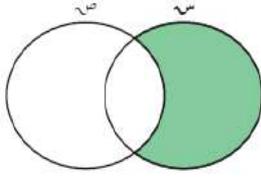


# مذكرة الصف التاسع مادة الرياضيات محلولة وشاملة إعداد أ/ أحمد جمال عزمي

امسح الرمز لمشاهدة فيديوهات شرح المذكرة

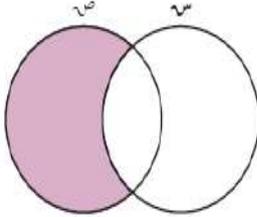


الوحدة الاولى : المجموعاتالدرس الاول : مجموعة الفرق

مجموعة الفرق بين مجموعتين س - ص

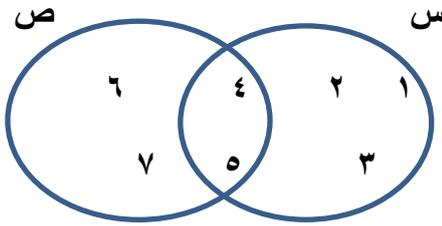
وتظلل كما في شكل فن المقابل

س - ص = مجموعة العناصر التي تنتمي الي س ولا تنتمي الي ص



اما ص - س تظلل كما في شكل فن المقابل

ص - س = مجموعة العناصر التي تنتمي الي ص ولا تنتمي الي س

مثال (١):

من شكل فن المقابل ، اوجد بذكر العناصر كلا مما يلي :

(أ) س - ص = { ٣ ، ٢ ، ١ }

(ب) ص - س = { ٧ ، ٦ }

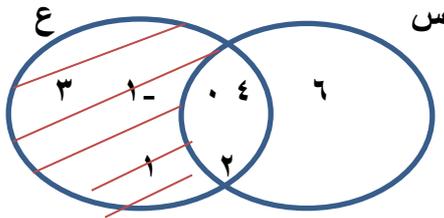
(ج) ماذا تلاحظ؟ (س - ص) ≠ (ص - س)

مثال (٢):

اذا كانت س = { ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ } ،

ع = { ب : ب ∈ ص ، ١ ≤ ب ≤ ٤ } ، حيث ص مجموعة الاعداد الصحيحة.

فاوجد بذكر العناصر كلا مما يلي :

الحل:

ع = { ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ ، ٠ ، ١- }

س - ع = { ٦ }

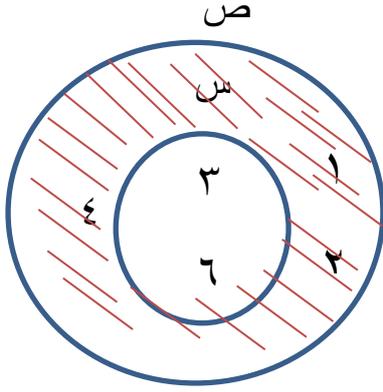
ع - س = { ٣ ، ١ ، ١- }

مثل كلا من س ، ع بشكل فن ثم ظل المنطقة التي تمثل ع - س

مثال (٣):

إذا كانت  $S =$  مجموعة مضاعفات العدد ٣ الأصغر من ٩ ،

$$S = \{ 1, 2, 3, 4, 6 \}$$



فاوجد بذكر العناصر كلا مما يلي :

$$S = \{ 3, 6 \}$$

$$S - S = \{ \} \text{ او } \phi$$

$$S - S = \{ 1, 2, 4 \}$$

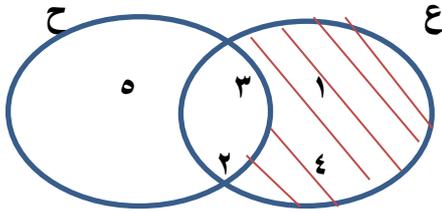
مثل كلا من  $S$  ،  $S$  بشكل فن ثم ظلل المنطقة التي تمثل  $S - S$

مثال (٤): إذا كانت  $E = \{ 1 : 1 \text{ او } 5 > 1 \}$  ،

حيث  $S$  مجموعة الاعداد الصحيحة

$$C = \{ \text{ب : ب عامل من العوامل الاولية للعدد ٣٠} \}$$

فاوجد بذكر العناصر كلا مما يلي :



$$E = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

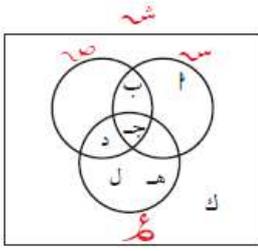
$$C = \{ 2, 3, 5 \}$$

$$E - C = \{ 1, 4 \}$$

مثل كلا من  $E$  ،  $C$  بشكل فن ثم ظلل المنطقة التي تمثل  $E - C$

تذكر دائماً أن

الرياضيات حل بالإيد وليس مذاكرة بالعين

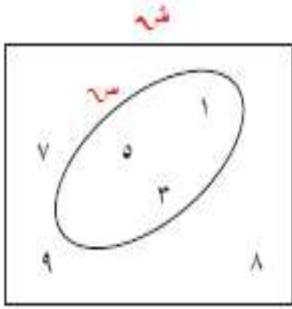
الدرس الثاني :- المجموعة الشاملة - المجموعة المتممة

نرمز الي المجموعة الشاملة بالرمز ش

لتكن ش = { ا ، ب ، ج ، د ، هـ ، ل ، ك }

المجموعة الشاملة لكل من س ، ص ، ع وتمثل بشكل فن المقابل

**مثال (١)** من الشكل المقابل : (١) اكتب بذكر العناصر كلا مما يلي :



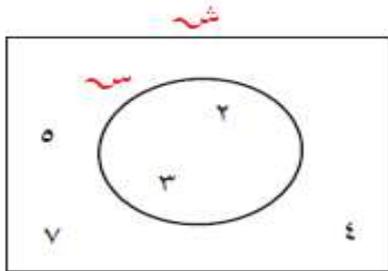
ش = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٨ ، ٩ }

س = { ١ ، ٣ ، ٥ }

ش - س = { ٧ ، ٨ ، ٩ }

(ب) اكمل ٧  $\in$  (ش - س) ، ٣  $\in$  (ش - س)

**مثال (٢)** من الشكل المقابل اكتب بذكر العناصر كلا مما يلي :



ش = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ }

س = { ٢ ، ٣ }

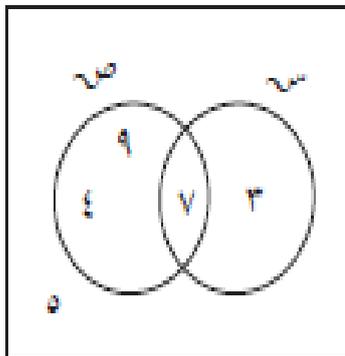
ش - س = { ٥ ، ٧ }

س  $\cap$  س =  $\phi$

ش  $\cup$  س = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ } = ش

ش - س = { ٢ ، ٣ } = س

**مثال (٣)** من الشكل المقابل اوجد بذكر العناصر كلا مما يلي :



ش = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٩ }

س = { ٣ ، ٧ }

ص = { ٣ ، ٧ ، ٩ }

ع = { ٣ ، ٥ ، ٩ }

ص = { ٣ ، ٧ }

ص  $\cap$  ع = { ٥ }

ص  $\cup$  ع = { ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ }

ص  $\cup$  ع = { ٥ }

ماذا تلاحظ ؟  $س \cap ص = س \cup ص$

$$\overline{س \cup ص} = \{٣، ٤، ٥، ٩\}$$

$$س \cap ص = \{٧\}$$

$$\overline{س \cap ص} = \{٩، ٥، ٤، ٣\} \text{ اذا } س \cap ص = س \cup ص$$

**مثال (٤)** اذا كانت المجموعة الشاملة  $ش = \{١، ٢، ٣، ٤، ٥\}$ ،

$$س = \{١ : ١ \div \text{ مجموعة الاعداد الكلية}، ٢ \geq ١ > ٤\}$$

$$ص = \{ب : ب \div \text{ مجموعة الاعداد الكلية}، ب \text{ عامل من عوامل العدد } ٤\}$$

فاوجد بذكر العناصر كلا مما يلي:

**الحل:**

$$س = \{٢، ٣\}$$

$$ص = \{١، ٢، ٤\}$$

$$\overline{س} = \{١، ٤، ٥\}$$

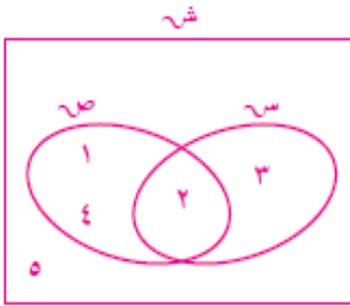
$$\overline{ص} = \{٣، ٥\}$$

$$س \cap ص = \{٢\}$$

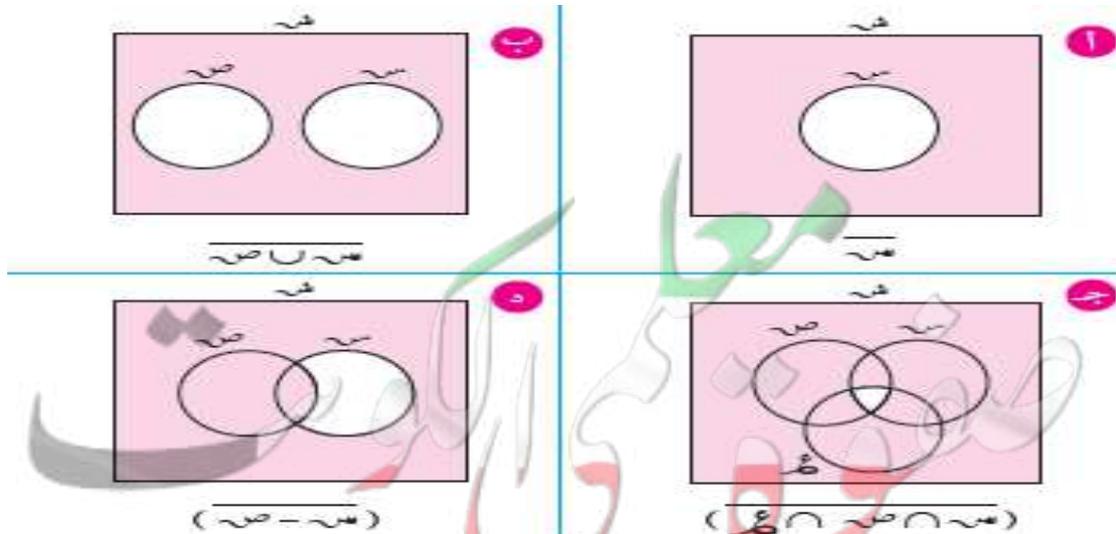
$$س \cup ص = \{١، ٢، ٤\}$$

$$\overline{س \cap ص} = \{١، ٣، ٤، ٥\}$$

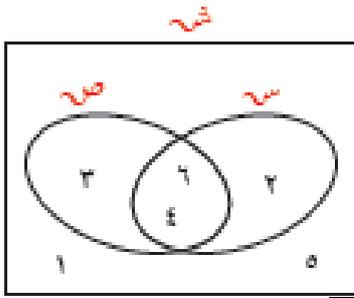
مثل كلا من  $ش، س، ص$  بشكل



**مثال (٥)** ظلل المنطقة التي تمثل كلا مما يلي في الاشكال التالية :



**مثال (٦):** من شكل فن المقابل اوجد بذكر العناصر كلا مما يلي :



$$\{5, 2, 1\} = \text{ص}$$

$$\{5, 1\} = (\text{س} \cup \text{ص})$$

$$\{6, 5, 4, 3, 2, 1\} = \text{ش}$$

$$\{6, 4, 2\} = \text{س}$$

$$\{6, 4, 3\} = \text{ص}$$

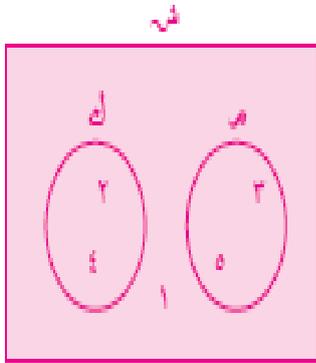
$$\{5, 3, 1\} = \overline{\text{س}}$$

$$\{5, 3, 2, 1\} = \overline{(\text{س} \cap \text{ص})}$$

**مثال (٧):** اذا كانت المجموعة الشاملة ش = {٥، ٤، ٣، ٢، ١} ،

م = مجموعة الاعداد الفردية الاكبر من ١ والاصغر من ٧ ،

ك = {١ : ا عدد زوجي ١ > ١ > ٦} ، فاوجد بذكر العناصر كلا مما يلي :



$$\{5, 3\} = \text{م}$$

$$\{4, 2\} = \text{ك}$$

$$\{4, 2, 1\} = \overline{\text{م}}$$

$$\{5, 3, 1\} = \overline{\text{ك}}$$

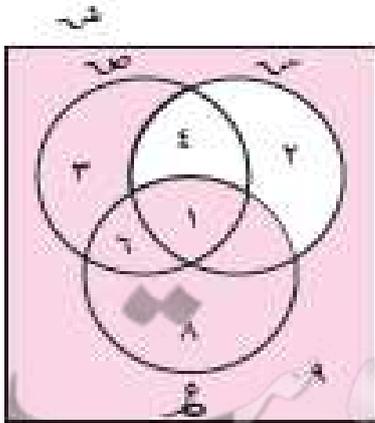
$$\{5, 4, 3, 2, 1\} = \overline{(\text{م} \cap \text{ك})}$$

$$\{5, 3\} = \text{م} - \text{ك}$$

$$\{4, 2, 1\} = \overline{(\text{م} - \text{ك})}$$

مثل كلا من ش، م، ك بشكل فن ، ثم ظلل المنطقة التي تمثل (م ∩ ك)

**مثال (٨):** من شكل فن المقابل اكمل بذكر العناصر كلا مما يلي :



$$\{9, 8, 6, 4, 3, 2, 1\} = \text{ش}$$

$$\{6, 4, 3, 1\} = \text{ص}$$

$$\{9, 8, 6, 3\} = \overline{\text{س}}$$

$$\{4, 3\} = \text{ص} - \text{ع}$$

$$\{9, 8, 6, 3, 2\} = (\text{س} \cap \text{ص})$$

ثم ظلل المنطقة التي تمثل (س - ع)

الدرس الثالث : التطبيق وانواعهالتطبيق ( الدالة ) وانواعه :

درست فيما سبق ان العلاقة من مجموعة  $S$  الي مجموعة  $V$  هي تطبيق ( دالة ) اذا ارتبط كل عنصر من  $S$  بعنصر واحد فقط من  $V$  وتسمى  $S$  " المجال " ،  $V$  " المجال المقابل " وتسمى مجموعة صور عناصر المجال " المدى "

\* التطبيق الذي يتساوى فيه المدى والمجال المقابل يسمى " تطبيق شامل "

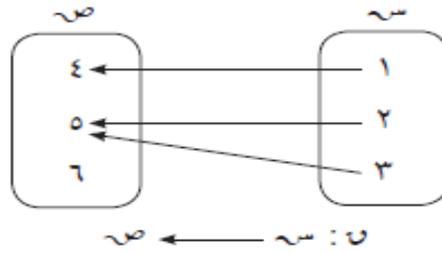
\* التطبيق الذي لا يرتبط فيه عنصران او اكثر من المجال بالعنصر نفسه

من المجال المقابل يسمى " تطبيق متباين "

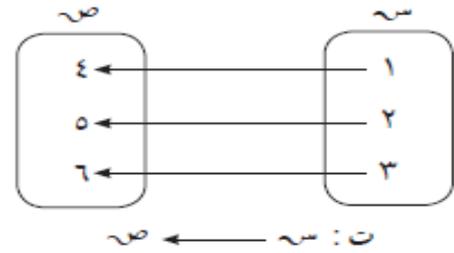
\* التطبيق الشامل والمتباين يسمى " تطبيق تقابل "

مثال (١)

ايا التطبيقات التالية شامل وايها ليس شاملا اذكر السبب



ق ليس شاملا



ت تطبيق شامل

الحل:

السبب : المدى { ٤ ، ٥ } ≠ المجال المقابل

السبب: المدى { ٤ ، ٥ ، ٦ } = المجال المقابل

كن طموحاً لكي تصل الي أهدافك

**مثال (٢)** اذا كانت  $S = \{ -3, 0, 3 \}$  ،  $V = \{ -9, 0, 9 \}$

التطبيق  $q : S \rightarrow V$  ،  $q(S) = 3$  اوجد : (١) مدى التطبيق

**الحل:**

$$q(S) = 3$$

$$q(-3) = 3 \times 3 = 9$$

$$q(0) = 0 \times 3 = 0$$

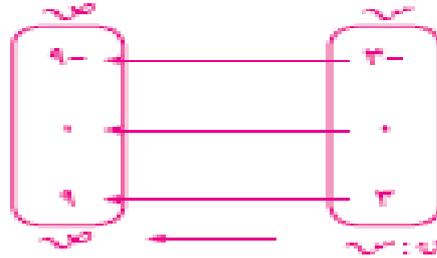
$$q(3) = 3 \times 3 = 9$$

$$\text{المدى} = \{ -9, 0, 9 \}$$

(ب) اكتب التطبيق  $q$  كمجموعة من الأزواج المرتبة

$$q = \{ (-3, 9), (0, 0), (3, 9) \}$$

(ج) مثل التطبيق بمخطط سهمي



(د) بين نوع التطبيق من حيث كونه شاملا ، متباين ، تقابلا مع ذكر السبب

ق تطبيق شامل لان المدى = المجال المقابل

ق تطبيق متباين لان العناصر لها صور مختلفة  $q(-3) \neq q(3) \neq q(0)$

ق تطبيق تقابل لانه شامل ومتباين

مثال (٢)

ليكن التطبيق ت :  $\{-٢، ١، ٢، ٣\} \longleftarrow \{٠، ٣، ٨\}$  حيث ت (س) =  $١ - ٢س$

(أ) اوجد مدى التطبيق

الحل: ت (س) =  $١ - ٢س$

$$٣ = ١ - ٤ = ١ - ٢(٢) = (٢) \text{ ت}$$

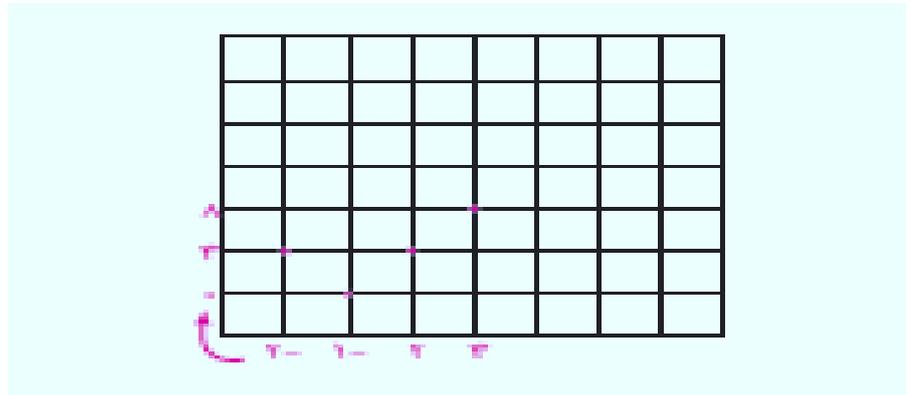
$$٠ = ١ - ١ = ١ - ٢(١) = (١) \text{ ت}$$

$$٣ = ١ - ٤ = ١ - ٢(٢) = (٢) \text{ ت}$$

$$٨ = ١ - ٩ = ١ - ٢(٣) = (٣) \text{ ت}$$

$$\{٨، ٣، ٠\} = \text{المدى}$$

(ب) مثل التطبيق ت بمخطط بياني



(ج) بين نوع التطبيق من حيث كونه شاملا، متباينا، تقابل مع ذكر السبب

ت تطبيق شامل لان المدى = المجال المقابل =  $\{٨، ٣، ٠\}$

ت تطبيق ليس متباينا لان ت (٢) = ت (٢)

ت ليس تقابلا لانه غير متباين

مثال (٣)

إذا كانت  $S = \{ -2, 0, 2 \}$  ،  $V = \{ -4, 0, 8 \}$   
 التطبيق ق : س ← ص ، ق ( س ) = ٣ س + ٢ اوجد :

(١) مدى التطبيق

الحل:

$$ق ( س ) = ٣ س + ٢$$

$$ق ( -٢ ) = ٣ ( -٢ ) + ٢ = -٦ + ٢ = -٤$$

$$ق ( ٠ ) = ٣ ( ٠ ) + ٢ = ٠ + ٢ = ٢$$

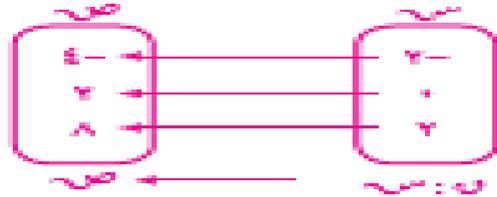
$$ق ( ٢ ) = ٣ ( ٢ ) + ٢ = ٦ + ٢ = ٨$$

$$\text{المدى} = \{ -٤, ٢, ٨ \}$$

(ب) اكتب التطبيق ق كمجموعة من الأزواج المرتبة

$$ق = \{ (-٢, -٤), (٠, ٢), (٢, ٨) \}$$

(ج) مثل التطبيق بمخطط سهمي



(د) بين نوع التطبيق من حيث كونه شاملا ، متباين ، تقابلا مع ذكر السبب

$$ق \text{ تطبيق شامل لان المدى} = \text{المجال المقابل} = \{ -٤, ٢, ٨ \}$$

$$ق \text{ تطبيق متباين لان العناصر لها صور مختلفة } ق ( -٢ ) \neq ق ( ٠ ) \neq ق ( ٢ )$$

ق تطبيق تقابل لانه شامل ومتباين

مثال (٤)

ليكن التطبيق ت : ل = { ١ - ، ١ } ، م = { ١٠ ، ٥ ، ٢ }

التطبيق هـ : ل ← م حيث هـ (س) =  $١ + ٢س$

(أ) اوجد مدى التطبيق

الحل: هـ (س) =  $١ + ٢س$

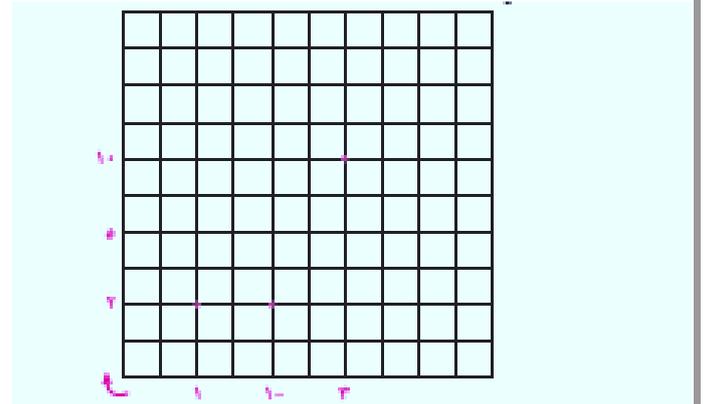
$$\text{هـ ( ١ )} = ١ + ٢(١) = ١ + ٢ = ٣$$

$$\text{هـ ( ١ - )} = ١ + ٢(١ -) = ١ + ٢ = ٣$$

$$\text{هـ ( ٣ )} = ١ + ٢(٣) = ١ + ٦ = ٧$$

$$\text{المدى} = \{ ٣ ، ٧ \}$$

(ب) مثل التطبيق ت بمخطط بياني



(ج) بين نوع التطبيق من حيث كونه شاملا، متباينا ، تقابل مع ذكر السبب

هـ تطبيق ليس شاملا لان المدى  $\neq$  المجال المقابل

ت تطبيق ليس متباينا لان هـ ( ١ - ) = ت ( ١ ) = ٣

ت ليس تقابلا لانه غير متباين

مثال (٥)

ليكن التطبيق د : س = { ٢ ، ١ ، ٠ } ، ص = { ٨ ، ١ ، ٠ }

التطبيق د : س ← ص حيث د (س) = س<sup>٣</sup>

(أ) اوجد مدى التطبيق

الحل: هـ = (س) = س<sup>٣</sup>

$$٠ = ٣(٠) = (٠)$$

$$١ = ٣(١) = (١)$$

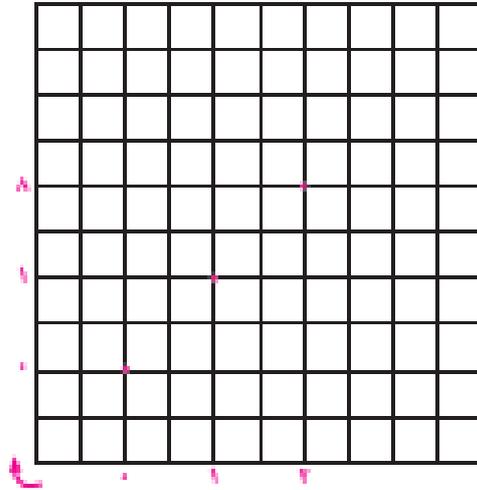
$$٨ = ٣(٢) = (٢)$$

$$\{ ٨ ، ١ ، ٠ \} = \text{المدى}$$

(ب) اكتب التطبيق د كمجموعة ازواج مرتبة

$$د = \{ (٨ ، ٢) ، (١ ، ١) ، (٠ ، ٠) \}$$

(ب) مثل التطبيق ت بمخطط بياني



(ج) بين نوع التطبيق من حيث كونه شاملا، متباينا ، تقابل مع ذكر السبب

د تطبيق شامل لان المدى = المجال المقابل = { ٨ ، ١ ، ٠ }

ت تطبيق متباين لان د (٠) ≠ د (١) ≠ د (٢)

ت تقابل لانه شامل ومتباين

**مثال (٦)** ليكن التطبيق ت : س = { ١ ، ٤ ، ٩ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

التطبيق د : س ← ص حيث د (س) =  $\sqrt{س}$

(أ) اوجد مدى التطبيق

الحل: ت (س) =  $\sqrt{س}$

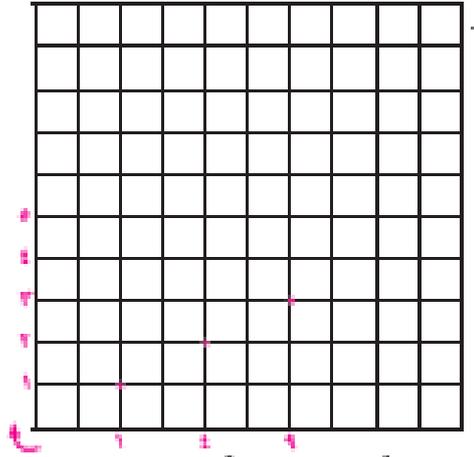
ت (١) =  $\sqrt{١} = ١$

ت (٤) =  $\sqrt{٤} = ٢$

ت (٩) =  $\sqrt{٩} = ٣$

المدى = { ١ ، ٢ ، ٣ }

(ب) مثل التطبيق ت بمخطط بياني



(ج) بين نوع التطبيق من حيث كونه شاملا، متباينا ، تقابل مع ذكر السبب

ت تطبيق ليس شاملا لان المدى  $\neq$  المجال المقابل

ت تطبيق متباين لان ت (١)  $\neq$  ت (٤)  $\neq$  ت (٩)

ت ليس تقابل لانه غير شامل

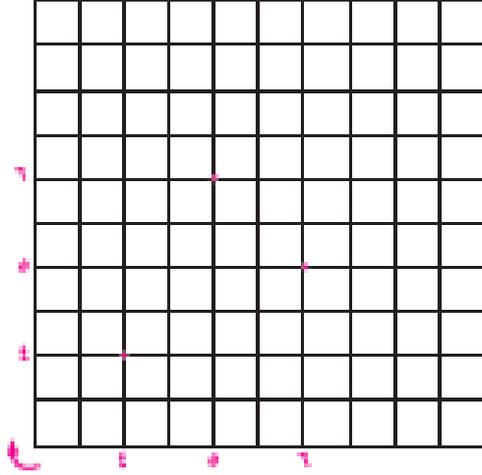
**مثال (٧)** اذا كانت  $S = \{ 6, 5, 4 \}$  ، التطبيق  $K$  :  $S \rightarrow$  ص

حيث  $K = \{ (5, 6), (6, 5), (4, 4) \}$

(أ) اوجد المدى

المدى =  $\{ 6, 5, 4 \}$

(ب) مثل التطبيق بمخطط بياني



(ج) بين ان التطبيق  $K$  تطبيق تقابل

$K$  تطبيق شامل لان المدى = المجال المقابل =  $\{ 6, 5, 4 \}$

$K$  تطبيق متباين لان  $K(4) \neq K(5) \neq K(6)$

بالتالي  $K$  تقابل لانه شامل ومتباين

أحد أسرار النجاح الصبر والمثابرة

الدرس الرابع الدالة الخطية :

الدالة الحقيقية ق : ح ← ح ، ق (س) = اس + ب ، حيث ا ، ب و ح تسمى دالة خطية

لاحظ ان :

$$(١) \quad ق (س) = اس + ب$$

تسمى قاعدة الاقتران ويمكن كتابتها على الصورة :  $ص = اس + ب$  ويكون بيانها خطا مستقيما

(٢) تسمى س المتغير المستقل وتسمى ص المتغير التابع

(٣) عندما يكون  $ا = ٠$  تكون الدالة ثابتة ويكون بيانها خطا مستقيما افقيا ( يوازي محور السينات)

مثال (١)

اكمل الجدولين للدالتين التاليتين :

$$(ب) \quad ص = ٢س$$

$$(ا) \quad ص = ٣ + س$$

ص = ٢س					
س	٠	١	٢	٣	٤
ص	٠	٢	٤	٦	٨

$$٠ = س$$

$$ص = ٠ \times ٢ = ٠$$

ص = ٣ + س					
س	١ -	٠	١	٢	٣
ص	٢	٣	٤	٥	٦

$$١ - = س$$

$$ص = ٣ + ١ - = ٢$$

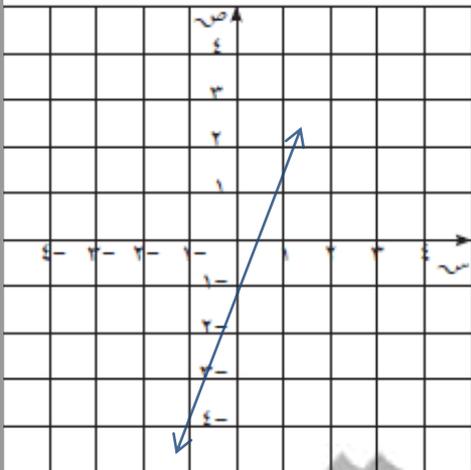
مثال (٢)

ارسم بيان الدالة الخطية :  $ص = ٣س - ١$

$$\text{الحل: عندما } س = ١ - \quad ص = ٣ \times ١ - ١ = ١ - ١ = ٠$$

$$\text{عندما } س = ٠ \quad ص = ٣ \times ٠ - ١ = ٠ - ١ = ١ -$$

$$\text{عندما } س = ١ \quad ص = ٣ \times ١ - ١ = ١ - ١ = ٠$$



س	١ -	٠	١
ص	٤ -	١ -	٢

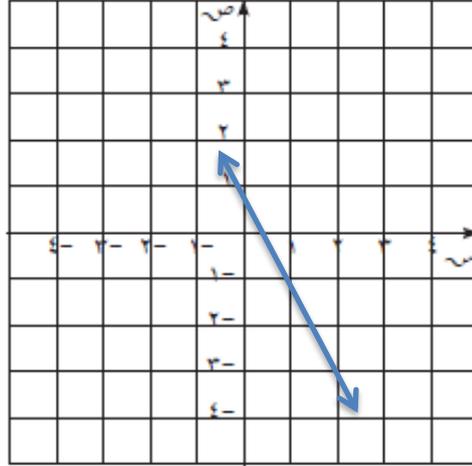
**مثال (٣)** ارسم بيان الدالة الخطية : ص = ١ - ٢ س

الحل: عندما س = ٠ ص = ١ - ٢ × ٠ = ١

عندما س = ١ ص = ١ - ٢ × ١ = -١

عندما س = ٢ ص = ١ - ٢ × ٢ = -٣

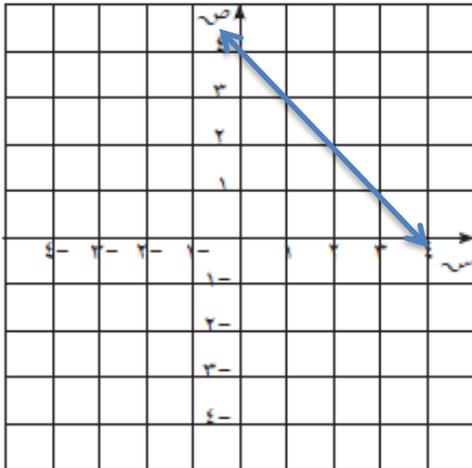
س	٠	١	٢
ص	١	-١	-٣

**مثال (٤)** ارسم بيان الدالة الخطية : ص = ٤ - س

الحل: عندما س = ٠ ص = ٤ - ٠ = ٤

عندما س = ١ ص = ٤ - ١ = ٣

عندما س = ٢ ص = ٤ - ٢ = ٢



س	٠	١	٢
ص	٤	٣	٢

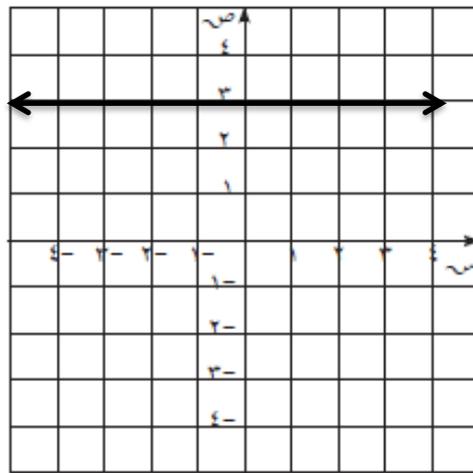
مثال (٥) ارسم بيان الدالة الخطية : ص = ٣

الحل: عندما س = ٠ ص = ٣

عندما س = ١ ص = ٦

عندما س = ٢ ص = ٩

س	٠	١	٢
ص	٣	٦	٩



الدرس الخامس : الدالة التربيعية

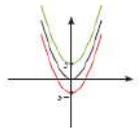
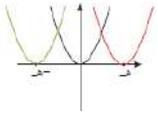
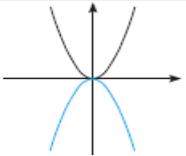
الدالة الحقيقية التي فيها القوة الاعلى للمتغير المستقل تساوي ٢ تسمى " دالة تربيعية " ويكون الرسم البياني للدالة التربيعية على شكل منحنى  $\cup$  او  $\cap$  ويسمى قطع مكافئ

الصورة العامة للدالة التربيعية :

$$a x^2 + b x + c$$

حيث  $a, b, c$  ج اعداد حقيقية ،  $a \neq 0$

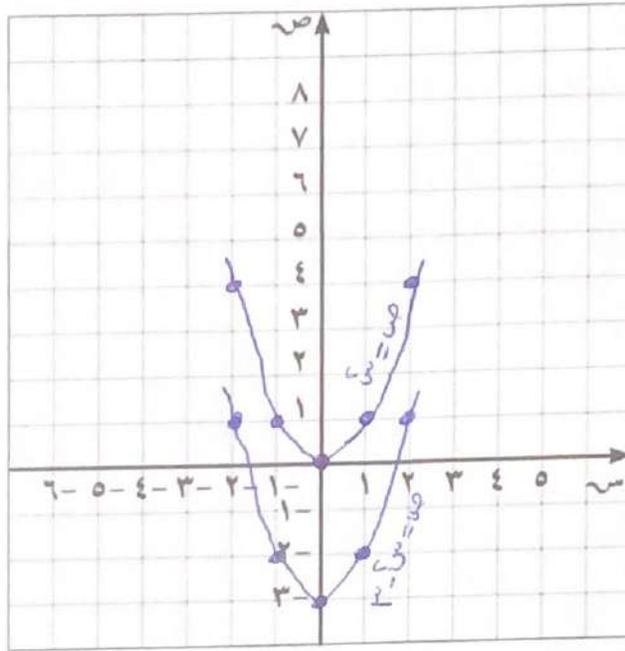
↓ حد من الدرجة الثانية      ↓ حد من الدرجة الاولى      حد ثابت

الدالة التربيعية	التحويلات الهندسية المطبقة على التمثيل البياني للدالة التربيعية $v = ax^2 + c$	التمثيل البياني
$v = ax^2 + c$	ازاحة راسية د وحدة الي الاعلى اذا كانت د موجبة وازاحة افقية د وحدة الى الاسفل اذا كانت د سالبة	
$v = a(x-h)^2 + k$	ازاحة افقية ه وحدة اللي اليسار اذا كانت ه موجبة ازاحة افقية ه وحدة الى اليمين اذا كانت ه سالبة	
$v = -ax^2 + c$	انعكاس في محور السينات	

عن ابن عباس رضي الله عنهما قال : كنت خلف النبي ﷺ يوما فقال  
يا غلام ، اني أعلمك كلمات : احفظ الله يحفظك ، احفظ الله تجده  
تجاهك ، اذا سألت فسال الله ، واذا استعنت فاستعن بالله ، واعلم ان  
الامة لو اجتمعت على ان ينفعوك بشيء لم ينفعوك الا بشيء قد  
كتبه الله لك ، وان اجتمعوا على ان يضروك بشيء ، لم يضروك الا  
بشيء قد كتبه الله عليك ، رفعت الأقلام ، وجفت الصحف

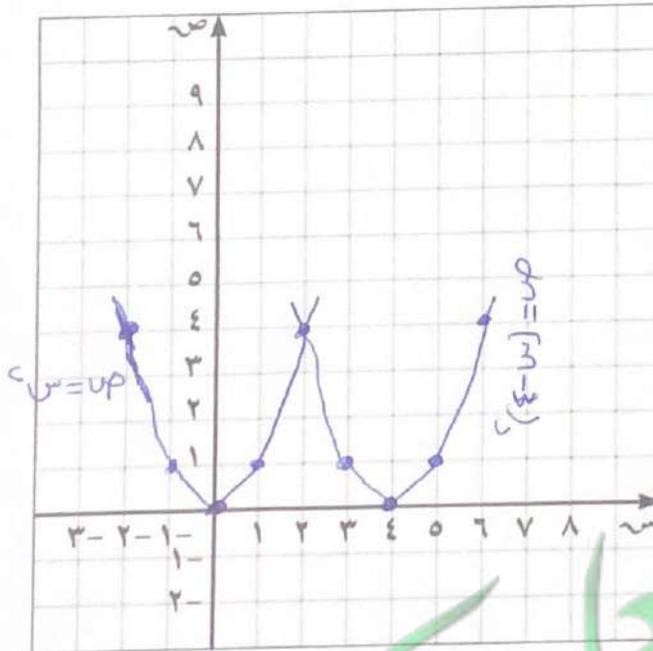
مستخدماً التمثيل البياني للدالة التربيعية  $v = s^2$ ، مثل بياناً كلاً من الدوال التالية

١  $v = s^2 - 3$



إزاحة بيان الدالة  $v = s^2$   
٣ وحدات للأسفل

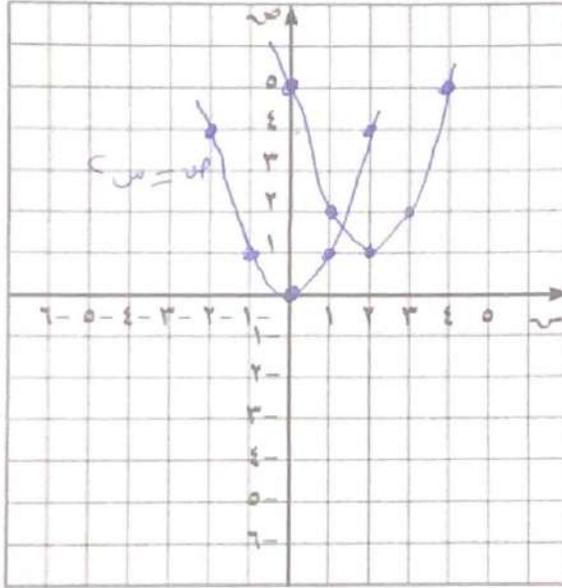
٢  $v = (s - 4)^2$



إزاحة بيان الدالة  $v = s^2$   
٤ وحدات لليمين

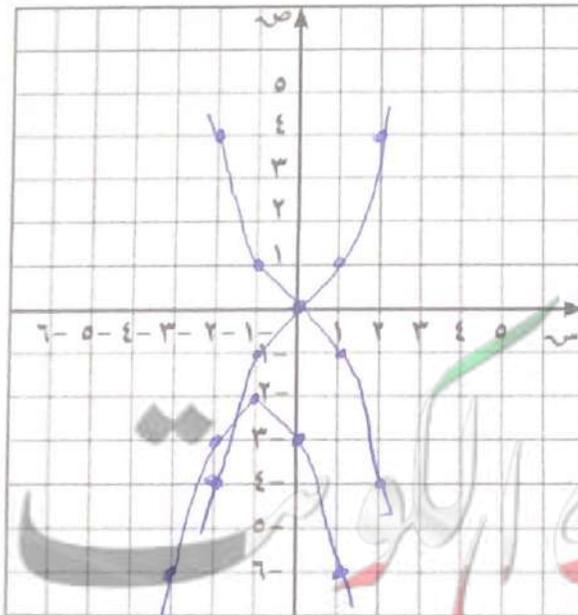
مستخدماً التمثيل البياني للدالة التربيعية  $v = s^2$ ، مثل بيانياً كلاً من الدوال التالية

$$v = (s - 2)^2 + 1$$



إزاحة بيانه الدالة  $v = s^2$   
وحدتين لليمين  
ووحدة واحدة للأعلى

$$v = -(s + 1)^2 - 2$$

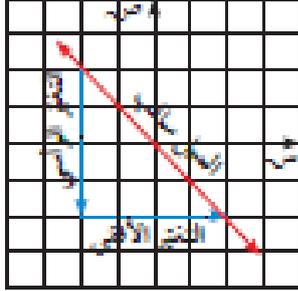


إزاحة بيانه الدالة  $v = s^2$   
وحدة واحدة لليسار  
وحدتين للأسفل

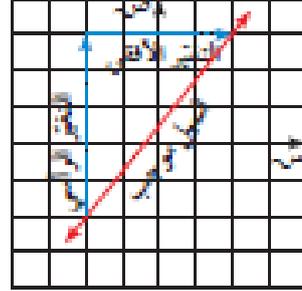
الوحدة الثانية : المعادلات الخطية ، المتباينات الخطيةالدرس الاول: الميل

إذا كانت ا (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) نقطتين في المستوى الاحداثي فان :-

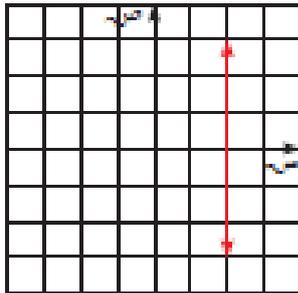
$$\text{ميل ا ب} = \frac{\text{التغير الراسي}}{\text{التغير الافقي}} = \frac{\text{ص٢} - \text{ص١}}{\text{س٢} - \text{س١}} \quad \text{س١} \neq \text{س٢}$$



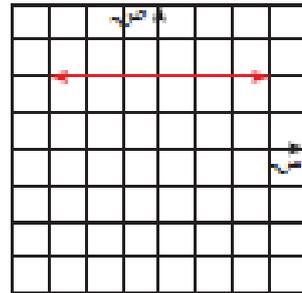
ميل المستقيم سالب



ميل المستقيم موجب



المستقيم الراسي ليس له ميل



ميل المستقيم الأفقي يساوي صفراً

مثال (١) اوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين في كل مما يلي :

(ا) ا (٢ ، ١) ، ب (٤ ، ٣)

الحل:

$$\text{الميل} = \frac{\text{ص٢} - \text{ص١}}{\text{س٢} - \text{س١}}$$

$$\text{ميل ا ب} = \frac{٣ - ١}{٤ - ٢} = \frac{٢}{٢} = ١$$

(ب) د ( - ١ ، ٦ ) ، هـ ( ٤ ، ٥ )

**الحل:**

$$\text{ص} ٢ - \text{ص} ١$$

$$\frac{\text{ص} ٢ - \text{ص} ١}{\text{س} ٢ - \text{س} ١} = \text{الميل}$$

$$\text{ميل ا ب} = \frac{٦ - ٥}{(١-) - ٤} = \frac{١ -}{٥}$$

**مثال (٢)** اوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته :

$$(١) \text{ ص} = ٧ \text{ س} + ١$$

**الحل :**

$$\text{ص} = \text{م} + \text{س} + \text{ب}$$

$$\text{الميل م} = ٧ ، \text{الجزء المقطوع ب} = ١$$

$$(ب) \text{ ص} = ٥ - ٧ \text{ س}$$

**الحل :**

$$\text{ص} = ٥ - ٢ \text{ س}$$

$$\text{الميل م} = ٢ - ، \text{الجزء المقطوع ب} = ٥ -$$

$$(ج) \text{ ص} = ٥ \text{ س}$$

**الحل :**

$$\text{الميل م} = ٥ ، \text{الجزء المقطوع ب} = ٠$$

$$(د) ٢ \text{ س} + \text{ص} = ١$$

**الحل:**

$$\text{ص} = ١ - ٢ \text{ س}$$

$$\text{الميل} = ٢ - ، \text{الجزء المقطوع ب} = ١$$

$$(هـ) \quad ٣ \text{ ص} - ٦ \text{ س} + ٧ = ٠$$

الحل :

$$\begin{aligned} ٣ \text{ ص} = ٦ \text{ س} - ٧ & \quad \text{بقسمة المعادلة على ٣} \\ \frac{٧}{٣} - ٢ \text{ س} = \text{ص} & \\ \text{م} = ٢ & \end{aligned}$$

$$\text{ب} = \frac{٧}{٣}$$

$$(و) \quad ٢ \text{ ص} = ٣ \text{ س} + ٨$$

الحل :

$$\text{ص} = \frac{٣}{٢} \text{ س} + ٤$$

$$\text{م} = \frac{٣}{٢}$$

$$\text{ب} = ٤$$

الفرق بين الأغبياء والاذكياء أن الأغبياء يملكون حلمًا  
أما الأذكياء يملكون هدفًا

الدرس الثاني: المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة

ليكن  $l$  هو ميل  $l$  ،  $m$  هو ميل  $l$  :  $\leftrightarrow$   $\leftrightarrow$

$2m = 1m$   $\leftrightarrow$   $2l // 1l$  \*

$2m = 1m$   $\leftrightarrow$   $2l \perp 1l$  \*

$$\frac{1 -}{2m} = 1m : \text{اي ان : } 1m$$

مثال (١) :

اكمل ما يلي :

ميل $l$	ميل المستقيم الموازي له	ميل المستقيم العمودي عليه
٢	٢	$\frac{1 -}{2}$
$\frac{2 -}{3}$	$\frac{2 -}{3}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	٤ -
$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5 -}{2}$

مثال (٢):

إذا كان ن يمر بالنقطتين ا ( - ٣ ، ٥ ) ، ب ( - ٤ ، ٣ ) ، وكانت معادلة ك : ص = ٢س + ٧ ،  
فأثبت ان ن // ك

الحل : ن يمر بالنقطتين

$$\text{ميل ن} = \frac{\text{ص} - ٢\text{ص}}{\text{س} - ١\text{س}} = \frac{٥ - ٣}{(-٣) - ٤} = \frac{٢ - ٢}{١ - ٢} = ٢$$

معادلة ك : ص = ٢س + ٧

$$\text{ميل ك} = ٢$$

$$\text{ميل ن} = \text{ميل م}$$

$$\therefore \text{ن} // \text{م}$$

مثال (٣):

إذا كان ل يمر بالنقطتين ف ( ٤ ، ٦ ) ، ع ( ٦ ، ١ ) ، وكانت معادلة ك : ص =  $\frac{٢}{٥}$ س - ٤ ،  
فأثبت ان ل  $\perp$  ك

الحل : ل يمر بالنقطتين ف ، ع

$$\text{ميل ل} = \frac{\text{ص} - ٢\text{ص}}{\text{س} - ١\text{س}} = \frac{٦ - ١}{٤ - ٦} = \frac{٥ - ٥}{٢} = ١$$

$$\text{معادلة ك : ص} = \frac{٢}{٥}\text{س} - ٤$$

$$\text{ميل ك} = \frac{٢}{٥}$$

$$\text{ميل ل} \times \text{ميل ك} = \frac{٥ - ٥}{٢} \times \frac{٢}{٥} = ١ - ١ = ٠$$

$$\therefore \text{ل} \perp \text{ك}$$

مثال (٤)

إذا كان  $\vec{L} \perp \vec{N}$  ، ومعادلة  $\vec{L}$  : ص = ٢س + ١ اوجد ميل  $\vec{N}$

الحل:

$$\text{معادلة } \vec{L} : \text{ص} = 2\text{س} + 1$$

$$\text{ميل } \vec{L} = 2$$

$$\vec{N} \perp \vec{L}$$

$$\therefore \text{ميل } \vec{N} = \frac{1}{\text{ميل } \vec{L}} = \frac{1}{2}$$

مثال (٥)

إذا كان ميل  $\vec{M}$  هو  $\frac{1}{4}$  ، حدد ايا من المستقيمين التاليين عمودي على  $\vec{M}$  ن  
(١)  $\vec{E}$  الذي معادلته : ص = ٢س - ٨ - ٣ = ٠

الحل:

$$\text{ص} = 2\text{س} + 8 - 3 \text{ بالقسمة على } 2$$

$$\text{ص} = 4\text{س} + 2$$

$$\text{ميل } \vec{E} = 4$$

$$\text{ميل } \vec{M} \times \text{ميل } \vec{E} = 1 \times 4 = 4 \neq -1$$

$$\vec{E} \text{ ليس عمودي على } \vec{M}$$

(ب) ا ب الذي يمر بالنقطتين (٦، ٩) ، (٧، ٥)

الحل:

$$\text{ميل } \vec{AB} = \frac{\text{ص} - 2\text{ص}}{\text{س} - 2\text{س}} = \frac{9 - 5}{6 - 7} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$\text{ميل } \vec{M} \times \text{ميل } \vec{AB} = 1 \times (-4) = -4 \neq -1$$

$$\therefore \vec{AB} \perp \vec{M}$$

**مثال (٦)**

إذا كان  $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$  ، يمر بالنقطتين  $A(3, 5)$  ،  $B(8, 6)$  فاوجد ميل  $\overleftrightarrow{CD}$

الحل: الميل =  $\frac{ص٢ - ص١}{س٢ - س١} = \frac{٦ - ٥}{٨ - ٣} = ١$

معلمة  $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$  :  
 $١ \cdot ١ = -١$  ميل  $\overleftrightarrow{CD} = -١$

**مثال (٧)**

إذا كان  $\overleftrightarrow{MN}$  يمر بالنقطتين  $M(2, 6)$  ،  $N(7, 6)$  ،  
 كان  $\overleftrightarrow{HT} \parallel \overleftrightarrow{MN}$  يمر بالنقطتين  $H(2, 1)$  ،  $T(1, 5)$  أثبت ان  $\overleftrightarrow{HT} \parallel \overleftrightarrow{MN}$

الحل:  
 ميل  $\overleftrightarrow{MN} = \frac{٦ - ٦}{٧ - ٢} = ٠$   
 ميل  $\overleftrightarrow{HT} = \frac{١ - ٥}{٢ - ١} = ٠$

∴ ميل  $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{HT}$

**مثال (٨)** : إذا كانت معادلة  $\overleftrightarrow{K}$  :  $ص = ٤س + ٣$

ومعادلة  $\overleftrightarrow{N}$  :  $ص = ٤س - ١٦$  فهل المستقيمان متوازيان وضح السبب

الحل:

ميل  $\overleftrightarrow{K} = ٤$

$\overleftrightarrow{N}$  :  $ص = ٤س - ١٦$  بالقسمة على ٤

$ص = ٤س - ٤$

ميل  $\overleftrightarrow{N} = ٤$

ميل  $\overleftrightarrow{K} =$  ميل  $\overleftrightarrow{N}$  إذا  $\overleftrightarrow{K} \parallel \overleftrightarrow{N}$

**مثال (٧)** اذا كان  $a$  يمر بالنقطتين  $(1, 8)$  ،  $(3, 4)$

، ومعادلة  $b$  :  $10x - 6y = 5$  ، فهل المستقيمان متعامدان

الحل:

$$\frac{3 - 1}{5} = \frac{4 - 8}{8 - 3} = \frac{ص ٢ - ص ١}{س ١ - س ٢} = \text{ميل } a$$

$$b : 10x - 6y = 5$$

$$- 6y + 10x = 5 \text{ بالقسمة على } 6$$

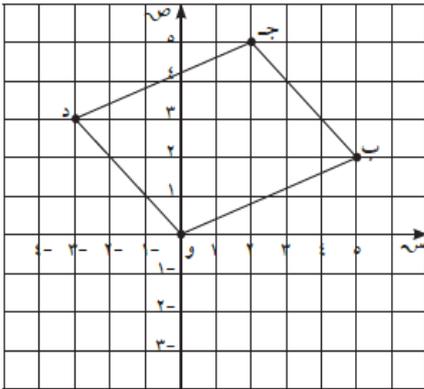
$$ص \frac{5}{6} + س \frac{5}{3} = ص$$

$$\text{ميل } b = \frac{5}{3}$$

$$\text{ميل } a \times \text{ميل } b = \frac{5}{3} \times \frac{3}{5} = 1$$

اذا  $a \perp b$

**مثال (٨)**: في الشكل الرباعي و  $b$  ج د ، أثبت ان  $a \parallel b$  و  $c \parallel d$



الحل: و  $b$  يمر بالنقطتين  $(0, 0)$  ،  $(2, 5)$

$$\text{ميل } b = \frac{5 - 0}{2 - 0} = \frac{5}{2}$$

$$d \text{ ج يمر بالنقطتين } d(-3, 3) \text{ ، } j(5, 2)$$

$$\text{ميل } d \text{ ج} = \frac{3 - 5}{(-3) - 2} = \frac{2}{5}$$

$$\text{بما ان ميل } b = \text{ميل } d \text{ ج}$$

$$\text{اذا } b \parallel d \text{ ج}$$

مثال (٩):

إذا كان ك  $\perp$  ل حيث معادلة ك : ٨ س - ٢ ص = ٩ اوجد ميل ل  $\longleftrightarrow$

الحل:

$$\text{ك : } \longleftrightarrow \text{ ٨ س - ٢ ص = ٩}$$

$$\text{٢ - ص = ٨ س + ٩} \quad \text{بالقسمة على - ٢}$$

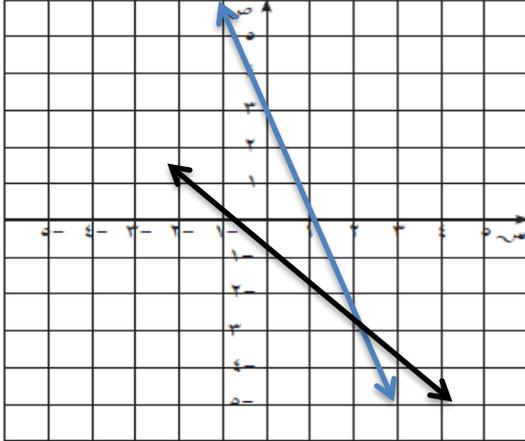
$$\text{ص = ٤ س + } \frac{٩}{٢}$$

$$\text{ميل ك} \longleftrightarrow \text{ = ٤}$$

$$\text{م . ل} \longleftrightarrow \text{ ك } \perp \text{ ل}$$

$$\therefore \text{ ميل ل} \longleftrightarrow \text{ = } \frac{١}{٤}$$

التركيز في الدراسة معناه تبعد عنك التليفون نهائي

الدرس الثالث : حل معادلتين خطيتين من الدرجة الاولى في متغيرينمثال (١)

اوجد مجموعة المعادلتين الاتيتين بيانيا :

$$ص + س = ١ ، \quad ص + ٣س = ٣$$

الحل :

\* نكتب معادلتنا المستقيمين على الصورة :

$$ص = ١ - س ، \quad ص = ٣ - ٣س$$

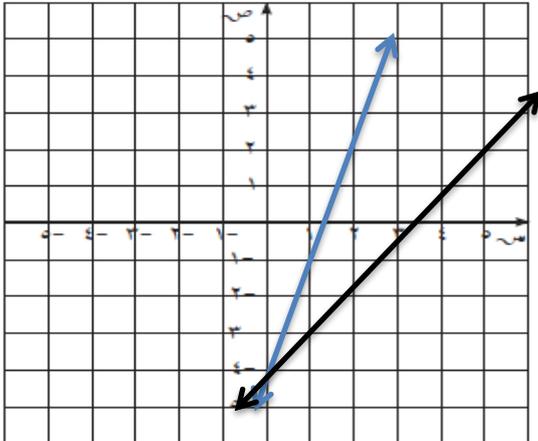
\* نرسم بيان المستقيمين :

٢	١	٠	س
٣-	٢-	١-	ص

٢	١	٠	س
٣-	٠	٣	ص

المستقيمان تقاطعا في النقطة ( ٢ ، - ٣ )

$$\{ ( ٢ ، - ٣ ) \} = \text{مجموعة الحل}$$

مثال (٢)

اوجد مجموعة المعادلتين الاتيتين بيانيا :

$$ص - س = ٤ ، \quad ص + ٣س = ٤$$

الحل :

\* نكتب معادلتنا المستقيمين على الصورة :

$$ص = ٤ + س ، \quad ص = ٤ - ٣س$$

\* نرسم بيان المستقيمين :

٢	١	٠	س
٢-	٣-	٤-	ص

٢	١	٠	س
٢	١-	٤-	ص

المستقيمان تقاطعا في النقطة ( ٠ ، - ٤ )

$$\{ ( ٠ ، - ٤ ) \} = \text{مجموعة الحل}$$

**الدرس الرابع : المتباينات الخطية ( منطقة الحل المشترك )**

خطوات ايجاد منطقة الحل لمتباينة من الدرجة الاولى في متغيرين بيانيا

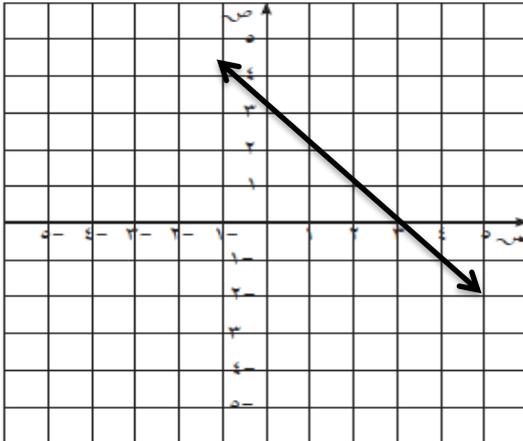
(١) نرسم خط الحدود للمتباينة باستخدام الخط المتصل في حالة :  $\geq$  ،  $\leq$  والخط المتقطع في حالة  $>$  ،  $<$

(٢) نقوم بتحديد المنطقة التي تمثل جانب منطقة حل المتباينة ولتحديد هذا الجانب نختر اي نقطة لا تنتمي الي خط الحدود ونعوض بها في المتباينة اذا نتج عبارة صحيحة يكون هذا الجانب هو جانب منطقة الحل واذا نتج عبارة غير صحيحة يكون الجانب الاخر هو جانب منطقة الحل

(٣) في حالة :  $\leq$  ،  $\geq$  تتكون منطقة الحل من مجموعة نقاط خط الحدود اتحاد مجموعة نقاط جانب الحل

وفي حالة :  $>$  ،  $<$  تتكون منطقة الحل من مجموعة نقاط جانب منطقة الحل فقط

(٤) نظل المنطقة التي تمثل منطقة حل المتباينة

**مثال(١):**

ارسم خط الحدود للمتباينة :  $s + v \geq 3$

الحل :

\* المعادلة المناظرة : هي  $s + v = 3$

كون جدول لقيم المعادلة المناظرة :

$$v = 3 - s$$

س	٣	٢	١
ص	٠	١	٢

ارسم خط الحدود متصل

مثال (٢):

مثل بيانيا منطقة الحل المشترك للمتباينتين :

$$ص > س ، ص \geq ٢$$

الحل :

المعادلة المناظرة :

$$ص = ٢$$

س	١	٠	١-
ص	٢	٢	٢

$$ص = س ،$$

س	١	٠	١-
ص	١	٠	١-

خط الحدود متصل

التعويض بالنقطة (٣ ، ٠)

$$٢ \geq ٠ \text{ عبارة صحيحة}$$

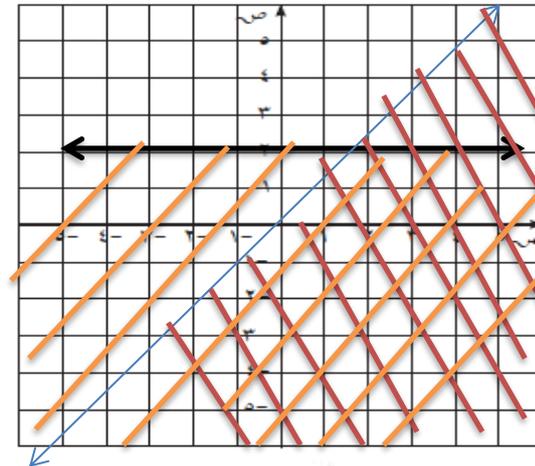
نظل المنطقة التي تنتمي اليها النقطة

خط الحدود متقطع

التعويض بالنقطة (٣ ، ٠)

$$٣ > ٠ \text{ عبارة صحيحة}$$

نظل المنطقة التي تنتمي اليها النقطة

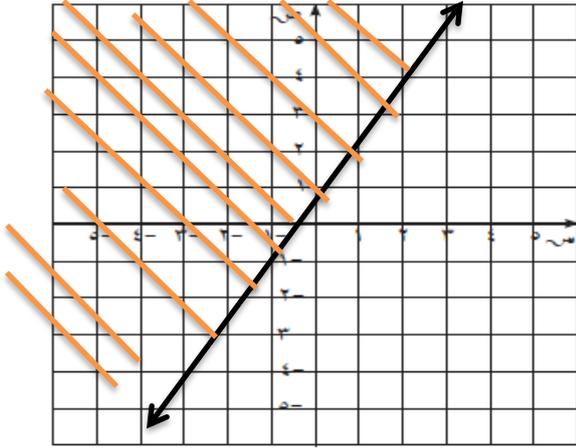


**مثال (٣)**

مثل بيانيا منطقة الحل للمتباينة:

$$ص < ٣س - ١$$

$$\text{الحل: } ص = ٣س - ١$$



س	١	٠	١-
ص	٢	١-	٤-

نرسم خط الحدود متقطع ونعوض

بالنقطة (٠، ٠) في المتباينة

$$١ - ٠ \times ٣ < ٠$$

$$١ < ٠ \text{ عبارة صحيحة}$$

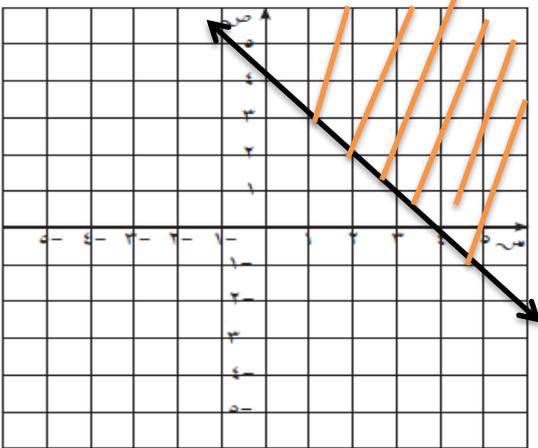
نظل المنطقة التي تنتمي اليها النقطة (٠، ٠)

**مثال (٤)**

مثل بيانيا منطقة الحل للمتباينة:

$$ص \leq ٤ - س$$

$$\text{الحل: } ص = ٤ - س$$



س	١	٠	١-
ص	٣	٤	٥

نرسم خط الحدود متقطع ونعوض

بالنقطة (٠، ٠) في المتباينة

$$٠ - ٤ \leq ٠$$

$$٠ < ٤ \text{ عبارة خاطئة}$$

نظل المنطقة التي لا تنتمي اليها النقطة (٠، ٠)

**مثال (٥):**

مثل بيانيا منطقة الحل المشترك للمتباينتين :

$$ص < ٢ س ، ص < ١ - س$$

الحل : المعادلة المناظرة :  $ص = ٢ س$ 

$$ص = ١ - س ،$$

س	١	٠	١-
ص	٠	١	٢

خط الحدود متصل

التعويض بالنقطة (٠ ، ٢)

$$٢ - ١ > ٠$$

٠ &gt; ١ - عبارة غير صحيحة

نظلل المنطقة التي لا تنتمي اليها النقطة

س	١	٠	١-
ص	٢	٠	٢-

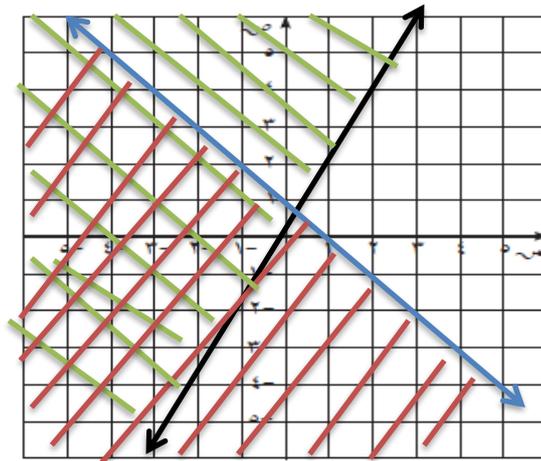
خط الحدود متقطع

التعويض بالنقطة (٠ ، ٢)

$$٢ \times ٢ < ٠$$

٠ &lt; ٤ عبارة غير صحيحة

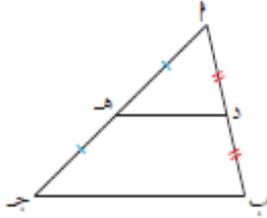
نظلل المنطقة التي لا تنتمي اليها النقطة



حافظ على صلاتك تسعد دنيا وآخرة

الوحدة الثالثة هندسة المثلثالدرس الاول : القطعة المستقيمة الواصلة بين منصفى ضلعين في مثلثنظرية :

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع .

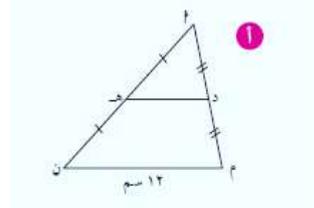


في المثلث ا ب ج :

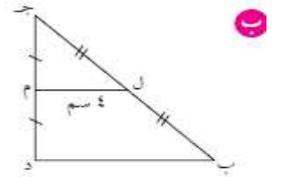
... د منتصف ا ب ، ه منتصف ا ج

$$١. \text{ د ه } // \text{ ب ج } , \text{ د ه } = \frac{١}{٢} \text{ ب ج}$$

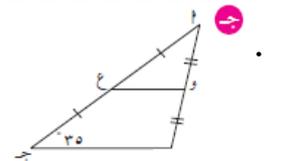
مثال (١) في كل من المثلثات التالية اكمل ( دون استخدام الادوات الهندسية )



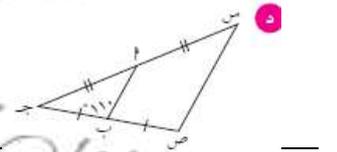
$$\text{د ه} = \frac{١}{٢} \text{ ب ج} = \frac{١}{٢} \times ١٢ \text{ سم} = ٦ \text{ سم}$$



$$\text{ب ج} = ٢ \text{ د ه} = ٢ \times ٤ = ٨ \text{ سم}$$

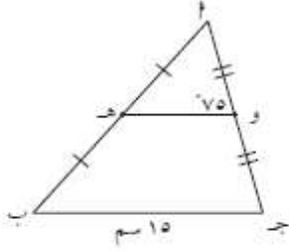


$$\text{ق ( ا ع و )} = \text{ق ( ا ب ج )} \text{ بالتوازي والتناظر} = ٣٥^\circ$$



$$\text{ق ( ص )} = \text{ق ( ا ب ج )} \text{ بالتوازي والتناظر} = ١١٠^\circ$$

**مثال (٢):** في الشكل المقابل ا ب ج مثلث فيه :



او = وج ، اه = هب ، ب ج = ١٥ سم ، ق (ا و ه) =  $75^\circ$

اوجد بالبرهان : (١) طول و ه (٢) ق (ج) (ج)

البرهان: في المثلث ا ب ج

.. و منتصف ا ج ، ه منتصف ا ب

∴ و ه =  $\frac{1}{2}$  ب ج ، و ه // ج ب (نظرية)

حل بإيدك كل المسائل علشان تبقي متميز

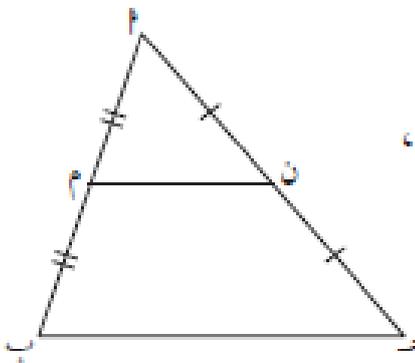
و ه =  $\frac{1}{2} \times 15 = 7,5$  سم

ق (ج) = ق (ا و ه) بالتوازي والتناظر

ق (ج) =  $75^\circ$

**مثال (٢):** في الشكل المقابل ا ب ج مثلث فيه :

م منتصف ا ب ، ن منتصف ا ج ، ا ب = ١٠ سم ، ا ج = ١٥ سم ، ب ج = ١١ سم



اوجد بالبرهان : (١) طول ن م (٢) محيط  $\Delta$  ان م

البرهان: في المثلث ا ب ج

.. م منتصف ا ب ، ن منتصف ا ج

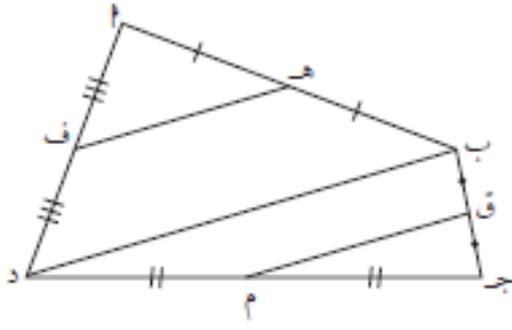
∴ م ن =  $\frac{1}{2}$  ب ج (نظرية)

م ن =  $\frac{1}{2} \times 11 = 5,5$  سم

ان =  $\frac{1}{2} \times 13 = 6,5$  سم

محيط  $\Delta$  ان م = ان + م ن + ا م =  $6,5 + 5,5 + 5 = 17$  سم

**مثال (٣)** في الشكل الرباعي ا ب ج د :



إذا كان هـ ، ف ، م ، ق منصفات الاضلاع

بـ ا ، ا د ، د ج ، ج ب على الترتيب

اثبت ان هـ ف // ق م

البرهان : في المثلث ا ب د

.. هـ منتصف ا ب ، ف منتصف ا د

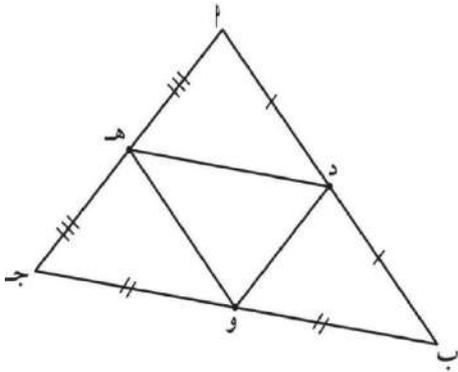
$$\therefore \text{هـ ف} = \frac{1}{2} \text{ ب د} ، \text{هـ ف} // \text{ب د} \quad (١)$$

في  $\triangle$  ج ب د

.. ق منتصف ب ج ، م منتصف ج د

$$\therefore \text{ق م} // \text{ب د} \quad (٢)$$

من (١) ، (٢) هـ ف // ق م



**مثال (٤)** : في الشكل المقابل ا ب ج مثلث فيه :

ا ب = ١٢ سم ، ا ج = ١١ سم ، ب ج = ١٤ سم

د ، هـ ، و منصفات ا ب ، ا ج ، ب ج على الترتيب

اوجد بالبرهان : (١) محيط  $\triangle$  ا ب ج

البرهان: في المثلث ا ب ج

.. د منتصف ا ب ، و منتصف ب ج

$$\text{د و} = \frac{1}{2} \text{ ا ج} = \frac{1}{2} \times ١١ = ٥,٥ \text{ سم}$$

.. هـ منتصف ب ج ، و منتصف ا ج

$$\therefore \text{و هـ} = \frac{1}{2} \text{ ا ب} = \frac{1}{2} \times ١٢ = ٦ \text{ سم}$$

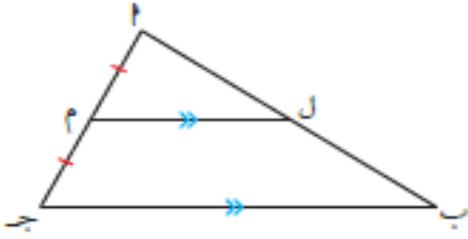
.. هـ منتصف ا ج ، د منتصف ا ب

$$\therefore \text{هـ د} = \frac{1}{2} \text{ ب ج} = \frac{1}{2} \times ١٤ = ٧ \text{ سم}$$

$$\text{محيط } \triangle \text{ د هـ و} = \text{ا ن} + \text{ن م} + \text{م و} = ٥,٥ + ٦ + ٧ = ١٨,٥ \text{ سم}$$

نظرية :

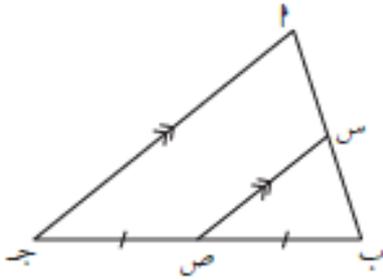
إذا رسم مستقيم من منتصف احد اضلاع مثلث موازيا ضلعا اخر فيه ، فانه ينصف الضلع الثالث



في المثلث ا ب ج :

.. م منتصف ا ج ، ل م // ب ج

: ل منتصف ا ب

مثال(٥):

ا ب ج مثلث فيه : ص منتصف ب ج ،

ص س // ج ا ، ا س = ٦ سم

اوجد بالبرهان ب س

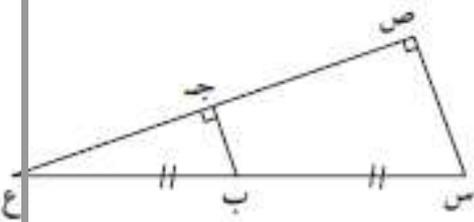
البرهان:

في المثلث ا ب ج :

.. ص منتصف ب ج ، س س // ج ا

: س منتصف ا ب ( نظرية )

: ب س = ا س = ٦ سم

مثال(٦):

ا ب ج مثلث قائم الزاوية في ص ، ب منتصف س ع ،

ب ج  $\perp$  ص ع ، اثبت ان ص ج = ع ج

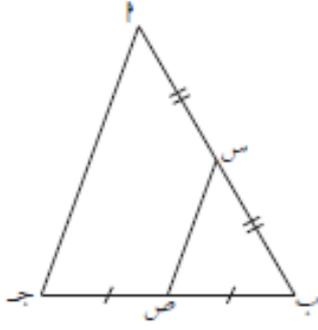
البرهان : .. ق ( ص ) = ق ( ب ج ع ) = ٩٠° وهما في وضع تناظر

.. س س // ب ج (١)

: ب منتصف س ع (٢)

: ج منتصف ص ع

: ص ج = ع ج

مثال (٧):

ا ب ج مثلث فيه : س منتصف ا ب ، ص منتصف ب ج  
 ق (ب) = ٦٠° ، ق (ا) = ٥٠° ، اوجد ق (س ص ب)  
 البرهان :

في المثلث ا ب ج :

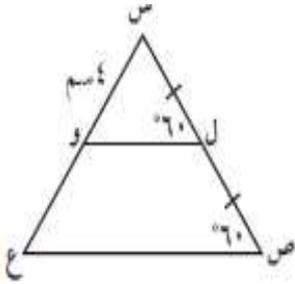
$$ق (ج) = ١٨٠ - (٦٠ + ٥٠) = ١٨٠ - ١١٠ = ٧٠$$

(لان مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°)

.. س منتصف ا ب ، ص منتصف ب ج

∴  $\overline{س ص} \parallel \overline{ا ج}$

∴ ق (س ص ب) = ق (ج) = ٧٠° بالتوازي والتناظر

مثال (٨):

س ص ع مثلث فيه : ل منتصف س ص ،  
 ق (ص) = ق (س ل و) = ٦٠° ، س و = ٤ سم

اوجد طول س ع

البرهان : .. ق (ص) = ق (س ل و) = ٦٠° وهما في وضع تناظر

∴ ل و  $\parallel$  ص ع (١)

∴ ل منتصف س ص (٢)

∴ من (١) ، (٢) و منتصف س ع

$$\therefore س ع = ٢ \times ٤ = ٨ \text{ سم}$$

مثال (٩):

ا ب ج مثلث فيه : ا ج = ١٦ سم ، ه منتصف ا ب ،

د منتصف ج ب ، ك منتصف ب ه

ك ل // ه د ، اوجد ك ل

البرهان:

في المثلث ا ب ج :

.. ه منتصف ا ب ، د منتصف ج ب

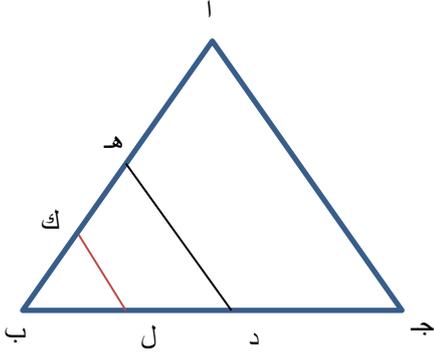
$$\therefore ه د = \frac{1}{2} ا ج = \frac{1}{2} \times ١٦ = ٨ \text{ سم}$$

في مثلث ب ه د

.. ك منتصف ب ه ، ك ل // ه د

∴ ل منتصف د ب

$$\therefore ك ل = \frac{1}{2} ه د = \frac{1}{2} \times ٨ = ٤ \text{ سم}$$



الهندسة والبرهان ممتع لما تعطيله حقه وتدرسه بجد واجتهاد

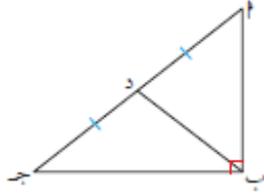
الدرس الثاني: القطعة المستقيمة الواصلة من راس الزاوية القائمة الى منتصف الوترنظرية

طول القطعة المستقيمة الواصلة من راس الزاوية القائمة الى منتصف الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر

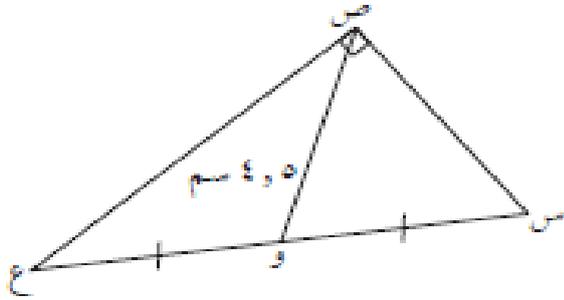
في المثلث ا ب ج :

.. ق (ب) = ٩٠° ، د منتصف ا ج

$$\therefore \text{ب د} = \frac{1}{2} \text{ا ج}$$

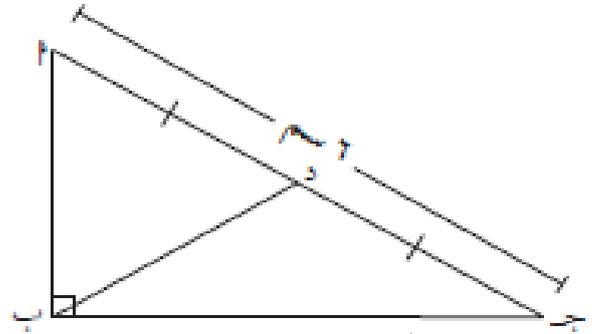


مثال (١) اكمل ما يلي (دون استخدام الادوات الهندسية) :



$$\text{س ع} = ٢ \times \text{ص و}$$

$$٩ \text{ سم} = ٤,٥ \times ٢ =$$



$$\text{طول ب د} = \frac{1}{2} \text{ا ج}$$

$$٣ \text{ سم} = ٦ \times \frac{1}{2} =$$

مثال (١) ا ب ج قائم الزاوية في ب ، ا ب = ٣ سم ، ب ج = ٤ سم ، د منتصف ا ج

اوجد بالبرهان طول ب د

البرهان:

.. ا ب ج مثلث قائم الزاوية في ب (بتطبيق فيثاغورث)

$$\therefore \text{ا ج}^2 = \text{ا ب}^2 + \text{ب ج}^2$$

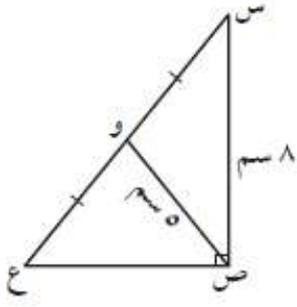
$$٢٥ = ٩ + ١٦ = ٣^2 + ٤^2 =$$

$$\therefore \text{ا ج} = ٥ \text{ سم}$$

.. د منتصف ا ج

$$\therefore \text{ب د} = \frac{1}{2} \text{ا ج} = ٥ \times \frac{1}{2} = ٢,٥ \text{ سم}$$

**مثال (٢)** س ص ع قائم الزاوية في ص ، و منتصف س ع ، ص و = ٥ سم ، س ص = ٨ سم



اوجد بالبرهان (١) س ع (٢) ص ع

البرهان:

.. س ص ع قائم الزاوية في ص ، و منتصف س ع

$$\therefore \text{ص و} = \frac{1}{2} \text{س ع}$$

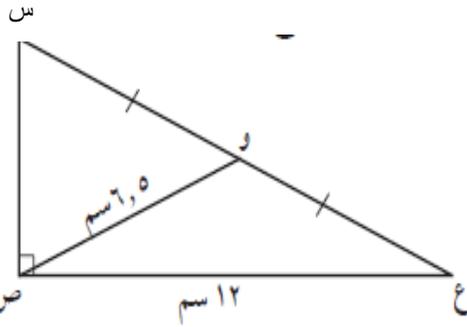
$$\therefore \text{س ع} = 2 \text{ص و} = 2 \times 5 = 10 \text{ سم}$$

$$\therefore (\text{ص ع})^2 = (\text{س ع})^2 - (\text{س ص})^2$$

$$36 = 100 - 64 = 2(8) + 2(10) =$$

$$\therefore \text{ص ع} = 6 \text{ سم}$$

بتطبيق فيثاغورث



**مثال (٤)** س ص ع قائم الزاوية في ص ، و منتصف س ع ،

ص و = ٦,٥ سم ، س ص = ١٢ سم

اوجد بالبرهان (١) س ع (٢) س ص

البرهان:

.. س ص ع قائم الزاوية في ص ، و منتصف س ع

$$\therefore \text{ص و} = \frac{1}{2} \text{س ع}$$

$$\therefore \text{س ع} = 2 \text{ص و} = 2 \times 6,5 = 13 \text{ سم}$$

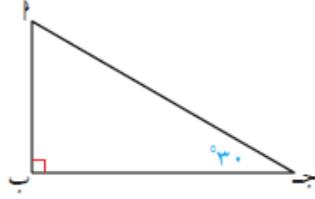
بتطبيق فيثاغورث

$$\therefore (\text{س ص})^2 = (\text{س ع})^2 - (\text{ص و})^2$$

$$25 = 169 - 144 = 2(12) + 2(13) =$$

$$\therefore \text{س ص} = 5 \text{ سم}$$

**نتيجة (١):** في المثلث الثلاثيني الستيني يكون طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها  $30^\circ$  مساويا نصف طول الوتر



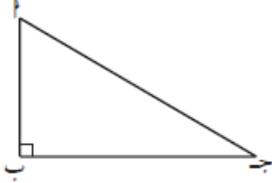
.. ا ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ، ق (ج) =  $30^\circ$

$$\therefore \text{ا ب} = \frac{1}{2} \text{ج}$$

وعكس ذلك ايضاً صحيح

**نتيجة (٢):** في المثلث القائم الزاوية اذا كان طول احد ضلعي الزاوية القائمة مساويا نصف طول الوتر،

فان طول الوتر ، فان قياس الزاوية المقابلة لهذا الضلع  $30^\circ$  ويسمى المثلث ثلاثيني ستينيا

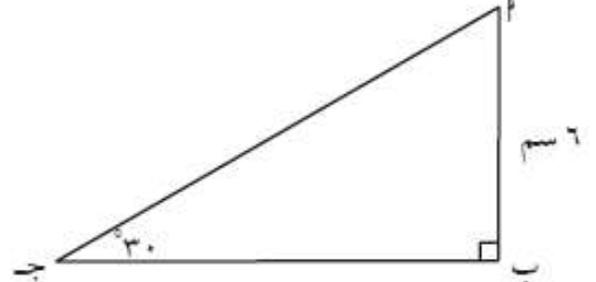
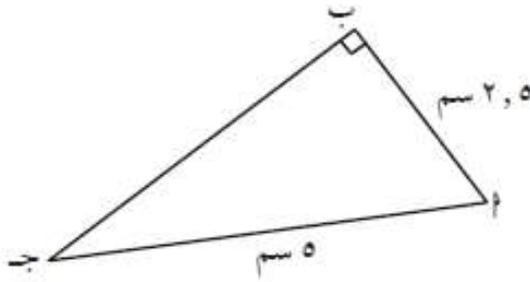


$$\therefore \text{ا ب ج} \text{ مثلث قائم الزاوية في ب ، ا ب} = \frac{1}{2} \text{ج}$$

$$\therefore \text{ق (ج)} = 30^\circ$$

∴ المثلث ا ب ج ثلاثيني ستيني

**مثال (٥):** اكمل ما يلي ( دون استخدام الادوات الهندسية ):



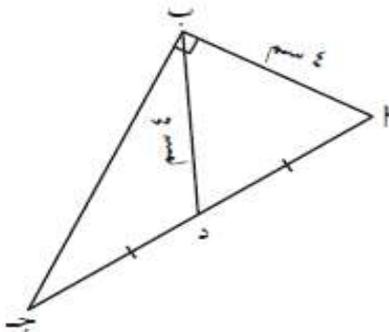
$$\text{ق (ج)} = 30^\circ$$

$$\text{ا ج} = 2 \times \text{ا ب} = 2 \times 6 = 12 \text{ سم}$$

**مثال (٦):** في الشكل المقابل:

اوجد بالبرهان : (١) ق (ج) (٢) ق (ا)

البرهان:



.. ا ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ، د منتصف ا ج

$$\therefore \text{ب د} = \frac{1}{2} \text{ا ج}$$

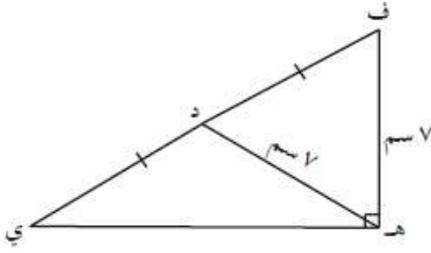
$$\therefore \text{ا ج} = 2 \text{ب د} = 2 \times 4 = 8 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{ا ب} = \frac{1}{2} \text{ا ج}$$

$$\therefore \text{ق (ج)} = 30^\circ \text{ (نتيجة)}$$

$$\text{ق (ا)} = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

مجموعات قياسات زوايا المثلث =  $180^\circ$

**مثال (٧):** في الشكل المقابل :

اوجد بالبرهان كلا مما يلي :

$$(١) \text{ ق } (\hat{ي}) \quad (٢) \text{ ق } (\hat{ف})$$

البرهان :

∴  $\Delta$  ف ه ي قائم الزاوية في ه ، د منتصف ف ي

$$\therefore \text{ ه د } = \frac{١}{٢} \text{ ف ي}$$

$$\therefore \text{ ف ي } = ٢ \times \text{ ه د } = ٢ \times ٧ = ١٤ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{ ف ه } = \frac{١}{٢} \text{ ف ي}$$

$$\therefore \text{ ق } (\hat{ي}) = ٣٠^\circ$$

$$\text{ ق } (\hat{ف}) = ٦٠^\circ \text{ (مثلث ثلاثيني ستيني)}$$

**مثال (٨):** صمم مهندس حسرا للمشاة فقام برسم المثلث في الشكل المقابل كدعامة للجسر

حيث س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ، س ع = ١٦ سم ، و منتصف س ع ،

$$\text{ ل منتصف ع ص ، ل منتصف ع ص ، ق } (\hat{ع}) = ٣٠^\circ$$

اوجد بالبرهان كلا مما يلي :

$$(١) \text{ ص و } \quad (٢) \text{ س ص } \quad (٣) \text{ و ل}$$

البرهان:-

∴ س ص ع قائم الزاوية في ص ، و منتصف س ع

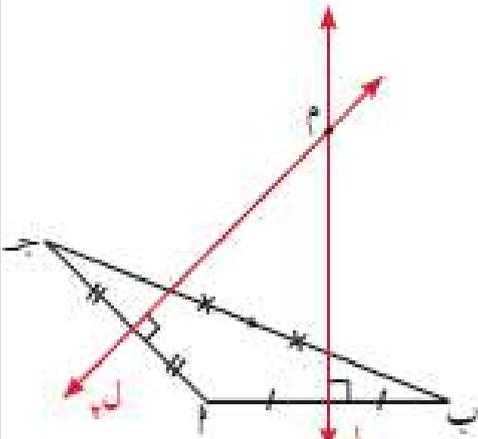
$$\therefore \text{ ص و } = \frac{١}{٢} \text{ س ع} = \frac{١}{٢} \times ١٦ = ٨ \text{ سم} \quad (١)$$

∴  $\Delta$  س ص ع مثلث ثلاثيني ستيني

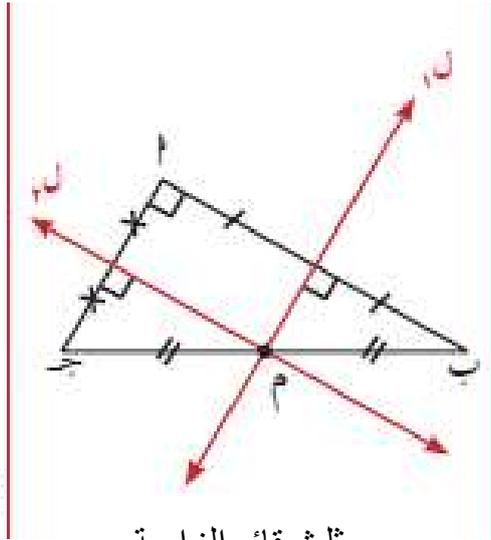
$$\therefore \text{ ص س } = \frac{١}{٢} \text{ س ع} = \frac{١}{٢} \times ١٦ = ٨ \text{ سم} \quad (٢)$$

∴ و منتصف س ع ، ل منتصف ص ع

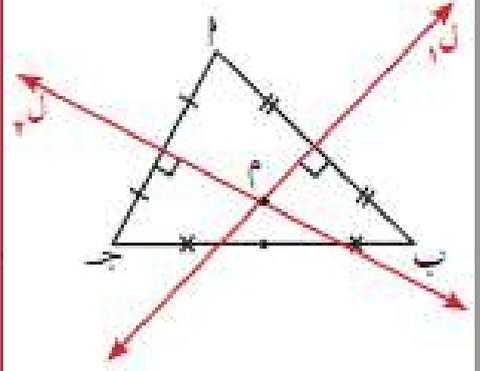
$$\therefore \text{ و ل } = \frac{١}{٢} \text{ س ص} = \frac{١}{٢} \times ٨ = ٤ \text{ سم} \quad (٣)$$

**الدرس الثالث : محاور اضلاع المثلث**

مثلث منفرج الزاوية



مثلث قائم الزاوية



مثلث حاد الزوايا

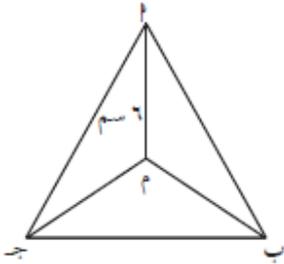
**نظرية :**

محاور اضلاع المثلث تتقاطع في نقطة واحدة

\* نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث الحاد الزوايا تقع داخله

\* نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث القائم الزاوية تقع في منتصف الوتر

\* نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث المنفرج الزاوية تقع خارجه

**مثال (١):**

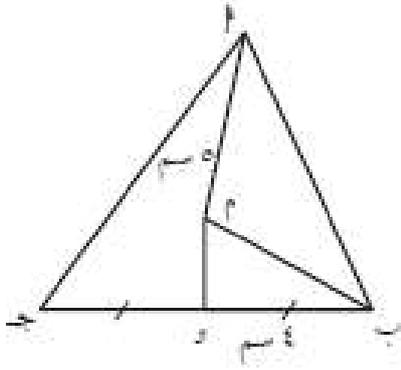
المثلث ا ب ج فيه :م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث، م ا = ب = ج = ٦ سم

اكمل ما يلي ( دون استخدام الادوات الهندسية ) :

$$م ب = ا = ب = ج = ٦ سم$$

$$م ج = ا = ب = ٦ سم$$

**مثال (٢):** المثلث ا ب ج فيه : م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث،



م ا = ٥ سم ، ب و = ٤ سم ، و منتصف ب ج

اوجد بالبرهان (١) م ب (٢) م و

البرهان:

.. م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث

$$\therefore م ب = م ا = ٥ سم$$

.. م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث، و منتصف ب ج

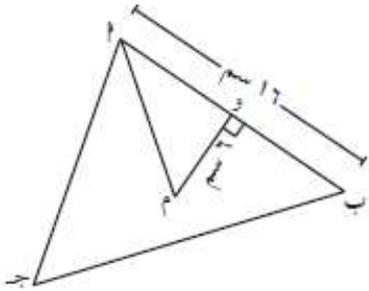
$\Delta$  ب م و قائم الزاوية في و

$$\therefore (م و)^2 = (ب م)^2 - (ب و)^2$$

$$٩ = ١٦ - ٢٥ = (٤)^2 - (٥)^2 =$$

$$م و = ٣ سم$$

**مثال (٣):** المثلث ا ب ج فيه : م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث،



م و  $\perp$  ا ب ، ا ب = ١٦ سم ، م و = ٦ سم

اوجد بالبرهان (١) م ب (٢) محيط  $\Delta$  ا م ب

البرهان:

.. م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث

$$\therefore م ب = م ا = ٥ سم$$

.. م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث، م و  $\perp$  ا ب

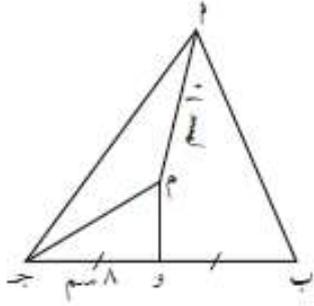
$\therefore$  و منتصف ا ب

$$او = ا ب = ١٦ \times \frac{1}{2} = ٨ سم$$

$\Delta$  ا م و قائم الزاوية في و

$$\therefore (ا م)^2 = (او)^2 + (وم)^2 = ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠$$

$$ا م = ١٠ سم \text{ محيط المثلث} = ١٠ + ١٠ + ١٦ = ٣٦ سم$$

مثال (٤):

المثلث ا ب ج فيه : م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث،

و ج = ٨ سم ، م ا = ١٠ سم ، و منتصف ب ج

اوجد بالبرهان (١) طول م ج (٢) طول م و

البرهان:

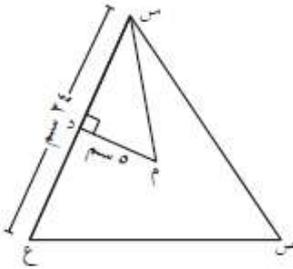
.. م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث ، و منتصف ب ج

∴ م و ⊥ ب ج م ج = م ا = ١٠ سم (١)

في Δ ج م و قائم الزاوية في و

$$\therefore (م و) = (م ج) - (وج) = (١٠) - (٨) = ٢$$

م و = ٦ سم (٢)

مثال (٥):

س ص ع مثلث فيه : م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث ،

م د ⊥ س ع ، س ع = ٢٤ سم ، م د = ٥ سم اوجد طول م ص

البرهان:

.. م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث ، م د ⊥ س ع

∴ د منتصف س ع

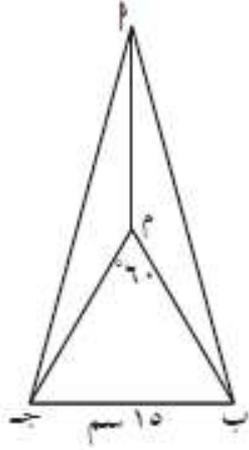
$$\therefore س د = د ع = \frac{١}{٢} س ع = \frac{١}{٢} \times ٢٤ = ١٢ سم$$

∴ Δ م س د قائم الزاوية في د

$$\therefore (م س) = (م د) + (س د) = (٥) + (١٢) = ١٧ سم$$

م س = ١٣ سم .. م نقطة تقاطع المحاور

∴ م س = م ص = م ع = ١٣ سم

مثال (٦):

المثلث ا ب ج فيه : م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث،

$$ب ج = ١٥ \text{ سم} ، ق (ب م ج) = ٦٠^\circ$$

(١) اثبت ان المثلث ب م ج متطابق الاضلاع

(٢) اوجد م ا

البرهان:

.. م نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث

$$\therefore م ج = م ب = م ا$$

..  $\Delta م ب ج$  فيه ق (ب م ج) =  $٦٠^\circ$  ، ب م = م ج

$$\therefore ق (م ب ج) = ق (م ج ب) = \frac{١٨٠^\circ - ٦٠^\circ}{٢} = ٦٠^\circ$$

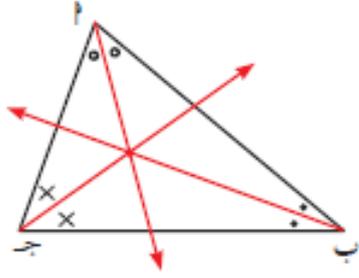
(١)  $\Delta م ب ج$  متطابق الاضلاع

$$\therefore م ب = م ج = ١٥ \text{ سم}$$

$$(٢) م ا = ١٥ \text{ سم}$$

المتميز بالرياضيات دائماً متميز في كل المواد  
ولا تنسي وصيتي ليك حل بإيدك

أحمد جمال

الدرس الرابع : منصفات الزوايا الداخلية للمثلثنظرية :

منصفات الزوايا الداخلية للمثلث تتقاطع في نقطة واحدة

مثال (١) : في الشكل المقابل :

م نقطة منصفات الزوايا الداخلية للمثلث س ص ع

اكمل ( دون استخدام الادوات الهندسية )

الحل:

$$ق (م ص ع) = ٢٠ = ق (س ص ع) = ٢٠ + ٢٠ = ٤٠$$

$$ق (ص س ع) = ١٨٠ - (٨٠ + ٤٠) = ٦٠$$

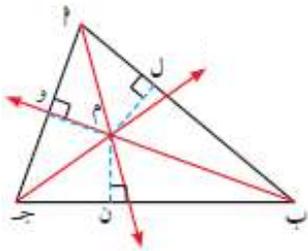
$$ق (ص س م) = \frac{١}{٢} ق (ص س ع) = ٣٠$$

نتيجة :

نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث على ابعاد متساوية من اضلاعه

.. م نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث

$$\therefore م ل = م ن = م و$$



مثال (٢) :  $\Delta$  ا ب ج فيه : م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ،

$$اذا كان ق (ا ب ج) = ٧٠ ، ق (م ج ب) = ٣٠$$

فاوجد مع البرهان ق (م ا ج)

البرهان : .. م نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث

$$\therefore م ا م = م ج م$$

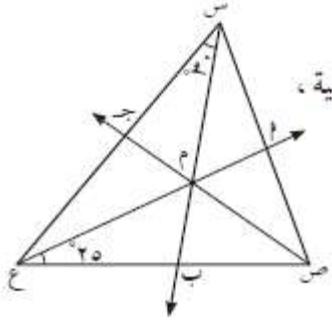
$$\therefore ق (ا ج ب) = ٢ \times ٣٠ = ٦٠$$

$$ق (ب ا ج) = ١٨٠ - [ ق (ب ج ا) + ق (ا ج ب) ]$$

$$٥٠ = [ ٦٠ + ٧٠ ] - ١٨٠$$

$$ق (م ا ج) = \frac{١}{٢} ق (ب ا ج) = ٢٥$$

**مثال (٣):**  $\Delta$  س ص ع فيه : م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ،



إذا كان  $\angle C = 30^\circ$  ،  $\angle V = 25^\circ$  ، ق (م س ع) =  $30^\circ$

فأوجد مع البرهان كلا مما يلي

(١) ق (س ص ع) (٢) ق (م ص ع)

البرهان : .. م نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث

∴  $\angle C = 2 \times \angle M$  ← منصف ع

∴ ق (س ص ع) =  $2 \times 25 = 50^\circ$

∴  $\angle S = 2 \times \angle M$  ← منصف س

∴ ق (ص س ع) =  $2 \times 30 = 60^\circ$

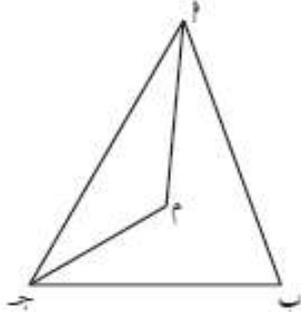
∴ مجموع قياسات زوايا المثلث =  $180^\circ$

ق (س ص ع) =  $180^\circ - [60^\circ + 50^\circ] = 70^\circ$

∴  $\angle M = \frac{1}{2} \times 70^\circ$  ← منصف ص

ق (م ص ع) =  $\frac{1}{2} \times 70^\circ = 35^\circ$

**مثال (٤):**  $\Delta$  ا ب ج فيه : م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ،



ق (ا ب ج) = ق (ب ا ج) =  $40^\circ$

فأوجد مع البرهان ق (ا ج م)

البرهان :

∴ م نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث

∴  $\angle A = 2 \times \angle M$  ← منصف ا ،

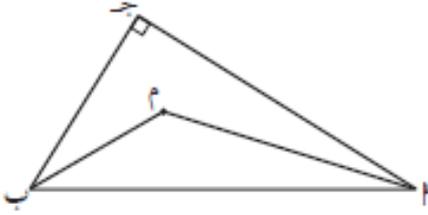
∴ ق (ب ا ج) =  $2 \times 40 = 80^\circ$

ق (ج ا ب) =  $180^\circ - [80^\circ + 40^\circ]$

=  $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

∴  $\angle M = \frac{1}{2} \times 60^\circ$  ← منصف ج

ق (ا ج م) =  $\frac{1}{2} \times 60 = 30^\circ$

مثال (٤):

Δ ا ب ج فيه : م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ،

$$\text{ق (ج م}^\wedge\text{ب)} = 110^\circ$$

فاوجد بالبرهان ق (ج ا^\wedge ب)

البرهان : .. Δ ا ب ج قائم الزاوية

$$\text{ق (ج ا}^\wedge\text{ب)} + \text{ق (ج ا}^\wedge\text{ب)} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \text{ (مجموع قياسات المثلث} = 180^\circ)$$

.. م نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث

$$\therefore \text{ق (م ا}^\wedge\text{ب)} + \text{ق (م ب}^\wedge\text{ا)} = \frac{1}{2} [\text{ق (ج ا}^\wedge\text{ب)} + \text{ق (ج ب}^\wedge\text{ا)}]$$

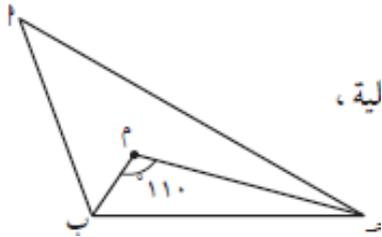
$$= \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$$

في Δ ا م ب

$$\text{ق (ا م}^\wedge\text{ب)} = 180^\circ - [\text{ق (م ا}^\wedge\text{ب)} + \text{ق (م ب}^\wedge\text{ا)}]$$

$$= 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

.....

مثال (٥):

Δ ا ب ج فيه : م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ،

$$\text{ق (ج م}^\wedge\text{ب)} = 110^\circ$$

فاوجد بالبرهان ق (ج ا^\wedge ب)

البرهان : في Δ م ب ج قائم ق (ج م^\wedge ب) = 110^\circ

.. مجموع قياسات المثلث = 180^\circ

$$\text{ق (م ج}^\wedge\text{ب)} + \text{ق (م ا}^\wedge\text{ب)} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

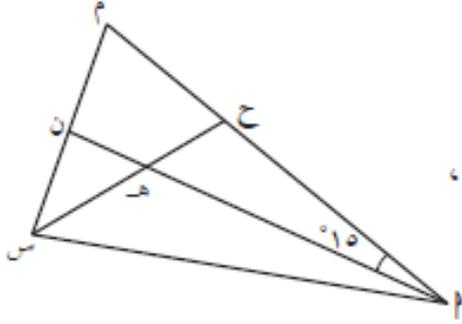
.. م نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث

$$\therefore \text{ق (ا ج}^\wedge\text{ب)} + \text{ق (ا ب}^\wedge\text{ج)} = 2 \times 70^\circ = 140^\circ$$

$$\text{ق (ج ا}^\wedge\text{ب)} = 180^\circ - [\text{ق (ا ج}^\wedge\text{ب)} + \text{ق (ا ب}^\wedge\text{ج)}]$$

$$= 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ \text{ (مجموع قياسات المثلث} = 180^\circ)$$

**مثال (٦):** م اس مثلث فيه : ق (م) =  $70^\circ$  ،



ق (م) =  $15^\circ$  ، ق (اس) =  $40^\circ$  ،

إذا كان س ح منصف س ، ان  $\cap$  س ح = { هـ } ← ← ←

فأثبت ان هـ نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث

البرهان: .. س ح منصف س ←

$$ق (م س) = 80^\circ = 40^\circ \times 2$$

.. مجموع قياسات زوايا المثلث =  $180^\circ$

$$ق (م) + [ق (س) + ق (م)] - 180^\circ = ق (م س)$$

$$30^\circ = 150^\circ - 180^\circ = (80^\circ + 70^\circ) - 180^\circ =$$

$$.. ق (م س) = \frac{1}{2} ق (م س)$$

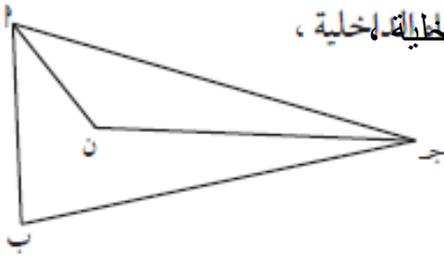
.. ان منصف ا ← ←

.. ان  $\cap$  س ح = { هـ }

.. هـ نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث

**مثال (٧):**

المثلث ا ب ج فيه : ن نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية،



إذا كان : ق (ن ج) =  $50^\circ$  + ق (ن ا ج) =  $50^\circ$

فأوجد بالبرهان ق (ب)

البرهان:

.. ن نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث

$$ق (ن ج) + ق (ن ا ج) = 50^\circ$$

$$.. ق (ا ج ب) + ق (ب ا ج) = 100^\circ = 50^\circ \times 2$$

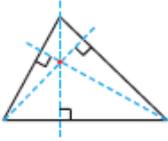
.. مجموع قياسات زوايا المثلث =  $180^\circ$

$$.. ق (ب) = 180^\circ - [ق (ا) + ق (ج)]$$

$$80^\circ = 100^\circ - 180^\circ =$$

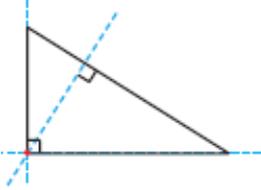
الدرس الخامس: الاعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على اضلاعهنظرية:

الاعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على اضلاعه تتقاطع في نقطة واحدة



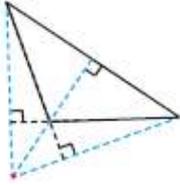
\*\* نقطة تقاطع الاعمدة المرسومة من رؤوس المثلث

الحاد الزوايا على اضلاعه تقع داخل المثلث



\*\* نقطة تقاطع الاعمدة المرسومة من رؤوس المثلث

القائم الزوايا على اضلاعه هي راس الزاوية القائمة



\*\* نقطة تقاطع الاعمدة المرسومة من رؤوس المثلث

المنفرج الزوايا على اضلاعه تقع خارج المثلث

مثال (١)

(١) في المثلث ا ب ج : م نقطة تقاطع الاعمدة المرسومة

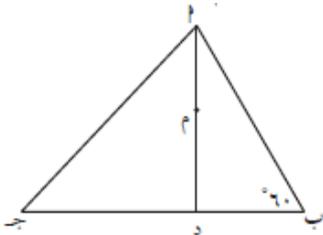
من رؤوس المثلث على اضلاعه ، م و ا د

اكمل (دون استخدام الادوات الهندسية):

الحل:

$$ق ( ا د ب ) = ٩٠^\circ$$

$$ق ( د ا ب ) = ٣٠^\circ$$



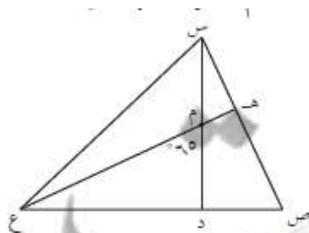
(ب) في المثلث س ص ع : م نقطة تقاطع الاعمدة المرسومة من

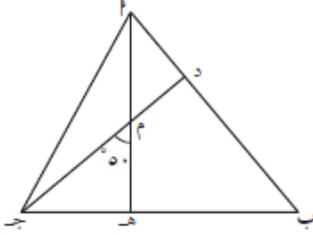
رؤوسه على اضلاعه ، ع ه م س د = {م} اكمل:

الحل:

$$ق ( م ع د ) = ٢٥^\circ$$

$$ق ( س ص ع ) = ٦٥^\circ$$





**مثال (٢)** ا ب ج مثلث فيه : م نقطة تقاطع الاعمدة المرسومة

من رؤوس المثلث على اضلاعه ، ق (ج م ^ ه) =  $50^\circ$  ،

اذا كان  $\{م\} = ا ه \cap ج د$

فاوجد بالبرهان ق (ب ^)

البرهان:

.. م نقطة تقاطع الاعمدة

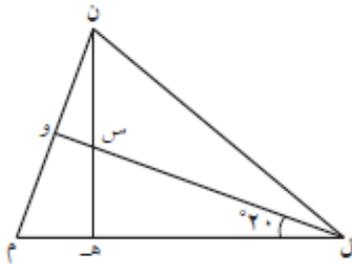
∴  $\Delta$  م ج ه قائم الزاوية في ه

.. مجموع قياسات زوايا المثلث =  $180^\circ$

∴ ق (م ج ^ ه) =  $180^\circ - (90^\circ + 50^\circ) = 40^\circ$

$\Delta$  ب د ج قائم الزاوية في د ، ق (م ج ^ ه) =  $40^\circ$

∴ ق (ب ^) =  $180^\circ - (90^\circ + 40^\circ) = 50^\circ$



**مثال (٣)** :- ن ل م مثلث فيه : س نقطة تقاطع الاعمدة المرسومة

من رؤوس المثلث على اضلاعه ، ق (و ل ^ م) =  $20^\circ$  ،

اذا كان ل و ن ه = {م}

فاوجد بالبرهان كلا مما يلي : (١) ق (و م ^ ل) (٢) ق (و س ^ ه)

البرهان:

.. س نقطة تقاطع الاعمدة

∴  $\Delta$  ل و م قائم الزاوية في و ، ق (و ل ^ م) =  $20^\circ$

.. مجموع قياسات زوايا المثلث =  $180^\circ$

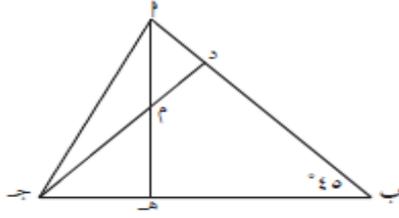
∴ ق (و م ^ ل) =  $180^\circ - (90^\circ + 20^\circ) = 70^\circ$

في الشكل الرباعي س ه م و

ق (و س ^ ه) =  $360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 70^\circ) = 110^\circ$

لان مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي =  $360^\circ$

**مثال (٤):** - ا ب ج مثلث فيه : م نقطة تقاطع الاعمدة المرسومة



من رؤوس المثلث على اضلاعه ، ق(ب<sup>ا</sup>) = ٤٥° ،

اذا كان  $\{م\} = ا هـ \cap ج د$

فاوجد بالبرهان: (١) ق(ب<sup>ا</sup>هـ) (٢) ق(د م هـ)

البرهان:

.. م نقطة تقاطع الاعمدة

∴  $\Delta$  ا ب هـ قائم الزاوية في هـ

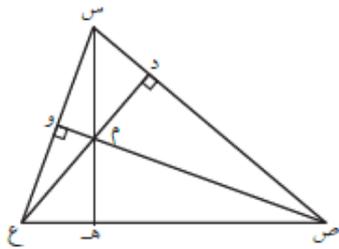
.. مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ ق(ب<sup>ا</sup>هـ) = ١٨٠° - (٩٠° + ٤٥°) = ١٣٥° - ٤٥° = ٩٠°

$\Delta$  ا م د قائم الزاوية في د ، ق(د<sup>ا</sup>م) = ٤٥°

∴ ق(د م هـ) = ١٨٠° - ٤٥° = ١٣٥° (بالتجاور على مستقيم واحد)

يمكن ايجاد الزاوية من زوايا الشكل الرباعي ب د م هـ



**مثال (٥):** س ص ع مثلث فيه : ق(س<sup>ع</sup>ص) = ٧٠° ،

ع د  $\perp$  س ص ، ص و  $\perp$  س ع ،

(١) اثبت ان : س هـ  $\perp$  ص ع

فاوجد بالبرهان ق(هـ س<sup>ع</sup>)

البرهان:

∴ ع د  $\perp$  س ص ، ص و  $\perp$  س ع ، ع د  $\cap$  ص و = {م}

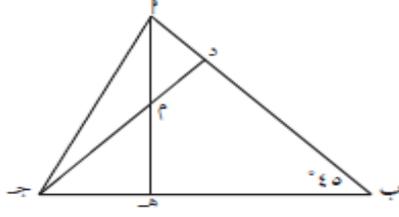
∴ م نقطة تقاطع الاعمدة المرسومة

∴ س هـ  $\perp$  ص ع (١)

في  $\Delta$  س هـ ع فيه ق(س<sup>هـ</sup>ع) = ٩٠° ، ق(س<sup>ع</sup>ص) = ٧٠°

∴ ق(هـ س<sup>ع</sup>) = ١٨٠° - (٩٠° + ٧٠°) = ١٦٠° - ٧٠° = ٩٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

مثال (٦)

ا ب ج مثلث فيه : م نقطة تقاطع الاعمدة المرسومة  
من رؤوس المثلث على اضلاعه ، ق (ام ^هـ) = ٥٥°

اذا كان  $\overline{AD} \cap \overline{BE} = \{M\}$

فاوجد بالبرهان: (١) ق (ا ج ^ب)

البرهان:

.. م نقطة تقاطع الاعمدة

∴  $\Delta$  ا ب هـ قائم الزاوية في هـ ، ق (ام ^هـ) = ٥٥°

.. مجموع قياسات زوايا المثلث = ٨٠°

∴ ق (م ا ^هـ) = ١٨٠° - (٩٠° + ٥٥°) = ١٨٠° - ١٤٥° = ٣٥°

ا د ج قائم الزاوية في د ، ق (م ا ^هـ) = ٣٥°

∴ ق (ج ^ب) = ١٨٠° - (٩٠° + ٣٥°) = ٥٥°

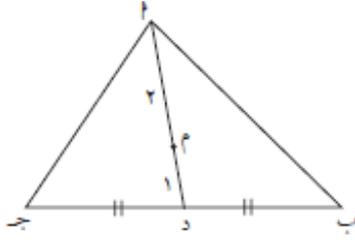
∴ ق (ج ^ب) = ق (ب ^ب) = ٥٥°

∴  $\Delta$  ا ب ج متطابق الضلعين

القدس عربية إسلامية وستعود لنا بإذن الله

الدرس السادس : القطع المتوسط للمثلث

**نظرية:** القطع المتوسط للمثلث تقاطع في نقطة واحدة تقسم كل منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس



في  $\Delta$  ا ب ج : ا د قطعة متوسطة ،

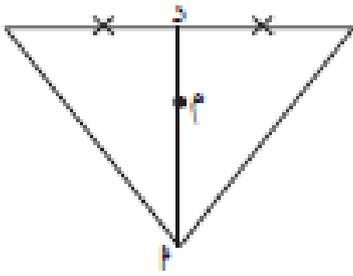
م نقطة تقاطع القطع المتوسط للمثلث

اكمل :

$$\begin{array}{l} \text{م د} = ٢ \text{ م د} \\ \text{م د} = \frac{١}{٢} \text{ م د} \\ \text{م د} = ٣ \text{ م د} \\ \text{م د} = \frac{١}{٣} \text{ م د} \end{array}$$

مثال (١)

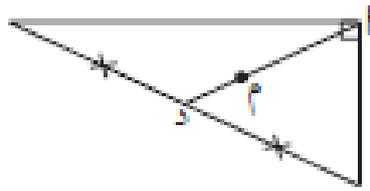
في كل المثلثات التالية : م نقطة تقاطع القطع المتوسط اكمل ما يلي ( دون استخدام الادوات الهندسية )



$$\text{ا د} = ١٨ \text{ سم}$$

$$\text{م د} = ١٨ \times \frac{١}{٣} = ٦ \text{ سم}$$

$$\text{ا م} = ١٨ \times \frac{٢}{٣} = ١٢ \text{ سم}$$



$$\text{ا م} = ٤ \text{ سم}$$

$$\text{م د} = ٢ \text{ سم}$$

$$\text{ا د} = ٦ \text{ سم}$$



$$\text{م د} = ٣ \text{ سم}$$

$$\text{ا م} = ٦ \text{ سم}$$

$$\text{ا د} = ٩ \text{ سم}$$

**مثال (٢):** في الشكل المقابل ا ب ج مثلث فيه : م نقطة تقاطع القطع المتوسط

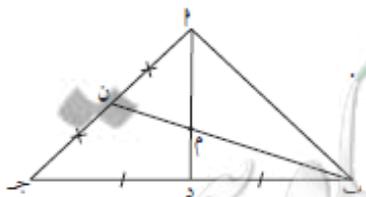
(١) اذا كان ب م = ١٠ سم فاوجد ن م ، ب ن

الحل: ن م = ٥ سم ، ب ن = ١٥ سم

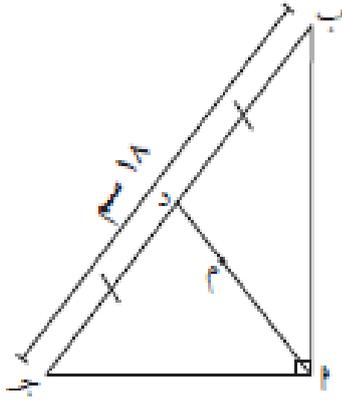
(٢) اذا كان ا د = ١٢ سم فاوجد ا م ، د م

الحل:

ا م = ٨ سم ، ب م = ٤ سم



مثال (٣): في الشكل المقابل ا ب ج مثلث قائم الزاوية في ا



م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث ،

ب ج = ١٨ سم فاوجد بالبرهان كلا من ا د ، ا م

البرهان:

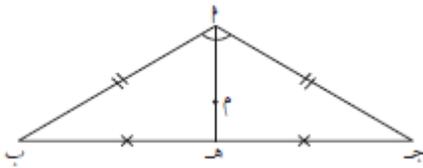
..  $\triangle$  ا ب ج قائم الزاوية في ا ، د منتصف ب ج

$$\therefore \text{ب د} = \frac{1}{2} \text{ب ج} = \frac{1}{2} \times 18 = 9 \text{ سم}$$

.. م نقطة تقاطع القطع المتوسطة

$$\therefore \text{ا م} = \frac{2}{3} \times 9 = 6 \text{ سم}$$

مثال (٤): ا ب ج مثلث فيه :



م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث ،

ا ب = ا ج = ٢٤ سم ، ق (ج) =  $30^\circ$

فاوجد بالبرهان كلا من ا ه ، م ه ، م ا

البرهان:

..  $\triangle$  ا ب ج ، ا ب = ا ج ، ه منتصف ب ج

$$\therefore \overline{ا ه} \perp \overline{ب ج}$$

.. ق (ج) =  $30^\circ$   $\triangle$  ا ج ه ثلاثيني ستيني

$$\therefore \text{ا ه} = \frac{1}{2} \text{ا ج} = \frac{1}{2} \times 24 = 12 \text{ سم}$$

.. م نقطة تقاطع القطع المتوسطة

$$\therefore \text{م ه} = \frac{1}{3} \text{ا ه} = \frac{1}{3} \times 12 = 4 \text{ سم}$$

$$\text{م ه} = \frac{2}{3} \text{ا ه} = \frac{2}{3} \times 12 = 8 \text{ سم}$$

مثال (٥):

في الشكل المقابل :

د منتصف ا ب ، ه منتصف ا ج ،

$$د ج \cap ب ه = \{ م \}$$

$$ب ج = ٨ \text{ سم} ، ب م = ٤ \text{ سم} ، د ج = ٩ \text{ سم}$$

اوجد بالبرهان محيط  $\triangle$  د م ه

البرهان:

.. د منتصف ا ب ، ه منتصف ا ج

$$\therefore د ه = \frac{١}{٢} ب ج \text{ (نظرية) } = \frac{١}{٢} \times ٨ = ٤ \text{ سم}$$

$$\therefore د ج \cap ب ه = \{ م \}$$

.. م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث

$$\therefore د م = \frac{١}{٣} ا ه = \frac{١}{٣} \times ٩ = ٣ \text{ سم}$$

$$م ه = \frac{١}{٢} ب م = \frac{١}{٢} \times ٤ = ٢ \text{ سم}$$

$$\text{محيط } \triangle د م ه = د ه + د م + م ه = ٤ + ٣ + ٢ = ٩ \text{ سم}$$

مثال (٦):في الشكل المقابل : ا د  $\cap$  ج ه = { م } ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث ا ب ج ،

$$ا م = ١٨ \text{ سم} ، ج ه = ٣٠ \text{ سم} ،$$

اوجد بالبرهان: (١) م ه (٢) ج م (٣) ا د

البرهان:

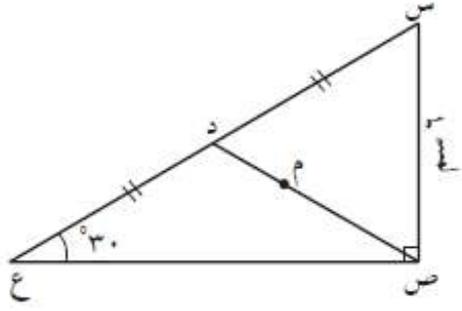
.. م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث ا ب ج

$$\therefore م ه = \frac{١}{٣} ج ه = \frac{١}{٣} \times ٣٠ = ١٠ \text{ سم}$$

$$\therefore ج م = \frac{٢}{٣} ج ه = \frac{٢}{٣} \times ٣٠ = ٢٠ \text{ سم}$$

$$\therefore ا م = \frac{٢}{٣} ا د \therefore ا د = \frac{٣}{٢} ا م = \frac{٣}{٢} \times ١٨ = ٢٧ \text{ سم}$$

**مثال (٧)** س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص :



م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث

$$\text{س ص} = ٦ \text{ سم} ، \text{ ق } (\hat{\text{ع}}) = 30^\circ$$

فاوجد بالبرهان كلا من س ع ، ص د ، ص م

**البرهان:**

$$\Delta \text{ ا ب ج قائم في ص ، ق } (\hat{\text{ع}}) = 30^\circ$$

$\Delta$  س ص ع ثلاثيني ستيني

$$\therefore \text{س ص} = \text{س ع}$$

$$\text{س ع} = ٦ \times ٢ = ١٢ \text{ سم}$$

.. د منتصف س ع

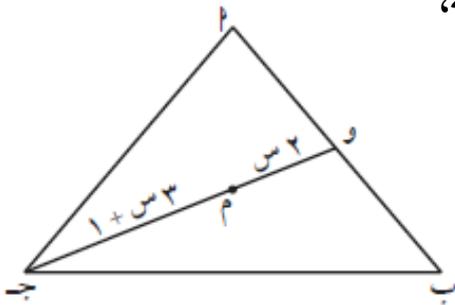
$$\therefore \text{ص د} = \frac{١}{٢} \text{ س ع} = \frac{١}{٢} \times ١٢ = ٦ \text{ سم (نظرية)}$$

.. م نقطة تقاطع القطع المتوسطة

$$\therefore \text{ص م} = \frac{٢}{٣} \text{ ص هـ} = \frac{٢}{٣} \times ٦ = ٤ \text{ سم}$$

المستقبل لك بإذن الله

**مثال (٨)** في الشكل المقابل : ا ب ج مثلث فيه ج و قطعة متوسطة،



م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث ،

$$\text{اذا كان م و } = ٢ \text{ س ، ج م} = ٣ \text{ س} + ١$$

اوجد بالبرهان قيمة س

**البرهان** :.. م نقطة تقاطع القطع المتوسطة

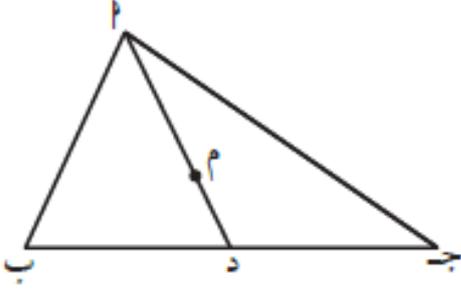
∴ و ج قطعة متوسطة

$$\therefore \text{م ج} = ٢ \text{ م و}$$

$$٣ \text{ س} + ١ = ٢ \times ٢ \text{ س}$$

$$٣ \text{ س} + ١ = ٤ \text{ س}$$

$$٤ \text{ س} - ٣ \text{ س} = ١ \therefore \text{س} = ١$$

مثال (٩) :

في الشكل المقابل : ا ب ج مثلث فيه ا د قطعة متوسطة،

م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث ،

اذا كان ا م = ٥ س ، م د = ٣ + س

اوجد بالبرهان قيمة ا د

البرهان :

... م نقطة تقاطع القطع المتوسطة

∴ ا د قطعة متوسطة

∴ ا م = ٢ م د

٥ س = ٢ ( ٣ + س )

٥ س = ٢ + ٦ س

٥ س - ٢ س = ٢

٣ س = ٢ بالقسمة على ٣

∴ س = ٢

ا د = ا م + م د = ٥ س + ٣ + س = ٣ + ٢ + ٢ × ٥ = ١٥ سم

## الوحدة الثالثة النسبة المئوية

### الدرس الاول: النسبة المئوية

**مثال (١):** إذا كان سعر لوحة فنية ١٥٠ ديناراً، وتم خصم ١٠% من سعرها الأصلي فما قيمة هذا الخصم؟

الحل :

$$\text{قيمة الخصم} = 150 \times \frac{10}{100} = 15 \text{ دينار}$$

**مثال (٢):** باعت مكتبة ١٨٠ كتاباً والتي تمثل ٣٠% من كتبها المعروضة

اوجد عدد الكتب التي كانت في المكتبة قبل البيع

الحل :-

نفرض عدد الكتب قبل البيع س

$$180 = 30\% \times \text{س}$$

$$180 = \text{س} \times \frac{30}{100}$$

$$\text{س} = \frac{100 \times 180}{30} = 600$$

**مثال (٣):**

باع محل للطور ٤٠% من الكمية المعروضة عنده والتي بلغت ٣٦٠ زجاجة عطر

فكم عدد زجاجات العطر التي كانت لديه؟

الحل :

نفرض ان عدد الزجاجات كلها س

$$360 = 40\% \times \text{س}$$

$$360 = \text{س} \times \frac{40}{100}$$

$$\text{س} = \frac{100 \times 360}{40} = 900 \text{ زجاجة}$$

مثال (٤):

اثناء موسم التخفيضات اشترت شهد حقيبة كان سعرها ٢٤٠ ديناراً وتم خصم ٦٠ ديناراً من سعرها الاصلى فما النسبة المئوية للخصم؟

الحل:

$$\text{نسبة الخصم} = \frac{٦٠}{٢٤٠} \times ١٠٠ \% = ٢٥ \%$$

مثال (٥): قدر ٢٤ % من ٨١

الحل: ٢٤ % ~ ٢٥ %

٨٠ ~ ٨١

$$٢٠ = \frac{٨٠}{٤} = ٨٠ \times \frac{٢٥}{١٠٠} = ٨٠ \times ٢٥ \%$$

٢٤ % من ٨١ ~ ٢٠

مثال (٦): (١) قدر ٧٤,٥ % من ٢٣٩

الحل: ٧٤,٥ % ~ ٧٥ %

٢٣٩ ~ ٢٤٠

$$١٨٠ = ٢٤٠ \times ٧٥ \% = ٢٤٠ \times ٧٥$$

٧٤,٥ % من ٢٣٩ ~ ١٨٠

(٢) قدر ٣٣ % من ٨٩

الحل: ٣٣ % ~  $\frac{١}{٣}$  ٣٣ %

٩٠ ~ ٨٩

$$= ٩٠ \times \frac{١}{٣} = ٣٠$$

$$٣٠ = ٩٠ \times \frac{١٠٠}{٣}$$

١٠٠ × ٣

٣٣ % من ٨٩ ~ ٣٠

**مثال (٧):** اعلن احد المحلات التجارية عن خصم ١١% على احدي السلع

قدر قيمة الخصم اذا كان سعر السلعة ٤٩٩ ديناراً

الحل:

$$11\% \sim 10\%$$

$$499 \sim 500$$

$$10\% \text{ من } 500 = 500 \times \frac{10}{100} = 500 \times 10\% = 50$$

$$11\% \text{ من } 499 \sim 50$$

**مثال (٨):** اذا كانت مبيعات شركة ما في احد الاعوام ٣٥٠٠٠٠٠ دينار ثم انخفضت بنسبة ١٩%

في العام الذي يليه فقدر قيمة الانخفاض

$$\text{الحل: } 19\% \sim 20\%$$

$$20\% \text{ من } 350000 = 350000 \times \frac{20}{100} = 70000$$

$$19\% \text{ من } 350000 \sim 70000$$

قيمة الانخفاض  $\sim 70000$

**مثال (٩):**

جهاز كهربائي سعره ١٢٠ ديناراً وفي موسم التنزيلات وضع عليه خصم بنسبة ١٥% فما قيمة الخصم؟

الحل:

قيمة الخصم = نسبة الخصم  $\times$  السعر الاصيل

$$= 120 \times \frac{15}{100} = 18 \text{ دينار}$$

**مثال (١٠):**

سجل ٥٠ متعلماً في رحلة مدرسية الي ابراج الكويت حضر منهم ٣٥ متعلماً فقط

ما النسبة المئوية للحاضرين؟

الحل:

$$\text{النسبة المئوية للحاضرين} = \frac{\text{عدد الحاضرين}}{\text{عدد الكلي}} \times 100\% = 100\% \times \frac{35}{50} = 70\%$$

مثال (١١):

إذا كان ٢٠ % من متعلمي الصف التاسع في إحدى المدارس هو ٤٢ متعلماً

فما عدد متعلمي الصف التاسع؟

الحل: نفرض ان عدد الصف التاسع س

$$٤٢ = ٢٠\% \text{ من س}$$

$$٤٢ = ٢٠\% \times \text{س}$$

$$٤٢ = \text{س} \times \frac{٢٠}{١٠٠}$$

$$٢١٠ = \frac{١٠٠ \times ٤٢}{٢٠} = \text{س}$$

هضع نجمة أمام القوانين الواجب حفظها

معلمي الكويت  
صفوة الكويت  
KuwaitTeacher.Com

الدرس الثاني: النسبة المئوية التزايدية والنسبة المئوية التناقصية

يمكن حل المسائل التي تتضمن نسبا مئوية تزايدية باستخدام المعادلة التالية :

$$\star \text{ القيمة النهائية} = \text{القيمة الاصلية} \times ( ١٠٠ \% + \text{النسبة المئوية للتزايد} )$$

كذلك يمكن حل المسائل التي تتضمن نسبا مئوية تناقصية باستخدام المعادلة التالية:

$$\star \text{ القيمة النهائية} = \text{القيمة الاصلية} \times ( ١٠٠ \% - \text{النسبة المئوية للتناقص} )$$

مثال(١): اوجد القيمة النهائية اذا كانت القيمة الاصلية ٩٠ والنسبة المئوية للتزايد ٣٠ %

الحل: القيمة النهائية = القيمة الاصلية  $\times$  ( ١٠٠ % + النسبة المئوية للتزايد )

$$= ( ١٠٠ \% + ٣٠ \% ) \times ٩٠ =$$

$$= ١٣٠ \% \times ٩٠ = \frac{١٣٠}{١٠٠} \times ٩٠ = ١١٧$$

مثال(٢): اوجد القيمة النهائية اذا كانت القيمة الاصلية ١٢٠٠ والنسبة المئوية للتناقص ٨٠ %

الحل: القيمة النهائية = القيمة الاصلية  $\times$  ( ١٠٠ % - النسبة المئوية للتناقص )

$$= ( ١٠٠ \% - ٨٠ \% ) \times ١٢٠٠ =$$

$$= ٢٠ \% \times ١٢٠٠ = \frac{٢٠}{١٠٠} \times ١٢٠٠ = ٢٤٠$$

مثال(٣): تناقصت ايرادات احدى المؤسسات التجارية في نهاية السنة المالية لعام ٢٠١٧ م حيث بلغت ٢٧٠٠٠٠٠

دينار بنسبة تناقص ١٠ % عن نهاية السنة المالية ٢٠١٦ م

اوجد القيمة الاصلية للايرادات ومقدار التناقص

الحل: القيمة النهائية = القيمة الاصلية  $\times$  ( ١٠٠ % - النسبة المئوية للتناقص )

$$٢٧٠٠٠٠ = س \times ( ١٠٠ \% - ١٠ \% )$$

$$= س \times ٩٠ \%$$

$$س \times \frac{٩٠}{١٠٠} = ٢٧٠٠٠٠$$

$$س = \frac{٢٧٠٠٠٠ \times ١٠٠}{٩٠} = ٣٠٠٠٠٠$$

مقدار النقص = القيمة النهائية - القيمة الاصلية

$$= ٣٠٠٠٠٠ - ٢٧٠٠٠٠ = ٣٠٠٠٠$$

**مثال (٤):**

اوجد القيمة الاصلية اذا كانت القيمة النهائية تساوي ٨٠ والنسبة المئوية للتزايد  
تساوي ٦٠% وما مقدار الزيادة؟

الحل:

$$\text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الاصلية} \times (100\% + \text{النسبة المئوية للتزايد})$$

$$= \text{القيمة الاصلية} \times (100\% + 60\%)$$

$$80 = \text{القيمة الاصلية} \times 160\%$$

$$\text{القيمة الاصلية} = \frac{100 \times 80}{160} = 50$$

$$160$$

مقدار الزيادة = القيمة النهائية - القيمة الاصلية

$$30 = 80 - 50 =$$

**مثال (٥):**

زادت اسعار بيع التفاز في احد المحلات التجارية فبلغت ٢١٠ دينار اذا كان السعر الاصلى ١٤٠ دينارا  
فاوجد النسبة المئوية للتزايد

الحل:

$$\text{القيمة النهائية} = \text{القيمة الاصلية} \times (100\% + \text{نسبة التزايد})$$

$$210 = 140 \times (100\% + \text{س})$$

$$\frac{210}{140} = 1 + \text{س}$$

$$\text{س} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{النسبة المئوية للتزايد} = \frac{1}{2} \times 100\% = 50\%$$

**مثال (٦):** اوجد النسبة المئوية للتناقص اذا كانت القيمة النهائية ٣٠٠ والقيمة الاصلية ٥٠٠

الحل: القيمة النهائية = القيمة الاصلية  $\times$  ( ١٠٠ % - نسبة التناقص )

$$٣٠٠ = ٥٠٠ \times (١ - س)$$

$$\frac{٣٠٠}{٥٠٠} = ١ - س$$

$$\frac{٣}{٥} = ١ - س$$

$$س = ١ - \frac{٣}{٥}$$

$$س = \frac{٢}{٥}$$

$$\text{النسبة المئوية للتناقص} = \frac{٢}{٥} \times ١٠٠ \% = ٤٠ \%$$

**مثال (٧):**

اوجد السعر النهائي لحاسوب كان سعره ٧٠٠ دينار ثم زاد بنسبة ٢٠ %

الحل: السعر النهائي = القيمة الاصلية  $\times$  ( ١٠٠ % + النسبة المئوية للتزايد )

$$= ٧٠٠ \times (١٠٠ \% + ٢٠ \%)$$

$$= \frac{١٢٠}{١٠٠} \times ٧٠٠ = ٨٤٠ \text{ دينار}$$

**مثال (٨):** - يعمل جاسم في محل بيع الهواتف المتنقلة ويحصل على خصم ٣٠ % على مشترياته

اذا كان سعر البيع ل احد الهواتف ٧٠ ديناراً فكم سيدفع جاسم بعد الخصم؟

الحل:

القيمة النهائية = الاصلية  $\times$  ( ١٠٠ % - النسبة المئوية للتناقص )

$$= ٧٠ \times (١٠٠ \% - ٣٠ \%)$$

$$= ٧٠ \times ٧٠ \% = \frac{٧٠ \times ٧٠}{١٠٠} = ٤٩ \text{ دينار}$$

**مثال (٩):** ارتفعت قيمة سهم احدى شركات الاتصالات المدرجة في سوق الاوراق المالية بنسبة ١٤ % اذا كانت القيمة الاصلية للسهم ٤٠٠ فلس فاوجد القيمة النهائية

الحل:

القيمة النهائية = القيمة الاصلية  $\times$  ( ١٠٠ % + النسبة المئوية للزيادة )

$$= ٤٠٠ \times ( ١٠٠ \% + ١٤ \% )$$

$$= ٤٠٠ \times ١١٤ \% = \frac{١١٤}{١٠٠} \times ٤٠٠ = ٤٥٦ \text{ فلس}$$

**مثال (١٠):**

اوجد القيمة الاصلية اذا كانت القيمة النهائية ٧٠٠ ، النسبة المئوية للتناقص تساوي ٦٥ %

الحل:

القيمة النهائية = القيمة الاصلية  $\times$  ( ١٠٠ % - النسبة المئوية للتناقص )

$$٧٠٠ = \text{القيمة الاصلية} \times ( ١٠٠ \% - ٦٥ \% )$$

$$٧٠٠ = \text{القيمة الاصلية} \times ٣٥ \%$$

$$٧٠٠ = \text{القيمة الاصلية} \times \frac{٣٥}{١٠٠}$$

$$١٠٠$$

$$\text{القيمة الاصلية} = \frac{١٠٠ \times ٧٠٠}{٣٥} = ٢٠٠٠ \text{ دينار}$$

$$٣٥$$

**مثال (١١):**

تزايدت ايرادات احد المطاعم بنسبة ٣٠ % عن الشهر السابق اذا بلغت الايرادات ٢٦٠٠ فاحسب ايرادات الشهر السابق

الحل:

القيمة النهائية = القيمة الاصلية  $\times$  ( ١٠٠ % + النسبة المئوية للزيادة )

$$٢٦٠٠ = \text{الاصلية} \times ( ١٠٠ \% + ٣٠ \% )$$

$$٢٦٠٠ = \text{الاصلية} + ١٣٠ \%$$

$$\text{القيمة الاصلية} = \frac{١٠٠ \times ٢٦٠٠}{١٣٠} = ٢٠٠٠ \text{ دينار}$$

$$١٣٠$$

**مثال (١٢):** اشترت عائشة قلادة ذهبية بقيمة ٢٤٠٠ دينار بعد ان حصلت على خصم ٢٠ %

اوجد السعر الاصيلي للقلادة ثم اوجد مقدار الخصم

الحل:

القيمة النهائية = القيمة الاصلية  $\times$  (١٠٠ % - النسبة المئوية للتناقص)

$$٢٤٠٠ = \text{القيمة الاصلية} \times ٨٠ \%$$

$$\text{القيمة الاصلية} = \frac{١٠٠ \times ٢٤٠٠}{٨٠} = ٣٠٠٠ \text{ دينار}$$

**مثال (١٣):**

اوجد النسبة المئوية للتزايد اذا كانت القيمة النهائية ٢٤٠ والقيمة الاصلية ٢٠٠

الحل:

القيمة النهائية = القيمة الاصلية  $\times$  (١٠٠ % + النسبة المئوية للتزايد)

$$٢٤٠ = ٢٠٠ \times (١ + س)$$

$$\frac{٢٤٠}{٢٠٠} = ١ + س$$

$$\frac{٦}{٥} = ١ + س$$

$$س = \frac{٦}{٥} - ١ = \frac{١}{٥}$$

$$\text{النسبة المئوية للتزايد} = \frac{١}{٥} \times ١٠٠ \% = ٢٠ \%$$

الدرس الثالث: تطبيقات على تغير النسبة المئوية

**مثال (١)** رفعت احدى شركات الطيران اسعارها بنسبة ٢٠% ثم منحت هذه الشركة موظفيها خصما يبلغ ١٠% فكم ستدفع احدى الموظفين في هذه الشركة لتذكرة كان سعرها ٢٠٠ دينار قبل الزيادة؟

الحل:

سعر التذكرة بعد الزيادة = القيمة الاصلية  $\times$  (١٠٠% + نسبة التزايد)

$$= (١٠٠\% + ٢٠\%) \times ٢٠٠ =$$

$$= \frac{١٢٠}{١٠٠} \times ٢٠٠ = ١٢٠\% \times ٢٠٠ = ٢٤٠ \text{ دينار}$$

القيمة النهائية للتذكرة = القيمة الاصلية  $\times$  (١٠٠% - نسبة التناقص)

$$= (١٠٠\% - ١٠\%) \times ٢٤٠ =$$

$$= ٩٠\% \times ٢٤٠ = \frac{٩٠}{١٠٠} \times ٢٤٠ = ٢١٦ \text{ دينار}$$

.....

**مثال (٢)**: يكلف استئجار قارب من احدى شركات تاجير القوارب في اليوم الواحد ٢٥ ديناراً

يضاف اليها نظير الخدمة، اوجد تكلفة الاستئجار في الحالات التالية:

(١) خصم ٢٠% ثم اضافة ١٠% نظير الخدمة

الحل: التكلفة بعد الخصم = القيمة الاصلية  $\times$  (١٠٠% - نسبة الخصم)

$$= (١٠٠\% - ٢٠\%) \times ٢٥ =$$

$$= ٨٠\% \times ٢٥ = ٢٠ \text{ دينار}$$

التكلفة بعد اضافة الخدمة = القيمة الاصلية  $\times$  (١٠٠% + نسبة الزيادة)

$$= (١٠٠\% + ١٠\%) \times ٢٠ = ١١٠\% \times ٢٠ = \frac{١١٠}{١٠٠} \times ٢٠ = ٢٢ \text{ دينار}$$

(ب) خصم ٢٠% خصماً بعد اضافة ٥ دنائير نظير الخدمة

الحل:

تكلفة الاستئجار بعد اضافة الخدمة = ٢٥ + ٥ = ٣٠ دينار

تكلفة الاستئجار بعد الخصم = القيمة الاصلية  $\times$  (١٠٠% - نسبة الخصم)

$$= (١٠٠\% - ٢٠\%) \times ٣٠ = ٨٠\% \times ٣٠ = \frac{٣٠ \times ٨٠}{١٠٠} = ٢٤ \text{ دينار}$$

مثال (٣):

رفع احد معارض السيارات اسعاره بنسبة ٢٠% ثم منح هذا المعرض موظفيه خصما يبلغ ١٠% فكم سيدفع احد الموظفين في هذا المعرض ثمنًا لشراء سيارة كان سعرها ٩٠٠٠ دينار قبل الزيادة؟  
الحل:

$$\text{ثمن السيارة بعد اضافة } ٢٠\% = (١٠٠\% + ٢٠\%) \times ٩٠٠٠ =$$

$$= ١٠٨٠٠ \text{ دينار} \quad ١٢٠\% \times ٩٠٠٠ = \frac{١٢٠}{١٠٠} \times ٩٠٠٠ = ١٠٨٠٠ \text{ دينار}$$

$$\text{ثمن السيارة بعد خصم } ١٠\% = (١٠٠\% - ١٠\%) \times ١٠٨٠٠ = ٩٧٢٠ \text{ دينار}$$

مثال (٤):

بلغ سعر التذكرة الواحدة لحضور مسرحية ٥٠ دينارًا ويضاف اليها نظير الخدمة اوجد سعر التذكرة في كل الحالات التالية:

(١) خصم ٢٠% ثم اضافة ١٢% نظير الخدمة

الحل:

$$\text{سعر التذكرة بعد الخصم} = (١٠٠\% - ٢٠\%) \times ٥٠ = ٤٠ \text{ دينار}$$

$$\text{سعر التذكرة النهائي بعد اضافة الخدمة} = (١٠٠\% + ١٢\%) \times ٤٠ =$$

$$= ٤٤,٨ \text{ دينار}$$

(ب) خصم ٢٠% بعد اضافة ١٠ دنائير نظير الخدمة

الحل:

$$\text{سعر التذكرة بعد اضافة } ١٠ \text{ الخدمة} = ٥٠ + ١٠ = ٦٠ \text{ دينار}$$

$$\text{السعر النهائي بعد خصم } ٢٠\% = (١٠٠\% - ٢٠\%) \times ٦٠ =$$

$$= ٤٨ \text{ دينار}$$

الوحدة الرابعة المساحات والحجومالدرس الاول: المساحة السطحية للهرم والمخروط

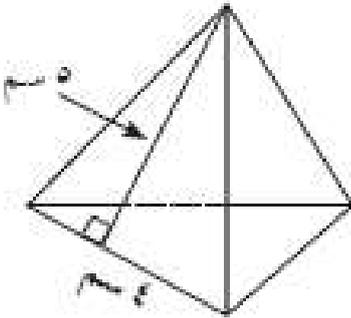
المساحة السطحية للهرم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

المساحة الجانبية للهرم المنتظم = عدد الاوجه × مساحة الوجه الواحد

المساحة السطحية للهرم المنتظم = ( عدد الاوجه × مساحة الوجه الواحد ) + مساحة القاعدة

مثال (١):

هرم منتظم طول ضلع قاعدته ٤ سم ومساحة قاعدته ٣  $\sqrt{}$  سم<sup>٢</sup> وارتفاعه المائل ٥ سم اوجد مساحته السطحية



$$\text{الحل: مساحة الوجه الواحد} = \frac{1}{2} \times \text{ق} \times \text{ع}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10 \text{ سم}^2$$

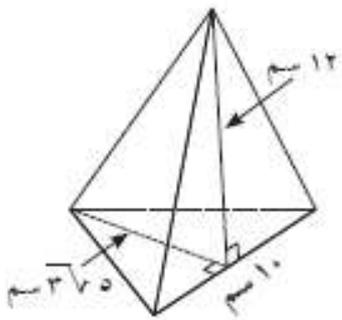
$$\text{مساحة القاعدة} = 3 \sqrt{4} = 12 \text{ سم}^2$$

المساحة السطحية للهرم = عدد الاوجه × مساحة الوجه + مساحة القاعدة

$$= 3 \times 10 + 12 = 42 \text{ سم}^2$$

مثال (٢): هرم منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم وارتفاع قاعدته ٥  $\sqrt{}$  سم<sup>٢</sup> وارتفاعه المائل ١٢ سم

اوجد مساحته السطحية



$$\text{الحل: مساحة الوجه الواحد} = \frac{1}{2} \times \text{ق} \times \text{ع}$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 12 = 60 \text{ سم}^2$$

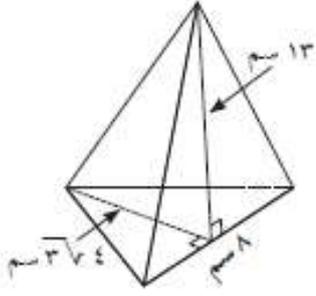
$$\text{مساحة القاعدة} = \frac{1}{2} \times \text{ق} \times \text{ع} = \frac{1}{2} \times 10 \times 5 \sqrt{2} = 25 \sqrt{2} \text{ سم}^2$$

المساحة السطحية للهرم = عدد الاوجه × مساحة الوجه + مساحة القاعدة

$$= 3 \times 60 + 25 \sqrt{2} = 180 + 25 \sqrt{2} \text{ سم}^2$$

## مثال (٣):

علبة زجاجية على شكل هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ٨ سم وارتفاع القاعدة  $\sqrt[3]{4}$  وارتفاعه المائل ١٣ سم اوجد المساحة السطحية



الحل:

$$\text{مساحة الوجه الواحد} = \frac{1}{2} \times \text{ق} \times \text{ع}$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 13 = 52 \text{ سم}^2$$

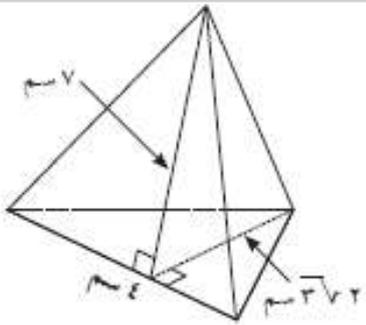
$$\text{مساحة القاعدة} = \frac{1}{2} \times \text{ق} \times \text{ع} = \frac{1}{2} \times 8 \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{16} \text{ سم}^2$$

المساحة السطحية للهرم = عدد الاوجه  $\times$  مساحة الوجه + مساحة القاعدة

$$= 3 \times 52 + \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{16} + 156 \text{ سم}^2$$

## مثال (٤):

هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ٤ سم وارتفاع قاعدته  $\sqrt[3]{2}$  سم وارتفاعه المائل ٧ سم اوجد مساحته السطحية



الحل:

$$\text{مساحة الوجه الواحد} = \frac{1}{2} \times \text{ق} \times \text{ع}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 7 = 14 \text{ م}^2$$

$$\text{مساحة القاعدة} = \frac{1}{2} \times \text{ق} \times \text{ع} = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4} \text{ سم}^2$$

المساحة السطحية للهرم = عدد الاوجه  $\times$  مساحة الوجه + مساحة القاعدة

$$= 3 \times 14 + \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4} + 42$$

**المخروط الدائري القائم:** مجسم قاعدته دائرية وله راس واحد وارتفاعه هو طول العمود

المرسوم من راسه على قاعدته عند مركزها

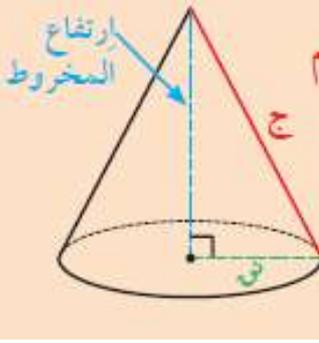
$$\frac{1}{2} \text{ محيط القاعدة } \times \text{ طول الراسم} = \text{المساحة الجانبية للمخروط القائم}$$

$$\pi \times \text{نق} \times \text{ج} = \frac{1}{2} \pi \times \text{نق}^2 \times \text{ج} = \text{مساحة القاعدة} + \text{مساحة السطحية للمخروط الدائري القائم}$$

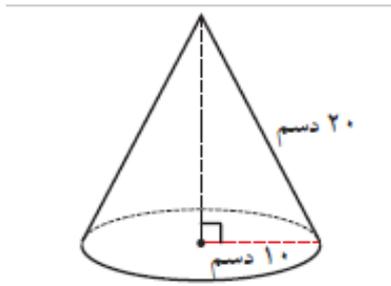
المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$\pi \times \text{نق} \times \text{ج} + \pi \times \text{نق}^2 =$$

$$\pi \times \text{نق} \times (\text{ج} + \text{نق}) =$$



**مثال (١):**



في الشكل المقابل مخروط دائري قائم ( اعتبر  $\pi = 3, 14$  )

اوجد ( ا ) مساحته الجانبية

( ب ) مساحته السطحية

الحل: نق = 10 دسم ، ج = 20 دسم

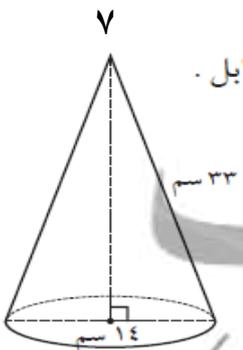
( ا ) المساحة الجانبية =  $\pi \times \text{نق} \times \text{ج}$

$$= 3, 14 \times 10 \times 20 = 628 \text{ دسم}^2$$

( ب ) المساحة السطحية =  $\pi \times \text{نق} \times (\text{ج} + \text{نق})$

$$= 3, 14 \times 10 \times (20 + 10) = 942 \text{ دسم}^2$$

**مثال (٢):** في الشكل المقابل اوجد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم ( اعتبر  $\pi = \frac{22}{7}$  )

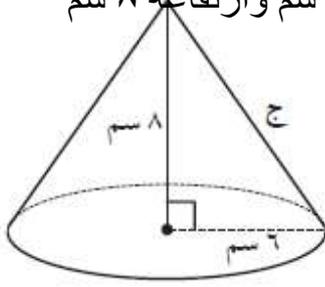


الحل: نق = 14 سم ، ج = 33 سم

المساحة السطحية =  $\pi \times \text{نق} \times (\text{ج} + \text{نق})$

$$= \frac{22}{7} \times 14 \times (33 + 14) = 40 \times 14 \times \frac{22}{7} = 1880 \text{ سم}^2$$

**مثال (٣):** في الشكل المقابل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٨ سم



اوجد ما يلي: (١) طول الراسم

الحل: بتطبيق فيثاغورث

$$ج^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

$$ج = \sqrt{100} = 10 \text{ سم}$$

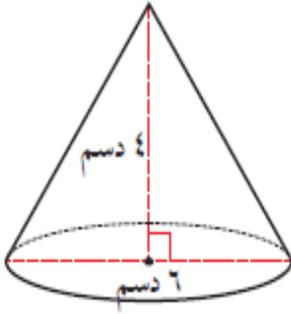
(ب) المساحة السطحية للمخروط: (بدلالة  $\pi$ )

الحل: المساحة السطحية =  $\pi$  نق (نق + ج)

$$= \pi (6 + 10) \times 6$$

$$= 96\pi \text{ سم}^2$$

**مثال (٤):** في الشكل المقابل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ دسم وارتفاعه ٤ دسم



اوجد ما يلي: (١) طول الراسم

الحل: بتطبيق فيثاغورث

$$ج^2 = 6^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52$$

$$ج = \sqrt{52} = 7.21 \text{ دسم}$$

(ب) المساحة السطحية للمخروط: (بدلالة  $\pi$ )

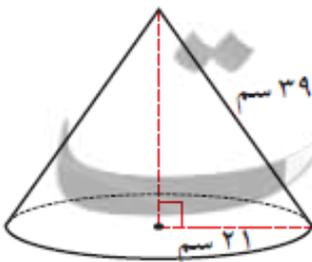
الحل: المساحة السطحية =  $\pi$  نق (نق + ج)

$$= \pi (6 + 7.21) \times 6$$

$$= 80.52\pi \text{ سم}^2$$

**مثال (٥):** في الشكل المقابل اوجد المساحة السطحية للمخروط الدائري قائم (اعتبر  $\pi = \frac{22}{7}$ )

٧



الحل: نق = ٢١ سم ، ج = ٣٩ سم

المساحة السطحية =  $\pi$  نق (نق + ج)

$$= \frac{22}{7} \times 21 \times (21 + 39)$$

$$= \frac{22}{7} \times 21 \times 60 = 3960 \text{ سم}^2$$

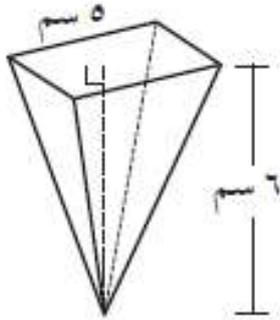
## الدرس الثاني: حجم الهرم

حجم الهرم القائم =  $\frac{1}{3} \times$  حجم المنشور القائم المشترك معه في القاعدة والارتفاع

~~حجم الهرم =  $\frac{1}{3} \times$  مساحة القاعدة  $\times$  الارتفاع~~

~~ح =  $\frac{1}{3} \times م \times ع$~~

مثال (١):



اوجد حجم الهرم الرباعي القائم الذي قاعدته على شكل مربع كما في الشكل:

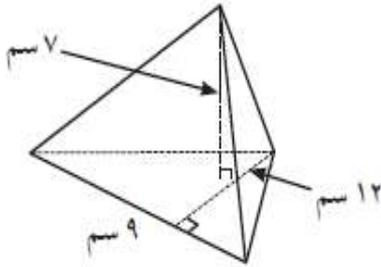
الحل: ( مساحة المربع = الضلع  $\times$  نفسه )

حجم الهرم =  $\frac{1}{3} \times م \times ع$

$$= \frac{1}{3} \times (5)^2 \times 6 = 50 \text{ سم}^3$$

مثال (٢):

اوجد حجم المجسم في الشكل:



الحل: مساحة القاعدة =  $\frac{1}{2} \times ق \times ع$

$$= \frac{1}{2} \times 9 \times 12 = 54 \text{ سم}^2$$

حجم الهرم =  $\frac{1}{3} \times م \times ع$

$$= \frac{1}{3} \times 54 \times 7 = 126 \text{ سم}^3$$

مثال (٣):

ينتج احد مصانع الحلوى قطعا من الكاكاو على شكل هرم منتظم حجم القطعة الواحدة منها ١٦ سم<sup>٣</sup> وارتفاعها ٦ سم اوجد مساحة قطعة الكاكاو  
الحل:

$$\text{حجم الهرم} = \frac{1}{3} \times \text{م} \times \text{ع}$$

$$16 = \frac{1}{3} \times \text{م} \times 6 \quad \leftarrow \quad \text{م} = 16 \times 3 = 48$$

$$16 = \text{م} \times 2$$

$$\text{م} = 8 \text{ سم}^2$$

مثال (٤):

تصنع رنا علبة على شكل هرم منتظم اذا كان حجم العلبة ٥٥ سم<sup>٣</sup> ومساحة قاعدتها ١٥ سم<sup>٢</sup> فما ارتفاع العلبة  
الحل:

$$\text{حجم الهرم} = \frac{1}{3} \times \text{م} \times \text{ع}$$

$$55 = \frac{1}{3} \times 15 \times \text{ع} \quad \leftarrow \quad 55 = 5 \times \text{ع}$$

$$55 = 5 \times \text{ع}$$

$$\text{ع} = 11 \text{ سم}$$

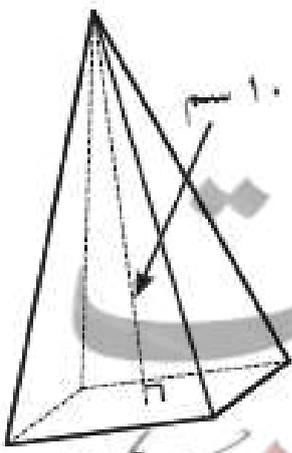
مثال (٥):

اوجد حجم الهرم الرباعي القائم الذي قاعدته على شكل مربع طول ضلعه ٦ سم وارتفاع الهرم ١٠ سم  
الحل:

$$\text{مساحة القاعدة} = \text{الضلع} \times \text{نفسه} = 6 \times 6 = 36 \text{ سم}^2$$

$$\text{حجم الهرم} = \frac{1}{3} \times \text{م} \times \text{ع}$$

$$= \frac{1}{3} \times 36 \times 10 = 120 \text{ سم}^3$$

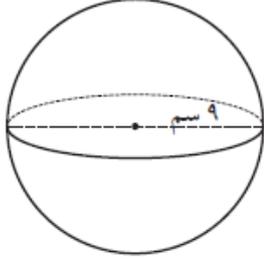


الدرس الثالث : حجم الكرة

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3$$

مثال (١) :

اوجد حجم كرة طول نصف قطرها ٩ سم (بدلالة  $\pi$ )



الحل : نق = ٩ سم

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3$$

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi (9)^3 = 972 \pi \text{ سم}^3$$

مثال (٢) :

اوجد حجم كرة طول نصف قطرها ٣ سم (بدلالة  $\pi$ )

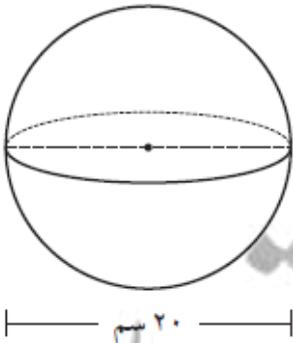
الحل : نق = ٣ سم

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3$$

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi (3)^3 = 36 \pi \text{ سم}^3$$

مثال (٣) : من خلال الشكل المقابل

اوجد حجم كرة المرسومة ( اعتبر  $\pi = 3.14$  )



الحل : نق = ١٠ سم

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3$$

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \times 3.14 \times (10)^3 = 4186.7 \text{ سم}^3$$

مثال (٤):

اوجد حجم كرة طول قطرها ١ م (اعتبر  $\pi = \frac{22}{7}$ )  
 الحل : نق = م

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3$$

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{1}{8} = \frac{11}{21} \text{ م}^3$$

مثال (٥):

اوجد حجم قبة مسجد اذا علم انها على شكل نصف كرة قطرها ١٢ م بدلالة  $\pi$   
 الحل:

الحل : نق = ٦ م

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3$$

$$\text{حجم القبة} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi (6)^3 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \times 216 = 144\pi \text{ م}^3$$

مثال (٦): شركة عطور تصمم زجاجة عطر على شكل كرة حجمها  $36\pi$  اوجد طول قطر الزجاجاة

الحل : حجم الكرة =  $\frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3$

$$36\pi = \frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3$$

$$36 \times 3 = 4 \text{ نق}^3$$

$$\text{نق}^3 = 27$$

$$\text{نق} = \sqrt[3]{27} = 3$$

مثال (٧):

كرة حجمها  $\frac{32}{3}\pi$  م<sup>٣</sup> اوجد طول نصف قطرها  
الحل :

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3}\pi \times \text{نق}^3 = \frac{32}{3}\pi$$

$$\frac{4}{3}\pi \times \text{نق}^3 = \frac{32}{3}\pi$$

$$4 \times \text{نق}^3 = 32$$

$$\text{نق}^3 = 8 \quad \text{نق} = 2 \text{ م}$$

مثال (٨):

اوجد حجم خزان على شكل نصف كرة قطرها ٢ م ( اعتبر  $\pi = \frac{22}{7}$  )  
الحل:

الحل : نق = ١ م

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3}\pi \times \text{نق}^3$$

$$\text{حجم القبة} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times (1)^3 = \frac{22}{7} \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{44}{21} \text{ م}^3$$

مثال (٩):

كرة حجمها  $\frac{256}{3}\pi$  م<sup>٣</sup> اوجد طول نصف قطرها  
الحل :

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3}\pi \times \text{نق}^3 = \frac{256}{3}\pi$$

$$\frac{4}{3}\pi \times \text{نق}^3 = \frac{256}{3}\pi$$

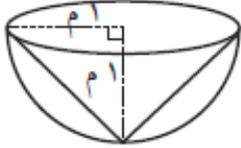
$$4 \times \text{نق}^3 = 256$$

$$\text{نق}^3 = 64 \quad \text{نق} = \sqrt[3]{64} = 4 \text{ م}$$

الدرس الرابع : تطبيقات على المساحات السطحية والحجوممثال (١)

في الشكل المقابل :

نصف كرة نصف قطرها ١ م حفر بداخلها مخروط دائري قائم قاعدته دائرة عظمى لنصف الكرة وارتفاع المخروط يساوي طول نصف قطر الكرة

احسب حجم الجزء المتبقي من المجسم بدلالة  $\pi$ 

الحل:

$$\text{حجم نصف الكرة} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \times 1^3 = \frac{2}{3} \pi$$

$$\text{حجم المخروط} = \frac{1}{3} \pi \times 1^2 \times 1 = \frac{1}{3} \pi$$

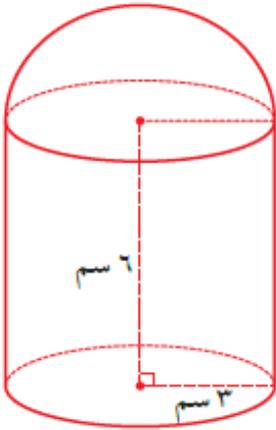
$$\text{حجم الجزء المتبقي} = \frac{2}{3} \pi - \frac{1}{3} \pi = \frac{1}{3} \pi$$

مثال (٢)

في الشكل المقابل : اسطوانة يعلوها نصف كرة

اوجد حجم المجسم بدلالة  $\pi$ 

الحل:



$$\text{حجم الاسطوانة} = \pi \times 3^2 \times 6 = 54\pi$$

$$\text{حجم نصف الكرة} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \times 3^3 = 18\pi$$

$$\text{حجم المجسم} = \text{حجم الاسطوانة} + \text{حجم نصف الكرة}$$

$$= 54\pi + 18\pi = 72\pi$$

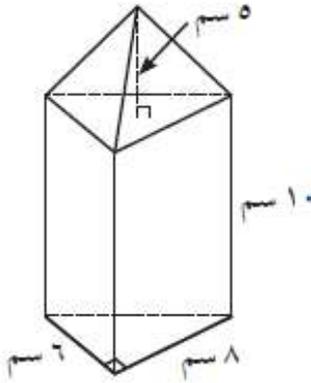
**مثال (٣):** في الشكل المقابل : منشور ثلاثي قائم ارتفاعه ١٠ سم

وقاعدته على شكل مثلث قائم طول ضلعي القائمة فيه ٨ سم ،

٦ سم يعلوه هرم ثلاثي قائم له نفس القاعدة وارتفاعه ٥ سم

اوجد حجم هذا المجسم

الحل :



$$\text{حجم المنشور الثلاثي} = \frac{1}{3} \times \text{م} \times \text{ع}$$

$$= \frac{1}{3} \times 6 \times 8 \times 10 = 240 \text{ سم}^3$$

$$\text{حجم الهرم} = \frac{1}{3} \times \text{م} \times \text{ع} = \frac{1}{3} \times 24 \times 5 = 40 \text{ سم}^3 \text{ (م مساحة القاعدة مثلثة)}$$

$$\text{حجم المجسم} = \text{حجم المنشور} + \text{حجم الهرم}$$

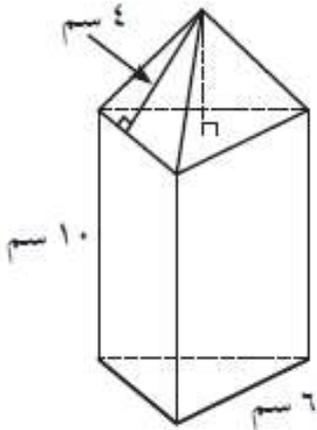
$$= 240 + 40 = 280 \text{ سم}^3$$

**مثال (٤):** اردت ياسمين تغليف علبة على شكل منشور

ثلاثي قائم يعلوه هرم ثلاثي منتظم مساحة قاعدته  $9\sqrt{3}$

كما في الشكل اوجد المساحة السطحية للورق المستخدم

لتغليف العلبة



الحل :مساحة قاعدة المنشور = مساحة قاعدة الهرم

المساحة السطحية للمنشور = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$= 3 \times 6 \times 10 + 9\sqrt{3} = 180 + 9\sqrt{3}$$

$$\text{المساحة السطحية للهرم} = 3 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 36 \text{ سم}^2$$

$$\text{المساحة السطحية للورق} = 180 + 9\sqrt{3} + 36 = 216 + 9\sqrt{3}$$