دولة الكويت

وزارة التربية (الأسئلة في 10 صفحات)

التوجيه الفني للرياضيات منطقة حولي الزمن : ساعتان و 45 دقيقة

المجال الدراسي : الرياضيات العام الدراسي : 2022 \ 2023

إجابة نموذج امتحان نهاية الفترة الدراسية الأولي - الصف الثاني عشر علمي

القسم الأول – أسئلة المقال

15

أجب عن الأسئلة التالية موضحا خطوات الحل في كل منها

السؤال الأول : (a) لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} 5 & : x=1 \\ a\,x+b & : 1<x<4 \\ b+8 & : x=4 \end{cases}$$

متصلة علي الفترة [1 . 4] أوجد قيم الثابتين $a\,.\,b$

الحـــــــــل :

$\because$ الدالة f متصلة [1 . 4]

$\therefore$ الدالة f تحقق الشروط

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=f(4)$$
$$\lim_{x\to 4^-}(a\,x+b)=f(4)$$
$$a(4)+b=b+8$$
$$4a+b=b+8$$
$$4a+b=b+8$$
$$4a=8$$
$$a=2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$$
$$\lim_{x\to 1^+}(a\,x+b)=f(5)$$
$$a(1)+b=5$$
$$a+b=5$$
$$a+b=5$$
$$a+b=5$$
$$a+b=5$$

بالتعويض عن $a=2$

$$2+b=5\Rightarrow b=5-2=3$$

تابع السؤال الأول :

(b) أوجد النهاية : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$

الحـــــــــل :

أضرب بسط ومقام في $1 + \cos x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{1-\cos x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{(1-\cos x)(1+\cos x)} \cdot (1+\cos x)\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{(1-\cos^2 x)} \cdot (1+\cos x)\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot (1+\cos x)\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot (1+\cos x)\right)$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0}(1+\cos x)$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \left(\lim_{x\to 0}(1) + \lim_{x\to 0}\cos x\right)$$

$$= (1)^2 \times (1+1)$$

$$= 1 \times 2 = 2$$

السؤال الثاني :

(a) أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحني الدالة : $y = sec\, x$ عند النقطة $p\,(\frac{\pi}{3}\,.2)$

الحـــــــــل

$$y = sec\, x$$

$$\frac{dy}{dx} = (sec\, x)^{\backslash} = \sec x \tan x$$

$$m = \frac{dy}{dx}_{x=\frac{\pi}{3}} = \sec\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$$

ميل العمودي $= \frac{-1}{\text{ميل المماس}}$

$$m^{\backslash} = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$$

معادلة المستقيم العمودي للمنحني

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}\,(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{-1}{2\sqrt{3}}\,(x - \frac{\pi}{3})$$

$$y = \frac{-1}{2\sqrt{3}}\,x + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + 2$$

تابع السؤال الثاني :

(b) لتكن الدالة : $g\ (\ x\ ) = \sqrt{x+4}$. $f(x) = 2\ x^2 - 3$

فأدرس أتصال الدالة $go\ f$ عند $x = -2$

الحـــــــــــل :

$\because$ الدالة f كثيرة حدود متصل لكل $c \in \mathbb{R}$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = -2$ .... (1)

$f\ (-2\ ) = 2\ (\ -2)^2 - 3 = 5$ .... (2)

ندرس أتصال الدالة $g\ (x) = \sqrt{x+4}$ عند $x = 5$

نفرض أن h : $h\ (\ x\ ) = x + 4$ حيث $x \geq 5$

h الدالة متصلة عند $x = 5$

وحيث أن $9 > 0$. $h\ (9\ ) = 5 + 4 = 9$

$\therefore$ الدالة g حيث $g\ (x) = \sqrt{x+4}$ متصلة عند $x = 5$ .... (1)

من (3) ,(2) , (1)

$\therefore$ $f o\ g$ متصلة عند $x = -2$

السؤال الثالث :

(a) أوجد أن أمكن : $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-3x}$

الحـــــــــــل

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-3x}=\frac{\sqrt{3^2+7}-4}{3^2-3(3)}=\frac{4-4}{9-9}=\frac{0}{5}$$ **(صيغة غير معينة)**

$\therefore$ $(x-3)$ **عامل صفري مشترك بين البسط والمقام**

في هذه الحالة نحتاج إلي التبسيط من خلال الضرب في المرافق بسط ومقام

$$\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-3x}=\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-3x}\times\frac{\sqrt{x^2+7}+4}{\sqrt{x^2+7}+4}$$

$$=\frac{x^2+7-16}{x\,(x-3)(\sqrt{x^2+7}+4)}=\frac{x^2-9}{x\,(x-3)(\sqrt{x^2+7}+4)}$$

$$=\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{x\,\cancel{(x-3)}(\sqrt{x^2+7}+4)}==\frac{x+3}{x(\sqrt{x^2+7}+4)}\quad : x\neq 3$$

حيث أن المقام يحتوي على جذر تربيعي لابد من إيجاد شرط الجذر التربيعي

$$\lim_{x\to 3}\left(x^2+7\right)=3^2+7=16>0$$

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{(x^2+7)}=\sqrt{\lim_{x\to 3}(x^2+7)}=\sqrt{16}=4$$

شرط نهاية المقام

$$\lim_{x\to 3}\left(x(\sqrt{x^2+7}+4)\right)=\lim_{x\to 3}x(\lim_{x\to 3}\sqrt{x^2+7}+\lim_{x\to 3}4)$$

$$=3\ (4+4)=24\neq 0$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-3x}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x(\sqrt{x^2+7}+4)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)}{\lim\limits_{x\to 3}(x(\sqrt{x^2+7}+4))}=\frac{3+3}{24}=\frac{1}{4}$$

تابع السؤال الثالث :

b) إذا كانت $g(x) = \sqrt{x}$. $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$

فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(1)$

الحـــــــــل :

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4} \quad , \quad g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = \frac{(x^2-4)'(x^2+4)-(x^2-4)(x^2+4)'}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{2x(x^2+4)-(x^2-4)2x}{(x^2+4)^2} = \frac{2x^3+8x-2x^3+8x}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{16x}{(x^2+4)^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'[g(x)] = f'(\sqrt{x}) = \frac{16(\sqrt{x})}{((\sqrt{x})^2+4)^2} = \frac{16\sqrt{x}}{(x+4)^2}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

$$= \frac{16\sqrt{x}}{(x+4)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{8}{(x+4)^2}$$

$$(f \circ g)'(1) = \frac{8}{(1+4)^2} = \frac{8}{25}$$

السؤال الرابع :

(a) أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 49$ ومتوسطها الحسابي $\overline{x} = 44$

وانحرافها المعياري $S = 6.3$ بإستخدام مستوي ثقة 95%

(1) أوجد هامش الخطأ ٠

(2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ ٠

الحـــــــــــل

حجم العينة : $n = 49$ متوسط الحسابي : $\overline{x} = 44$ انحراف المعياري : $S = 6.3$

مستوي الثقة = 95%

القيمة الحرجة = $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,95$

σ غير معلومة ، $n = 49 \geq 30$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 1.95 \times \frac{6.3}{\sqrt{49}} \Rightarrow E = 1.764$$

(1) هامش الخطأ $E = 1.764$

(2) فترة الثقة هي :

$$(\,\overline{x} - E \,.\, \overline{x} + E\,) = (\,44 - 1.764 \,.\, 44 + 1.764\,)$$

$$= (42.236 \quad . \quad 45.764\,)$$

تابع السؤال الرابع :

(b) أوجد فترات التقعر ونقطة الانعطاف لمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

الحـــــــــــل

∵ الدالة f كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

∴ f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

(4) دراسة أشارة f''

$$f''(x) = 6x - 4$$

نضع $f''(x) = 0$

$$6x - 4 = 0 \Longrightarrow 6x = 4$$

$$x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

الفترات	$(-\infty . \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2} . \infty)$
إشارة f''	- - -	+ + +
التقعر	∩	∪

من الجدول :

منحني الدالة مقعر لأسفل علي الفترة $(-\infty . \frac{3}{2})$ ومقعر لأعلي علي الفترة $(\frac{3}{2} . \infty)$

يوجد للدالة f نقطة أنعطاف عند $(\frac{3}{2} . -\frac{9}{8})$

:

y

ثانيًا : البنود الموضوعية

في البنود من (1) الى (3) : عبارات ظلل الدائرة (a) إذا كانت العبارة الصحيحة ، (b) إذا كانت العبارة الخاطئة :

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \sin 2x}{2 \cos 2x} = \frac{1}{2}$

(a) ● (b)

....

(2) إذا كانت $y = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x^4}$

(a) ● (b)

....

(3) أصغر محيط ممكن لمستطيل مساحته $16\ cm^2$ هو $16\ cm$

(a) ● (b)

ثانياً : في البنود من (4) الى (10) : لكل بند أربعة خيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلل في ورقة الإجابة رمز الرمز الدال على الإ جابة الصحيحة

(4) إذا كانت الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^2 - a}$ متصلة عند $x = 3$ فإن a يمكن أن تساوي

(a) ● 4 (b) 9 (c) 16 (d) 25

....

(5) الدالة f : $f(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - 25}}$ متصلة على :

(a) $\left(-\infty . \frac{1}{2}\right]$ (b) ● $(5 . \infty)$

(c) $\mathbb{R}$ (d) $(-5 . 5)$

....

(6) ميل المماس عند النقطة $A(1 . 1)$ على المنحني : $x^2 - 3y^2 + 2xy = 0$ هي

(a) -1 (b) 0 (c) ● 1 (d) 2

(7) في دراسة حول متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة هو

(دينارًا) $\mu = 320$ تبين أن المتوسط الحسابي لعينة حجمها $n = 25$ منزلًا من هذه المدينة

(دينارًا) $\bar{x} = 310$ مع انحراف معياري $S = 40$ إن مقياس الإحصائي هو :

a **1.25** b **-1.25**

c **0.8** d **-0.8**

===

(8) لتكن الدالة f : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-3}}$ ، الدالة $g(x) = x^2 + 3 \,.\, x \neq 0$ فإن : $(f \circ g)(x)$ تساوي

a $\frac{x^2}{x-3} + 3$ b $\frac{x}{\sqrt{x-3}} + 3$

c $\frac{-(x^2+3)}{x}$ d $\frac{x^2+3}{|x|}$

...

(9) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2x+3}{\sqrt{4x^2-x+3}}$

a -1 b 1 c $\frac{1}{2}$ d $-\frac{1}{2}$

...

(10) أن معادلة المماس للدالة f : $y = 2x^2 - 13x + 2$ عند $x = 3$ هي

a $y = x - 16$ b $y = -x + 16$

c $y = -x - 13$ d $y = -x - 16$

" أنتهت الأسئلة "

ورقة إجابة البنود الموضوعية

السؤال	الإجابة			
(1)	a	b		
(2)	a	b		
(3)	a	b		
(4)	a	b	c	d
(5)	a	b	c	d
(6)	a	b	c	d
(7)	a	b	c	d
(8)	a	b	c	d
(9)	a	b	c	d
(10)	a	b	c	d

قوانين

$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \; ; \; -Z_{\frac{\alpha}{2}} = -Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$ (القيمة الحرجة)

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (الخطأ المعياري للمجتمع)

$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \bullet \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (هامش الخطأ – توزيع طبيعي)

$(\overline{x} - E \; , \; \overline{x} + E)$ فترة الثقة للمتوسط الحسابي

$t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (التوزيع t)

$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \bullet \frac{S}{\sqrt{n}}$ (هامش الخطأ – توزيع t الانحراف المعياري σ غير معاوم)

$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ (المقياس الإحصائي – توزيع طبيعي)

$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ (المقياس الإحصائي – توزيع طبيعي – الانحراف المعياري σ غير معلوم)

$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ (المقياس الاحصائي – توزيع t – الانحراف المعياري σ غير معاوم)