وزارة التربية **المجال الدراسي : الرياضيات**

الإدارة العامة لمنطقة حولي التعليمية **عدد الصفحات : 11 صفحة**

ثانوية فاطمة الصرعاوي

نموذج إجابة امتحان نهاية الفترة الدراسية الأولى

الصف الثاني عشر علمي

للعام 2022-2023

السؤال الأول: (15 درجة)

a) أوجد $\lim\limits_{x \to 2} \frac{(x+1)^2 - 9}{x^2 - 2x}$ (7 درجات)

الحل :

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x+1)^2 - 9}{x^2 - 2x}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{((x+1) - 3)((x+1) + 3)}{x(x-2)}$$ 3

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+4)}{x\cancel{(x-2)}} \quad : x \neq 2$$ 1

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x+4}{x}$$ 1

$$\lim_{x\to 2} x = 2 \qquad 2 \neq 0$$ 1

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+4)}{\lim\limits_{x\to 2} x} = \frac{2+4}{2} = 3$$ 1

(b لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : x \leq 2 \\ 4x - 3 & : x > 2 \end{cases}$ (8 درجات)

دالة متصلة على مجالها أوجد $f^{/}(x)$ إن أمكن

الحل

مجال الدالة : $D_f = (-\infty, 2] \cup (2, \infty) = R$

$$f^{/}(x) = \begin{cases} 2x & : x < 2 \\ ? & : x = 2 \\ 4 & : x > 2 \end{cases}$$ 1

$f(2) = (2)^2 + 1 = 5$ 1

$f^{/}_{+}(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{4x-3-5}{x-2}$ 1

$= \lim_{x \to 2^+} \frac{4x-8}{x-2}$

$= \lim_{x \to 2^+} \frac{4(x-2)}{(x-2)}$ $x \neq 2$

$= \lim_{x \to 2^+} 4$ 1

$= 4$

$f^{/}_{-}(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2+1-5}{x-2}$ 1

$= \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x-2}$

$= \lim_{x \to 2^-} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}}$: $x \neq 2$

$= \lim_{x \to 2^-} (x + 2) = 4$ 1

$f^{/}_{+}(2) = f^{/}_{-}(2) = 4$ 1

$$\therefore f^{/}(x) = \begin{cases} 2x & : x < 2 \\ 4 & : x = 2 \\ 4 & : x > 2 \end{cases} = \begin{cases} 2x & : x < 2 \\ 4 & : x \geq 2 \end{cases}$$ 1

<u>السؤال الثاني:</u> (15 درجة)

a) أدرس اتصال الدالة f على [1 ، 3] (10 درجات)

حيث :

$$f(x) = \begin{cases} -2 & : x = 1 \\ x^2 - 3 & : 1 < x < 3 \\ 6 & : x = 3 \end{cases}$$

<u>الحل</u> :

نفرض أن : $g(x) = x^2 - 3$ 1

g ***دالة متصلة*** $\forall\, x \in R$

$\because\ f(x) = g(x) \qquad \forall\ x \in (1, 3)$ 1

$\therefore\ f$ ***دالة متصلة على*** $(1, 3)$ $\longrightarrow$ 1 1

ندرس اتصال الدالة f عند x= 1 من جهة اليمين

$f(1) = -2$ 1

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} (x^2 - 3)$$

$= (1)^2 - 3 = -2$ 1

$$\therefore\ f(1) = \lim_{x\to1^+} f(x)$$

الدالة f متصلة عند x= 1 من جهة اليمين $\longrightarrow$ 2 1

ندرس اتصال الدالة f عند x = 3 من جهة اليسار

$f(3) = 6$ 1

$$\lim_{x\to3^-} f(x) = \lim_{x\to3^-} (x^2 - 3)$$

$= (3)^2 - 3 = 6$ 1

$$\therefore\ f(3) = \lim_{x\to3^-} f(x)$$ 1

الدالة f متصلة عند x= 3 من جهة اليسار $\longrightarrow$ 3

من 1 ، 2 ، 3 ينتج أن الدالة f *متصلة على الفترة* [1 ، 3] 1

(b
(5 درجات)

تعطي الدالة $v\,(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم الاسطوانه بدلالة ارتفاعها .

a) أوجدي الارتفاع h cm للحصول على أكبر حجم للإسطوانه

b) ما حجم هذا الحجم

$$v'\,(h) = 2\pi(-3h^2 + 36)$$ 1

نضع $v'\,(h) = 0$ 1

$$2\pi(-3h^2 + 36) = 0$$

$$h = -2\sqrt{3} \notin (0, \infty)$$ 0.5

$$h = 2\sqrt{3} \in (0, \infty)$$ 0.5

$\therefore$ توجد نقطة حرجة عند $h = 2\sqrt{3}$ و هي : $(2\sqrt{3}\ ,\ V(2\sqrt{3}))$ 0.5

$$v''\,(h) = 2\pi(-6h)$$

$$v''\,(2\sqrt{3}) = -12\pi(2\sqrt{3}) \quad < 0$$

$\therefore$ توجد قيمة عظمى محلية عند $h = 2\sqrt{3}$ 0.5

اكبر حجم للاسطوانة عند $h = 2\sqrt{3}\ \ cm$

$$v\,(2\sqrt{3}) = 2\pi(-3(2\sqrt{3})^3 + 36(2\sqrt{3}))$$

$$\approx 522.37\ \ cm^3$$ 1

<u>السؤال الثالث</u> (15 درجة)

a) أوجد $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-cosx}$ **(9 درجات)**

<u>الحل :</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-cosx} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-cosx}\times\frac{1+cosx}{1+cosx}$$ 1

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\ (1+cosx)}{1-cos^2x}$$ 1

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\ (1+cosx)}{sin^2x}$$ 1

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{sin^2x}\times\lim_{x\to 0}(1+cosx)$$ 2

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{sinx}\right)^2\times\lim_{x\to 0}(1+cosx)$$ 1

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{sinx}\right)^2\times\left[\lim_{x\to 0}(1)+\lim_{x\to 0}(cosx)\right]$$ 2

$$= (1)^2\ (1+1)$$

$$= 2$$ 1

b) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة : (6 درجات)

$$y = \frac{8}{4+x^2} \quad \text{عند} \quad x = 2$$

الحل :

بالتعويض بقيمة x=2

$$y = \frac{8}{4+2^2} = 1$$ 1

المنحنى يمر بالنقطة (2 , 1) 1

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8\,(2x)}{(4+x^2)^2}$$ 1

$$\text{ميل المماس} = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=2} = \frac{-8\,(2(2))}{(4+(2)^2)^2} = \frac{-1}{2}$$ 1

ميل المماس $\frac{-1}{2}$ و يمر بالنقطة (2,1)

معادلة المماس هي :

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$ 1

$$y - 1 = \frac{-1}{2}(x - 2)$$

$$y - 1 = \frac{-1}{2}x + 1$$

$$y = \frac{-1}{2}x + 1 + 1$$

$$y = \frac{-1}{2}x + 2$$ 1

السؤال الرابع: (15 درجة)

a) لتكن الدالة f : $f(x) = x^3 - 12x - 5$ (10درجات)

أوجد كلا مما يلي :

(1) النقاط الحرجة للدالة

(2) الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها

(3) القيم القصوى المحلية

الحل :

(1) ∵ f دالة كثيرة حدود

∴ f متّصلة وقابلة للاشتقاق عند كل x : $x \in R$ 1

∴ نوجد النقاط الحرجة فقط عند أصفار مشتقّة الدالّة f' 1

$f'(x) = 3x^2 - 12$ 1

نضع : $f'(x) = 0$

$3x^2 - 12 = 0$

$3(x-2)(x+2) = 0$

$x = 2 \quad , x = -2$ 1

النقاط الحرجة هي : $(2, f(2)) = (2, -21)$

$(-2, f(-2)) = (-2, 11)$ 2

(2)

$-\infty$ -2 2 ∞

الفترات	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة f'	+	-	+
سلوك الدالة f	↗	↘	↗

1.5

∴ الدالة f متزايدة على كل من $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$

و الدالة f متناقصة على $(-2, 2)$ 1.5

(3)

يوجد قيمة عظمى محلية عند $x = -2$ وهي $f(-2) = 11$ 1.5

و يوجد قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ وهي $f(2) = -21$

(b) أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهن فإذا كان حجم عينة الإناث $n= 40$

والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 12.5$ والمتوسط الحسابي للعينة $\overline{X} = 76.3$

استخدم مستوى الثقة 95% لإيجاد

(a) هامش الخطأ

(b) فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الأحصائي μ (5 درجات)

الحل :

$n= 40$ ، $\sigma = 12.5$ ، $\overline{X} = 76.3$ ، مستوى الثقة 95%

∵ مستوى الثقة 95 %

, σ معلومة

∴ الحالة 1 ⟵ القيمة الحرجة : $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

(a) هامش الخطأ : $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$E = 1.96 \times \frac{12.5}{\sqrt{40}}$$

$$E \approx 3.8738$$

(b) فترة الثقة هي : $(\overline{X} - E \quad , \quad \overline{X} + E)$

$$=(76.3 - 3.8738 \quad , \quad 76.3 + 3.8738)$$

$$=(72.4262 \quad , \quad 80.1738)$$

ثانيا : البنود الموضوعية

في البنود (1-3) ظللي في ورقة الإجابة (a) إذا كانت العبارة صحيحة ، (b) إذا كانت العبارة خاطئة:

(1) الدالة $f(x) = x\,|x|$ غير قابلة للإشتقاق $\forall\, x \in R$ — (a) (b)

(2) إذا كانت $f''(c) = 0$ فإن لمنحنى الدالة f نقطة انعطاف هي $(c, f(c))$ — (a) (b)

(3) $\lim\limits_{x \to 1^+} (2x - |x| + 2) = 3$ — (a) (b)

<u>في البنود (4-10) لكل بند أربع اختيارات واحد منها فقط صحيح اختار الإجابة الصحيحة ثم ظلل الرمز الدال عليها:</u>

(4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x+1}{\sqrt{4x^2-x+3}}$

(a) -1 (b) $\dfrac{-1}{2}$ (c) $\dfrac{1}{2}$ (d) 1

(5) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x = 2$ فإن $f(x)$ يمكن أن تكون :

(a) $\dfrac{1}{|x-2|}$ (b) $\sqrt{x-2}$ (c) $\dfrac{|x-2|}{x-2}$ (d) $\begin{cases} \sqrt{x^2-3}, & x > 2 \\ 3x-5, & x \le 2 \end{cases}$

(6) $\lim\limits_{x \to -8} \dfrac{x+8}{\sqrt[3]{x}+2} =$

(a) 12 (b) -12 (c) 4 (d) -4

(7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin x} =$

(a) 2 (b) -2 (c) 0 (d) ∞

(8) للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ مماس رأسي معادلته :

ⓐ $x = 0$ ⓑ $y = 0$ ⓒ $x = 1$ ⓓ $y = 1$

(9) عدد النقاط الحرجة للدالة $y = 3x^3 - 9x - 4$ على الفترة $(0, 2)$ هو :

ⓐ 3 ⓑ 2 ⓒ 1 ⓓ 0

(10) إن القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لدرجة الثقة 96.6% هي :

ⓐ 2.12 ⓑ 2.17 ⓒ 21.2 ⓓ 21%

جدول الإجابـــــة :

1	a	**b**	c	d
2	a	**b**	c	d
3	**a**	b	c	d
4	a	b	c	**d**
5	a	b	c	**d**
6	**a**	b	c	d
7	**a**	b	c	d
8	a	b	**c**	d
9	a	b	**c**	d
10	**a**	b	c	d

المصحح :

المراجع :

ت

10