توقعات ليلة الإمتحان

إجابات إمتحانات تجريبية

الرياضيات

الفصل الدراسي الثاني

2022 - 2023

12

(1) أثبـت أن: $F(x) = 5 - \frac{1}{3}x^3$ هـي مشـتقة عكسـية للدالـة: $f(x) = -x^2$

ثـم اكتـب مشـتقة عكسـية أخرى لها.

الحــل

$$F(x) = 5 - \frac{1}{3}x^3$$

$$F'(x) = -\frac{1}{3} \cdot 3x^2 = -x^2 = f(x)$$

$\therefore$ F هي مشتقة عكسية للدالة f

مشتقة عكسية اخرى للدالة f

$$T(x) = 9 - \frac{1}{3}x^3$$

(2) أثبت أن: $F(x) = x^3 + 5x + 3$ هي مشتقة عكسية للدالـة:

$f(x) = 3x^2 + 5$ ثـم اكتب الصورة العامـة للمشتقة العكسية.

الحـــل

$$F(x) = x^3 + 5x + 3$$

$$F'(x) = 3x^2 + 5 = f(x)$$

$\therefore$ F هي مشتقة عكسية للدالة f

الصورة العامة للمشتقة العكسية للدالة f هي

$$T(x) = x^3 + 5x + C$$ حيث C ثابت

(3) $\int \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)^2 dx$

$$\int \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)^2 dx = \int \frac{(x^2-2)^2}{(x^2)^2} dx = \int \frac{x^4-4x^2+4}{x^4} dx$$

$$= \int \frac{x^4}{x^4} - \frac{4x^2}{x^4} + \frac{4}{x^4} dx = \int 1 - 4x^{-2} + 4x^{-4} dx$$

$$= x - \frac{4x^{-1}}{-1} + \frac{4x^{-3}}{-3} + C = x + \frac{4}{x} - \frac{4}{3x^3} + C$$

(4) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1} dx$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1} dx = \int \frac{\cancel{(\sqrt[3]{x}+1)}\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - \sqrt[3]{x}+1\right]}{\cancel{\sqrt[3]{x}+1}} dx$$

$$= \int \left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - \sqrt[3]{x} + 1\right] dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + 1\right) dx$$

$$= \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + x + C$$

$$= \frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + x + C$$

(5) $\int \frac{x^4-27x}{x^2-3x}\,dx$

$$\int \frac{x^4-27x}{x^2-3x}\,dx = \int \frac{\cancel{x}(x^3-27)}{\cancel{x}(x-3)}\,dx = \int \frac{(x^3-27)}{(x-3)}\,dx$$

$$= \int \frac{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+9)}{\cancel{(x-3)}}\,dx$$

$$= \int (x^2+3x+9)\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 9x + C$$

(6) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\,dx = \int \frac{\cancel{(\sqrt{x}+1)}(\sqrt{x}-1)}{\cancel{\sqrt{x}+1}}\,dx =$$

$$= \int (\sqrt{x}-1)\,dx = \int (x^{\frac{1}{2}}-1)\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + C$$

(7) أوجد:

$$\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx$$

الحــل

$$\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx$$

بفرض $u = x^2 + 4x - 1$

$du = (2x+4)dx$, $\frac{1}{2}\,du = (x+2)dx$

$$\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx = \int u^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}\,du\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}\,u^{\frac{1}{3}}\right] + C$$

$$\therefore \int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx = \frac{3}{8}\,(x^2+4x-1)^{\frac{4}{3}} + C$$

(8) أوجد:

$$\int \frac{5}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^3}\,dx$$

الحــل

$$\int \frac{5}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^3}\,dx = \int \frac{5}{x^{\frac{1}{2}}\,(x^{\frac{1}{2}}+2)^3}\,dx$$

$$= \int 5\,x^{\frac{-1}{2}}\,(x^{\frac{1}{2}}+2)^{-3}\,dx = 5\int (x^{\frac{1}{2}}+2)^{-3}\,x^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

نفرض أن $u = x^{\frac{1}{2}} + 2$

تفاضل $du = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\,dx$

$$2\,du = x^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

$$5\int (x^{\frac{1}{2}}+2)^{-3}\,x^{\frac{-1}{2}}\,dx = 5\int u^{-3}\,.\,2\,du = 10\int u^{-3}\,du$$

$$= 10.\frac{u^{-2}}{-2} + C = \frac{-5}{u^2} + C = \frac{-5}{(\sqrt{x}+2)^2} + C$$

(9) أوجد التكامل التالي:

$$\int x\,(2x - 1)^3\,dx$$

الحل

$$\int x\,(2x-1)^3\,dx = \int (2x-1)^3\,x\,dx =$$

نفرض أن $u = 2x - 1$ تفاضل $du = 2\,dx$

$u + 1 = 2x$

$\frac{1}{2}du = dx$

$\frac{1}{2}(u+1) = x$

$$\int (2x-1)^3\,x\,dx = \int u^3 \cdot \tfrac{1}{2}(u+1) \cdot \tfrac{1}{2}du$$

$$= \int \tfrac{1}{4}u^3\,(u+1)du$$

$$= \int \left(\tfrac{1}{4}u^4 + \tfrac{1}{4}u^3\right)du = \frac{1}{4}\frac{u^5}{5} + \frac{1}{4}\frac{u^4}{4} + C$$

$$= \frac{1}{20}(2x-1)^5 + \frac{1}{16}(2x-1)^4 + C$$

(10) أوجد التكامل التالي:

$$\int x^5 \sqrt{3 + x^2}\ dx$$

الحـل

$$\int x^5 \sqrt{3+x^2}\ dx = \int (3+x^2)^{\frac{1}{2}}\ x^5\ dx =$$

نفرض أن $u = 3 + x^2$ تفاضـل $du = 2\,x\,dx$

$x^2 = u - 3$

$\frac{1}{2} du = x\,dx$

$x^4 = (u-3)^2$

$x^4 = u^2 - 6u + 9$

$$\int (3+x^2)^{\frac{1}{2}}\ x^4\ x\,dx = \int u^{\frac{1}{2}}\ (u^2 - 6u + 9)\ \tfrac{1}{2}\ du =$$

$$\int \tfrac{1}{2} u^{\frac{1}{2}}\ (u^2 - 6u + 9)\ du = \int \left(\tfrac{1}{2} u^{\frac{5}{2}} - 3u^{\frac{3}{2}} + \tfrac{9}{2}\ u^{\frac{1}{2}}\right) du =$$

$$\frac{1}{2}\ .\ \frac{2}{7}\ .\ u^{\frac{7}{2}} - 3\ .\ \frac{2}{5}\ .\ u^{\frac{5}{2}} + \frac{9}{2}\ .\ \frac{2}{3}\ .\ u^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$\frac{1}{7}\ .\ (3+x^2)^{\frac{7}{2}} - \frac{6}{5}\ .\ (3+x^2)^{\frac{5}{2}} + 3\,(3+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

(11) أوجد التكامل التالي:

$$\int x \sec^2 (x^2 + 2)\, dx$$

الحــل

$$\int sec^2(x^2+2).\ x\,dx =$$

نفرض أن $u = x^2 + 2$ تفاضــل $du = 2x\,dx$

$$\frac{1}{2}du = x\,dx$$

$$\int sec^2(x^2+2).\ x\,dx = \int \frac{1}{2} sec^2 u \;\; du$$

$$= \frac{1}{2} tan\, u + C = \frac{1}{2} tan\,(x^2+2) + C$$

(12) أوجد التكامل التالي:

$$\int \csc^5 x \cot x\, dx$$

الحــل

$$\int csc^5 x\ .\ \ cot\,x\,dx =$$

نفرض أن $u = csc\,x$ تفاضــل $du = -csc\,x\,cot\,x\;\;dx$

$$-du = csc\,x\,cot\,x\;\;dx$$

$$\int csc^4 x\,csc\,x\,cot\,x\,dx = \int -u^4\;\;du$$

$$= \frac{-u^5}{5} + C = \frac{-1}{5}\,csc^5 x + C$$

(13) أوجد التكامل التالي:

$$\int \cot x \, dx$$

الحل

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

نفرض أن: $u = \sin x \longrightarrow du = \cos x \, dx$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$$

$$= \ln|\sin x| + C$$

(14) أوجد التكامل التالي:

$$\int x\cos x \, dx$$

الحل

$$u = x \qquad dv = \cos x \, dx$$

$$du = dx \qquad v = \sin x$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x\cos x \, dx = x\sin x - \int \sin x \, dx$$

$$= x\sin x + \cos x + C$$

(15) أوجد التكامل:

$$\int (4x - 1) \ln x \, dx$$

الحل

$u = \ln x \qquad dv = (4x - 1)dx$

$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = 2x^2 - x = x(2x - 1)$

$$\int u\,dv = u.v - \int v\,du$$

$$\int (4x - 1) \ln x \, dx$$

$$= x(2x - 1)\ln x - \int \frac{1}{x} . x(2x - 1)dx$$

$$= x(2x - 1)\ln x - \int (2x - 1)dx$$

$$= x(2x - 1)\ln x - (x^2 - x) + c$$

$$= x(2x - 1)\ln x - x^2 + x + c$$

(16) أوجد التكامل التالي:

$$\int 4xe^{-5x}\,dx$$

الحــل

$$u = 4x \qquad dv = e^{-5x}dx$$
$$du = 4dx \qquad v = -\frac{1}{5}e^{-5x}$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int 4xe^{-5x}\,dx = 4x\left(-\frac{1}{5}e^{-5x}\right) - \int -\frac{4}{5}e^{-5x}dx$$

$$= -\frac{4}{5}x\,e^{-5x} - \frac{4}{25}e^{-5x} + C$$

(17) أوجد التكامل التالي:

$$\int \ln x\,dx$$

الحــل

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int \ln x\;dx = x\ln x - \int x.\frac{1}{x}dx$$

$$= x\ln x - \int dx = x\ln(x) - x + C$$

(18) أوجد التكامل التالي:

$$\int x^2 \sin x \, dx$$

الحـــل

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$u = x^2 \qquad dv = \sin x\, dx$$
$$du = 2x\,dx \qquad v = -\cos x$$

$$\int x^2 \sin x \; dx = -x^2 \cos x + \int 2x\cos x \, dx$$

$$u = 2x \qquad dv = \cos x\, dx$$
$$du = 2\, dx \qquad v = \sin x$$

$$\int 2x\cos x \, dx = 2x\sin x - \int 2 \sin x \, dx$$
$$= 2x\sin x + 2\cos x + C$$

$$\therefore \int x^2 \sin x \; dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

(19) أوجد التكامـلات التاليـة:

1 $\int \cos^3(2x-3) . \sin(2x-3)\, dx$

الحـل

نفرض أن $u = \cos(2x-3)$ تفاضـل $du = -\sin(2x-3)(2)\, dx$

$$\frac{-1}{2} du = \sin(2x-3)\, dx$$

$$\int \cos^3(2x-3) . \sin(2x-3)\, dx = \frac{-1}{2} u^3 \, dx$$

$$= \frac{-1}{2} . \frac{u^4}{4} + C = \frac{-1}{8} \cos^4(2x-3) + C$$

---

2 $\int (3+\sin 2x)^5 \cos 2x\, dx$

الحـل

$$\int (3+\sin 2x)^5 \cos 2x\, dx =$$

نفرض أن $u = 3 + \sin 2x$ تفاضـل $du = \cos(2x)\,(2)\, dx$

$$\frac{1}{2} du = \cos(2x)\, dx$$

$$\int (3+\sin 2x)^5 \cos 2x\, dx = \int \frac{1}{2} u^5\, du$$

$$= \frac{1}{2} \frac{u^6}{6} + C = \frac{1}{12} (3+\sin 2x)^6 + C$$

(20) أوجد التكامل التالي:

$$\int \frac{dx}{(\sin^2 x)\sqrt{1+\cot x}}$$

الحـــل

$$\int \frac{dx}{(\sin^2 x)\sqrt{1+\cot x}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1+\cot x}} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int (1+\cot x)^{-1/2} \cdot \csc^2 x \, dx$$

نفرض أن

$$u = 1+\cot x$$

$$du = -\csc^2 x \, dx$$

$$\therefore -\int (1+\cot x)^{-1/2} \cdot -\csc^2 x \, dx$$

بالتعويض

$$= -\int u^{-1/2} du$$

$$= -\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= -2\sqrt{u} + c$$

$$= -2\sqrt{1+\cot x} + c$$

(21) أوجد:

$\int x \sin(5x)\, dx$

الحــل

$$\int x \sin(5x)dx$$

$$u = x \qquad dv = \sin(5x)dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{-\cos(5x)}{5}$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x \sin(5x)dx$$

$$= \frac{-1}{5} x \cos(5x) - \int \frac{-\cos(5x)}{5} dx$$

$$= \frac{-1}{5} x \cos(5x) + \frac{1}{5} \int \cos(5x)\, dx$$

$$= \frac{-1}{5} x \cos(5x) + \frac{1}{5}\left(\frac{\sin(5x)}{5}\right) + c$$

$$= \frac{-1}{5} x \cos(5x) + \frac{1}{25}(\sin(5x)) + c$$

(22) أوجد:

$$\int x^2 \ln x^2 \, dx$$

الحــل

$$I = \int 2x^2 . \ln x \, dx$$

$$u = \ln x \qquad dv = 2x^2 \, dx$$

$$du = \frac{1}{x} \, dx \qquad \int v = \frac{2}{3} x^3$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$I = \ln x . \frac{2}{3} x^3 - \int \frac{2}{3} x^{\cancel{3}\,2} . \frac{1}{\cancel{x}} \, dx$$

$$I = \frac{2}{3} x^3 . \ln x - \frac{2}{3} \int x^2 \, dx$$

$$I = \frac{2}{3} x^3 . \ln x - \frac{2}{3} . \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$I = \frac{2}{3} x^3 . \ln x - \frac{2}{9} x^3 + C$$

(23) أوجد:

$$\int x^2 e^{2x-3}\,dx$$

الحـــل

$$\int x^2 e^{2x-3}dx$$

$u = x^2 \qquad dv = e^{2x-3}\,dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x-3}$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x^2 e^{2x-3}dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x-3}$$

$$-\int xe^{2x-3}dx \ldots\ldots\ldots(1)$$

نستخدم قاعدة التجزيء مرة أخرى لإيجاد تكامل

$$\int xe^{2x-3}\,dx$$

$u = x \qquad dv = e^{2x-3}\,dx$

$du = dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x-3}$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xe^{2x-3}dx = \frac{1}{2}xe^{2x-3} - \frac{1}{2}\int e^{2x-3}dx$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x-3} - \frac{1}{4}e^{2x-3} + c \qquad (2)$$

من (2) ، (1) نحصل على

$$\therefore \int x^2 e^{2x-3}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{2x-3} - \frac{1}{2}xe^{2x-3} + \frac{1}{4}e^{2x-3} + c$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{2x-3} + c$$

(24) أوجد:

1 $$\int \frac{3t^2 - 6t}{t^3 - 3t^2 + 8}\, dt$$

الحل

نفرض أن: $u = t^3 - 3t^2 + 8 \longrightarrow du = (3t^2 - 6t)\, dt$

$$\int \frac{3t^2 - 6t}{t^3 - 3t^2 + 8}\, dx = \int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C$$

$$= \ln\left|t^3 - 3t^2 + 8\right| + C$$

2 $$\int \frac{x^3 + 4}{x}\, dx$$

الحل

$$= \int \left(\frac{x^3}{x} + \frac{4}{x}\right) dx$$

$$= \int \left(x^2 + \frac{4}{x}\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + 4\ln|x| + C$$

(25) أوجد:

$$\int \frac{x^2 - 2}{2x^3 - 5x^2 - 3x}\, dx$$

الحــل

حلل المقام

$$2x^3 - 5x^2 - 3x = x(2x^2 - 5x - 3) = x(2x + 1)(x - 3)$$

اصفار المقام $\boxed{0}$ $\boxed{-\frac{1}{2}}$ $\boxed{3}$

بالضرب في $\boxed{x(2x + 1)(x - 3)}$

$$\frac{x^2 - 2}{x(2x + 1)(x - 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(2x + 1)} + \frac{C}{(x - 3)}$$

$$x^2 - 2 = A(2x + 1)(x - 3) + Bx(x - 3) + Cx(2x + 1) \quad 1$$

التعويض بأصفار المقام

بالتعويض في 1 بـ $x = 0$

$$-2 = A(2(0) + 1)(0 - 3) + \cancel{B(0)} + \cancel{C(0)} \qquad A = \frac{2}{3}$$

بالتعويض في 1 بـ $x = -0.5$

$$(-0.5)^2 - 2 = \cancel{A(0)} + B(-0.5)(-0.5 - 3) + \cancel{C(0)} \qquad B = -1$$

بالتعويض في 1 بـ $x = 3$

$$(3)^2 - 2 = \cancel{A(0)} + \cancel{B(0)} + C(3)(2(3) + 1) \qquad C = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x^2 - 2}{x(2x + 1)(x - 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(2x + 1)} + \frac{C}{(x - 3)}$$

$A = \frac{2}{3}$

$B = -1$

$C = \frac{1}{3}$

$$\int \frac{x^2 - 2}{2x^3 - 5x^2 - 3x}\, dx = \int \left(\frac{\frac{2}{3}}{x} + \frac{-1}{2x + 1} + \frac{\frac{1}{3}}{x - 3} \right) dx =$$

$$= \frac{2}{3} \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|2x + 1| + \frac{1}{3} \ln|x - 3| + C$$

(26) أوجد:

$$\int \frac{4x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}\,dx$$

الحــل

حلل المقام $x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x\,(x-1)^2$

اصفار المقام 0 ، 1 مكرر

الأصفار 0 ، 1 ، 1

المقامات x ، $x-1$ ، $(x-1)^2$

بالضرب في $x(x-1)^2$

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$4x^2 - 4x + 1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx \quad (1)$$

التعويض بأصفار المقام

بالتعويض في 1 بـ $x = 0$

$$1 = A(0-1)^2 + \cancel{B(0)} + \cancel{C(0)} \qquad A = 1$$

بالتعويض في 1 بـ $x = 1$

$$4(1)^2 - 4(1) + 1 = \cancel{A(0)} + \cancel{B(0)} + C(1) \qquad C = 1$$

x قيمة اختيارية لا تساوي اصفار المقام و A, C من الحل

بالتعويض في 1 بـ $x = 2 , A = 1 , C = 1$

$$4(2)^2 - 4(2) + 1 = (1)(2-1)^2 + B(2)(2-1) + (1)(2) \qquad B = 3$$

$A = 1$, $B = 3$, $C = 1$

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{3}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\int \frac{4x^2 - 4x + 1}{x(x-1)^2}dx = \int \frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}dx$$

$$= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{3}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx =$$

$$= \ln|x| + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

(27) أوجد:

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2}\,dx$$

الحــل

حلل المقام

$x^3+4x^2 = x^2(x+4)$

اصفار المقام: -4 ، 0 مكرر

الأصفار: -4 ، 0 ، 0

المقامات: $x+4$ ، x^2 ، x

بالضرب في $x^2(x+4)$

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+4}$$

$$x^2+1 = Ax(x+4) + B(x+4) + Cx^2$$

التعويض بأصفار المقام 1

بالتعويض في 1 بـ $x=0$

$$0^2+1 = \cancel{A(0)} + B(0+4) \cancel{+C(0)} \qquad B=\frac{1}{4}$$

بالتعويض في 1 بـ $x=-4$

$$(-4)^2+1 = \cancel{A(0)} \cancel{+B(0)} + C(-4)^2 \qquad C=\frac{17}{16}$$

بالتعويض في 1 بـ $x=1,\ B=\frac{1}{4},\ C=\frac{17}{16}$

x قيمة اختيارية لا تساوي أصفار المقام و B, C من الحل

$$(1)^2+1 = A(1)(1+4) + \frac{1}{4}(1+4) + \frac{17}{16}(1)^2 \qquad A=\frac{-1}{16}$$

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+4}$$

$$A=\frac{-1}{16} \qquad B=\frac{1}{4} \qquad C=\frac{17}{16}$$

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+4)} = \frac{\frac{-1}{16}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{\frac{17}{16}}{x+4}$$

$$\int \frac{x^2+1}{x(x+4)^2}\,dx = \int \frac{\frac{-1}{16}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{\frac{17}{16}}{x+4}\,dx =$$

$$= \int \frac{\frac{-1}{16}}{x}\,dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{x^2}\,dx + \int \frac{\frac{17}{16}}{x+4}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{4x} + \frac{17}{16}\ln|x+4| + C$$

(28) أوجد:

$$\int \frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 4x + 4}\, dx$$

الحــل

$\because$ درجة البسط = درجة المقام

$\therefore$ نبدأ بقسمة البسط على المقام باستخدام القسمة المطولة

$$\begin{array}{r|l} & 1 \longleftarrow \text{ناتج القسمة} \\ \hline x^2 - 4x + 4 & x^2 - 3x + 7 \\ & -\ x^2 - 4x + 4 \\ \hline & x + 3 \longleftarrow \text{الباقي} \end{array}$$

$$\frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4} = 1 + \frac{x+3}{(x-2)^2}$$

الحدودية النسبية

$$\frac{x+3}{(x-2)^2} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2}$$

نضرب كلًّا من طرفي المعادلة في $(x-2)^2$ ثم نبسّط

$$x + 3 = A_1(x-2) + A_2$$

عوّض عن x بـ 2

$$2 + 3 = A_1(0) + A_2$$

$$\therefore\ A_2 = 5$$

نعوّض في المعادلة عن $A_2 = 5$ وإحدى قيم x ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_1 .

$$1 + 3 = -A_1 + 5$$

$$\therefore\ A_1 = 1$$

$$\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}\right)dx$$

$$= x + \ln|x-2| - \frac{5}{x-2} + C$$

(29) أوجد:

1 $$\int \frac{x^2 + 3x + 2}{(x-3)^2}\,dx$$

الحـــل

$$\frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2} = 1 + \frac{9x-7}{(x-3)^2}$$

$$\frac{9x-7}{(x-3)^2} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{(x-3)^2}$$

$$9x-7 = A_1(x-3) + A_2$$

عوّض عن x بـ 3 $\therefore \quad A_2 = 20$

عوّض عن A_2 بـ 20 ولكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_1.

$\therefore \quad A_1 = 9$

$$\frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2} = 1 + \frac{9}{x-3} + \frac{20}{(x-3)^2}$$

$$\int \frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}dx = x + 9\ln|x-3| - \frac{20}{x-3} + C$$

---

2 $$\int \frac{2x^2 + x + 3}{x^2 - 1}\,dx$$

الحـــل

$$\frac{2x^2+x+3}{x^2-1} = 2 + \frac{x+5}{x^2-1}$$

$$\frac{x+5}{x^2-1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1}$$

$$x+5 = A_1(x+1) + A_2(x-1)$$

عوّض عن x بـ 1 $\therefore \quad A_1 = 3$

عوّض عن x بـ -1 $\therefore \quad A_2 = -2$

$$\frac{2x^2+x+3}{x^2-1} = 2 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1}$$

$$\int \frac{2x^2+x+3}{x^2-1}dx = \int\left(2 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1}\right)dx$$

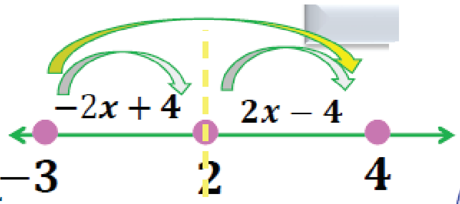
$$= 2x + 3\ln|x-1| - 2\ln|x+1| + C$$

(30) أوجد:

$$\int_{-3}^{4} |2x - 4|\, dx$$

الحــل

$$\int_{-3}^{4} |2x-4|\,dx$$



$$2x - 4 = 0$$
$$2x = 4$$
$$x = 2$$

$$\int_{-3}^{2} |2x-4|\;dx + \int_{2}^{4} |2x-4|\;dx =$$

$$\int_{-3}^{2} (-2x+4)\;dx + \int_{2}^{4} (2x-4)\;dx =$$

$$= \left[-\frac{2x^2}{2} + 4x\right]_{-3}^{2} + \left[\frac{2x^2}{2} - 4x\right]_{2}^{4} =$$

$$= \left[-x^2 + 4x\right]_{-3}^{2} + \left[x^2 - 4x\right]_{2}^{4} =$$

$$[-(2)^2 + 4(2)] - [-(-3)^2 + 4(-3)] + [4^2 - 4(4)] - [2^2 - 4(2)]$$

$$= 29$$

(31) أوجد:

$$\int_{-2}^{3} (x \,|\, x \,| + 3) \, dx$$

الحــل

$$\boxed{\int_{-2}^{3} (x|x|+3)\,dx}$$

$$= \int_{-2}^{0} (x|x|+3)\,dx + \int_{0}^{3} (x|x|+3)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{0} (-x^2+3)dx + \int_{0}^{3} (x^2+3)dx$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} + 3x\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{+x^3}{3} + 3x\right]_{0}^{3}$$

$$= -\left[\frac{8}{3} - 6\right] + [9+9-0]$$

$$= \frac{10}{3} + 18 = \frac{64}{3} = 21{,}3333$$

(32) دون حسـاب قيمـة التكامـل أثبـت أن:

$$\int_3^5 (x^2 + x)dx \geq 0$$

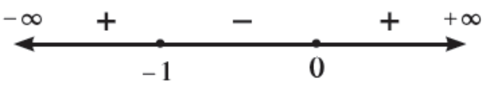
الحــل

بفرض $f(x) = x^2 + x$

وهي دالة متصلة على $[3,5]$

نضع $x^2 + x = 0$

$x(x+1) = 0$



$f(x) \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$

$\because \quad [3,5] \subseteq [0, \infty)$

$\therefore \quad x^2 + x \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in [3,5]$

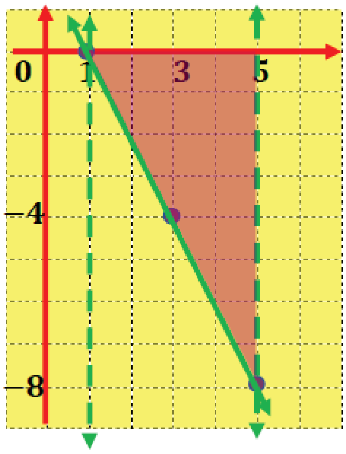
$\int_3^5 (x^2 + x)dx \geqslant 0$

(33) أوجد قيمة $\int_1^5 (2 - 2x)dx$ بيانيا.

الحــل

x	1	3	5
$f(x)$	0	-4	-8

$\because f(x) = 2 - 2x$



$f(x) \leq 0 \quad \forall \; x \in [1, 5]$

$\int_1^5 f(x)dx =$ سالب مساحة المنطقة المثلثة

سالب نصف طول القاعدة ضرب الإرتفاع

$$= -\frac{1}{2} \times 4 \times 8 = -16$$

(34) استعن برسم بيان الدوال لإيجاد:

$$\int_{-5}^{0} -\sqrt{25 - x^2}\ dx$$

الحل

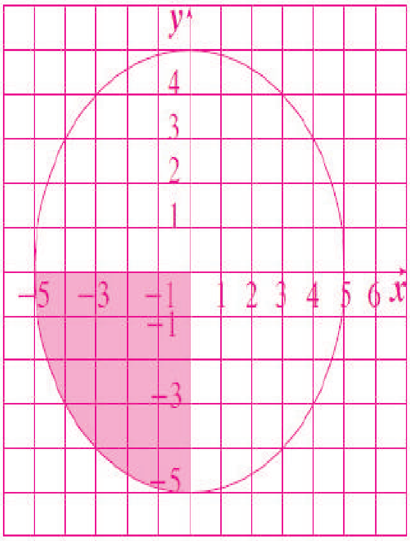
$y = -\sqrt{25 - x^2} \quad \therefore \quad y^2 = 25 - x^2 \quad \therefore \quad y^2 + x^2 = 25$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 5 وحدات.

والدالة $y = -\sqrt{25 - x^2}$ تمثل معادلة النصف السفلي للدائرة.

$$\int_{-5}^{0} -\sqrt{25 - x^2}\, dx = -A$$

$$= \frac{-1}{4}\pi(5)^2 = \frac{-25}{4}\pi$$



(35) استعن برسم بيان الدوال لإيجاد:

$$\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx$$

الحـل

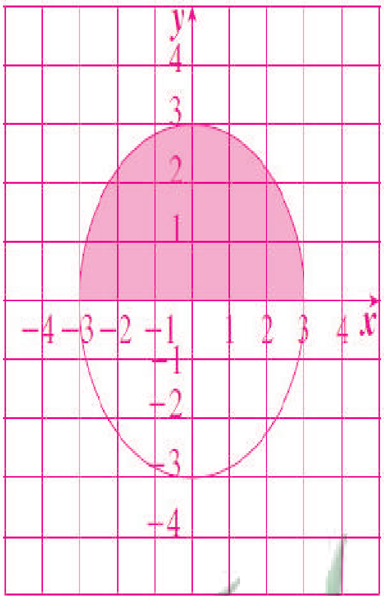
$$y = \sqrt{9 - x^2} \ \therefore \ y^2 = 9 - x^2 \ \therefore \ y^2 + x^2 = 9$$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 3 وحدات.

والدالة $y = \sqrt{9 - x^2}$ تمثل معادلة النصف العلوي للدائرة.

$\therefore$ مساحة المنطقة المظللة تساوي: $\therefore \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx$

$$= \frac{1}{2}\pi(3)^2 = \frac{9}{2}\pi$$



(36) أوجد:

$$\int_{-1}^{1} \frac{4}{x^2 - 4}\, dx$$

الحــل

باستخدام الكسور الجزئية:-

$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{(x+2)}$$

$$4 = A_1(x+2) + A_2(x-2)$$

عوّض عن x بـ -2 $\therefore$ $A_2 = -1$

عوّض عن x بـ 2 $\therefore$ $A_1 = 1$

$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{4}{x^2-4}dx = \left[\ln|x-2| - \ln|x+2|\right]_{-1}^{1} = -2\ln 3$$

(37) أوجد:

$$\int_{-2}^{0} \frac{5x - 1}{x^2 + 2x - 3}\, dx$$

الحــل

باستخدام الكسور الجزئية:-

$$\frac{5x-1}{x^2+2x-3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+3)}$$

$$5x - 1 = A(x+3) + B(x-1)$$

عوض عن $\xrightarrow{x=1}$ $4 = 4A$ $\xrightarrow{\text{ينتج}}$ $A = 1$

عوض عن $\xrightarrow{x=-3}$ $-16 = -4B$ $\xrightarrow{\text{ينتج}}$ $B = 4$

$$= \int_{-2}^{0} \left(\frac{1}{(x-1)} + \frac{4}{(x+3)} \right) dx$$

$$= [\ln|x-1|]_{-2}^{0} + 4ln[|x+3|]_{-2}^{0}$$

$$= 3\ln 3$$

(38) أوجد:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \ dx$$

الحــل

$$u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x \ dx$$

عندما $x = 0 \Leftarrow u = \tan(0) = 0$

عندما $x = \frac{\pi}{4} \Leftarrow u = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \ dx = \int_0^1 u \ du$$

$$= \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0$$

$$= \frac{1}{2}$$

(39) أوجد:

$$\int_1^e \frac{\ln^6 x}{x}\,dx$$

الحــل

$$\int_1^e \frac{\ln^6 x}{x}\,dx = \int_1^e \frac{(\ln x)^6}{x}\,dx$$

$$u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$x \xrightarrow{=} e \qquad u \xrightarrow{=\ln e} 1$$

$$x \xrightarrow{=} 1 \qquad u \xrightarrow{=\ln 1} 0$$

$$\int_0^1 u^6\,du$$

$$\left[\frac{u^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{7}$$

(40) أوجد:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x \ dx$$

الحــل

نحل كتكامل غير محدد بالتجزيء
ثم وضع حدود التكامل بعد الحصول على الحل النهائي

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \overset{u}{x} \ \overset{dv}{\sec^2 x \ dx} =$$

نفرض أن

تفاضل | تكامل
$u = x$ | $dv = \sec^2 x \ dx$
$du = dx$ | $v = \tan x$

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

$$\int x \ \sec^2 x \ dx = x\tan x - \int \tan x\,dx$$

$$= x\tan x + \ln|\cos x| + C$$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$u = \cos x$
$du = -\sin x\,dx$
$-du = \sin x\,dx$

$$\int \tan x\,dx = \int -\frac{1}{u}du$$

$$= -\ln|u| + C$$

$$= -\ln|\cos x| + C$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \ \sec^2 x \ dx = [x\tan x + \ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left[\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4} + \ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right|\right] - [(0)\tan(0) + \ln|\cos(0)|]$$

$$= \left[\frac{\pi}{4}(1) + \ln\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\right] - [\cancel{(0)}(0) + \cancel{\ln|1|}] = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(41) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

$f(x) = x^3 - 9x \quad , \quad [-2 , 1]$

الحل

نوجد قيم x بحيث :

$$f(x) = 0$$

$$x^3 - 9x = 0$$

$$x(x^2 - 9) = 0$$

$$x(x-3)(x+3) = 0$$

$$x = 0 \qquad x = 3 \qquad x = -3$$

$$0 \in (-2,1) \qquad 3 \notin (-2,1) \qquad -3 \notin (-2,1)$$

$$A = \left| \int_{-2}^{0} f(x)dx \right| + \left| \int_{0}^{1} f(x)dx \right|$$

$$A = \left| \int_{-2}^{0} (x^3 - 9x)dx \right| + \left| \int_{0}^{1} (x^3 - 9x)dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2 \right]_{-2}^{0} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2 \right]_{0}^{1} \right|$$

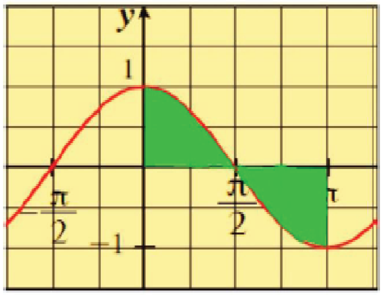
$$= \left| \left[\frac{(0)^4}{4} - \frac{9}{2}(0)^2 \right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{9}{2}(-2)^2 \right] \right| + \left| \left[\frac{(1)^4}{4} - \frac{9}{2}(1)^2 \right] - \left[\frac{(0)^4}{4} - \frac{9}{2}(0)^2 \right] \right| = \frac{73}{4} \text{ square units}$$

(42) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

$f(x) = \cos x \quad , \quad [0 , \pi]$

الحـــل

نرسم منحنى الدالة f



نلاحظ أنه في الفترة $[0,\pi]$

تنقسم المنطقة المطلوبة إلى منطقتين حيث $f(x) = 0$ عند $x = \frac{\pi}{2}$

فتكون المساحة المطلوبة كما يلي :

$$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx\right|$$

$$= \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos x)dx\right|$$

$$= \left|[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}\right| + \left|(\sin x)_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right|$$

$$= \left|\left[\sin(\frac{\pi}{2})\right] - [\sin(0)]\right| + \left|[\sin(\pi)] - \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\right| = 2 \quad \textit{square units}$$

(43) أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $f(x) = x \quad , \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$

، والمستقيمين $x = 8 \quad , \quad x = 1$

الحل

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقطتي التقاطع نضع : $f(x) = g(x)$

$$x = \sqrt[3]{x}$$

$$x^3 = x$$

$$x^3 - x = 0$$

$x = 1$ $\quad$ $x = -1$ $\quad$ $x = 0$

$1 \notin (1,8)$ $\quad$ $-1 \notin (1,8)$ $\quad$ $0 \notin (1,8)$

نأخذ قيمة اختيارية تنتمي إلى الفترة $(1,8)$ و لتكن $x = 3$

$g(3) = \sqrt[3]{3} \cong 1.44 \quad , \quad f(3) = 3$

$$f(x) \geq g(x) \qquad \forall x \in [1,8]$$

$$A = \int_1^8 (f(x) - g(x))dx$$

$$= \int_1^8 (x - \sqrt[3]{x})dx$$

$$= \int_1^8 \left(x - x^{\frac{1}{3}}\right)dx$$

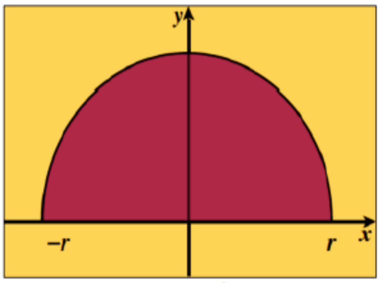
$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_1^8$$

$$= \left[\frac{(8)^2}{2} - \frac{3}{4}(8)^{\frac{4}{3}}\right] - \left[\frac{(1)^2}{2} - \frac{3}{4}(1)^{\frac{4}{3}}\right] = 20.25 \quad units \ square$$

ملاحظة : يمكن الحل باستخدام القيمة المطلقة .

(44) باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بنصف الدائرة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

الحـل



شكل توضيحي

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

تمثل معادلة نصف دائرة مركزها $(0, 0)$ و طول نصف قطرها r

المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات هو كرة

$$V = \pi \int_{-r}^{r} y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx$$

$$= \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx$$

$$= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^{r}$$

$$= \pi\left(\left[r^2(r) - \frac{1}{3}(r)^3 \right] - \left[r^2(-r) - \frac{1}{3}(-r)^3 \right] \right)$$

$$= \frac{4}{3} \pi r^3 \ \textit{cubic units}$$

(45) أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{x - 1}$

ومحور السينات في الفترة [1 , 5]

الحــل

$$V = \pi \int_1^5 (f(x))^2 dx$$

$$= \pi \int_1^5 (\sqrt{x-1})^2 dx$$

$$= \pi \int_1^5 (x-1) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^5$$

$$= \pi\left(\left[\frac{(5)^2}{2} - (5)\right] - \left[\frac{(1)^2}{2} - (1)\right]\right)$$

$$= 8\pi \quad cubic\ units$$

(46) أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$

الحــل

المنطقة المستوية محددة بمنحنيي الدالتين
نجد التقاطع بوضع:

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 = \sqrt{x} \qquad (x \geqslant 0)$$

بتربيع الطرفين

$$x^4 = x$$
$$x^4 - x = 0$$
$$x(x^3 - 1) = 0$$
$$x(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

نحصل على: $x = 0 \ , \ x = 1$

وبالنسبة إلى المعادلة $x^2 + x + 1 = 0$

نوجد المميز Δ :

$$\Delta = 1 - 4(1)(1) = -3 \ , \ -3 < 0$$

$\therefore$ المعادلة ليس لها حلول في $\mathbb{R}$ فيكون التكامل على $[0,1]$

نأخذ قيمة اختيارية في $(0,1)$ ولتكن $x = \frac{1}{4}$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} \quad , \quad g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$
$$\therefore \ g(x) \geqslant f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

$\therefore$ حجم المجسم الناتج عن الدوران:

$$V = \pi \int_0^1 [(g(x))^2 - (f(x))^2]dx$$
$$V = \pi \int_0^1 [(\sqrt{(x)})^2 - (x^2)^2]dx$$
$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4)dx$$
$$= \pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - (0)\right]$$
$$= \frac{3}{10}\pi \quad \text{units cube}$$

(47) أوجد حجم المجسم الناتـج مـن دوران المنطقـة المستوية دورة كاملـة حـول محـور السينات والمحـددة بـكل مـن المستقيمات والمنحنيـات التاليـة:

$$y_1 = \sqrt{x} \quad , \quad y_2 = 0 \quad , \quad x = 4$$

الحـل

نضع $y_2 = g(x)$, $y_1 = f(x)$

نوجد نقاط التقاطع

$$f(x) = g(x)$$
$$\sqrt{x} = 0$$
$$x = 0$$

حدود التكامل $x = 0 , x = 4$

نأخذ نقطة اختيارية في الفترة $(0,4)$ و لتكن $x = 1$

$$f(1) = \sqrt{1} = 1 \quad , \quad g(1) = 0$$

$$f(x) \geq g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,4]$$

$$V = \pi \int_0^4 ((f(x))^2 - (g(x))^2)dx = \pi \int_0^4 ((\sqrt{x})^2 - (0)^2)dx$$

$$= \pi \int_0^4 (x)dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi\left(\left[\frac{(4)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right]\right) = 8\pi \quad units\ cube$$

(48) أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بين منحنيي الدالتين $g(x) = \frac{x}{2} + 2$, $f(x) = \frac{x^2}{2} + 1$

الحل

نوجد نقاط التقاطع

$$f(x) = g(x)$$

$$\frac{x^2}{2} + 1 = \frac{x}{2} + 2$$

$$\frac{x^2}{2} + 1 - \frac{x}{2} - 2 = 0$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - 1 = 0$$

$$x = 2 \quad , \quad x = -1$$

نأخذ نقطة اختيارية في الفترة $(-1, 2)$ و لتكن $x = 0$

$$f(0) = \frac{(0)^2}{2} + 1 = 1$$

$$g(0) = \frac{(0)}{2} + 2 = 2$$

$$g(x) \geq f(x) \geq o \quad \forall x \in [-1, 2]$$

$$V = \pi \int_{-1}^{2} ((g(x))^2 - (f(x))^2) dx = \pi \int_{-1}^{2} ((\frac{x}{2} + 2)^2 - (\frac{x^2}{2} + 1)^2) dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} (\left(\frac{x^2}{4} + 2x + 4\right) - \left(\frac{x^4}{4} + x^2 + 1\right)) dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} (\frac{x^2}{4} + 2x + 4 - \frac{x^4}{4} - x^2 - 1) dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} (-\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{4} + 2x + 3) dx$$

$$= \pi \left[-\frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{4} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \pi(\left[-\frac{32}{20} - 2 + 4 + 6\right] - \left[\frac{1}{20} + \frac{1}{4} + 1 - 3\right])$$

$$= \frac{81}{10} \pi \text{ cubic units}$$

(49) أوجد حجم المجسم الناتج من دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة

بمنحنى الدالة f : $f(x) = x + 2$ والدالة g : $g(x) = -x + 3$

في الفترة [2 , 1-]

حالـة خاصة

الحــل

تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x=-1$ إلى $x=2$ ويتقاطعا عند النقطة $x=\frac{1}{2}$..

$$V=\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}[(-x+3)^2-(x+2)^2]dx+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}[(x+2)^2-(-x+3)^2]dx=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(5-10x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}(-5+10x)dx$$

$$=[5x-5x^2]_{-1}^{\frac{1}{2}}+[-5x+5x^2]_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{135}{4}\pi \text{ units cube}$$

(50) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{9}(9 + 3x)^{\frac{3}{2}}$

في الفترة [2 , 5]

الحــل

$$f'(x) = \left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{3}{2}\right)(9 + 3x)^{\frac{1}{2}}(3)$$

$$= (9 + 3x)^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_2^5 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$= \int_2^5 \sqrt{1 + 9 + 3x}\, dx = \int_2^5 \sqrt{10 + 3x}\, dx$$

$$= \int_2^5 (10 + 3x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_2^5 3(10 + 3x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left[(10 + 3x)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5$$

$$= \left(\frac{2}{9}\right)\left[(25)^{\frac{3}{2}} - (16)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{122}{9}\ units$$

(51) أوجد طول القوس من منحنى الدالـة f : $f(x) = 5 + 2\sqrt{x^3}$

في الفتـرة $[0 , \frac{1}{3}]$

الحـل

$$f(x) = 5 + 2x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = 3x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + 9x}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} (1 + 9x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^{\frac{1}{3}} 9\,(1 + 9x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}(1 + 9x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{2}{3}\left[(4)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$\therefore L = \frac{14}{27}$ (وحدة طول)

(52) أوجد معادلـة منحنـى الدالـة f الـذي ميلـه عنـد أي نقطـة $p(x\ ,\ y)$

يسـاوي $3x^2 + x$ ويمـر بالنقطـة $(2\ ,\ 2)$

الحـــل

$$f'(x) = 3x^2 + x$$

$$f(x) = \int (3x^2 + x)dx$$

$$= \frac{3x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$= x^3 + \frac{x^2}{2} + C$$

لإيجاد قيمة الثابت C نعوض بالنقطة $(2,2)$ في المعادلة السابقة فنجد :

$$2 = (2)^3 + \frac{(2)^2}{2} + C$$

$$2 = 8 + 2 + C$$

$$C = -8$$

معادلة منحنى الدالة f المطلوب هو :

$$f(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - 8$$

(53) إذا كان ميـل العمـودي علـى منحنـى الدالـة f عنـد أي نقطـة عليـه (x , y) يسـاوي $\sqrt{5 - 4x}$ فأوجد معادلـة المنحنـى عندما يمر بالنقطـة $A(-5 , 3)$

الحــل

ميل العمودي $= \dfrac{-1}{f'(x)}$ $\quad f'(x) \neq 0$

$$\frac{-1}{f'(x)} = \sqrt{5 - 4x}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{5 - 4x}}$$

$$f(x) = \int \frac{-1}{\sqrt{5 - 4x}} dx$$

$$= -\int (5 - 4x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int -4(5 - 4x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{4} \times [\frac{2}{1}(5 - 4x)^{\frac{1}{2}} + C]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{5 - 4x} + \frac{1}{4}C$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5 - 4x} + \frac{1}{4}C$$

لإيجاد قيمة الثابت C نعوض بالنقطة $A(-5,3)$ في المعادلة السابقة فنجد :

$$3 = \frac{1}{2}\sqrt{5 - 4(-5)} + \frac{1}{4}C$$

$$3 = \frac{5}{2} + \frac{1}{4}C$$

$$C = 2$$

معادلة منحنى الدالة f المطلوب هو :

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5 - 4x} + \frac{1}{2}$$

(54) إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالـة f عنـد أي نقطـة عليـه (x , y) هو $2x - 1$ فأوجد معادلـة المنحنى علما بأنـه يمر بالنقطة $B(1 , 0)$

الحـل

ميل العمودي $= \dfrac{-1}{f'(x)}$ $\qquad f'(x) \neq 0$

$$\frac{-1}{f'(x)} = 2x - 1$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2x - 1}$$

$$f(x) = \int \frac{-1}{2x - 1}\,dx$$

$$= \frac{-1}{2} ln\,|2x - 1| + C$$

لإيجاد قيمة الثابت C نعوض بالنقطة $B(1,0)$ في المعادلة السابقة فنجد :

$$0 = \frac{-1}{2} ln\,|2(1) - 1| + C$$

$$C = 0$$

معادلة منحنى الدالة f المطلوب هو :

$$f(x) = \frac{-1}{2} ln\,|2x - 1|$$

(55) حل المعادلات التفاضلية التالية:

$y' - 2xy = 0$

الحل

$$y' - 2xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0 \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx \qquad \text{فصل المتغيرات}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx \qquad \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C \quad \text{كامل الطرفين}$$

$$\ln|y| = x^2 + C$$

$$|y| = e^{x^2+C} = e^{x^2} \cdot e^{C} \qquad \ln y = x \Rightarrow y = e^x$$

$$y = \pm e^{C} \cdot e^{x^2}$$

$$y = ke^{x^2} \qquad \pm e^{C} = k$$

(56) حل المعادلـة التفاضليـة:

1 $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$

الحــل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + C$$

$$y = \pm e^{2\ln|x|+C}$$

$$y = ke^{2\ln|x|} \quad , \quad k = \pm e^{C}$$

---

2 $y' = -2y$ إذا كان $y = 3$ عند $x = 0$

الحــل

كتابة المعادلة على الصورة: $y' = ay$

$$y = ke^{ax}$$

$$y = ke^{-2x}$$

$$3 = ke^{0}$$

$$k = 3$$

ومنه:

$$y = 3e^{-2x}$$

(57)

1 - حل المعادلـة: $2y' + y = 1$

2 - أوجد الحل الـذي يحقق $y = 2$ عند $x = -1$

الحــل

المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay + b$ حيث $b \neq 0$, $a \neq 0$ تكون حلولها: $y = k\,e^{ax} - \frac{b}{a}$

اكتب المعادلة على الشكل $y' = ay + b$

1. $2y' + y = 1$

$$y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

طبّق القاعدة

$$y = k\,e^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

عوّض x , y بقيمتهما

2. $k\,e^{\frac{1}{2}} + 1 = 2$

$$k = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} + 1$$

(58) أوجد معادلـة الماكفئ الـذي رأسـه نقطـة الأصـل وبؤرتـه $F(-4\ ,\ 0)$

الحــل

الرأس نقطة الأصل

$\because$ البؤرة $F(-4,0)$ تنتمي إلى الجزء السالب من محور السينات

$p=-4$ ، معادلة الدليل : $x\ =\ 4$ (مستقيم رأسي)

محور تماثل القطع هو محور السينات (فتحة القطع لليسار)

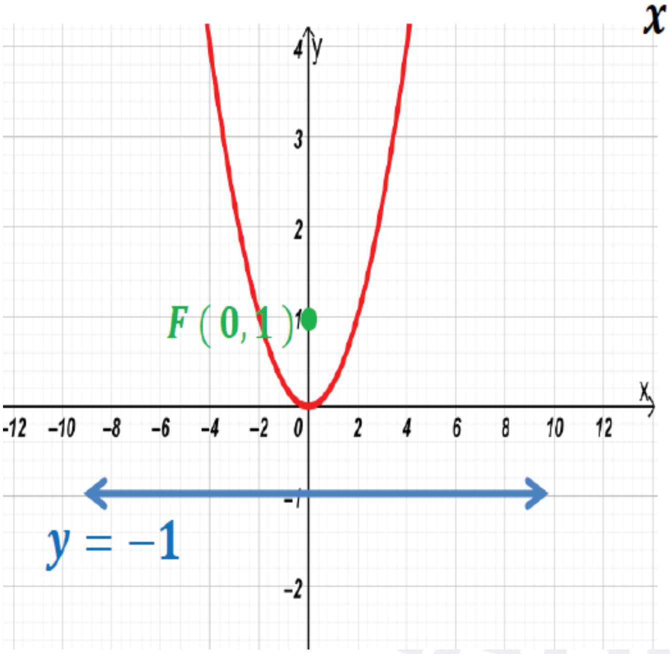
$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4\,p\,x$

معادلة القطع المكافئ هي : $y^2 = -16\,x$

(59) أوجد البؤرة والدليل لقطع مكافئ، ثم إرسم شكلا تقريبا لهذا القطع في كل مما يلي:

المعادلة: $y = \frac{x^2}{4}$

الحــل



نضع المعادلة على الصورة $x^2 = 4y$

المعادلة في الصورة $x^2 = 4py$

محور التماثل هو محور الصادات

$\therefore \quad 4p = 4 \quad \Rightarrow p = 1$

$\therefore$ البؤرة $F(0,p) = F(0,1)$

معادلة الدليل :

$y = -p \quad \Rightarrow \quad y = -1$

(60) أوجد معادلـة القطع المكافئ الذي رأسـه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $A(1\ ,\ 2)$

وخط تماثلـه $x\text{-}axis$

الحـل

رأس القطع المكافئ نقطة الأصل ، و خط تماثله $x\text{-}axis$

المعادلة في الصورة $y^2 = 4px$

القطع المكافئ يمر بالنقطة $A(1,2)$

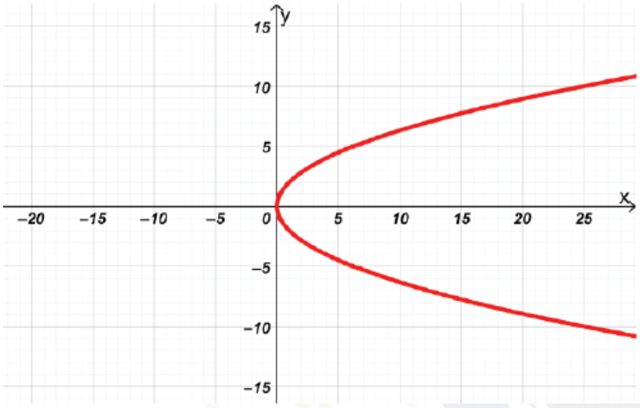
تحقق المعادلة أي أن :

$$(2)^2 = 4p(1)$$

$$\therefore\ 4 = 4p \implies p = 1$$

المعادلة هي : $y^2 = 4(1)x$

$$y^2 = 4x$$



(61) أوجد معادلـة القطـع المكافـئ الذي رأسـه نقطة الأصـل ومعادلة دليله $y = 1$

الحـــل

معادلة الدليل $y = 1$ (مستقيم أفقي)

و الدليل متعامد مع خط التماثل

خط التماثل رأسي $(y - axis)$

معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $x^2 = 4py$

معادلة الدليل هي على الصورة $y = -p$

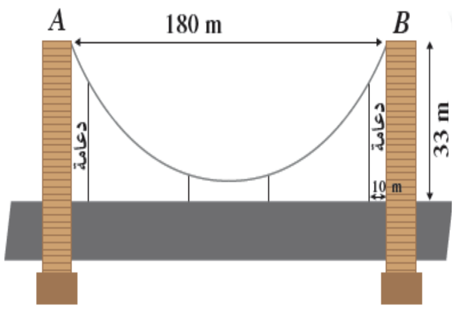
$$y = 1 \Rightarrow \quad p = -1$$

المعادلة $x^2 = 4py$

$$x^2 = 4(-1)y$$

$$x^2 = -4y$$

(62) يصل سلك معدني متدل بين رأسي عمودي جسر. السلك المعدني هو على صورة قطع مكافئ. يبعد العمودان عن بعضهما مسافة 180m ويبلغ ارتفاع كل منهما 33m ، يبلغ أصغر ارتفاع للسلك عن الطريق العام 3m ، وضعت على الطريق دعامات للسلك المتدلي. أوجد طول الدعامة التي تبعد 10m عن أي من العمودين.



الحـــل

باعتبار رأس القطع المكافئ هو $(0,0)$

معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $x^2 = 4py$

إحداثيات النقطة B هي: $x_B = \frac{180}{2} = 90 \quad , \quad y_B = 33 - 3 = 30$

بالتعويض في معادلة القطع المكافئ نحصل على: $(90)^2 = 4p \times 30$

$$p = \frac{90^2}{4 \times 30} = 67.5$$

معادلة القطع المكافئ: $x^2 = 4 \times 67.5y$

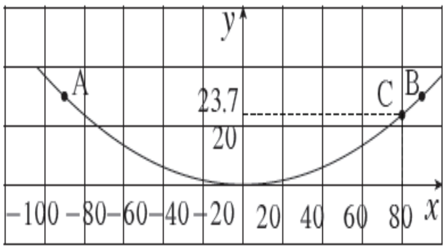
$$x^2 = 270y$$

الإحداثي السيني للدعامة: $90 - 10 = 80$

بالتعويض في معادلة القطع المكافئ: $(80)^2 = 270y$

$$y \approx 23.7$$

يبلغ طول الدعامة حوالي: $23.7 + 3 = 26.7\,\text{m}$



(63) إذا كانـت $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلـة قطـع ناقـص فأوجد:

1 - رأسـي القطـع وطرفـي المحـور الأصغر.

2 - البؤرتيـن.

3 - معادلتـي دليلـي القطـع.

4 - طـول كل مـن المحوريـن ثـم ارسـم شـكلا تقريبيـا للقطـع.

الحــل

1 معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ومن معادلة القطع الناقص نجد أن :

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

والمحور الاكبر ينطبق علي محور الصادات

رأسا القطع الناقص هما :

$$A_1(0, -3) , A_2(0, 3)$$

طرفا المحور الاصغر هما :

$$B_1(-2, 0) , B_2(2, 0)$$

2 البؤرتين:

$$C^2 = a^2 - b^2 \quad \Rightarrow C^2 = 9 - 4 = 5$$

$$C = \sqrt{5}$$

$$F_1(0, -\sqrt{5}) , F_2(0, \sqrt{5})$$

3 معادلة الدليلين:

$$y = -\frac{a^2}{c} \quad , \quad y = \frac{a^2}{c}$$

$$y = \frac{9}{\sqrt{5}} \quad , \quad y = \frac{-9}{\sqrt{5}}$$

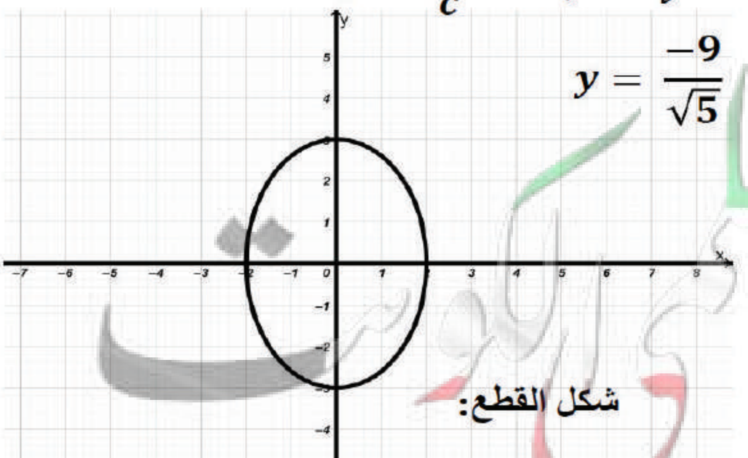
4 طول المحور الاكبر:

$2a = 6$

طول المحور الأصغر:

$2b = 4$

شكل القطع:



(64) أوجد معادلـة القطـع الناقـص الـذي بؤرتـاه $F_1\ (-2\ ,\ 0)\ ,\ F_2\ (2\ ,\ 0)$
وطـول محـوره الأكبـر 6 . ثـم ارسـم شـكلا تقريبيا لهذا القطع.

الحــل

تقع البؤرتان على محور السينات فتكون معادلة القطع علي الصورة:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ وتكون $c=2$

∵ طول المحور الاكبر = 6

$$\therefore 2a=6 \Rightarrow a=3 \Rightarrow a^2=9$$

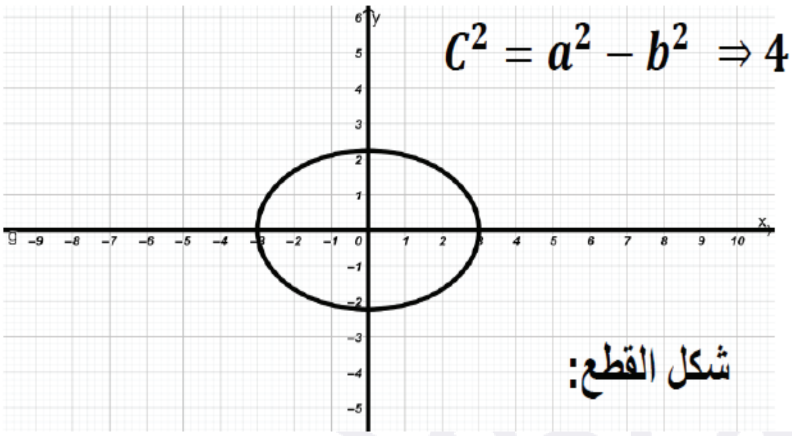
∴ طرفا المحور الاكبر هما : $A_1(-3,0)\ ,A_2\,(3,0)$

$$C^2=a^2-b^2 \Rightarrow 4=9-b^2 \Rightarrow b^2=5$$

∴معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$

شكل القطع:



(65) أوجد البؤرتين والرأسين وطول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلتـه: $x^2 + 4y^2 = 16$

الحــل

$$x^2 + 4y^2 = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{4y^2}{16} = \frac{16}{16} \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \text{ ،} \quad b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$C^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow C^2 = 16 - 4$$

$$C^2 = 12 \Rightarrow C = \sqrt{12} \Rightarrow C = 2\sqrt{3}$$

تقع البؤرتان على محور السينات : $F_1(-2\sqrt{3}, 0), F_2(2\sqrt{3}, 0)$

تقع الرأسان على محور السينات : $A_1(-4, 0), A_2(4, 0)$

طول المحور الاكبر: $2a = 2 \times 4 \Rightarrow a = 8$

(66) اكتب معادلة القطع الناقص الذي فيه:

$V_1F_1 + V_1F_2 = 10$ ، حيث إن V_1 هو نقطة على القطع الناقص،

F_2 و F_1 هما البؤرتين، علما أن $F_2(-3, 0)$, $F_1(3, 0)$

الحل

تقع البؤرتان على محور السينات فتكون المعادلة علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ وتكون $c=3$

$V_1F_1+V_2F_2=10 \Rightarrow 2a=10 \Rightarrow a=5 \Rightarrow a^2=25$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 9=25-b^2 \Rightarrow b^2=16$

معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

(67) إذا كانت: $9y^2 - 25x^2 = 225$ معادلة قطع زائد فأوجد:

1 - رأسي القطع الزائد.

2 - البؤرتين.

3 - معادلتي دليلي القطع.

4 - طول كل من المحورين.

5 - معادلة كلا من الخطين التقاربين ثم ارسم شكلا تخطيطا للقطع.

الحل

$$9y^2 - 25x^2 = 225 \xRightarrow{\div 225} \frac{9y^2}{225} - \frac{25x^2}{225} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$$

ومن معادلة القطع الزائد نجد أن : $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$, $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 25 + 9 = 34 \Rightarrow c = \sqrt{34}$$

والمحور القاطع ينطبق على محور الصادات

(1) رأسا القطع الزائد هما : $A_1(0,-5)$, $A_2(0,5)$

(2) البؤرتين: $F_1(0,-\sqrt{34})$, $F_2(0,\sqrt{34})$

(3) معادلتا الدليلين:

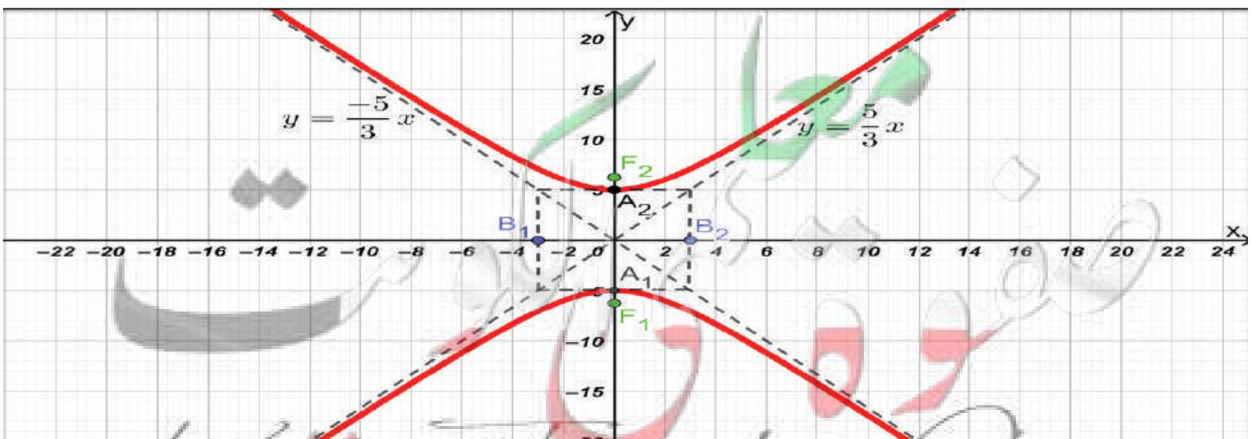
$$y = \frac{a^2}{c} \quad , \quad y = -\frac{a^2}{c} \Rightarrow y = \frac{-25}{\sqrt{34}} \quad , \quad y = \frac{25}{\sqrt{34}}$$

(4) طول المحور القاطع يساوي $2a$: $2a = 2 \times 5 = 10$

طول المحور المرافق يساوي $2b$: $2b = 2 \times 3 = 6$

(5) معادلتا كل من الخطين المقاربين :

$$y = \pm\frac{a}{b}x \Rightarrow y = \pm\frac{5}{3}x$$



(68) أوجد معادلـة القطـع الـزائـد الـذي بؤرتـاه $F_1\ (-4\ ,\ 0)\ ,\ F_2\ (4\ ,\ 0)$ ورأسـاه $A_1\ (-2\ ,\ 0)\ ,\ A_2\ (2\ ,\ 0)$ ثـم أوجد معادلـة كل مـن خطيـة المقاربين وارسم شكلا تقريبيـا لهـذا القطـع.

الحـــل

تقع البؤرتان على محور السينات فتكون المعادلة علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

احدي البؤرتين $F_2(4,0)$ ومنها تكون $C=4$

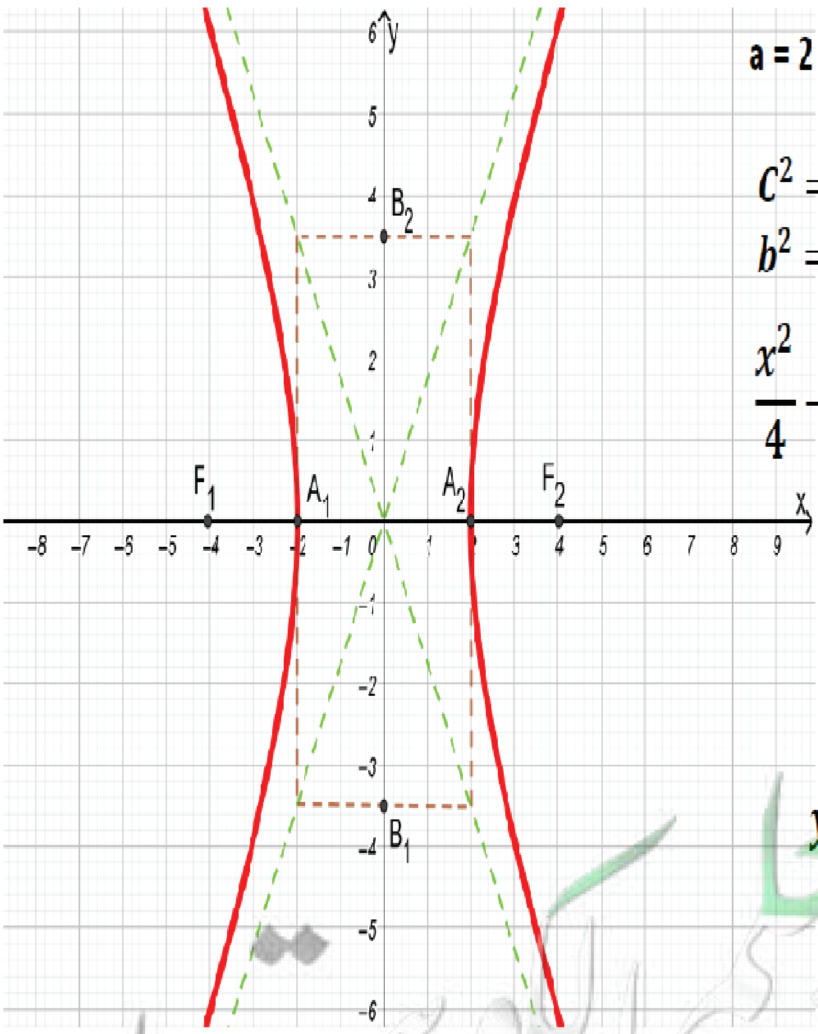
احدي الرأسين $A_2(2,0)$ ومنها تكون $a=2$

ولكن

$$C^2=a^2+b^2 \Rightarrow 4^2=2^2+b^2$$

$$b^2=16-4=12 \quad \Rightarrow b=2\sqrt{3}$$

معادلة القطع الزائد هي:. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$



معادلة كل من الخطين المقاربين :

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

$$y=\pm\frac{\sqrt{12}}{2}x \Rightarrow y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$y=\pm\sqrt{3}$$

(69) أوجد معادلة القطع الزائد الذي أحد رأسيه $\left(0\ ,\ \frac{5}{4}\right)$ ويمر بالنقطة $\left(-\sqrt{3}\ ,\ -\frac{5}{2}\right)$

الحـــل

∵ رأس القطع $\left(0 , \frac{5}{4}\right)$ ∴ رأس القطع على محور الصادات

$$a = \frac{5}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{25}{16}$$

ومعادلة القطع من الشكل $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ، بالتعويض

$$\frac{16y^2}{25} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

∵ $\left(-\sqrt{3} , -\frac{5}{2}\right) \in$ للقطع

$$\therefore \frac{16 \times \frac{25}{4}}{25} - \frac{3}{b^2} = 1 \Rightarrow 4 - 1 = \frac{3}{b^2} \Rightarrow b^2 = 1$$

∴ معادلة القطع الزائد $\frac{16y^2}{25} - \frac{x^2}{1} = 1$

(70) أوجد معادلـة القطـع الزائـد الـذي مركـزه $(0\ ,\ 0)$ وإحدى بؤرتيه $F(0\ ,\ \sqrt{34})$

ومعادلـة أحد خطيـه المقاربيـن هـي: $y = \dfrac{3}{5}x$

الحـل

$\because$ إحدى البورتين $F(0, \sqrt{34})$

$\therefore$ المحور القاطع ينطبق على محور الصادات ومعادلته: $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

$\because\ c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore\ 34 = a^2 + b^2 \quad (1)$

معادلة المقارب: $y = \dfrac{a}{b}x$ حيث من المعطى $y = \dfrac{3}{5}x$

$\therefore\ \dfrac{3}{5} = \dfrac{a}{b}$

$\therefore\ a = \dfrac{3b}{5}$

بالتعويض في المعادلة (1): $34 = \left(\dfrac{3b}{5}\right)^2 + b^2$

$34 = \dfrac{9b^2}{25} + b^2$

$850 = 9b^2 + 25b^2$

$b^2 = \dfrac{850}{34}$

$b^2 = 25 \quad \Longrightarrow \quad b = 5$

لإيجاد قيمة a نستخدم: $a = \dfrac{3b}{5}$

$a = \dfrac{3 \times 5}{5} = 3$

ومعادلة القطع الزائد هي: $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{25} = 1$

(71) أوجد الاختـلاف المركـزي للقطـع الـذي معادلتـه

$x^2 - 25y^2 = 1$

الحــل

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{25}} = 1$$

بالمقارنة قطع زائد معادلته: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$a^2 = 1 \quad \rightarrow a = 1$$

$$b^2 = \frac{1}{25} \quad \rightarrow b = \frac{1}{5}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 1 + \frac{1}{25}$$

$$c^2 = \frac{26}{25}$$

$$c = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

الاختلاف المركزي : $e = \frac{c}{a}$

$$e = \frac{\frac{\sqrt{26}}{5}}{1}$$

$$e = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

(72) حـدد نـوع القطـع فـي كل ممـا يلـي ثم أوجد معادلته.

اختـلاف المركـزي $(e = 2)$ ومعادلـة أحد دليليـه: $x = 1$

الحـل

$\because\ e = 2\ ,\ 2 > 1$

$\therefore$ القطع هو قطع زائد

$\because$ معادلة أحد دليليه $x = 1$

$\therefore$ المحور القاطع (الأساسي) ينطبق على محور السينات ومركزه $(0, 0)$

معادلة الدليل هي:

$$x = \frac{a^2}{c}$$

$$1 = \frac{a^2}{c}$$

$$c = a^2 \qquad (1)$$

$$\because\ e = \frac{c}{a}$$

$$\therefore\ 2 = \frac{c}{a}$$

$$c = 2a \qquad (2)$$

بحل المعادلتين $(1)\,,(2)$

$$a^2 = 2a$$

$$a(a-2) = 0$$

$\therefore\ a = 0$ مرفوضة أو $a = 2$ قيمة مقبولة

$$\therefore\ e = a = 2$$

$$c = (2)^2 = 4$$

$$\because\ c^2 = a^2 + b^2$$

$$\because\ c^2 = a^2 + b^2$$

$$16 = 4 + b^2 \implies b^2 = 12$$

$\because$ معادلة القطع هي:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

(73) أوجد طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي اختلافه المركزي ($e = \frac{\sqrt{5}}{3}$)
وطول محوره الأصغر 4 وحدات.

الحـل

$\because \quad e = \frac{c}{a}$

$\therefore \quad \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

أي: $c = \frac{a\sqrt{5}}{3}$

طول المحور الأصغر 4 أي $2b = 4$

$b = 2$

في القطع الناقص:

$c^2 = a^2 - b^2$

$\frac{5a^2}{9} = a^2 - 4$

$a^2 = 4 + \frac{5a^2}{9}$

$9a^2 = 36 + 5a^2$

$4a^2 = 36$

$a^2 = 9$

$a = 3$

$2a = 2(3) = 6$

طول المحور الأكبر = 6 وحدات.

(74) عنـد رمـي حجـر نـرد مرة واحـدة، إذا كان المتغير العشـوائي X يعبر عن:
"مربـع العـدد الظاهر مطروحـا منـه 1 عندمـا يكـون العدد الظاهر أصغر من 4 ، و 2- لغير ذلـك" فأوجد:

1 - فضـاء العينـة (S) وعـدد عناصـر $n(s)$

2 - مـدى المتغيـر العشـوائي X

3 - احتمـال وقـوع كل عنصـر مـن عناصـر مـدى المتغيـر العشـوائي X

4 - دالـة التوزيـع الاحتمالـي f للمتغيـر العشـوائي X

الحـل

1) فضاء العينة : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

، عدد عناصر فضاء العينة (S) : $n(s) = 6$

2)

عناصر مدى المتغير العشوائي	عناصر فضاء العينة
0	1
3	2
8	3
-2	4
-2	5
-2	6

مدى المتغير العشوائي: $X = \{-2, 0, 3, 8\}$

3)

$$P(X=-2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad , \quad P(X=0) = \frac{1}{6}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{6} \quad , \quad P(X=8) = \frac{1}{6}$$

4) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X :

x	-2	0	3	8
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

(75) لتكن الدالـة f :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & : 0 \le x \le 3 \\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

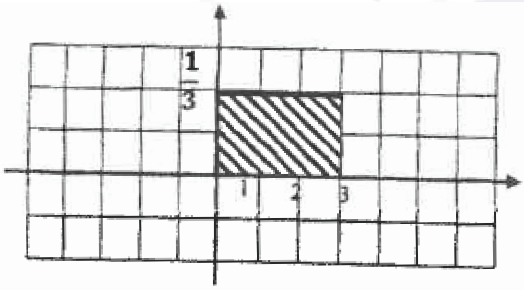
1 - اثبت أن f هي دالـة كثافة احتمال

2 - اثبت أن f تتبع التوزيع الاحتمالـي المنتظم

3 - أوجد التوقع والتباين للدالـة f

الحـل

نرسم بيان الدلة f :



1) المساحة تحت المنحنى من الشكل هي

مساحة المنطقة المستطيلة = الطول × العرض

$$= 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

$\therefore$ الدالة f هي دالة كثافة احتمال

2) لإثبات أن الدالة تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم يجب أن تكون الدالة على الصورة :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : a \le x \le b \\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$\because a = 0 \ , b = 3 \rightarrow b - a = 3$$

$$\therefore \frac{1}{b-a} = \frac{1}{3} \rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & : 0 \le x \le 3 \\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$\therefore$ الدالة f هي دالة تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم

3) التوقع : $\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$

التباين : $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(3-0)^2}{12} = \frac{3}{4}$

(76) إذا كان X متغيرا عشوائيا متصلا ودالـة كثافـة الاحتمـال لـه هي:

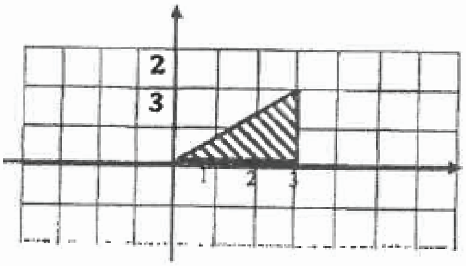
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}x & : \ 0 \le x \le 3 \\ 0 & : \ \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد:

1 - $p(0 < x \le 3)$ 2 - $p(x \ge 2)$ 3 - $p(x = 1)$

الحـل

نرسم بيان الدلة f :

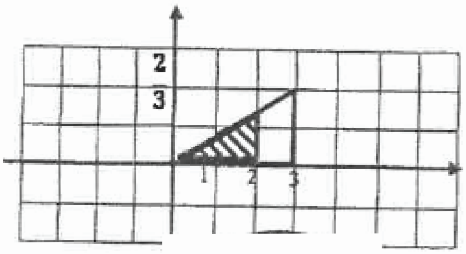


1) مساحة المنطقة المظللة :

$$p(0 < X \le 3) = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{2}{3}$$

$$= 1$$

2) مساحة المنطقة غير المظللة من المثلث :



$$p(X \ge 2) = 1 - p(X < 2)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4}{9}$$

$$= \frac{5}{9}$$

3) $p(X = 2) = 0$

(77) يبين الجدول التالي دالـة التوزيع الإحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X

أوجد:

1 - التوقع μ

2 - التباين σ^2

3 - الإنحراف المعياري σ

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.2	0.1	0.3	0.1	0.3

الحـــل

1) التوقع (μ) :

$$\mu = \sum x_i f(x_i)$$

$$\mu = (1)(0.2) + (2)(0.1) + (3)(0.3) + (4)(0.1) + (5)(0.3)$$

$$= 0.2 + 0.2 + 0.9 + 0.4 + 1.5$$

$$= 3.2$$

2) التباين (σ^2) :

$$\sigma^2 = \sum (x_i)^2 f(x_i) - \mu^2$$

$$= (1)^2(0.2) + (2)^2(0.1) + (3)^2(0.3) + (4)^2(0.1) + (5)^2(0.3) - (3.2)^2$$

$$= 12.4 - 10.24$$

$$= 2.16$$

3) الإنحراف المعياري (σ) :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$= \sqrt{2.16} \approx 1.47$$

(78) عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن (عدد الكتابات).

فأوجد ما يلي:

a - فضاء العينة (S) وعدد عناصر $n(S)$

b - مدى المتغير العشوائي X

c - احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X

d - دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X

الحــل

a فضاء العينة:

$S = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),$
$(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$

$n(S) = 8$

b

عناصر فضاء العينة S	عدد الكتابات في كل عنصر
(H,H,H)	0
(H,H,T)	1
(H,T,H)	1
(T,H,H)	1
(H,T,T)	2
(T,H,T)	2
(T,T,H)	2
(T,T,T)	3

∴ مدى المتغيّر العشوائي: $X = \{0, 1, 2, 3\}$

c $P(X=0) = \frac{1}{8}$

$P(X=1) = \frac{3}{8}$

$P(X=2) = \frac{3}{8}$

$P(X=3) = \frac{1}{8}$

d دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

(79) الجدول التالي يبين دالـة التوزيـع الإحتمالي f للمتغيـر العشـوائي المتقطـع X
إذا كانت F دالـة التوزيـع التراكمي للمتغير العشـوائي X
فأوجد:
$F(2)$, $F(3)$, $F(4)$, $F(4.5)$, $F(5)$, $F(7)$

x	3	4	5
$f(x)$	0.5	0.3	0.2

الحـل

$$F(2) = P(X \leqslant 2) = 0$$

$$\begin{aligned} F(3) &= P(X \leqslant 3) = P(X < 3) + P(X = 3) \\ &= 0 + 0.5 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(4) &= P(X \leqslant 4) \\ &= P(X < 4) + P(X = 4) \\ &= P(3) + P(4) \\ &= 0.5 + 0.3 \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(4.5) &= P(X \leqslant 4.5) \\ &= P(X < 4.5) + P(X = 4.5) \\ &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 4.5) \\ &= 0.5 + 0.3 + 0 \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(5) &= P(X \leqslant 5) \\ &= P(X < 5) + P(X = 5) \\ &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= 0.5 + 0.3 + 0.2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(7) &= P(X \leqslant 7) \\ &= P(X < 7) + P(X = 7) \\ &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 7) \\ &= 0.5 + 0.3 + 0.2 + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

(80) الجدول التالـي يبيـن بعض قيـم دالة التوزيـع التراكمي F للمتغير العشـوائي المتقطع X

أوجد:

a - $p(1 < x \leq 3)$ b - $p(2 < x \leq 5)$ c - $p(x > 2)$

x	1	2	3	5
$F(x)$	0.15	0.2	0.6	1

الحـــل

a $P(1 < X \leq 3) = F(3) - F(1)$

$= 0.6 - 0.15$

$= 0.45$

b $P(2 < X \leqslant 5) = F(5) - F(2)$

$= 1 - 0.2$

$= 0.8$

c $P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2)$

$= 1 - F(2)$

$= 1 - 0.2$

$= 0.8$

(81) إذا كان z هو التوزيـع الطبيعي المعيـاري للمتغيـر العشـوائي X فأوجد:

a - $p(z \leq -0.55)$ b - $p(-2.2 \leq z \leq -1.6)$ c - $p(-1.3 \leq z \leq 0.28)$

الحـــل

a $P(z \leqslant -0.55)$

لاحظ أن: $-0.55 \leqslant 0$

نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري z رقم (5) صفحة (178).

$$P(z \leqslant -0.55) = 0.29116$$

b $P(-2.2 \leqslant z \leqslant -1.6) = P(z \leqslant -1.6) - P(z \leqslant -2.2)$

$$= 0.0548 - 0.01390$$

$$= 0.0409$$

c $P(-1.3 \leqslant z \leqslant 0.28) = P(z \leqslant 0.28) - P(z \leqslant -1.3)$

لاحظ أن: $0.28 \geqslant 0$ لذا نستخدم جدول رقم (4)

وأن $-1.3 \leqslant 0$ لذا نستخدم جدول رقم (5)

$$P(z \leqslant 0.28) = 0.61026$$

$$P(z \leqslant -1.3) = 0.09680$$

$$P(-1.3 \leqslant z \leqslant 0.28) = 0.61026 - 0.09680$$

$$= 0.51346$$

بعض القوانين في الصف الثاني عشر علمي

إذا كان X متغيراً عشوائياً متقطعاً له دالة التوزيع الاحتمالي f فإن

التباين للمتغير العشوائي يعطى بالصيغة :

التباين : $\sigma^2 = \sum(x_i^2 f(x)) - \mu^2$ حيث μ هو التوقع

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ (الجذر التربيعي الموجب للتباين)

خواص دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي x

(1) $P(X > a) = 1 - P(X \le a) = 1 - F(a)$

(2) $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$

إحتمال النجاح في X من المحاولات يعطى بالعلاقة (توزيع ذات الحدين)

$P(X = x) = f(x) = {}_nC_x \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \quad , n \in z^+$

التوقع والتباين لتوزيع ذات الحدين

التوقع : $\mu = np$

التباين: $\sigma^2 = np(1-p)$

الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الاحتمالي المنتظم على $[a, b]$ هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : a \le x \le b \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك :} \end{cases}$$

- التوقع (الوسط) للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو: $\mu = \frac{a+b}{2}$
- التباين للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو : $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

القيمة المعيارية هي $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

جدول التوزيع الطبيعي المعياري (ζ) لحساب قيم المساحات من اليسار

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

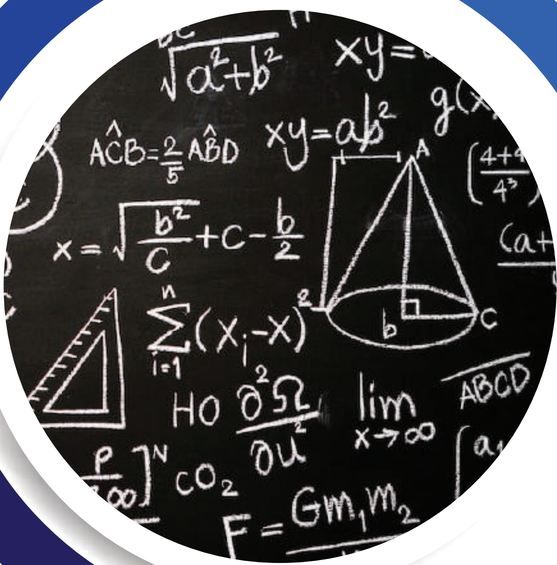
جدول التوزيع الطبيعي المعياري (ع) لحساب قيم المساحات من اليسار

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003
−3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
−3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
−3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
−3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
−3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
−3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
−3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
−3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
−3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00104	0.00100
−2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
−2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
−2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
−2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
−2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
−2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
−2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
−2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
−2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
−2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
−1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
−1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
−1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
−1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
−1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
−1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
−1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08691	0.08534	0.08379	0.08226
−1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09853
−1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
−1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
−0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
−0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
−0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21770	0.21476
−0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
−0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
−0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
−0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
−0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
−0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43251	0.42858	0.42465
−0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414

البلاطي
عصر جديد للتعليم
New Era of Education
ALBALATY

أحرص على اقتناء مذكرات منصة البلاطي

- مذكرة شرح لكل درس.
- مذكرة أسئلة لكل درس.
- مذكرة إجابة أسئلة لكل درس.
- مذكرة امتحان لكل درس.
- مذكرة إجابة امتحان لكل درس.



منصة البلاطي

الرياضيات 12

الفصل الدراسي الثاني

2022 - 2023

استمتع بتجربة التعلم
مع منصة البلاطي