نماذج أجابة أسئله أمتحان تقييمى أول

2022 / 2023 فصل أول

عمل / أ . أحمد نصار

(1)

بفرض أنّ: $\lim_{x \to 1} g(x) = 5$, $\lim_{x \to 1} f(x) = -2$

أوجد:

a) $\lim_{x \to 1}(f(x) - g(x))$ b) $\lim_{x \to 1} \frac{2f(x)}{g(x)}$ c) $\lim_{x \to 1} \frac{g(x)+4}{f(x) \cdot g(x)}$

الحل:

a) $\lim_{x \to 1}(f(x) - g(x)) = \lim_{x \to 1} f(x) - \lim_{x \to 1} g(x)$
$= -2 - 5$
$= -7$

b) $\lim_{x \to 1} g(x) = 5 \quad , \quad 5 \neq 0$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to 1} 2f(x)}{\lim_{x \to 1} g(x)} = \frac{2\lim_{x \to 1} f(x)}{\lim_{x \to 1} g(x)}$$
$$= \frac{2(-2)}{5}$$
$$= \frac{-4}{5}$$
$$= -0.8$$

c) $\lim_{x \to 1}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to 1} f(x) \cdot \lim_{x \to 1} g(x)$
$= -2 \times 5$
$= -10 \quad , \quad -10 \neq 0$

$$\lim_{x \to 1} \frac{g(x)+4}{f(x) \cdot g(x)} = \frac{\lim_{x \to 1}(g(x)+4)}{\lim_{x \to 1}(f(x) \cdot g(x))}$$
$$= \frac{\lim_{x \to 1} g(x) + \lim_{x \to 1} 4}{\lim_{x \to 1} f(x) \cdot \lim_{x \to 1} g(x)}$$
$$= \frac{5+4}{-10}$$
$$= -\frac{9}{10}$$
$$= -0.9$$

(2)

(a) أوجد

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x+1)^2 - 9}{x^2 - 2x}$$

الحل :

عند التعويض المباشر عن x بـ 2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$\frac{(x+1)^2 - 9}{x^2 - 2x} = \frac{(x+1-3)(x+1+3)}{x(x-2)}$$

$$= \frac{(x-2)(x+4)}{x(x-2)}$$

$$= \frac{x+4}{x} \quad , \quad x \neq 2$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)^2 - 9}{x^2 - 2x} = \lim_{x\to 2} \frac{x+4}{x}$$

$$\because \lim_{x\to 2} x = 2 \quad , \quad 2 \neq 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} \frac{x+4}{x} = \frac{\lim_{x\to 2}(x+4)}{\lim_{x\to 2} x}$$

$$= \frac{2+4}{2} = 3$$

(3)

c عند التعويض المباشر عن x بـ 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معيّنة.

اكتب البسط دون استخدام رمز القيمة المطلقة وحلّل المقام إلى عوامل $(x-1)$ عامل صفري مشترك بين البسط والمقام

$$\frac{|x-1|}{x^2-1}=\begin{cases}\dfrac{\overset{1}{\cancel{x-1}}}{\underset{1}{\cancel{(x-1)}}(x+1)} & : \quad x>1\\[2ex] \dfrac{\overset{-1}{\cancel{1-x}}}{\underset{1}{\cancel{(x-1)}}(x+1)} & : \quad x<1\ ,\ x\neq -1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & : \quad x>1\\[2ex] \dfrac{-1}{(x+1)} & : \quad x<1\ ,\ x\neq -1\end{cases}$$

لإيجاد $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x^2-1}$

نتحقق من نهاية المقام $\neq 0$

$$\because\ \lim_{x\to 1^+}(x+1)=2 \qquad , \qquad 2\neq 0$$

استخدم الصيغة المبسطة وعوّض عن x بـ 1 (النهاية من جهة اليمين)

$$\therefore\ \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$\because\ \lim_{x\to 1^-}-(x+1)=-(1+1)=-2 \qquad , \qquad -2\neq 0$$

استخدم الصيغة المبسطة وعوّض عن x بـ 1 (النهاية من جهة اليسار)

$$\therefore\ \lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{(x+1)}=\frac{-1}{(1+1)}=-\frac{1}{2}$$

$$\because\ \lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|}{x^2-1}\neq\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x^2-1}$$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x^2-1}$ غير موجودة

(4)

b عند التعويض المباشر عن x بـ 0 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معيّنة.

$$\frac{(2+x)^3-8}{x}=\frac{(2+x-2)\left((2+x)^2+2(2+x)+(2)^2\right)}{x}$$

x عامل صفري مشترك بين البسط والمقام

$$=\frac{\cancel{x}^1(4+4x+x^2+4+2x+4)}{\cancel{x}^1}$$

$$=x^2+6x+12 \quad , \quad x\neq 0$$

استخدم الصيغة المبسطة

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x}=\lim_{x\to 0}(x^2+6x+12)=12$$

(5)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

عند التعويض المباشر عن x بـ 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

حلّل البسط: الفرق بين مكعبين

$$\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{\cancel{(\sqrt[3]{x}-1)}^{1}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{\cancel{(\sqrt[3]{x}-1)}_{1}}$$

$$=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1 \qquad , \qquad x\neq 1$$

استخدم الصيغة المبسطة

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to 1}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)$$

$$=\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{x^2}+\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{x}+\lim_{x\to 1}1$$

$$=\sqrt[3]{\lim_{x\to 1}x^2}+\sqrt[3]{\lim_{x\to 1}x}+1$$

عوّض عن x بـ 1

$$=1+1+1=3$$

(6)

c $\lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}$

عند التعويض عن x بـ -2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

مرافق $\sqrt[3]{a}$ هو $\sqrt[3]{a^2}$

$$\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}} = \frac{(x^2-4)}{\sqrt[3]{x+2}} \times \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}$$

$\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a} = a$

$$= \frac{(x^2-4) \times \sqrt[3]{(x+2)^2}}{x+2}$$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{(x+2)}}(x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\underset{1}{\cancel{(x+2)}}}$$

$$= (x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2} \quad , \quad x \neq -2$$

استخدم الصيغة المبسطة

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}} = \lim_{x \to -2}\left((x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2}\right)$$

$$= \lim_{x \to -2}(x-2) \cdot \lim_{x \to -2}\sqrt[3]{(x+2)^2}$$

$$= \lim_{x \to -2}(x-2) \cdot \sqrt[3]{\lim_{x \to -2}(x+2)^2}$$

$$= (-2-2) \cdot \sqrt[3]{(-2+2)^2}$$

$$= (-4) \times (0) = 0$$

(7)

عند التعويض المباشر عن x بـ 2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2} = \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2} \times \frac{\sqrt{2x-3}+1}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$$= \frac{2x-3-1}{(x-2)\left(\sqrt{2x-3}+1\right)}$$

$$= \frac{2(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{2x-3}+1\right)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2x-3}+1} \quad , \quad x \neq 2$$

$$\lim_{x\to2}(2x-3) = 1 \ , \quad 1 > 0$$

$$\lim_{x\to2}\left(\sqrt{2x-3}+1\right) = \lim_{x\to2}\sqrt{2x-3} + \lim_{x\to2}1$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to2}(2x-3)} + 1 = 1 + 1 = 2 \ , \quad 2 \neq 0$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$$= \frac{\lim_{x\to2} 2}{\lim_{x\to2}\left(\sqrt{2x-3}+1\right)} = \frac{2}{2} = 1$$

(8)

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^5+32}{x+2}$$

$\frac{x^5+32}{x+2}$ عند التعويض عن x بـ -2 في كل البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

$$x^5+32 = x^5+0x^4+0x^3+0x^2+0x+32$$

أقسم البسط على المقام وأوجد الناتج باستخدام القسمة التركيبية

-2	1	0	0	0	0	32
		-2	4	-8	16	-32
	1	-2	4	-8	16	0

الناتج: $x^4-2x^3+4x^2-8x+16$ والباقي صفر

$$\frac{x^5+32}{x+2} = x^4-2x^3+4x^2-8x+16 \quad , \quad x \neq -2$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^5+32}{x+2} = \lim_{x \to -2} (x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$$

عوّض عن x بـ -2

$$= (-2)^4 - 2(-2)^3 + 4(-2)^2 - 8(-2) + 16$$

$$= 16+16+16+16+16$$

بسّط

$$= 80$$

(9)

(8 درجات)

(b) أوجد :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2-5x+1}}{3x-5}$$

الحل :

$$f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-5x+1}}{3x-5} = \frac{\sqrt{x^2(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2})}}{x(3-\frac{5}{x})} \qquad [1]$$

$$= \frac{|x|\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x(3-\frac{5}{x})}$$ عندما $x<0$ يكون $|x|=-x$ ، [0.5]

$$= \frac{-x\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x(3-\frac{5}{x})} = -\frac{\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} \quad , x \neq 0 \qquad [1]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} 3 - \lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x} + \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2} = 3-0+0 = 3 \ , 3>0 \qquad [1.5]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{3} \qquad [1]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{5}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} 3 - \lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x} = 3-0 = 3 \quad , \quad 3 \neq 0 \qquad [1.5]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2-5x+1}}{3x-5} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}}$$

$$= \frac{-\lim_{x\to\infty}\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to\infty}(3-\frac{5}{x})} = \frac{-\sqrt{3}}{3} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \qquad [1.5]$$

(10)

(a) أوجد

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$$

الحل: بفرض أن $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}} = \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$ عندما $x > 0$ يكون $|x| = x$

$$= \frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$ بشرط $x \neq 0$

$$\because \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} - \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}$$

$$= 1+0-0 = 1 \quad , \ 1 > 0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)} = \sqrt{1} = 1 \quad , 1 \neq 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 - \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 1-0 = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

(11)

(b) ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$ حيث :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x}{|x|} & : x \neq 0 \\ -3 & : x = 0 \end{cases}$$

الحل :

1 $$\frac{x^2 - 3x}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{x(x-3)}{x} & : x > 0 \\ \dfrac{x(x-3)}{-x} & : x < 0 \end{cases}$$

1 $$\therefore f(x) = \begin{cases} x - 3 & : x > 0 \\ -x + 3 & : x < 0 \\ -3 & : x = 0 \end{cases}$$

$$f(0) = -3$$

1 $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x - 3) = -3$$

1 $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x + 3) = 3$$

1 $$\because \lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

1 $\therefore \lim_{x \to 0} f(x)$ ليست موجودة

1 $\therefore$ الدالة f ليست متصلة عند $x = 0$

(12)

(a) لتكن f :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & : x>3\\ 7 & : x\le 3\end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x=3$

<u>الحل :</u>

$f(3)=7$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} 7=7$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}(x+3)=3+3=6$$

$$\because \lim_{x\to 3^-} f(x)\neq \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

$\therefore \lim_{x\to 3} f(x)$ ليست موجودة

$\therefore$ الدالة f ليست متصلة عند $x=3$