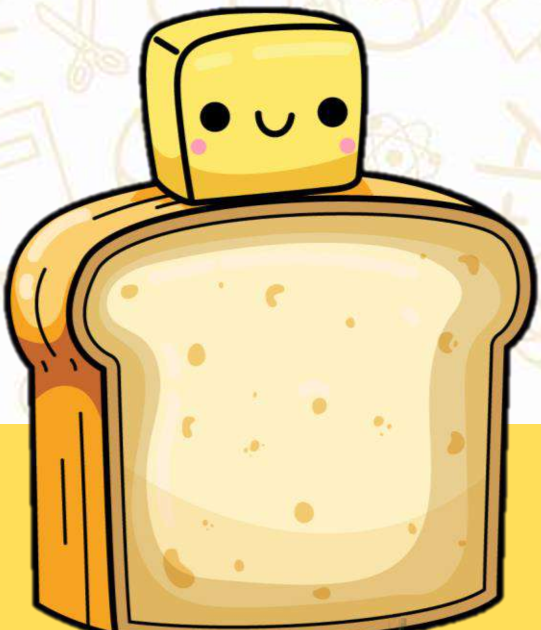
الرياضيات

الكورس الثاني



A+

الزبدة

12

التكامل غير المحدد

قواعد التكامل غير المحدد

$\int k\,dx = kx + C$ عدد ثابت k

قاعدة القوى $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\,,\, n \in Q - \{-1\}$

خواص التكامل غير المحدد

خاصية الضرب بعدد ثابت $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx\,,\, k \neq 0$

خاصية الجمع و الطرح $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Q $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+3}{x-1}dx$

$$= \int \frac{(x-1)(x-3)}{x-1}dx = \int (x-3)dx = \frac{x^2}{2} - 3x + C$$

Q $\displaystyle\int \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)^2 dx$

$$= \int \frac{x^4-4x^2+4}{x^4}dx = \int \left(\frac{x^4}{x^4} - \frac{4x^2}{x^4} + \frac{4}{x^4}\right)dx$$

$$= \int (1 - 4x^{-2} + 4x^{-4})dx = x - 4\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + 4\cdot\frac{x^{-3}}{-3} + C$$

$$= x + 4x^{-1} - \frac{4}{3}x^{-3} + C = x + \frac{4}{x} - \frac{4}{3x^3} + C$$

Q $\displaystyle\int \frac{x^2-3x}{\sqrt[3]{x}}dx$

$$= \int \frac{x^2-3x}{x^{\frac{1}{3}}}dx = \int \left(\frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{3x}{x^{\frac{1}{3}}}\right)dx = \int \left(x^{\frac{5}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}}\right)dx = \frac{3}{8}\cdot x^{\frac{8}{3}} - 3\cdot\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$$

Q إذا كان: $F(x) = \int (2x+5)\,dx$ ، $F(-1) = 0$ فأوجد $F(x)$

$$F(x) = 2\cdot\frac{x^2}{2} + 5x + C$$

$$F(x) = x^2 + 5x + C$$

$$F(-1) = 0 \Rightarrow \quad (-1)^2 + 5(-1) + C = 0 \quad \Rightarrow C = 4$$

$$\therefore F(x) = x^2 + 5x + 4$$

التكامل بالتعويض

قاعدة التكامل بالتعويض

إذا كان $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ فإن :

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

أوجد:

Q $\int (x^2+2x+5)^3(2x+2)\,dx$

$u = x^2+2x+5$

$du = (2x+2)dx$

$$= \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(x^2+2x+5)^4}{4} + C$$

Q $\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2}\,dx$

$u = \frac{1}{x} + 4$

$du = \frac{-1}{x^2}dx \Rightarrow -du = \frac{1}{x^2}dx$

$$= -\int u^5 du = -\frac{u^6}{6} + C = -\frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^6}{6} + C$$

Q $\int \sqrt[3]{x^2-5x+2}\,(2x-5)\,dx$

$u = x^2-5x+2$

$du = (2x-5)dx$

$$= \int \sqrt[3]{u}\,du = \int u^{\frac{1}{3}}du = \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{4}(x^2-5x+2)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2-5x+2)^4} + C$$

Q $\int \sqrt[5]{3x+7}\,dx$

$u = 3x+7$

$du = 3\,dx$

$\frac{du}{3} = dx$

$$= \int \sqrt[5]{u}\cdot\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{5}}du = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}u^{\frac{6}{5}} + C$$

$$= \frac{5}{18}(3x+7)^{\frac{6}{5}} + C$$

Q $\int \frac{5}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^3}\,dx$

$u = \sqrt{x} + 2$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$2du = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$$= \int \frac{5}{u^3}\cdot 2du = 10\int u^{-3}du$$

$$= 10\cdot\frac{u^{-2}}{-2} + C$$

$$= -5(\sqrt{x}+2)^{-2} + C$$

أوجد:

Q $\int x(2x-1)^3\,dx$

$$= \int \frac{u+1}{2} u^3 \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int (u^4 + u^3)du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{u^5}{5} + \frac{u^4}{4}\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{(2x-1)^5}{5} + \frac{(2x-1)^4}{4}\right) + C$$

$u =$

$2x - 1$

$du = 2dx$

$\frac{du}{2} = dx$

$u + 1 = 2x$

$\frac{u+1}{2} = x$

Q $\int x^5\sqrt{4-x^2}\,dx$

$$= \int x^4\sqrt{4-x^2}\,x\,dx$$

$$= \int (16 - 8u + u^2)\sqrt{u}\cdot\frac{du}{-2}$$

$$= \frac{-1}{2}\int \left(16u^{\frac{1}{2}} - 8u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{5}{2}}\right)du$$

$$= \frac{-1}{2}\left(16\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 8\cdot\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \cdot\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}}\right) + C$$

$$= \frac{-16}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{7}(4-x^2)^{\frac{7}{2}} + C$$

$u = 4 - x^2$

$du = -2x\,dx$

$\frac{du}{-2} = xdx$

$x^2 = 4 - u$

$x^4 = (4-u)^2$

$= 16 - 8u + u^2$

تكامل الدوال المثلثية

تذكر : اشتقاق الدوال المثلثية :

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \sec^2 x$

$(\cot x)' = -\csc^2 x$

$(\sec x)' = \sec x \tan x$

$(\csc x)' = -\csc x \cot x$

تكاملات الدوال المثلثية :

$k \in \mathbb{R}^*$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \sin kx\, dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \cos kx\, dx = \frac{\sin kx}{k} + C$$

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$$

أوجد:

Q $\int x \csc^2(x^2 - 1)\, dx$

$$= \int \csc^2 u \cdot \frac{du}{2}$$

$$= \frac{-1}{2} \cot u + C$$

$$= \frac{-1}{2} \cot(x^2 - 1) + C$$

$u = x^2 - 1$

$du = 2x\, dx$

$\frac{du}{2} = x\, dx$

Q $\int \sin^5(x+1) \cdot \cos(x+1)\, dx$

$u = \sin(x+1)$

$du = \cos(x+1)\, dx$

$$= \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{(\sin(x+1))^6}{6} + C$$

Q $\int (2x - \sin 3x)\, dx$

$$= x^2 + \frac{\cos 3x}{3} + C$$

Q $\int \cos^4 t \cdot \sin t\, dt$

$$= -\int u^4 du$$

$$= -\frac{u^5}{5} + C$$

$$= -\frac{(\cos t)^5}{5} + C$$

$u = \cos t$

$du = -\sin t\, dt$

$-du = \sin t\, dt$

Q $\int sec^4 x \tan x\, dx$

$u = sec\, x$

$du = sec\, x \tan x\, dx$

$$= \int \sec^3 x \sec x \tan x\, dx$$

$$= \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(sec\, x)^4}{4} + C$$

Q $\int sec^2 x \cdot \tan x\, dx$

$u = \tan x$

$du = sec^2 x\, dx$

$$= \int udu = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\tan x)^2}{2} + C$$

Q $\int csc^5 x \cot x\, dx$

$u = csc\, x$

$-du = csc\, x \cot x\, dx$

$$= \int \csc^4 x \csc x \cot x\, dx$$

$$= -\int u^4 du = -\frac{u^5}{5} + C = -\frac{(csc\, x)^5}{5} + C$$

Q $\int csc^2 x \cdot \cot x\, dx$

$u = \cot x$

$-du = csc^2 x\, dx$

$$= -\int udu = -\frac{u^2}{2} + C = -\frac{(\cot x)^2}{2} + C$$

الدوال الأسية و اللوغاريتمية

اشتقاق الدوال الأسية واللوغاريتمية

قاعدة إذا كانت u دالة في x قابلة للاشتقاق فإن :

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a \qquad \frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad \frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \qquad \frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(\ln g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

- $f(x) = 3^x$ $\quad f'(x) = 3^x \cdot \ln(3)$
- $f(x) = 6^{\sqrt{x}}$ $\quad f'(x) = 6^{\sqrt{x}} \cdot \ln(6) \cdot (\sqrt{x})' = 6^{\sqrt{x}} \cdot \ln(6)\frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $f(x) = 10^{\sin x}$ $\quad f'(x) = 10^{\sin x} \cdot \ln(10) \cdot (\sin x)' = 10^{\sin x} \cdot \ln(10) \cdot \cos x$
- $h(x) = e^{x^2+3x-1}$ $\quad h'(x) = e^{x^2+3x-1} \cdot (x^2+3x-1)' = (2x+3)e^{x^2+3x-1}$
- $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ $\quad f'(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$
- $g(x) = e^{x^2-4}$ $\quad g'(x) = e^{x^2-4}(x^2-4)' = 2x \cdot e^{x^2-4}$
- $f(x) = \ln x^2$ $\quad f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$
- $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad g'(x) = \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{x}{1} = \frac{-1}{x}$

التكامل غير المحدد	قاعدة المشتقة
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\frac{d}{dx}e^x = e^x$
$\int u'e^u\,dx = e^u + C$	$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx} = u'e^u$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{d}{dx}\ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}$
$\int \frac{u'}{u}dx = \ln\lvert u\rvert + C$	$\frac{d}{dx}\ln\lvert u\rvert = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$

أوجد :

Q $\int 2e^x\,dx$

$= 2e^x + C$

Q $\int e^{3x}\,dx$

$= \dfrac{e^{3x}}{3} + C$

Q $\int 2x \cdot e^{x^2+3}\,dx$

$u = x^2 + 3$

$du = 2x\,dx$

$= \int e^u du$

$= e^u + C$

$= e^{x^2+3} + C$

Q $\int (2x-1)e^{x^2-x+3}\,dx$

$u = x^2 - x + 3$

$du = (2x-1)dx$

$= \int e^u du$

$= e^u + C$

$= e^{x^2-x+3} + C$

Q $\int \frac{-5}{3x-2}dx$

$u = 3x - 2$

$du = 3\,dx$

$\dfrac{du}{3} = dx$

$= \int \dfrac{-5}{u}\dfrac{du}{3}$

$= -\dfrac{5}{3}\int \dfrac{du}{u}$

$= -\dfrac{5}{3} ln|u| + C$

$= -\dfrac{-5}{3} ln|3x-2| + C$

Q $\int \frac{3t^2-6t}{t^3-3t^2+8}dt$

$u = t^3 - 3t^2 + 8$

$du = (3t^2 - 6t)dt$

$= \int \dfrac{du}{u}$

$= ln|u| + C$

$= ln|t^3 - 3t^2 + 8| + C$

Q $\int tanx\,dx = \int \dfrac{\sin x}{\cos x}dx$

$u = \cos x$

$du = -\sin x\,dx$

$-du = \sin x\,dx$

$= -\int \dfrac{du}{u}$

$= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$

Q $\int cotx\,dx = \int \dfrac{\cos x}{\sin x}dx$

$u = \sin x$

$du = \cos x\,dx$

$= \int \dfrac{du}{u}$

$= \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C$

التكامل بالتجزيء

تذكّر:

$$(a)' = 0$$

$$(x^n)' = n\,x^{n-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\sin(ax))' = a\cos((ax))$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\cos(ax))' = -a\sin((ax))$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^{ax})' = ae^{ax}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\int a\,dx = ax + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ : n \neq -1$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \sin(ax)\,dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \cos(ax)\,dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)| + C$$

$$\int \frac{a}{bx+C}\,dx = \frac{a}{b}\ln|bx+C| + C$$

Q $\int x \sin x \, dx$

$u = x \qquad dv = \sin x \, dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= x(-\cos x) - \int (-\cos x)dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

Q $\int x e^x \, dx$

$u = x \qquad dv = e^x dx$

$du = dx \qquad v = e^x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= x\,e^x - \int e^x dx$$

$$= x\,e^x - e^x + C$$

$$= e^x(x-1) + C$$

Q $\int 4xe^{-5x} \, dx$

$u = 4x \qquad dv = e^{-5x} dx$

$du = 4dx \qquad v = \dfrac{e^{-5x}}{-5}$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= 4x \cdot \frac{e^{-5x}}{-5} - \int \frac{e^{-5x}}{-5} 4 \cdot dx$$

$$= \frac{4x\,e^{-5x}}{-5} + \frac{4}{5}\int e^{-5x}\,dx$$

$$= \frac{4x\,e^{-5x}}{-5} - \frac{4e^{-5x}}{25} + C$$

Q $\int \ln x \, dx$

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \dfrac{1}{x} dx \qquad v = x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= x\ln x - \int x\,\frac{1}{x}\,dx$$

$$= x\ln x - \int 1\,dx$$

$$= x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

Q $\int x\ln x\,dx$

$$u = \ln x \qquad dv = x\,dx$$
$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$
$$= \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + \mathrm{C}$$
$$= \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{x^2}{4} + \mathrm{C}$$

Q $\int x^2\cos x\,dx$

$$u = x^2 \qquad dv = \cos x\,dx$$
$$du = 2x\,dx \qquad v = \sin x$$

$$I = \int u\,dv = uv - \int v\,du$$
$$= x^2\sin x - \int \mathbf{2x\sin x\,dx}$$

$$\boldsymbol{I_1 = \int 2x\sin x\,dx}$$
$$\boldsymbol{u = 2x \qquad dv = \sin x\,dx}$$
$$\boldsymbol{du = 2\,dx \qquad v = -\cos x}$$
$$\boldsymbol{I_1 = \int u\,dv = uv - \int v\,du}$$
$$\boldsymbol{= -2x\cos x - \int -2\cos x\,dx}$$
$$\boldsymbol{= -2x\cos x + 2\sin x}$$

$$\therefore I = x^2\sin x - (\mathbf{-2x\cos x + 2\sin x}) + \mathrm{C}$$
$$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + \mathrm{C}$$

Q $\int x^2 e^x \, dx$

$$u = x^2 \qquad dv = e^x dx$$
$$du = 2x\,dx \qquad v = e^x$$

$$I = \int u\,dv = uv - \int v\,du$$
$$= x^2e^x - \int \mathbf{2xe^x\,dx}$$

$$\mathbf{I_1 = \int 2xe^x\,dx}$$

$$\mathbf{u = 2x} \qquad \mathbf{dv = e^x dx}$$
$$\mathbf{du = 2\,dx} \qquad \mathbf{v = e^x}$$

$$\mathbf{I_1 = \int u\,dv = uv - \int v\,du}$$
$$\mathbf{= 2xe^x - \int 2e^x dx}$$
$$\mathbf{= 2xe^x - 2e^x}$$

$$\therefore I = x^2e^x - (\mathbf{2xe^x - 2e^x}) + C$$
$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

التكامل باستخدام الكسور الجزئية

Q لتكن الدالة f : $f(x) = \frac{5x-1}{x^2-2x-15}$ فأوجد : الكسور الجزئية , $\int f(x)\,dx$

$$x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$$

$$\therefore f(x) = \frac{5x-1}{(x-5)(x+3)} = \frac{A}{(x-5)} + \frac{B}{(x+3)}$$

$$5x - 1 = A(x+3) + B(x-5)$$

$$x = 5 \Rightarrow 5(5) - 1 = A(5+3) \Rightarrow A = 3$$

$$x = -3 \Rightarrow 5(-3) - 1 = B(-3-5) \Rightarrow B = 2$$

$$f(x) = \frac{3}{(x-5)} + \frac{2}{(x+3)}$$

$$\therefore \int f(x)dx = \int \left(\frac{3}{(x-5)} + \frac{2}{(x+3)}\right) dx = 3\ln|x-5| + 2\ln|x+3| + C$$

Q $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} dx$

$$2x^3+3x^2-2x = x(2x^2+3x-2) = x(2x-1)(x+2)$$

$$f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2}$$

$$x^2+2x-1 = A(2x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(2x-1)$$

$$x=0 \Rightarrow 0^2+2(0)-1 = A(0-1)(0+2) \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$x=\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = B\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+2\right) \Rightarrow B = \frac{1}{5}$$

$$x=-2 \Rightarrow (-2)^2+2(-2)-1 = C(-2)(2(-2)-1) \Rightarrow C = -\frac{1}{10}$$

$$\therefore \int f(x)\,dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{5}}{2x-1} + \frac{-\frac{1}{10}}{x+2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{\frac{1}{5}}{2}\ln|2x-1| + \frac{-1}{10}\ln|x+2| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{10}\ln|2x-1| - \frac{1}{10}\ln|x+2| + C$$

أوجد:

Q $\int \frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x} dx$

$$x^3-4x^2+4x = x(x^2-4x+4) = x(x-2)^2$$

$$f(x) = \frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{c}{(x-2)}$$

$$-x^2+2x+4 = A(x-2)^2 + Bx + Cx(x-2)$$

$$x=0 \;\Rightarrow\; 4 = A(0-2)^2 \;\Rightarrow\; A = 1$$

$$x=2 \;\Rightarrow\; -(2)^2+4+4 = B(2) \;\Rightarrow\; B = 2$$

$$x=1 \;\Rightarrow\; -1+2+4 = 1(1-2)^2 + 2(1) + C(1)(1-2) \;\Rightarrow\; C = -2$$

$$\therefore \int f(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{-2}{(x-2)}\right) dx = \ln|x| + \frac{-2}{x-2} - 2\ln|x-2| + C$$

Q $\int \frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2}dx$

$x^3 + 2x^2 = x^2(x+2)$

$$f(x) = \frac{3+x+x^2}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{c}{(x+2)}$$

$3 + x + x^2 = A(x+2) + Bx(x+2) + Cx^2$

$x = 0 \Rightarrow\ 3 = A(0+2) \quad \Rightarrow \quad A = \frac{3}{2}$

$x = -2 \Rightarrow 3 + (-2) + (-2)^2 = C(-2)^2 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{5}{4}$

$x = 1 \Rightarrow 3 + 1 + 1^2 = \frac{3}{2}(1+2) + B(1)(1+2) + \frac{5}{4}(1)^2 \quad \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$

$$I = \int \left(\frac{\frac{3}{2}}{x^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{5}{4}}{(x+2)} \right) dx = \frac{-\frac{3}{2}}{x} + \frac{-1}{4}\ln|x| + \frac{5}{4}\ln|x+2| + C$$

أوجد:

Q $\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}dx$

$$f(x) = 1 + \frac{x+3}{x^2-4x+4}$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x^2-4x+4 & x^2-3x+7 \\ & -x^2 \pm 4x \mp 4 \\ \hline & x+3 \end{array}$$

$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

$$\frac{x+3}{x^2-4x+4} = \frac{x+3}{(x-2)^2} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

$x + 3 = A(x-2) + B$

$x = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 + 3 = B \quad \Rightarrow \quad B = 5$

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 = A(0-2) + 5 \quad \Rightarrow \quad A = 1$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{(x-2)} + \frac{5}{(x-2)^2}$$

$$\int f(x)dx = \int \left(1 + \frac{1}{(x-2)} + \frac{5}{(x-2)^2}\right) dx = x + \ln|x-2| + \frac{-5}{x-2} + C$$

التكامل المحدد

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = [F(x)]_a^b = \boldsymbol{F}(b) - \boldsymbol{F}(a)$$

خواص التكامل المحدد

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة I ، $k \in \mathbb{R}$ ، $a, b, c \in I$ فإن :

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{dx} = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b k\,dx = k(b-a)$$

$$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

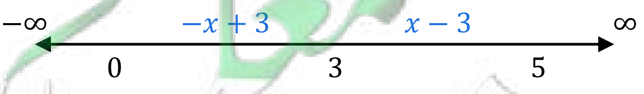
أوجد:

Q $\int_{-2}^{3}(3x^2 - x + 4)\,dx$

$$= \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-2}^{3} = \left[x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-2}^{3}$$

$$= \left((3)^3 - \frac{(3)^2}{2} + 4(3)\right) - \left((-2)^3 - \frac{(-2)^2}{2} + 4(-2)\right) = 52.5$$

Q $\int_0^5 |x-3|dx$



$$= \int_0^3(-x+3)dx + \int_3^5(x-3)dx = \left[\frac{-x^2}{2} + 3x\right]_0^3 + \left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_3^5$$

$$= \left(\left(\frac{-3^2}{2} + 3(3)\right) - (0)\right) + \left(\left(\frac{5^2}{2} - 3(5)\right) - \left(\frac{3^2}{2} - 3(3)\right)\right) = 6.5$$

Q دون حساب قيمة التكامل أثبت أن:

$$\int_3^5 (x^2+x)\,dx \geq 0$$

$f(x)=x^2+x$ متصلة على $[3,5]$

$x^2+x=0 \Rightarrow$

$x(x+1)=0 \Rightarrow x=0\,, x=-1$

$$\begin{array}{cccccc} -\infty & + & & - & & + & \infty \\ & & -1 & & 0 & & \end{array}$$

$f(x)\geq 0\ \ \forall\, x\in(-\infty,-1]\cup[0,\infty)$

$\because\ [3,5]\subseteq[0,\infty)$

$\therefore\ f(x)=x^2+x\geq 0\ \forall\, x\in[3,5]$

$$\therefore \int_3^5 (x^2+x)\geq 0$$

Q دون حساب قيمة التكامل أثبت أن:

$$\int_{-1}^0 (x^2+x)\,dx \leq 0$$

$f(x)=x^2+x$ متصلة على $[-1,0]$

$x^2+x=0 \Rightarrow$

$x(x+1)=0 \Rightarrow x=0\,, x=-1$

$$\begin{array}{cccccc} -\infty & + & & - & & + & \infty \\ & & -1 & & 0 & & \end{array}$$

$f(x)\leq 0,\qquad \forall\, x\in[-1,0]$

$$\therefore \int_{-1}^0 (x^2+x)\,dx \leq 0$$

Q $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$

$y=\sqrt{4-x^2}$

معادلة النصف العلوي للدائرة

$x^2+y^2=4$

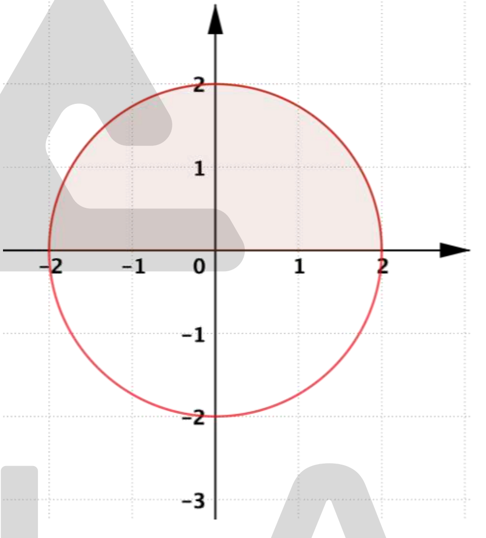
مركزها $(0,0)$

$r=\sqrt{4}=2$

$$A=\frac{\text{مساحة الدائرة}}{2}=\frac{\pi r^2}{2}=\frac{\pi\times 2^2}{2}$$

$=2\pi$ وحدة مربعة

$$\therefore \int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = A = 2\pi$$



$\int_0^3 -\sqrt{9-x^2}\,dx$

$y = -\sqrt{9-x^2}$

معادلة النصف السفلي للدائرة

$x^2 + y^2 = 9$

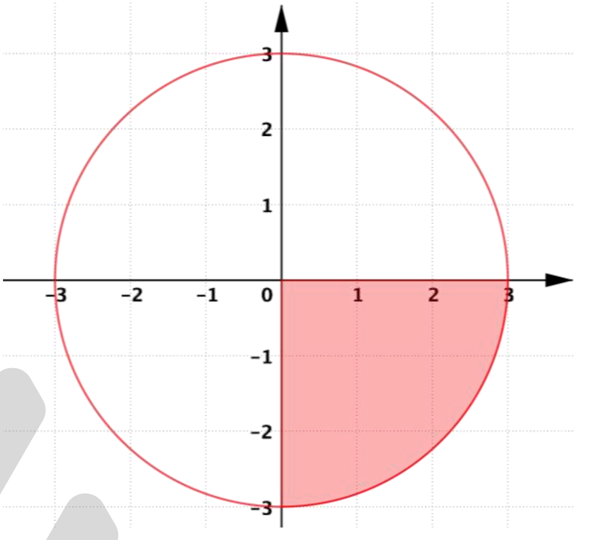
مركزها $(0,0)$

$r = \sqrt{9} = 3$

$A = \frac{\text{مساحة الدائرة}}{4} = \frac{\pi r^2}{4}$

$= \frac{\pi \times 3^2}{4} = \frac{9\pi}{4}$ وحدة مربعة

$\therefore \int_0^3 -\sqrt{9-x^2}\,dx = -A = -\frac{9\pi}{4}$



$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x\,dx$

$u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x\,dx$

عندما $x = \frac{\pi}{4}$ فإن: $u = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

عندما $x = 0$ فإن: $u = \tan 0 = 0$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x\,dx = \int_0^1 u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \left(\frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{0^2}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$\int_{-1}^{1} (x^2+2x-3)^2(x+1)dx$

$u = x^2+2x-3 \Rightarrow du = (2x+2)dx = 2(x+1)dx \Rightarrow\Rightarrow \frac{du}{2} = (x+1)dx$

عندما $x = 1$ فإن: $u = 1^2 + 2(1) - 3 = 0$

عندما $x = -1$ فإن: $u = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = -4$

$$\therefore \int_{-1}^{1} (x^2+2x-3)^2(x+1)dx = \int_{-4}^{0} u^2\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-4}^{0} = \frac{1}{2}\left((0) - \left(\frac{(-4)^3}{3}\right)\right) = \frac{32}{3}$$

Q $\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx$

$u = x+1 \Rightarrow u-1 = x \Rightarrow du = dx$

عندما $x = 3$ فإن: $u = 4$

عندما $x = 0$ فإن: $x = 1$

$$\therefore \int_0^3 x\sqrt{x+1}dx = \int_1^4 (u-1)\sqrt{u}\,du = \int_1^4 \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \left(\frac{2}{5}(4)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{2}{5}(1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{116}{15}$$

Q $\int_{-2}^{0} \frac{x}{e^x} dx = \int_{-2}^{0} x\, e^{-x}\, dx$

$\boldsymbol{u} =\; x \qquad \boldsymbol{dv} =\; e^{-x}\, dx$

$\boldsymbol{du} =\; dx \qquad \boldsymbol{v} =\; -e^{-x}$

$$I = \int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$= -x\, e^{-x} - \int -e^{-x}\, dx$$

$$= -x\, e^{-x} + (-e^{-x}) + \mathrm{C} = -xe^{-x} - e^{-x} + \mathrm{C}$$

$$\therefore \int_{-2}^{0} \frac{x}{e^x}\, dx = [-x\, e^{-x} - e^{-x}]_{-2}^{0}$$

$$= \left(-(0)e^{-(0)} - e^{-(0)}\right) - \left(-(-2)e^{-(-2)} - e^{-(-2)}\right) \approx -8.389$$

Q $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x\, dx$

$\boldsymbol{u} =\; x \qquad \boldsymbol{dv} =\; \sec^2 x\; dx$

$\boldsymbol{du} =\; dx \qquad \boldsymbol{v} =\; \tan x$

$$I = \int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$= x\tan x - \int \tan x\, dx$$

$$= x\tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= x\tan x + \ln|\cos x| + \mathrm{C}$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x\; dx = [x\tan x + \ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4} + \ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right|\right) - (0\tan(0) + \ln|\cos(0)|) \approx 0.44$$

Q $\int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+3}dx$ $\qquad x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$

$$f(x)=\frac{2x+8}{(x+1)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}$$

$$2x+8=A(x+3)+B(x+1)$$

$$x=-1 \Rightarrow 2(-1)+8=A(-1+3) \Rightarrow A=3$$

$$x=-3 \Rightarrow 2(-3)+8=B(-3+1) \Rightarrow B=-1$$

$$\therefore \int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+3}dx=\int_1^5\left(\frac{3}{(x+1)}+\frac{-1}{(x+3)}\right)dx$$

$$=[3\ln|x+1|-\ln|x+3|]_1^5=(3\ln|6|-\ln|8|)-(3\ln|2|-\ln|4|)\approx 2.603$$

Q $\int_4^7 \frac{3x^2-17}{x^2-x-6}dx$

$$f(x)=3+\frac{3x+1}{x^2-x-6}$$

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline x^2-x-6 & 3x^2 \qquad -17 \\ & -3x^2 \pm 3x \pm 18 \\ \hline & \qquad 3x+1 \end{array}$$

$$\frac{3x+1}{x^2-x-6}=\frac{3x+1}{(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}$$

$$3x+1=A(x-3)+B(x+2)$$

$$x=-2 \Rightarrow 3(-2)+1=A(-2-3) \Rightarrow A=1$$

$$x=3 \Rightarrow 3(3)+1=B(3+2) \Rightarrow B=2$$

$$\therefore \int_4^7 \frac{3x^2-17}{x^2-x-6}dx=\int_4^7\left(3+\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-3}\right)dx$$

$$=[3x+\ln|x+2|+2\ln|x-3|]_4^7$$

$$=(21+\ln|9|+2\ln|4|)-(12+\ln|6|+2\ln|1|)\approx 12.178$$

المساحات في المستوى

Q أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 3x$ و محور السينات

نقط التقاطع مع محور السينات

$$f(x) = 0$$

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \ , \quad x = 3$$

$$\therefore A = \left|\int_0^3 f(x)dx\right|$$

$$= \left|\int_0^3 (x^2 - 3x)dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_0^3\right|$$

$$= \left|\left(\left(\frac{3^3}{3} - \frac{3(3)^2}{2}\right) - \left(\frac{0^3}{3} - \frac{3(0)^2}{2}\right)\right)\right|$$

$= \frac{9}{2}$ وحدة مربعة

Q أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f و محور السينات في الفترة المبينة

$$f(x) = x^3 - 4x \ , \left[-\mathbf{1} \ , \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right]$$

$$f(x) = 0 \ \Rightarrow \ x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2) = 0 \ \Rightarrow$$

$$x = 0 \ \in \ \left(-1, \frac{3}{2}\right) , x = 2 \ \notin \ \left(-1, \frac{3}{2}\right), x = -2 \ \notin \ \left(-1, \frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore A = \left|\int_{-1}^0 (x^3 - 4x)\,dx\right| + \left|\int_0^{\frac{3}{2}} (x^3 - 4x)dx\right| \quad = \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-1}^0\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_0^{\frac{3}{2}}\right|$$

$$= \left|(0) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - 2(-1)^2\right)\right| + \left|\left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{4} - 2\left(\frac{3}{2}\right)^2\right) - (0)\right|$$

$$= \left|\frac{7}{4}\right| + \left|-\frac{207}{64}\right| = \frac{319}{64} \quad \text{units}^2$$

Q أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $\boldsymbol{f(x)} = x^2 + \mathbf{2}$

و منحنى الدالة g : $g(x) = \sqrt[3]{x}$ و المستقيمين $x = 0 , x = 1$

علماً بأن: $[0,1] \ni x \ \forall$, $f(x) > g(x)$

$$\because f(x) > g(x), \qquad \forall \ x \in [0,1]$$

$$\therefore A = \int_0^1 (f(x) - g(x))dx = \int_0^1 (x^2 + 2) - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 + 2 - x^{\frac{1}{3}}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_0^1 = \left(\frac{1^3}{3} + 2 - \frac{3}{4}(1)\right) - (0) = \frac{19}{12} \quad \text{units}^2$$

Q أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = e^x$
و منحنى الدالة g : $g(x) = -1 - x^2$ و المستقيمين $x = 3$, $x = 0$
علماً بأن المنحنيين للدالتين g , f غير متقاطعين.

$$A = \left|\int_0^3 (f(x) - g(x))dx\right| = \left|\int_0^3 (e^x - (-1 - x^2))dx\right|$$

$$= \left|\int_0^3 (e^x + 1 + x^2)dx\right| = \left|\left[e^x + x + \frac{x^3}{3}\right]_0^3\right|$$

$$= \left|\left(e^3 + 3 + \frac{3^3}{3}\right) - \left(e^0 + 0 + \frac{0^3}{3}\right)\right| = e^3 + 11 \approx 31.09 \text{ units}^2$$

Q أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين : $y_2 = -x$, $y_1 = 2 - x^2$

$$A = \left|\int_{-1}^2 (y_1 - y_2)dx\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^2 (2 - x^2) - (-x)dx\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^2 (2 - x^2 + x)dx\right|$$

$$= \left|\left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^2\right|$$

$$= \left|\left(2(2) - \frac{(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{2}\right) - \left(2(-1) - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2}\right)\right| = \frac{9}{2} \text{ units}^2$$

التقاطع

$y_1 = y_2$

$2 - x^2 = -x$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x = -1$

$x = 2$

حجوم الأجسام الدورانية

إذا نتج مجسم من دوران منطقة محددة بمنحنى دالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = a , x = b$ حيث $a < b$ دورة كاملة حول محور السينات فإن حجم هذا المجسم يساوي: $V = \int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx$

Q أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 2$ و محور السينات في الفترة $[-1,1]$.

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} (x^2+2)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 4x^2 + 4)\, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + 4x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \pi\left(\left(\frac{(1)^5}{5} + \frac{4(1)^3}{3} + 4(1)\right) - \left(\frac{(-1)^5}{5} + \frac{4(-1)^3}{3} + 4(-1)\right)\right) = \pi\frac{166}{15} = \frac{166}{15}\pi$$ وحدة مكعبة

Q أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{x-1}$ و محور السينات في الفترة $[1,5]$.

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx = \pi \int_1^5 \left(\sqrt{x-1}\right)^2 dx = \pi \int_1^5 (x-1)dx = \pi\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^5$$

$$= \pi\left(\left(\frac{5^2}{2} - 5\right) - \left(\frac{1^2}{2} - 1\right)\right) = 8\,\pi$$ وحدة مكعبة

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحني الدالتين: $f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x}$

التقاطع:

$f(x) = g(x)$

$x^2 = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad x^4 = x \Rightarrow x^4 - x = 0$

$\Rightarrow x(x^3 - 1^3) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$x = 0$

$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$

حدود التكامل $[0,1]$

قيمة اختيارية

$\frac{1}{2} \in (0,1)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.25 \qquad , \qquad g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.70$

$\therefore g(x) \geq f(x) \geq 0 \quad \forall \ x \in \ [0,1]$

$$V = \pi \int_a^b \left(g(x)\right)^2 - \left(f(x)\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 \, dx = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - (0)\right) = \frac{3}{10}\pi$$ وحدة مكعبة

Q أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بين منحنيي الدالتين: $f(x) = \frac{x^2}{2} + 1, \quad g(x) = \frac{x}{2} + 2$

التقاطع:

$f(x) = g(x)$

$\frac{x^2}{2} + 1 = \frac{x}{2} + 2$

$x^2 + 2 = x + 4 \Rightarrow x^2 + 2 - x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) = 0$

$\Rightarrow \; x = -1, \qquad x = 2$

قيمة اختيارية $0 \in (-1,2)$

$f(0) = 1 \qquad g(0) = 2$

$\therefore g(x) \geq f(x) \geq 0 \;\; \forall \; x \in \; [-1,2]$

$$V = \pi \int_{-1}^{2} \left(g(x)\right)^2 - \left(f(x)\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} \left(\frac{x}{2} + 2\right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} \left(\frac{x^2}{4} + 2x + 4\right) - \left(\frac{x^4}{4} + x^2 + 1\right) dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} \left(\frac{x^2}{4} + 2x + 4 - \frac{x^4}{4} - x^2 - 1\right) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^3}{12} + \frac{2x^2}{2} + 4x - \frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \pi \left(\left(\frac{2^3}{12} + 2^2 + 4(2) - \frac{2^5}{20} - \frac{2^3}{3} - 2\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 4(-1) - \frac{(-1)^5}{20} - \frac{(-1)^3}{3} - (-1)\right) \right)$$

$$= \frac{81}{10}\pi = 8.1\,\pi$$

طول القوس ومعادلة منحنى دالة

أولاً: إيجاد طول قوس من منحنى:

قاعدة طول القوس

إذا كانت الدالة f' متصلة على $[a,b]$ فإن طول القوس من منحنى $y = f(x)$ في $[a\ ,b]$ هو :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^3}$ في الفترة $[0,4]$

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \left(f'(x)\right)^2 = \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{9}{4}x \Rightarrow$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \int_0^4 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \left[\frac{\frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{9}{4}}\right]_0^4 = \frac{8}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{8}{27}\left(\left(1 + \frac{9}{4} \times 4\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 + \frac{9}{4} \times 0\right)^{\frac{3}{2}}\right) \approx 9.07\ units$$

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 1$ في الفترة $[3,8]$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 0 = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \left(f'(x)\right)^2 = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x$$

$$L = \int_3^8 \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx = \int_3^8 \sqrt{1 + x}\, dx = \int_3^8 (1 + x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \left[\frac{\frac{2}{3}(1 + x)^{\frac{3}{2}}}{1}\right]_3^8 = \frac{2}{3}\left[(1 + x)^{\frac{3}{2}}\right]_3^8$$

$$= \frac{2}{3}\left((1 + 8)^{\frac{3}{2}} - (1 + 3)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{38}{3}\ units$$

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x)=\frac{1}{3}(3+2x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0,6]$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(3+2x)^{\frac{1}{2}}(2)=(3+2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(f'(x)\right)^2=\left((3+2x)^{\frac{1}{2}}\right)^2=(3+2x)$$

$$L=\int_0^6\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx=\int_0^6\sqrt{1+3+2x}\,dx$$

$$=\int_0^6(4+2x)^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[\frac{\frac{2}{3}(4+2x)^{\frac{3}{2}}}{2}\right]_0^6$$

$$=\frac{1}{3}\left((4+2\times 6)^{\frac{3}{2}}-(4+2\times 0)^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{56}{3}\ units$$

ثانياً: إيجاد معادلة منحنى دالة باستخدام التكامل

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x,y)$ يساوي $3x^2-4x+1$ و يمر بالنقطة $A(1,2)$

$$\because f'(x)=3x^2-4x+1$$

$$\therefore f(x)=\int(3x^2-4x+1)dx$$

$$=\frac{3x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}+x+C$$

$$f(x)=x^3-2x^2+x+C$$

بالتعويض في إحداثيات النقطة $A(1,2)$ نجد:

$$2=(1)^3-2(1)^2+1+C\Rightarrow C=2$$

المعادلة المطلوبة:

$$f(x)=x^3-2x^2+x+2$$

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x,y) يساوي $\sqrt{5-4x}$ فأوجد معادلة المنحنى عندما يمر بالنقطة $A(-5,3)$

$$f'(x)\neq 0\quad \frac{-1}{f'(x)}=\text{ميل العمودي}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{5-4x}}=-1(5-4x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(x)=\int -1(5-4x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=-1\frac{\frac{2}{1}(5-4x)^{\frac{1}{2}}}{-4}+C\Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{5-4x}+C$$

بالتعويض $(-5,3)$

$$3=\frac{1}{2}\sqrt{5-4(-5)}+C\quad\Rightarrow\quad C=\frac{1}{2}$$

المعادلة المطلوبة:

$$f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{5-4x}+\frac{1}{2}$$

المعادلات التفاضلية

النوع الأول: المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى و الدرجة الأولى التى على الصورة $y' = f(x)$ حلها يكون على الصورة: $y = \int f(x)\,dx$.

حل المعادلة: $y' = 3x^2 - 1$

$$y = \int (3x^2 - 1)dx = \frac{3x^3}{3} - x + C = x^3 - x + C$$

حل المعادلة: $y' = 3x^2 - 1$ ، و التي تحقق $y = 2$ عند $x = 1$

$$y = \int (3x^2 - 1)dx = \frac{3x^3}{3} - x + C = x^3 - x + C$$

$$x = 1\,, y = 2 \;\Rightarrow\; 2 = (1)^3 - (1) + C \;\Rightarrow C = 2$$

$$\therefore y = x^3 - x + 2$$

النوع الثاني: المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = g(x).h(y)$
يتم حلها بطريقة فصل المتغيرات

$y' - 2xy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \quad \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{2x^2}{2} + C = x^2 + C \;\Rightarrow\; |y| = e^{x^2+C}$$

$$\Rightarrow y = \mp e^{x^2} \cdot e^c = ke^{x^2} \qquad : k = \mp e^c$$

النوع الثالث: المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay : a \neq 0$
يكون حلها: $y = ke^{ax}$ حيث $k \in R^*$

أوجد حلاً للمعادلة: $y' = 4y$ إذا كان $y = 2$ عند $x = 0$

$$y = k\,e^{4x} \qquad x = 0, y = 2 \Rightarrow$$

$$2 = k \cdot e^{4(0)}$$

$$2 = k \cdot 1 \Rightarrow k = 2 \qquad \therefore y = 2\,e^{4x}$$

النوع الرابع: المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay + b : a \neq 0 , b \neq 0$

يكون حلها: $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث $k \in R^*$

Q أوجد حلاً للمعادلة: $2y' + y = 1$ إذا كان $y = 2$ عند $x = -1$

$$2y' + y = 1 \Rightarrow 2y' = -y + 1$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

$$y = ke^{-\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = ke^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

$$y = 2, \quad x = -1 \Rightarrow \quad 2 = ke^{-\frac{1}{2}(-1)} + 1 \quad \Rightarrow 1 = ke^{\frac{1}{2}} \Rightarrow k = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore y = e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 1 = e^{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right)} + 1$$

النوع الخامس: المعادلات التفاضلية على الصورة: $y'' = f(x)$ يتم حل هذه المعادلات بخطوتين: $y' = \int f(x)\,dx = F(x) + C_1$ ثم $y = \int (F(x) + C_1)\,dx$

Q حل المعادلة: $y'' = 3x^2 - 2x$

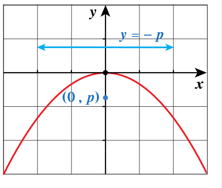
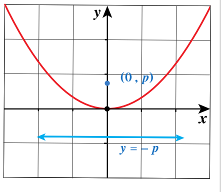
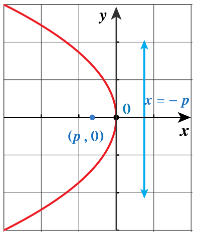
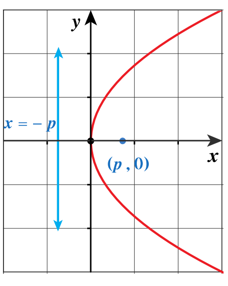
$$y'' = 3x^2 - 2x$$

$$y' = \int (3x^2 - 2x)dx \quad = \frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + C_1 \quad = x^3 - x^2 + C_1$$

$$y = \int (x^3 - x^2 + C_1)\,dx \quad = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C_1x + C_2$$

القطع المكافئ

القطع مكافئ رأسه نقطة الأصل (0 ,0)

الصورة العامة	$x^2 = 4py$		$y^2 = 4px$	
الفتحة	إلى أعلى أو إلى أسفل		إلى اليمين أو إلى اليسار	
البؤرة	$(0, p)$		$(p, 0)$	
الدليل	$y = -p$		$x = -p$	
محور التناظر	محور الصادات $(y - axis)$		محور السينات $(x - axis)$	
المسافة من الراس إلى البؤرة **المسافة من الرأس إلى الدليل**	$\|p\|$			
إشارة p	$p < 0$	$p > 0$	$p < 0$	$p > 0$
الشكل				

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي:

Q رأسه نقطة الأصل و بؤرته F(4 ,0)

∵ البؤرة ∋ محور السينات الموجب

∴معادلة القطع:

$y^2 = 4px \quad : p = 4 \quad \Rightarrow$

$y^2 = 4(4)x$

$y^2 = 16x$

الدليل:

$x = -P \Rightarrow \quad x = -4$

Q بؤرته $F(0, -3)$ و دليله المستقيم : $y = 3$

الرأس (0,0) منتصف المسافة بين البؤرة و الدليل

∵ البؤرة ∋ محور ال y

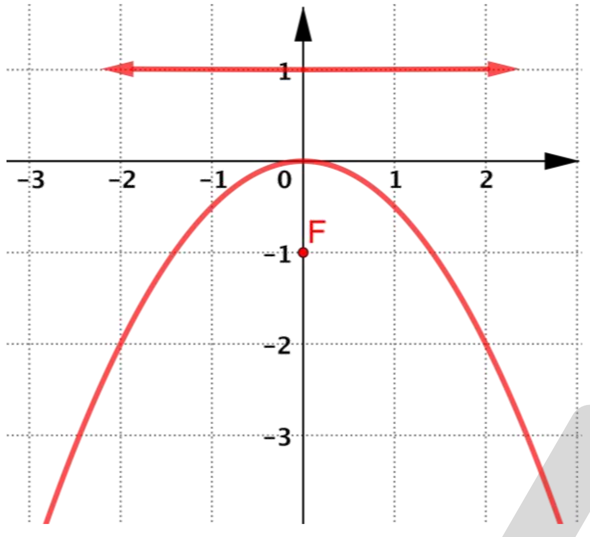
∴ معادلة القطع:

$x^2 = 4py \quad : \quad p = -3 \quad \Rightarrow$

$x^2 = -12\, y$

أوجد البؤرة و معادلة الدليل لقطع مكافئ، ثم ارسم شكلاً تقريبيًا لهذا القطع في كل مما يلي:

Q المعادلة: $x^2 = -2y$



$x^2 = 4py$

$4p = -2 \Rightarrow p = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} < 0$

محور التماثل y الفتحة للأسفل

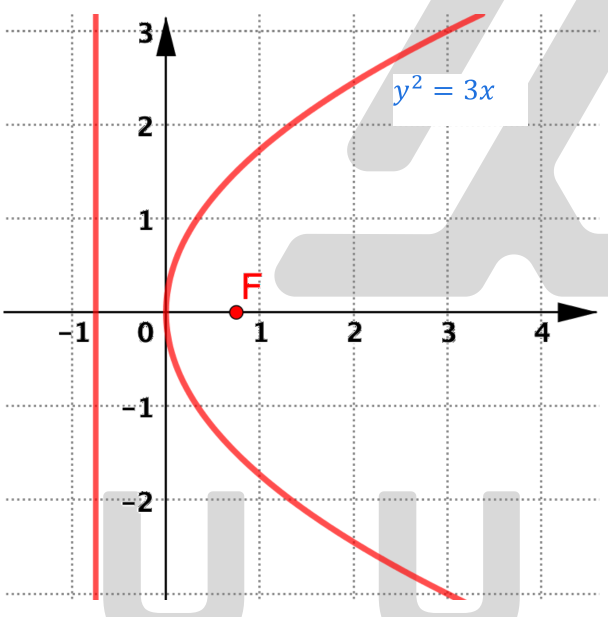
البؤرة:

$F(0,p) = \mathrm{F}\left(0,-\frac{1}{2}\right)$

الدليل:

$y = -p \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

Q المعادلة: $\frac{1}{3}y^2 = x$



$y^2 = 3x$

$y^2 = 4px$

$4p = 3 \Rightarrow p = \frac{3}{4} > 0$

محور التماثل x الفتحة يمين

البؤرة:

$F(p,0) = \mathrm{F}\left(\frac{3}{4},0\right)$

الدليل:

$x = -p \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$

Q أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و يمر بالنقطة $A(1,2)$ و خط تماثله $x - axis$.

$\because$ رأسه نقطة الأصل و خط تماثله $x - axis$

$\therefore$ المعادلة: $y^2 = 4px$

$\because$ يمر بالنقطة $A(1,2)$

$2^2 = 4p(1) \Rightarrow 4 = 4p \Rightarrow p = 1$

$\therefore$ معادلة القطع:

$y^2 = 4(1)x \Rightarrow y^2 = 4x$

Q أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ و يمر بالنقطتين $A(-1,4)$، $B(1,4)$

قطع مكافئ محوره y

$\therefore$ المعادلة: $x^2 = 4py$

بالتعويض$B(1,4)$

$(1)^2 = 4p(4) \Rightarrow 1 = 16p \Rightarrow p = \frac{1}{16}$

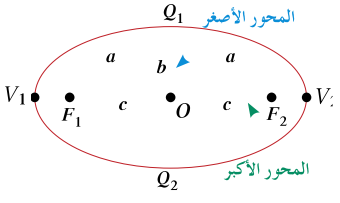
معادلة القطع المكافئ:

$\therefore x^2 = 4\left(\frac{1}{16}\right)y \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}y$

القطع الناقص

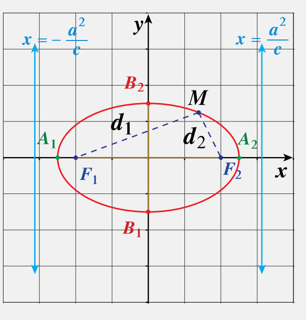
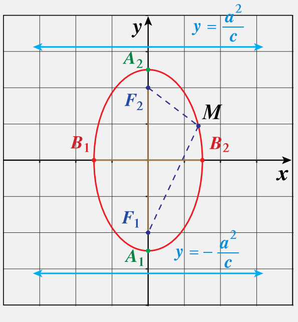
القطع الناقص القطع الناقص هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوى ثابتًا.

طول المحور الأكبر: $2a$
طول المحور الأصغر: $2b$
البعد بين البؤرتين: $2c$
العلاقة الأساسية: $c^2 = a^2 - b^2$



شكل (b)
$a^2 = b^2 + c^2$

معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل (0 , 0) كالتالي:

المعادلة	$a > b > 0$	$a > b > 0$
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
بيان القطع		
المحور الأكبر	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
الرأسان طرفا المحور الأكبر	$A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$	$A_1(0, -a), A_2(0, a)$
طول المحور الأكبر	$2a$	
طرفا المحور الأصغر	$B_1(0, -b), B_2(0, b)$	$B_1(-b, 0), B_2(b, 0)$
طول المحور الأصغر	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c), F_2(0, c)$
العلاقة الأساسية	$a^2 = b^2 + c^2$	
معادلتا الدليلين	$x = -\frac{a^2}{c}, x = \frac{a^2}{c}$	$y = -\frac{a^2}{c}, y = \frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع الناقص متناظر حول كل من محوريه و مركزه	

Q إذا كانت: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{10}=1$ معادلة قطع ناقص فأوجد:

- رأسي القطع وطرفي المحور الأصغر
- البؤرتين
- معادلتي الدليلين
- طول كل من المحورين
- ارسم شكلاً تقريبياً للقطع

معادلة القطع:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

المحور الأكبر ينطبق على محور السينات

$a^2=16 \Rightarrow a=\sqrt{16}=4$

$b^2=10 \Rightarrow b=\sqrt{10}$

$c^2=a^2-b^2=16-10=6 \Rightarrow c=\sqrt{6}$

رأسا القطع:

$A_1(-a,0)=A_1(-4,0)$

$A_2(a,0)=A_2(4,0)$

طرفا المحور الأصغر

$B_1(0,-b)=B_1(0,-\sqrt{10})$

$B_2(0,b)=B_2(0,\sqrt{10})$

البؤرتان:

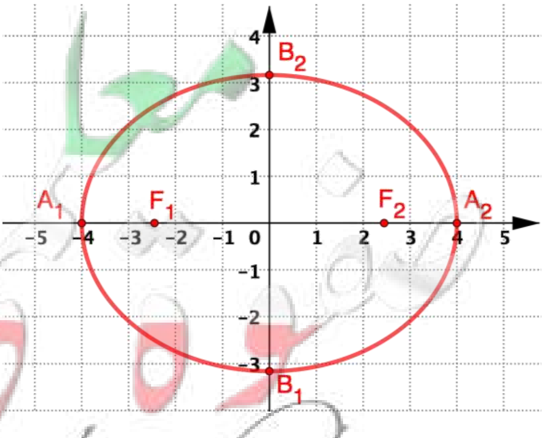
$F_1(-c,0)=F_1(-\sqrt{6},0)$

$F_2(c,0)=F_2(\sqrt{6},0)$

معادلة دليلي القطع: $x=\mp\frac{a^2}{c}=\mp\frac{16}{\sqrt{6}}$

طول كل من المحورين:

الأكبر $=2a=8$ الأصغر $=2b=2\sqrt{10}$



Q إذا كانت: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ معادلة قطع ناقص فأوجد:

- رأسي القطع وطرفي المحور الأصغر
- البؤرتين
- معادلتي الدليلين
- طول كل من المحورين
- ارسم شكلاً تقريبياً للقطع

محوره الأكبر رأسي: (ينطبق على محور الـ y)

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$a^2=9 \Rightarrow a=\sqrt{9}=3$

$b^2=4 \Rightarrow b=\sqrt{4}=2$

$c^2=a^2-b^2=5 \Rightarrow c=\sqrt{5}$

رأسا القطع:

$A_1(0,-a)=A_1(0,-3)$

$A_2(0,a)=A_2(0,3)$

طرفا المحور الأصغر:

$B_1(-b,0)=B_1(-2,0)$

$B_2(b,0)=B_2(2,0)$

البؤرتان:

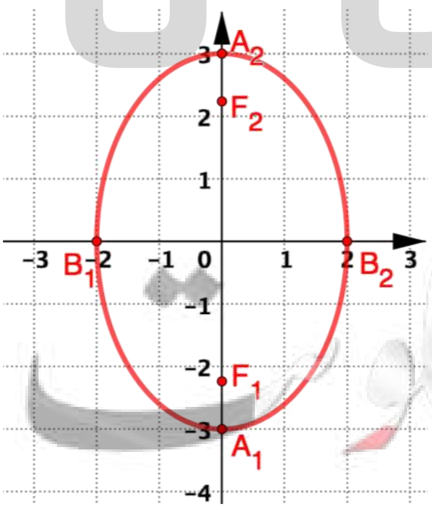
$F_1(0,-c)=F_1(0,-\sqrt{5})$

$F_1(0,c)=F_2(0,\sqrt{5})$

معادلة دليلي القطع: $y=\mp\frac{a^2}{c}=\mp\frac{9}{\sqrt{5}}$

طول كل من المحورين:

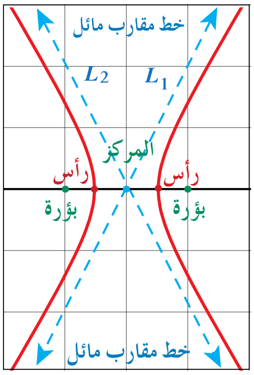
الأكبر $=2a=6$ الأصغر $=2b=4$

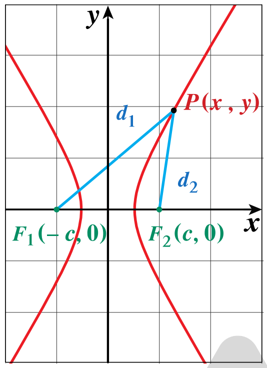


القطع الزائد

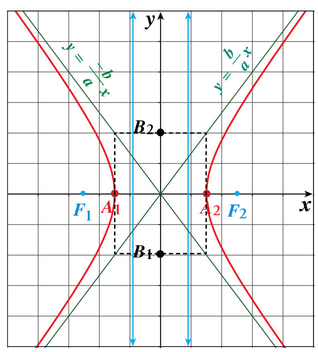
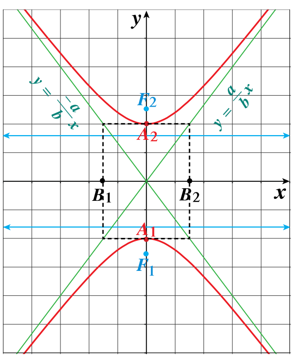
القطع الزائد

القطع الزائد هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي تكون القيمة المطلقة للفرق بين بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوى ثابتًا.





معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل كالتالي:

المعادلة	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
بيان القطع		
طرفا المحور القاطع الرأسان	$A_1(-a,0), A_2(a,0)$	$A_1(0,-a), A_2(0,a)$
المحور القاطع (الأساسي)	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
طول المحور القاطع	$2a$	
طرفا المحور المرافق	$B_1(0,-b), B_2(0,b)$	$B_1(-b,0), B_2(b,0)$
طول المحور المرافق	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0), F_2(c,0)$	$F_1(0,-c), F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$c^2=a^2+b^2$	
معادلة الخطين المقاربين	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
معادلة الدليلين	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$y=\pm\frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع متناظر حول محوريه و مركزه	

لتكن: $9x^2 - 16y^2 = 144$
معادلة قطع زائد فأوجد:

- رأسي القطع
- البؤرتين
- معادلتي الدليلين
- طول كل من المحورين
- معادلة كل من الخطين المقاربين
- ارسم شكلاً تخطيطياً للقطع

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144} \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

قطع زائد محوره القاطع هو محور السينات

$a^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{16} = 4$

$b^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{9} = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 = 25 \qquad c = \sqrt{25} = 5$

رأسا القطع الزائد:

$A_1(-a, 0) = A_1(-4,0)$

$A_2(a, 0) = A_2(4,0)$

البؤرتان:

$F_1(-c, 0) = F_1(-5,0)$

$F_2(c, 0) = F_2(5,0)$

معادلتا دليلي القطع

$x = \mp\frac{a^2}{c} = \mp\frac{16}{5}$

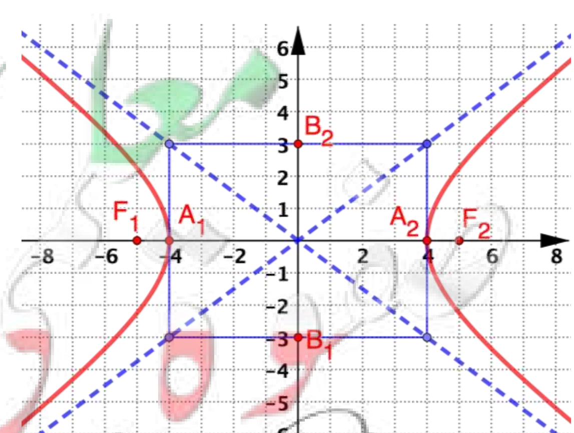
طول كل من المحورين

طول المحور القاطع $= 2a = 2(4) = 8$

طول المحور المرافق $= 2b = 2(3) = 6$

معادلة كل من الخطين المقاربين:

$y = \mp\frac{b}{a}x \Rightarrow y = \mp\frac{3}{4}x$



لتكن: $9y^2 - 25x^2 = 225$
معادلة قطع زائد فأوجد:

- رأسي القطع
- البؤرتين
- معادلتي الدليلين
- طول كل من المحورين
- معادلة كل من الخطين المقاربين
- ارسم شكلاً تخطيطياً للقطع

$$\frac{9y^2}{225} - \frac{25x^2}{225} = \frac{225}{225} \Rightarrow \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$$

قطع زائد محوره القاطع على محور y

$a^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{25} = 5$

$b^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{9} = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 = 34 \Rightarrow \quad c = \sqrt{34}$

رأسا القطع الزائد:

$A_1(0, -a) = A_1(0, -5)$

$A_2(0, a) = A_2(0,5)$

البؤرتان:

$F_1(0, -c) = F_1\left(0, -\sqrt{34}\right)$

$F_2(0, c) = F_2\left(0, \sqrt{34}\right)$

معادلتا دليلي القطع:

$y = \mp\frac{a^2}{c} = \mp\frac{25}{\sqrt{34}}$

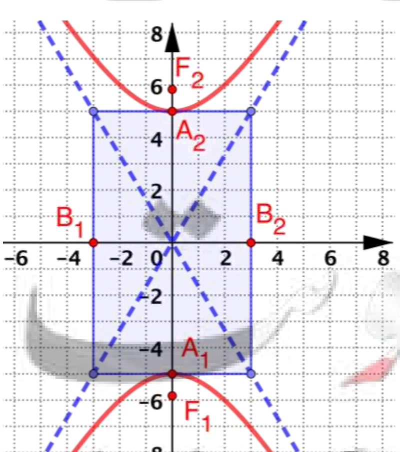
طول كل من المحورين:

طول المحور القاطع $= 2a = 2(5) = 10$

طول المحور المرافق $= 2b = 2(3) = 6$

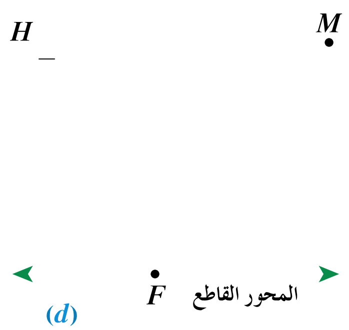
معادلة كل من الخطين المقاربين

$y = \mp\frac{a}{b}x \Rightarrow y = \mp\frac{5}{3}x$



الاختلاف المركزي

القطع المخروطي



القطع المخروطي هو مجموعة كل النقاط في المستوى الإحداثي حيث تكون نسبة بعد كل منها من نقطة ثابتة (البؤرة) إلى بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل) في نفس المستوى تساوي مقدارًا ثابتًا.

إذا $e = 1$ يكون القطع المخروطي قطعًا مكافئًا
إذا $e < 1$ يكون القطع المخروطي قطعًا ناقصًا
إذا $e > 1$ يكون القطع المخروطي قطعًا زائدًا

حدد نوع القطع في كل مما يلي ثم أوجد معادلته.

Q اختلافه المركزي $(e = 1)$ و بؤرته $F(-1,0)$

$\because e = 1$

$\therefore$ القطع قطع مكافئ محوره x

$p = -1$

$\therefore$ معادلة القطع:

$y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = -4x$

Q اختلافه المركزي $\left(e = \frac{4}{5}\right)$ و إحدى بؤرتيه $F(-4\sqrt{2},0)$

$\because e < 1$

$\therefore$ القطع هو قطع ناقص

$\because$ البؤرة على محور السينات $\therefore$ معادلة القطع:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$c = 4\sqrt{2}$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{4\sqrt{2}}{a} \Rightarrow a = 5\sqrt{2}$$

$c^2 = a^2 - b^2$

$$(4\sqrt{2})^2 = (5\sqrt{2})^2 - b^2 \Rightarrow 32 = 50 - b^2$$

$b^2 = 50 - 32 = 18$

$\therefore$ معادلة القطع:

$$\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{18} = 1$$

Q اختلافه المركزي $(e = \sqrt{3})$ و معادلة أحد دليليه $x = \frac{1}{3}$

$\because e > 1$

$\therefore$ قطع زائد محوره القاطع منطبق على محور x

• معادلة أحد دليليه: $x = \frac{1}{3}$ بالتالي:

$$\frac{a^2}{c} = \frac{1}{3} \Rightarrow c = 3a^2$$

$\frac{c}{a} = \sqrt{3}$ بالتالي: $e = \sqrt{3}$

$$\frac{3a^2}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow 3a = \sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$c = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + b^2$$

$$1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = b^2 \Rightarrow b^2 = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ معادلة القطع:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} - \frac{y^2}{\frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{3}} - \frac{y^2}{\frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{3x^2}{1} - \frac{3y^2}{2} = 1$$

أوجد الاختلاف المركزي لكل قطع مما يلي حيث معادلته:

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

قطع ناقص معادلته $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$a = 5$

$b = 3$

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow$

$c = \sqrt{16} = 4$

$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$

$x^2 - 25y^2 = 1$

$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{25}\right)} = 1$

قطع زائد معادلته $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$a = 1 \quad , b = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$

$c^2 = a^2 + b^2 = 1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{26}{25} \Rightarrow$

$c = \sqrt{\frac{26}{25}} = \frac{\sqrt{26}}{5}$

$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{26}}{5}$

أوجد طول المحور القاطع للقطع الزائد الذي اختلافه المركزي (e = 2) و طول محوره المرافق ٦ وحدات.

$\because e = 2 \Rightarrow \frac{c}{a} = 2 \Rightarrow c = 2a$

∵طول محوره المرافق ٦ وحدات.

$\therefore 2b = 6 \quad \Rightarrow \quad b = 3$

$c^2 = a^2 + b^2$

$(2a)^2 = a^2 + 9$

$4a^2 = a^2 + 9$

$4a^2 - a^2 = 9$

$3a^2 = 9 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow$

$a = \sqrt{3}$

∴طول المحور القاطع:

$2a = 2\sqrt{3}$

أوجد طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي اختلافه المركزي $\left(e = \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ و طول محوره الأصغر ٤ وحدات.

$\because e = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{5}\,a}{3}$

∵طول محوره المرافق 4 وحدات.

$\therefore 2b = 4 \quad \Rightarrow \quad b = 2$

$c^2 = a^2 - b^2$

$\left(\frac{\sqrt{5}a}{3}\right)^2 = a^2 - 4$

$\frac{5a^2}{9} = a^2 - 4 \qquad (\times 9) \Rightarrow$

$5a^2 = 9a^2 - 36$

$5a^2 = 9a^2 - 36$

$a^2 = \frac{-36}{-4} = 9 \Rightarrow$

$a = \sqrt{9} = 3$

∴طول المحور الأكبر:

$\therefore 2a = 2 \times 3 = 6$

المتغيرات العشوائية المتقطة

في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة، المتغير العشوائي X يعبّر عن:
مربع العدد الظاهر مطروحاً منه ١ عندما يكون العدد أصغر من ٤ ، و -١ لغير ذلك فأوجد :

- فضاء العينة (S) و عدد عناصره $n(S)$.

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$ ، $n(S) = 6$

- مدى المتغير العشوائي X .

عناصر S	عناصر المدى
1	0
2	3
3	8
4	-1
5	-1
6	-1

$X(S) = \{-1،0،3،8\}$

- احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة (S) : $f(x_i) = P(X = x_i)$

$$f(-1) = P(X = -1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{1}{6}$$

$$f(3) = P(X = 3) = \frac{1}{6}$$

$$f(8) = P(X = 8) = \frac{1}{6}$$

- دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

x	-1	0	3	8	المجموع
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن "عدد الصور" فأوجد ما يلي :

- فضاء العينة (S) و عدد عناصره $n(S)$.

$S = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),$
$(T,T,H),(T,H,T),(H,T,T),(T,T,T)\}$

$n(S) = 8$

- مدى المتغير العشوائي X .

عناصر S	عناصر المدى
(H,H,H)	3
(H,H,T)	2
(H,T,H)	2
(T,H,H)	2
(T,T,H)	1
(T,H,T)	1
(H,T,T)	1
(T,T,T)	0

$X(S) = \{0,1,2,3\}$

- احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X .

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{3}{8}$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{3}{8}$$

$$f(3) = P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

- دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X .

x	0	1	2	3	المجموع
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Q إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي **X** هي :

x	-2	1	2	3
$f(x)$	0.3	0.1	k	0.2

فأوجد قيمة k .

$f(-2)+f(1)+f(2)+f(3)=1$

$0.3+0.1+k+0.2=1$

$0.6+k=1$

$k=1-0.6=0.4$

Q إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متقطعًا مداه هو : $\{0, 1, 2, 3\}$ وكان:
$f(0)=0.1$, $f(1)=0.6$, $f(2)=0.15$
فأوجد $f(3)$ ، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X .

$f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=1$

$0.1+0.6+0.15+f(3)=1$

$f(3)=1-0.85=0.15$

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.1	0.6	0.15	0.15

التوقع (الوسط) و التباين للمتغيرات العشوائية المتقطعة

Q يبين الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X :

x	١	٢	٣	٤	٥
$f(x)$	٠,٤٣	٠,٢٩	٠,١٧	٠,٠٩	٠,٠٢

▪ فأوجد : التوقع (μ) ، التباين (σ^2) ، الانحراف المعياري (σ)

$\mu=\sum x_i f(x_i)=(1\times0.43)+(2\times0.29)+(3\times0.17)+(4\times0.09)+(5\times0.02)=1.98$

$\sigma^2=\sum x_i^2 f(x_i)-\mu^2$

$=(1^2\times0.43)+(2^2\times0.29)+(3^2\times0.17)+(4^2\times0.09)+(5^2\times0.02)-(1.98)^2$

$=1.1396 \Rightarrow \sigma=\sqrt{1.1396}\approx1.0675$

دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي متقطع

دالة التوزيع التراكمي

دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة a هي احتمال وقوع المتغير العشوائي X بحيث يكون X أصغر من أو يساوي a أي أن: $F(a) = P(x \leq a)$

الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X :

x	١	٢	٣	٤	٥
$f(x)$	٠,٤٣	٠,٢٩	٠,١٧	٠,٠٩	٠,٠٢

إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X . فأوجد:

- $F(0) \quad = P(X \leq 0) = 0$
- $F(1) \quad = P(X \leq 1) = f(1) = 0.43$
- $F(3.5) = P(X \leq 3.5) = f(1) + f(2) + f(3) = 0.43 + 0.29 + 0.17 = 0.89$
- $F(4.5) = P(x \leq 4.5) = f(3) + f(4) = 0.5 + 0.3 = 0.8$
- $F(5) \quad = P(x \leq 5) = f(3) + f(4) + f(5) = 1$
- $F(7) \quad = P(x \leq 7) = f(3) + f(4) + f(5) = 1$

بعض خواص دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

الجدول التالي يبين بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X :

x	١	٢	٣	٥
$F(x)$	٠,١٥	٠,٢	٠,٦	١

فأوجد :

- $P(1 < X \leq 3) = F(3) - F(1) = 0.6 - 0.15 = 0.45$
- $P(2 < X \leq 5) = F(5) - F(2) = 1 - 0.2 = 0.8$
- $P(X > 2) = 1 - F(2) = 1 - 0.2 = 0.8$

المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

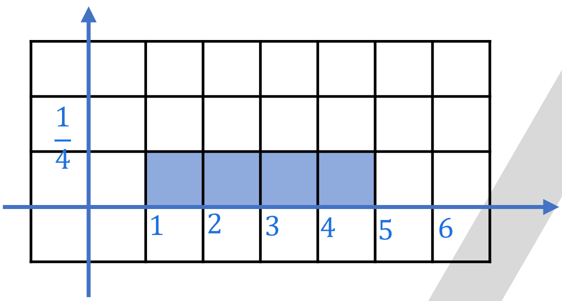
المتغير العشوائي المتصل هو المتغير التي تكون مجموعة القيم الممكنة له عبارة عن فترة من الأعداد الحقيقية أي أن مدى المتغير العشوائي المتصل $X = \{x: a \le x \le b\}$ و هي مجموعة غير قابلة للعد.

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلًا و دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} : 1 \le x \le 5 \\ 0 : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

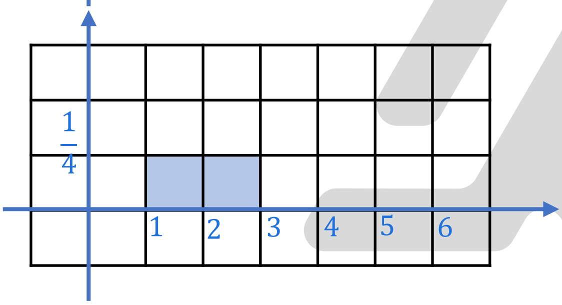
- فأوجد:

$P(1 < X \le 5)$



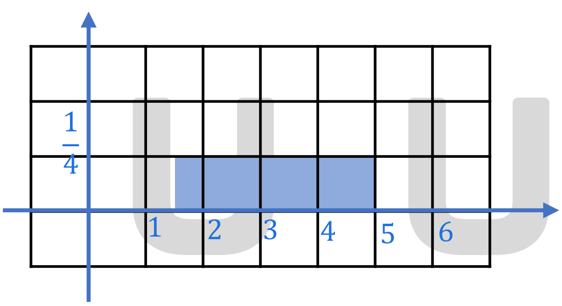
$= (5-1) \times \left(\frac{1}{4}\right) = 1$

$P(X < 3)$



$= (3-1) \times \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$P(X \ge 1.5)$



$= (5-1.5) \times \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{8}$

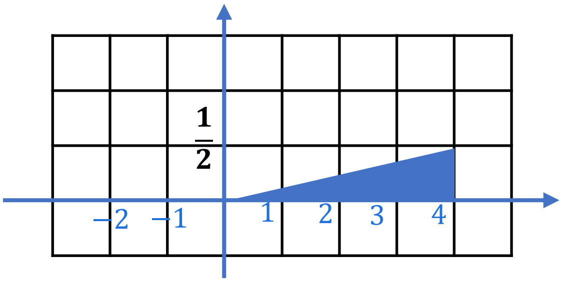
$P(X = 2)$ = صفرا

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلًا، و دالة كثافة الاحتمال له هي: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8}x : 0<x\le 4\\ 0: \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$

- فأوجد:

$P(0\le X\le 4)$

$=\frac{1}{2}(4-0)\left(\frac{1}{8}(4)\right)=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{1}{2}=1$



$P(X\le 2)$

$=\frac{1}{2}(2-0)\left(\frac{1}{8}(2)\right)=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

$P(X>2)$

$=1-P(x\le 2)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

التوزيع الاحتمالي المنتظم لمتغير عشوائي متصل (مستمر)

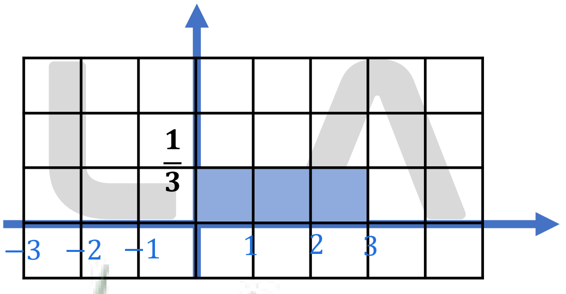
دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الاحتمالي المنتظم على $[b،a]$ هي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & : a\le x\le b\\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

التوقع (الوسط) $\mu=\frac{a+b}{2}$ **التباين** $\sigma^2=\frac{(b-a)^2}{12}$

لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} : 0\le x\le 3\\ 0: \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$



أثبت أن الدالة هي دالة كثافة احتمال.

المساحة تحت المنحنى

$=(3-0)\times\left(\frac{1}{3}\right)=1$

$\therefore$ الدالة f هي دالة كثافة احتمال

أثبت أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} : a\le x\le b\\ 0: \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

$a=0 \qquad b=3 \Rightarrow \frac{1}{b-a}=\frac{1}{3-0}=\frac{1}{3}$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} : 0\le x\le 3\\ 0: \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

$\therefore$ الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم

أوجد $P(1<X\le 3)$

$=(3-1)\times\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$

أوجد التوقع و التباين للدالة f

$\mu=\frac{a+b}{2}=\frac{0+3}{2}=1.5=\frac{3}{2}$

$\sigma^2=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(3-0)^2}{12}=\frac{3}{4}$

إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

Q $P(z \leq 0.95)$

$P(z \leq 0.95) = 0.82894$

Q $P(z \geq 0.71)$

$P(z \geq 0.71)$

$= 1 - P(z \leq 0.71)$

$= 1 - (0.76115) = 0.23885$

Q $P(1.45 \leq z \leq 3.26)$

$P(1.45 \leq z \leq 3.26)$

$= P(z \leq 3.26) - P(z \leq 1.45)$

$= 0.99944 - 0.92647 = 0.07297$

Q $P(z \leq -0.12)$

$P(z \leq -0.12) = 0.45224$

Q $P(-3.2 \leq z \leq -0.1)$

$P(-0.1 \leq z \leq -3.2)$

$= P(z \leq -3.2) - P(z \leq -0.1)$

$= 0.46017 - 0.00069 = 0.45948$

Q $P(-5.26 \leq z \leq 0.69)$

$P(-5.26 \leq z \leq 0.69)$

$= P(z \leq 0.69) - P(z \leq -5.26)$

$= 0.75490 - 0 = 0.75490$

يمثّل المتغير X درجات الطلاب في مادة الرياضيات. إذا كان توزيع هذه الدرجات يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه $\mu = 40$ و انحرافه المعياري $\sigma = 8$ فأوجد:

Q $P(X \geq 45)$

$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow$

$P(X \geq 45) =$

$P\left(z \geq \frac{45-40}{8}\right) =$

$P(z \geq 0.625) =$

$1 - P(z < 0.625) =$

$1 - \frac{0.73237 + 0.73565}{2} =$

0.26599

Q $P(30 < X \leq 65)$

$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow$

$P(30 < X \leq 65) =$

$P\left(\frac{30-40}{8} < z < \frac{65-40}{8}\right) =$

$P(-1.25 < z < 3.125) =$

$P(z \leq 3.125) - P(z \leq -1.25) =$

$\frac{0.99910 + 0.99913}{2} - 0.10565 =$

0.893465