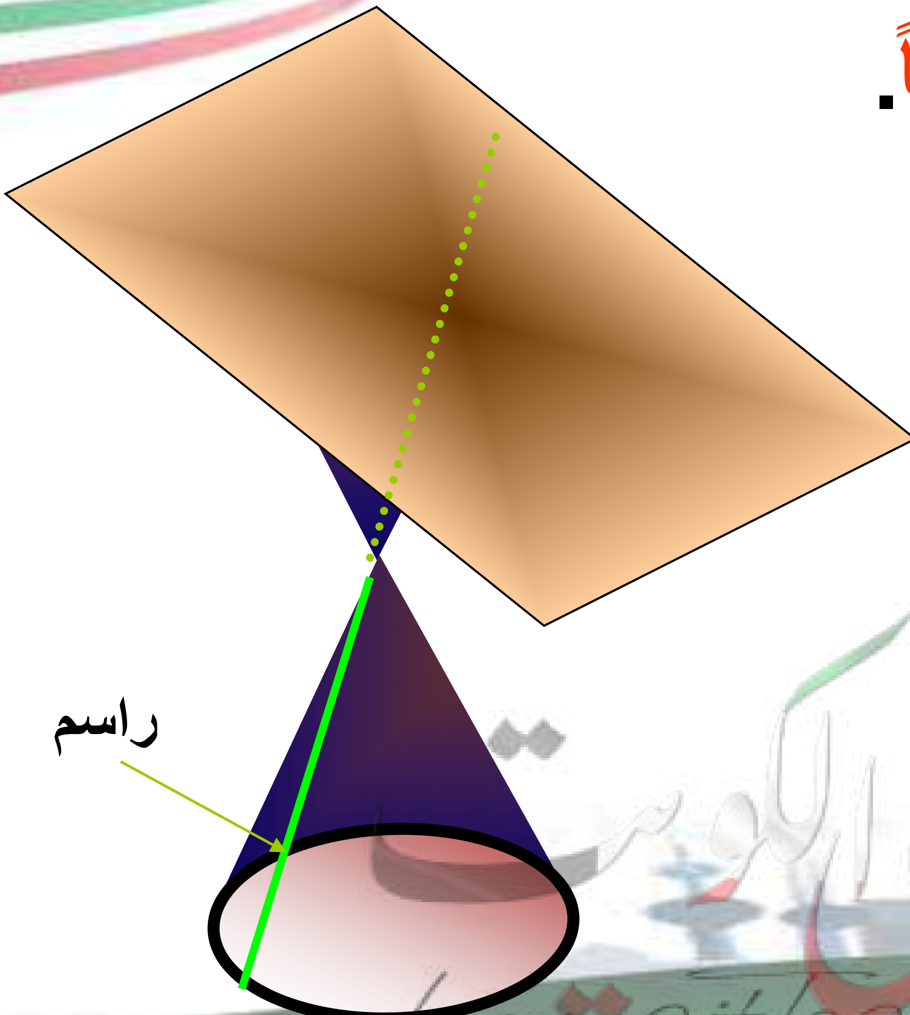
١) المستوى موازياً لراسم ولا يحويه القطع الناتج يكون **قطعاً مكافئاً**.

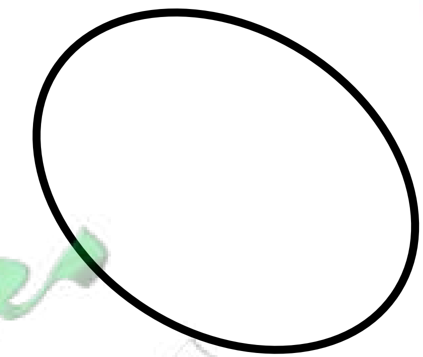




٢) المستوى ليس عمودياًعلى المحور وليس موازياً لأي راسم

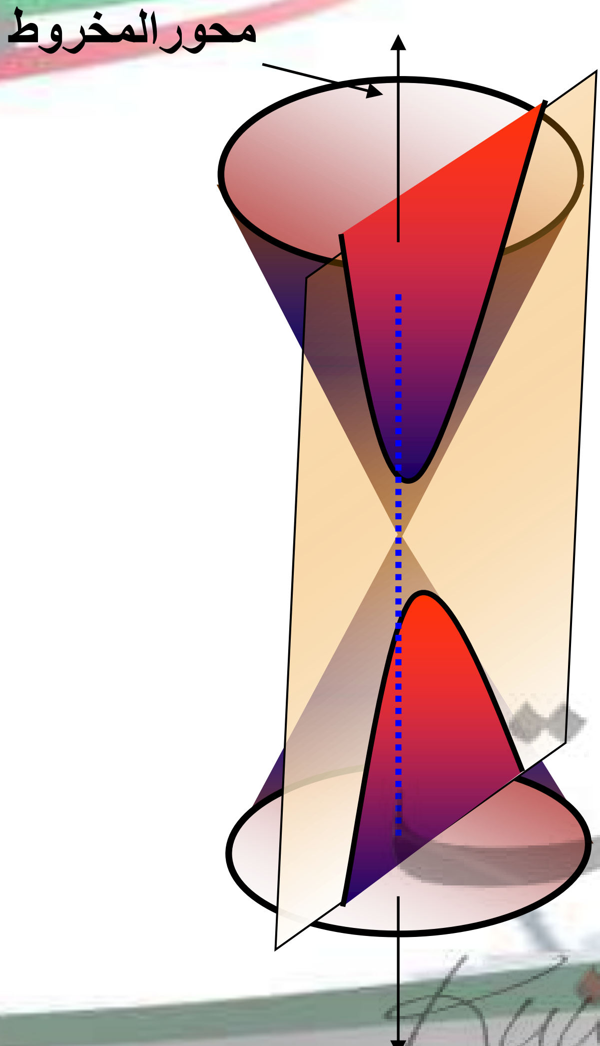
القطع الناتج يكون **قطعاً ناقصاً**.





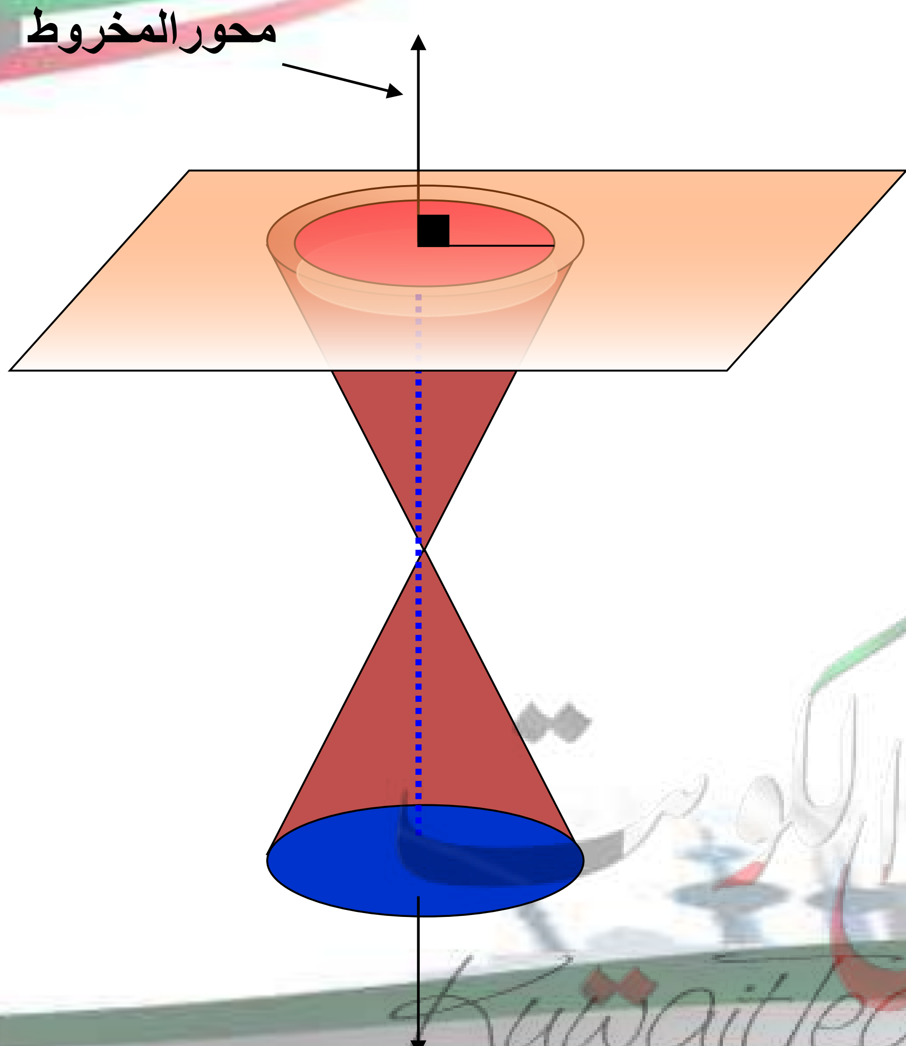
٣) المستوى موازياً للمحور ولا يحويه

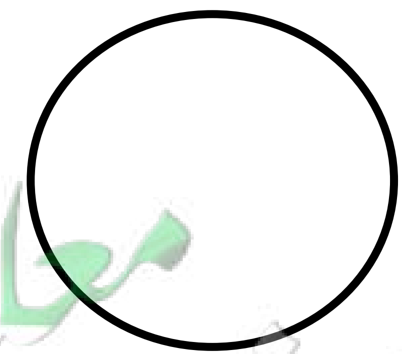
القطع الناتج يكون **قطعاً زائداً**.



ملاحظة

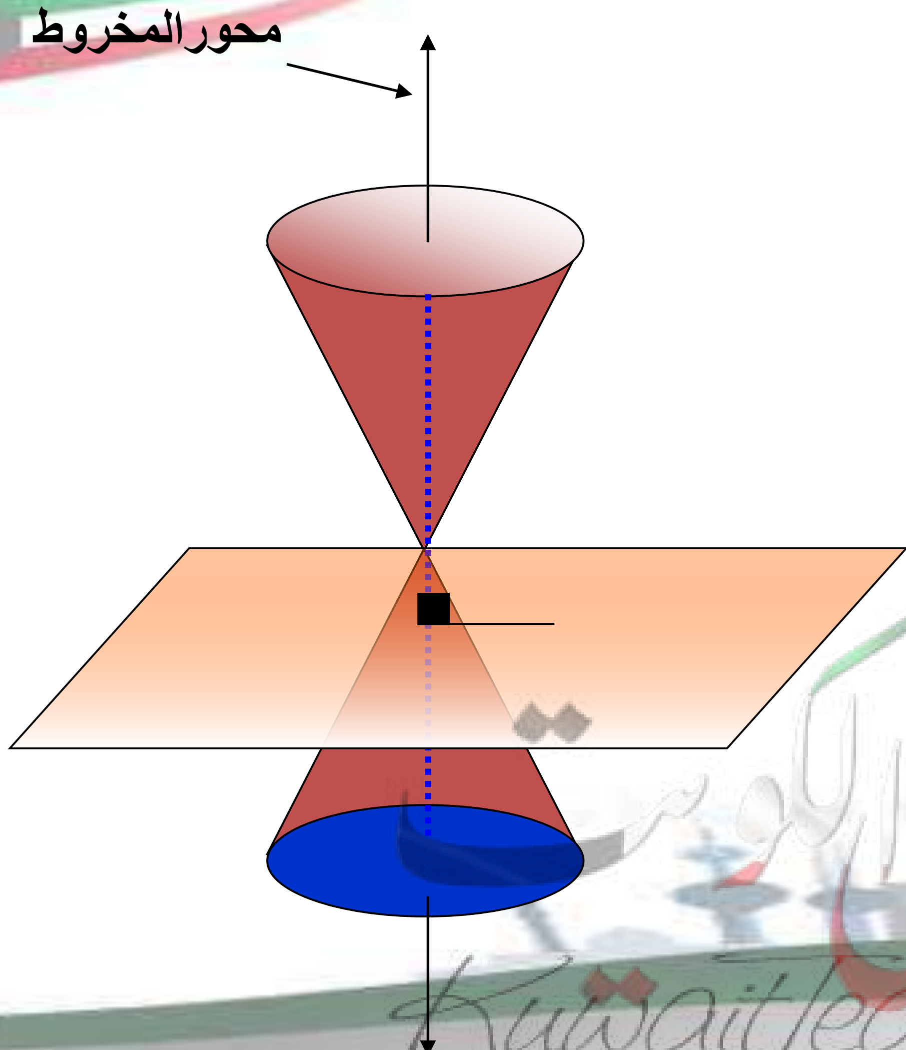
١) إذا كان المستوى عمودياً على المحور فإن القطع الناتج دائرة

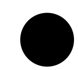


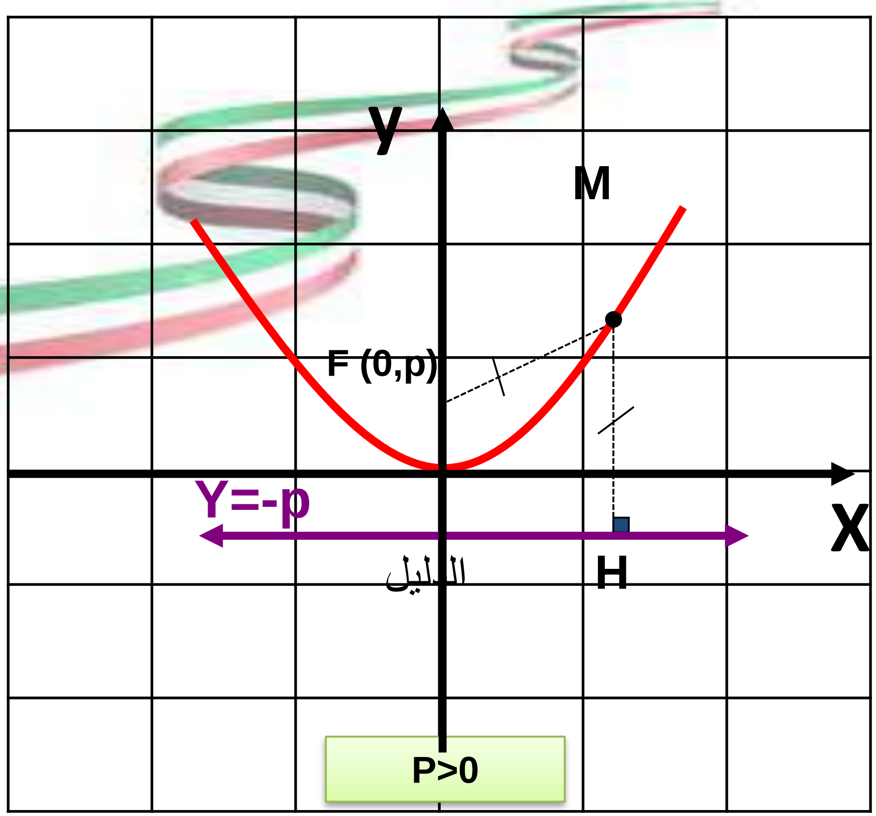


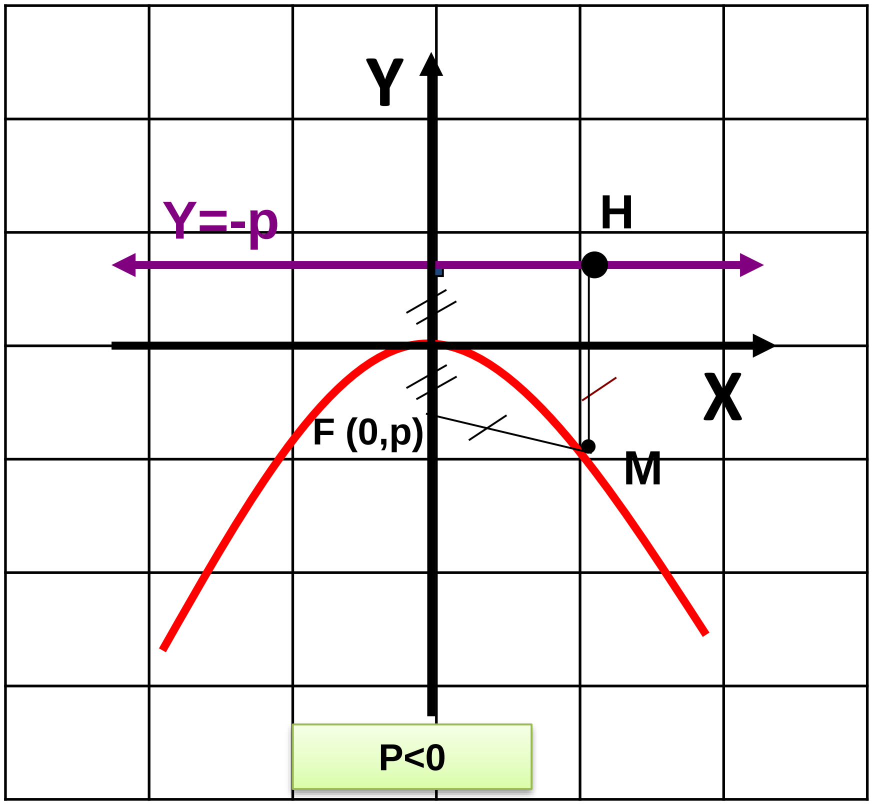
ملاحظة

٢) إذا كان المستوى عمودياً على المحور ومار بالرأس فإن الناتج يمثل نقطة





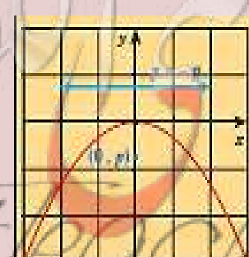
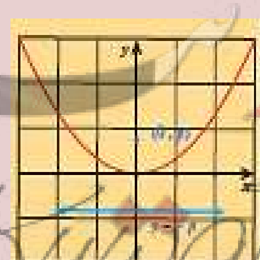




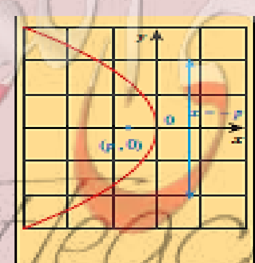
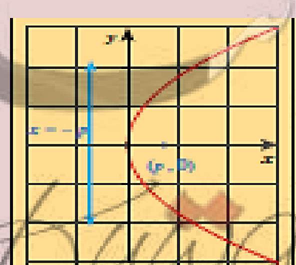
لاحظ أن الرأس $(0,0)$ يقع في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل في كل من الحالتين

معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل و بؤرته $F(0\ ,\ p)$ و معادلة دليله $y = -P$ هي: $x^2 = 4py$

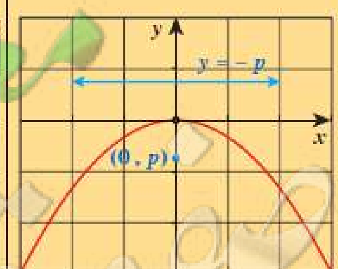
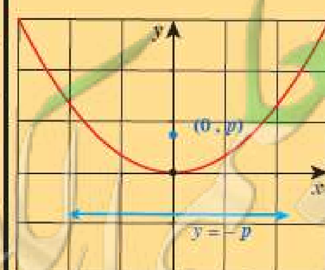
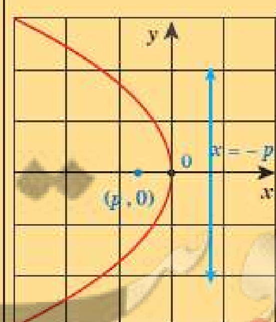
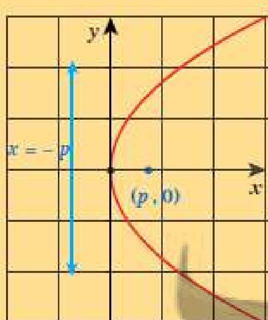
قطع مكافئ رأسه نقطة الاصل (0 ,0)

الصورة العامة	$x^2 = 4py$	
الفتحة	إلى أعلى أو أسفل	
البؤرة	(0 , p)	
الدليل	$y = -p$	
محور التناظر	محور الصادات (y– axis)	
المسافة من الرأس الى الدليل	|p|	
إشارة p	P < 0	P > 0
الشكل		

قطع مكافئ رأسه نقطة الاصل (0 ,0)

الصورة العامة	$y^2 = 4\mathrm{p}x$	
الفتحة	إلى اليسارأو اليمين	
البؤرة	(p , 0)	
الدليل	***x = - p***	
محور التناظر	محور السينات (x– axis)	
المسافة من الرأس الى الدليل	|p|	
إشارة p	P < 0	P > 0
الشكل		

قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل (0, 0)

الصورة العامة	$x^2 = 4py$		$y^2 = 4px$	
الفتحة	إلى أعلى أو إلى أسفل		إلى اليمين أو إلى اليسار	
البؤرة	$(0 , p)$		$(p , 0)$	
الدليل	$y = -p$		$x = -p$	
محور التناظر	محور الصادات $(y - axis)$		محور السينات $(x - axis)$	
المسافة من الرأس إلى البؤرة	$\lvert p \rvert$			
المسافة من الرأس إلى الدليل				
إشارة p	$p < 0$	$p > 0$	$p < 0$	$p > 0$
الشكل				

الأختلاف المركزي:-

$$e = \frac{c}{a} \, , \qquad e = 1$$

القطعة المستقيمة V_1V_2 المارة بالبؤرتين وطرفاها على القطع تسمى المحور الأكبر للقطع(الرئيسي)

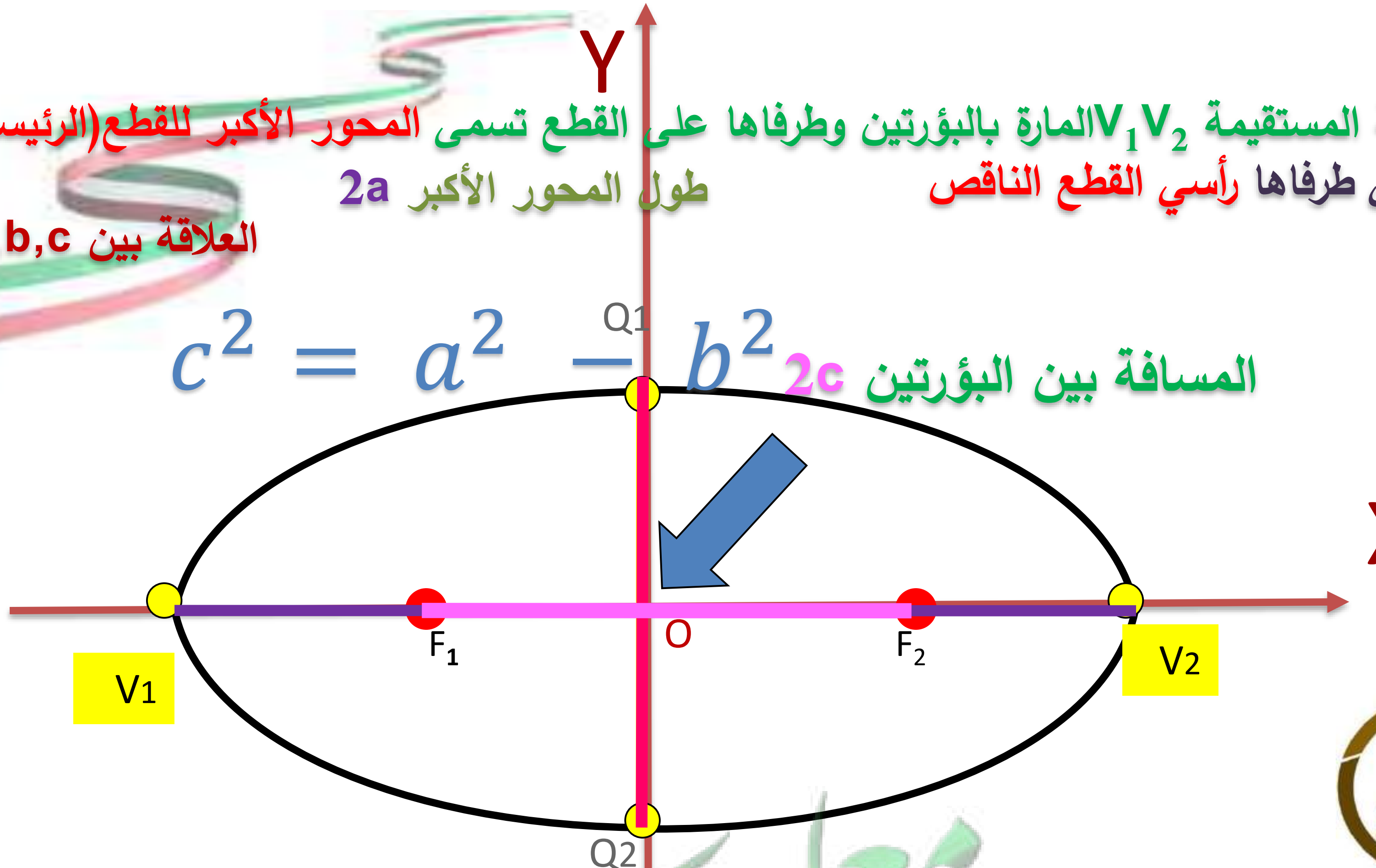
ويسمى طرفاها رأسي القطع الناقص

طول المحور الأكبر 2a

العلاقة بين a,b,c

$$c^2 = a^2 - b^2$$

المسافة بين البؤرتين 2c

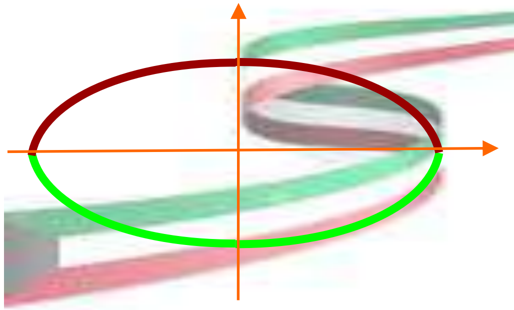


تسمي النقطتان الثابتتان بؤرتي القطع الناقص

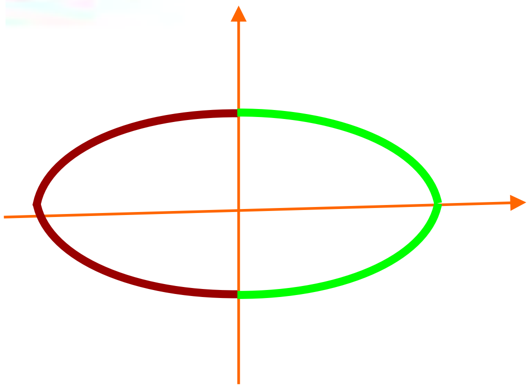
تسمى نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما مركز القطع الناقص

القطعة المستقيمة Q_1Q_2 المارة بالمركز والعمودية على المحور الأكبر ويقع طرفاها على القطع تسمى المحور الأصغر للقطع الناقص (الثانوي) طول المحور الأصغر 2b

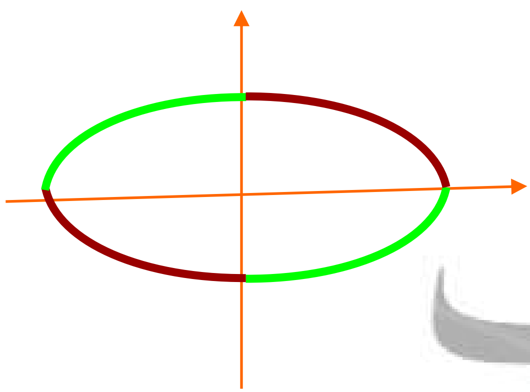
ملاحظـــــــــــات



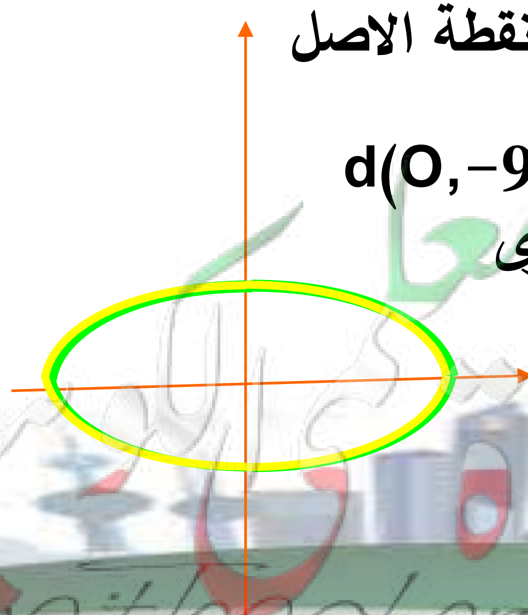
- محور السينات محور الانعكاس لجميع نقاط القطع الناقص



- محورالصادات محور الانعكاس لجميع نقاط القطع الناقص

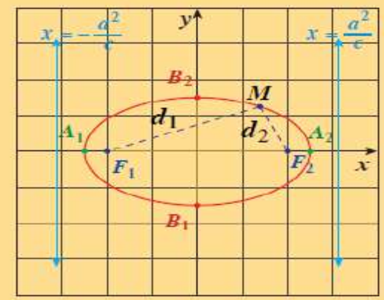
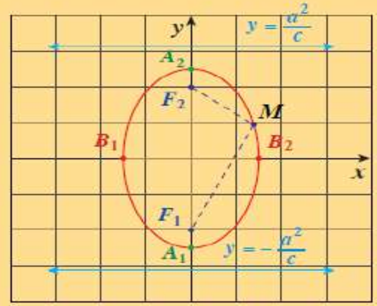


القطع الناقص متناظر حول نقطة الاصل



- بالدوران $d(O,90^{\circ})$ او $d(O,-90^{\circ})$
يكون للقطع الناقص صورة اخرى

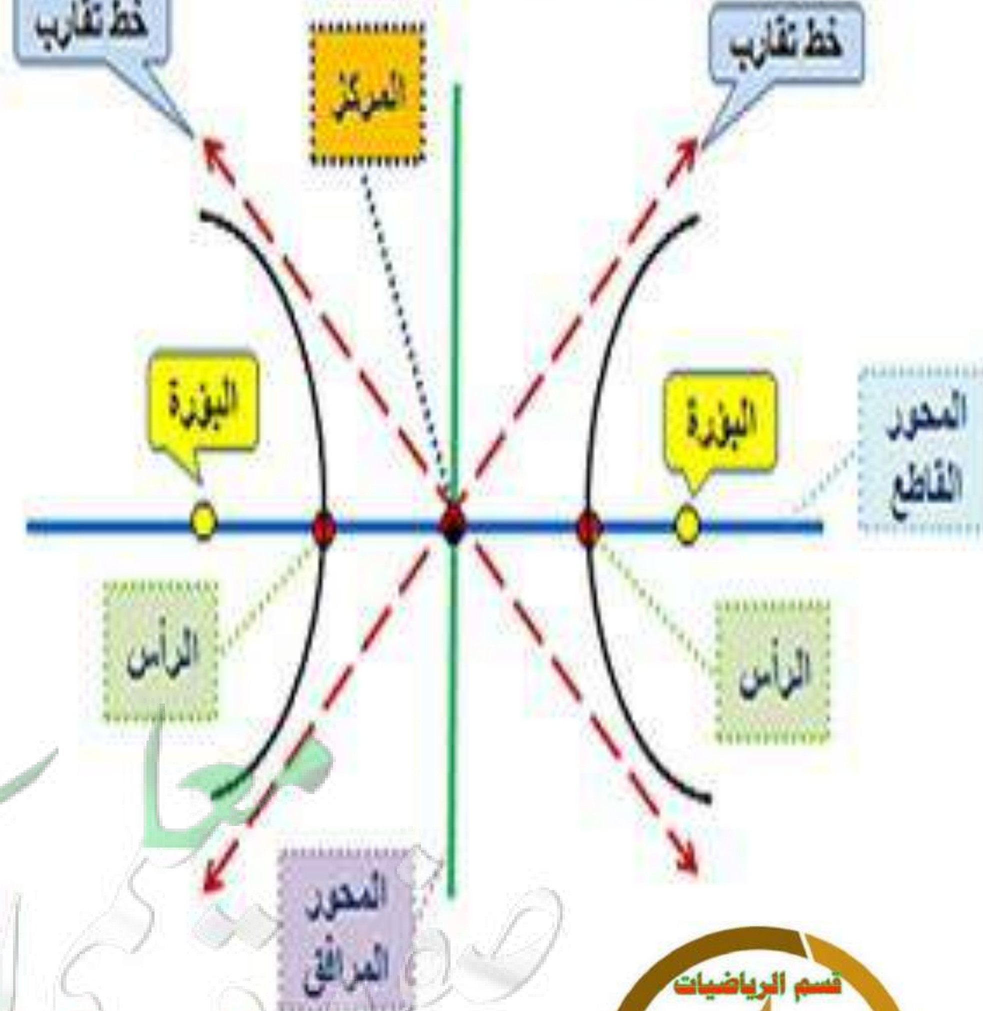
معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل $(0,0)$ كالتالي:

	$a > b > 0$	$a > b > 0$
المعادلة	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
بيان القطع		
المحور الأكبر	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
الرأسان طرفا المحور الأكبر	$A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$	$A_1(0, -a)$, $A_2(0, a)$
طول المحور الأكبر	$2a$	
طرفا المحور الأصغر	$B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$	$B_1(-b, 0)$, $B_2(b, 0)$
طول المحور الأصغر	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$
العلاقة الأساسية	$a^2 = b^2 + c^2$	
معادلتا الدليلين	$x = -\frac{a^2}{c}$, $x = \frac{a^2}{c}$	$y = -\frac{a^2}{c}$, $y = \frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع الناقص متناظر حول كل من محوريه ومركزه	

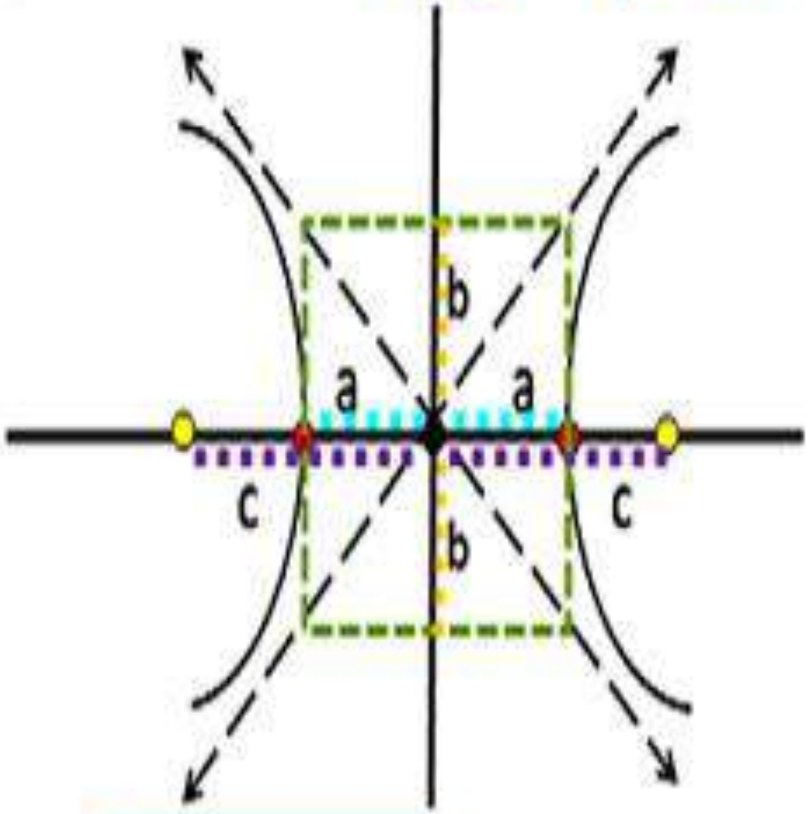
الأختلاف المركزي:-

$e = \frac{c}{a}$, $e < 1$

عناصر القطع الزائد



الأطوال في القطع الزائد c a b



البعد بين المركز و كل :

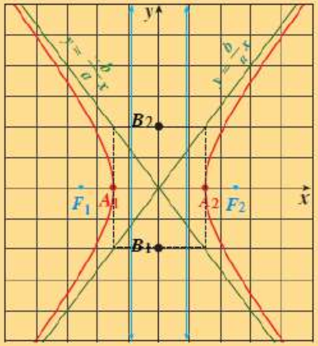
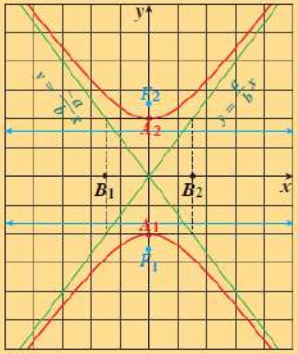
a = رأس

c = بؤرة

العلاقة بين a , b , c

$c^2 = a^2 + b^2$

معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل كالتالي:

المعادلة	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
بيان القطع		
طرفا المحور القاطع الرأسان	$A_1(-a,0)\ ,\ A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)\ ,\ A_2(0,a)$
المحور القاطع (الأساسي)	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
طول المحور القاطع	$2a$	
طرفا المحور المرافق	$B_1(0,-b)\ ,\ B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)\ ,\ B_2(b,0)$
طول المحور المرافق	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0)\ ,\ F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)\ ,\ F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$c^2=a^2+b^2$	
معادلة الخطين المقاربين	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
معادلة الدليلين	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$y=\pm\frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع متناظر حول محوريه ومركزه	

الأختلاف المركزي:-

$e=\frac{c}{a}\ ,\qquad e>1$

الوحدة الثامنة
المتغيرات العشوائية المتقطعة

دالة التوزيع الاحتمالي

بيان دالة توزيع الاحتمال

دالة التوزيع الاحتمالي F للمتغير العشوائي المتقطع

× تحقق الشرطين

$0 \leq F(X) \leq 1$

$F(x_1) + F(x_2) + \ldots = 1$

مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي f تساوي الواحد الصحيح

التوقع والتباين

توقع $\mu = \sum (x_i f(x_i))$

تباين $\sigma^2 = \sum (x^2{}_i . f(x_i)) - \mu^2$

انحرافي معياري $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

دالة التوزيع التراكمي

خواص دالة التوزيع التراكمي

1- $P(X > a) = 1 - F(a)$

2- $p(a < x \leq 6)$
$= F(6) - F(a)$

(1) توزيع ذات الحدين

$f(x) = nc_x\, p^x (1-p)^{n-x}$, $n \in z^+$

او باستخدام جدول الاحتمالات في توزيع ذات الحدين

(٢) التوقع والتباين لتوزيع ذات الحدين

التوقع $\mu = np$

التباين $\sigma^2 = n\,p\,(1-p)$

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{n\,p\,(1-p)}$

المتغيرات العشوائية
المتصلة (المستمرة)

خواص دالة كثافة الاحتمال

$f(x)$ متصلة

$f(x) \geq 0$

قيمة المساحة المحددة تساوي الواحد الصحيح

$p(X = a) = 0$
تنعدم المساحة

التوزيع الاحتمالي المنتظم لمتغير عشوائي متصل مستمر

$$F(x)= \begin{cases} \frac{1}{b-a} : a \leq x \leq 6 \\ 0 : \text{في ماعدا ذلك} \end{cases}$$

التوقع للتوزيع احتمالي منتظم هو

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

التباين للتوزيع الاحتمالي المنتظم

التوزيع الاحتمالي الطبيعي

تقوم بتحويل اي توزيع طبيعي الي توزيع طبيعي معياري وفق للتحويل:

$$Z=\frac{x-\mu}{\sigma^2}$$

التوزيع الاحتمالي الطبيعي المعياري

١- اذا كانت

$\mathbb{Z} \leq a$ او

$\mathbb{Z} \geq a$ حيث

$a \geq 0$

$\mathbb{Z}$نستخدم جدول رقم ٤

٢- إذا كانت

$\mathbb{Z} \leq a$ أو $\mathbb{Z} \geq a$

حيث $a < 0$

نستخدم جدول $\mathbb{Z}$ رقم٥