مذكرة التدريبات

الرياضيات

الكورس الأول

12

مذكرة التدريبات

UULA

الرياضيات

الكورس الأول

12

شلون تتفوق بدراستك

منصة علا تخلي المذكرة أقوى

تبي أعلى الدرجات؟ لا تعتمد على المذكرة بروحها
ادرس صح من الفيديوهات و الاختبارات في منصة علا

اختبارات ذكية تدربك

حل الاختبارات الإلكترونية أول بأول
عشان ترفع مستواك

فيديوهات تشرح لك

تابع الفيديوهات و اسأل المعلم في علا وأنت
تدرس من المذكرة عشان تضبط الدرس

اكتشف عالم التفوق مع منصة علا

لتشترك بالمادة و تستمتع بالشرح
المميز صور أو اضغط على الQR

UULA

المعلق

هذه المذكرة تغطي المادة كاملة.

في حال وجود أي تغيير للمنهج أو تعليق جزء منه يمكنكم مسح رمز QR للتأكد من المقرر.

المنقذ

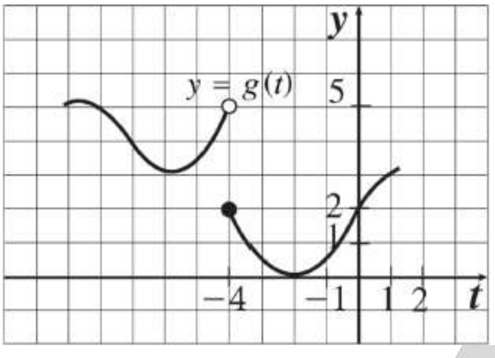
أول ما تحتاج مساعدة بالمادة ، المنقذ موجود!

صور الQR بكاميرا التلفون أو اضغط عليه إذا كنت تستخدم المذكرة من جهازك و يطلع لك فيديو يشرح لك.

قائمة المحتوى

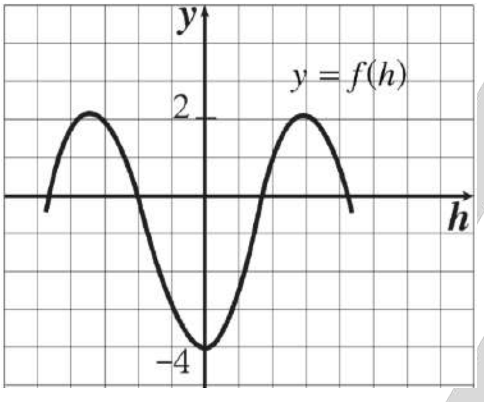
النهايات

1. الشكل المقابل, يمثل بيان الدالة g. أوجد إن أمكن:



- $\lim\limits_{t \to -4^-} g(t) = 5$
- $\lim\limits_{t \to -4^+} g(t) = 2$
- $\lim\limits_{t \to -4} g(t)$ غير موجودة
- $g(-4) = 2$

2. الشكل المقابل, يمثل بيان الدالة f. أوجد إن أمكن:



- $\lim\limits_{h \to 0^-} f(h) = -4$
- $\lim\limits_{h \to 0^+} f(h) = -4$
- $\lim\limits_{h \to 0} f(h) = -4$
- $f(0) = -4$

3. بفرض أن $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 4} g(x) = 3$, أوجد:

- $\lim\limits_{x \to 4} (g(x) + 3) = \lim\limits_{x \to 4} g(x) + \lim\limits_{x \to 4} (3) = 3 + 3 = 6$
- $\lim\limits_{x \to 4} xf(x) = \lim\limits_{x \to 4} x \cdot \lim\limits_{x \to 4} f(x) = (4)(0) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 4} (g(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to 4} g(x) \cdot \lim\limits_{x \to 4} g(x) = 3 \times 3 = 9$
- $\lim\limits_{x \to 4} \frac{g(x)}{f(x)-1} = \frac{\lim\limits_{x \to 4} g(x)}{\lim\limits_{x \to 4} (f(x) - 1)} = \frac{3}{-1} = -3$

نهاية البسط: $\lim\limits_{x \to 4} g(x) = 3$

نهاية المقام: $\lim\limits_{x \to 4} (f(x) - 1) = \lim\limits_{x \to 4} f(x) - \lim\limits_{x \to 4} 1 = 0 - 1 = -1, -1 \neq 0$

في التمارين التالية أوجد:

4. $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} (3x^2(2x-1)) = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} (6x^3 - 3x^2) = 6\left(\frac{-1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{-1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{2} = -1.5$

5. $\lim\limits_{y\to -3} \dfrac{y^2+4y+3}{y^2-3}$ $= \dfrac{(-3)^2+4(-3)+3}{(-3)^2-3}$

$= \dfrac{0}{6} = 0$

نهاية المقام:

$\lim\limits_{y\to -3} (y^2-3) = (-3)^2 - 3 = 6$

$6 \neq 0$

6. $\lim\limits_{x\to -4} (x+3)^{1998}$ $= \left(\lim\limits_{x\to -4} (x+3)\right)^{1998} = (-4+3)^{1998} = 1$

7. $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x-2}$ $= \sqrt{\lim\limits_{x\to 3}(x-2)} = \sqrt{1} = 1$

شرط الجذر: $\lim\limits_{x\to 3}(x-2) = 3-2 = 1 , 1 > 0$

.8 لتكن الدالة f :أوجد: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 3-x & : x < 2 \\ 2 & : x = 2 \\ \dfrac{x}{2} & : x > 2 \end{cases}$$

$f(2) = 2$

$3 - x$ | 2 | $\dfrac{x}{2}$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (3-x)$

$= 3 - 2 = 1$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

$\because \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$ $\therefore \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$

سؤال من المريخ:

.9 لتكن الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{1-x^2} & ,0 \le x < 1 \\ 1 & ,1 \le x < 2 \\ 2 & ,x = 2 \end{cases}$$

أوجد إن أمكن : $(a) \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ $(b) \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

$\sqrt[3]{1-x^2}$ | 1 | 2

0 | 1 | 2

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt[3]{1-x^2}$

$= \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x^2)}$

$= \sqrt[3]{1-(1)^2} = 0$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to 1^+} (1) = 1$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to 2^-} (1) = 1$

$\because \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ $\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة

سؤال من المريخ:

10.لتكن الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases}-x^2+4 & ,-1\le x<1\\ 2 & ,1\le x<2\\ x & ,2\le x<4\end{cases}$$

أوجد إن أمكن : $(b)\ \lim_{x\to2} f(x)\quad (a)\ \lim_{x\to1} f(x)$

$$\underset{-1}{\bullet}\xrightarrow{\ -x^2+4\ }\underset{1}{\bullet}\xrightarrow{\ 2\ }\underset{2}{\bullet}\xrightarrow{\ x\ }\underset{4}{\bullet}$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(-x^2+4)$$
$$=-(1)^2+4=3$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}(2)=2$$
$$\because \lim_{x\to1^-} f(x)\neq\lim_{x\to1^+} f(x)$$
$\therefore \lim_{x\to1} f(x)$ غير موجودة

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}2=2$$
$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}x=2$$
$$\because \lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^+} f(x)=2$$
$$\therefore \lim_{x\to2} f(x)=2$$

11. $\lim_{x\to0}\frac{(4+x)^2-16}{x}$

بالتعويض المباشر عن x بـ 0 نحصل على صيغة غير معينة

(1)

$$f(x)=\frac{(4+x)^2-16}{x}=\frac{(4+x+4)\cancel{(4+x-4)}}{\cancel{x}}=8+x\qquad x\neq0$$

$$\therefore \lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}(8+x)=8+0=8$$

12. $\lim_{t\to2}\frac{t^2-3t+2}{t^2-4}$

بالتعويض المباشر عن t بـ 2 نحصل على صيغة غير معينة

(1)

$$f(t)=\frac{t^2-3t+2}{t^2-4}=\frac{\cancel{(t-2)}(t-1)}{\cancel{(t-2)}(t+2)}=\frac{t-1}{t+2}\quad : t\neq2$$

$$\therefore \lim_{t\to2} f(t)=\lim_{t\to2}\frac{t-1}{t+2}=\frac{2-1}{4}=\frac{1}{4}$$

نهاية المقام:

$$\lim_{t\to2}(t+2)=2+2=4\neq0$$

13. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(3+x)^3-27}{x}$ (1)

بالتعويض المباشر عن x بـ 0 نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x)=\frac{(\cancel{3+x-3})((3+x)^2+(3+x)3+3^2)}{\cancel{x}} \qquad : x\neq 0$$

$$=(3+x)^2+3(3+x)+9$$

$$\therefore \lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left((3+x)^2+3(3+x)+9\right)$$

$$=\left(\lim_{x\to0}(3+x)\right)^2+3\lim_{x\to0}(3+x)+\lim_{x\to0}9 \qquad =(3+0)^2+3(3+0)+9=27$$

14. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{|x+2|}{x^2+3x+2}$

بالتعويض المباشر عن x بـ -2 نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x^2+3x+2}=\dfrac{\overset{(1)}{\cancel{x+2}}}{\cancel{(x+2)}(x+1)}=\dfrac{1}{x+1} & x>-2 \qquad x\neq-2\\[2ex] \dfrac{-x-2}{x^2+3x+2}=\dfrac{\overset{(-1)}{\cancel{-x-2}}}{\cancel{(x+2)}(x+1)}=\dfrac{-1}{x+1} & x<-2 \qquad x\neq-2\end{cases}$$

$\dfrac{-1}{x+1}$ $\qquad -2 \qquad$ $\dfrac{1}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=$	نهاية المقام	$\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=$	نهاية المقام
$\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{-1}{x+1}=$	$\lim\limits_{x\to-2^-}(x+1)$	$\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{1}{x+1}=$	$\lim\limits_{x\to-2^+}(x+1)$
$\dfrac{-1}{-1}=1$	$=(-2)+1=-1$	$\dfrac{1}{-1}=-1$	$=(-2)+1=-1$
	$-1\neq0$		$-1\neq0$

$\because \lim\limits_{x\to-2^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)$ $\qquad$ $\therefore \lim\limits_{x\to-2}f(x)$ غير موجودة

15. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}$

بالتعويض المباشر عن x بـ 3 نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x)=\underset{(1)}{\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}}\times\frac{\sqrt{x^2+7}+4}{\sqrt{x^2+7}+4}=\frac{x^2+\overbrace{\boxed{7-4^2}}^{-9}}{(x^2-4x+3)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}$$

$$=\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}(x-1)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}=\frac{(x+3)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}\quad : \ x\neq 3$$

شرط الجذر:

$$\lim_{x\to 3}(x^2+7)$$

$$=3^2+7=16,\qquad 16>0$$

نهاية البسط:

$$\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6$$

نهاية المقام

$$\lim_{x\to 3}(x-1)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)$$

$$=\lim_{x\to 3}(x-1)\left(\sqrt{\lim_{x\to 3}(x^2+7)}+\lim_{x\to 3}4\right)$$

$$=(3-1)\left(\sqrt{16}+4\right)=16:\ 16\neq 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 3}f(x)$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)}{\lim\limits_{x\to 3}(x-1)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}$$

$$=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

سؤال من المريخ:

16. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x+3}{\sqrt[3]{9x}+3}$

بالتعويض المباشر عن x بـ -3 نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x)=\underset{(1)}{\frac{x+3}{\sqrt[3]{9x}+3}}=\frac{9x+27}{9\left(\sqrt[3]{9x}+3\right)}=\frac{\left(\sqrt[3]{9x}\right)^3+3^3}{9\left(\sqrt[3]{9x}+3\right)}$$

$$=\frac{\cancel{\left(\sqrt[3]{9x}+3\right)}\left(\left(\sqrt[3]{9x}\right)^2-3\sqrt[3]{9x}+3^2\right)}{9\cancel{\left(\sqrt[3]{9x}+3\right)}}=\frac{1}{9}\left(\sqrt[3]{81x^2}-3\sqrt[3]{9x}+9\right)$$

$: x\neq -3$

$$\therefore \lim_{x\to -3}f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{1}{9}\left(\sqrt[3]{81x^2}-3\sqrt[3]{9x}+9\right)=\frac{1}{9}\left(\lim_{x\to -3}\sqrt[3]{81x^2}-\lim_{x\to -3}3\sqrt[3]{9x}+\lim_{x\to -3}9\right)$$

$$=\frac{1}{9}\left(\sqrt[3]{\lim_{x\to -3}81x^2}-3\sqrt[3]{\lim_{x\to -3}9x}+9\right)=\frac{1}{9}\left(\sqrt[3]{9(-3)^2}-3\sqrt[3]{9(-3)}+9\right)=\frac{1}{9}(9+9+9)=3$$

معلق

17. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3-3x^2-7x+6}{x+2}$

بالتعويض المباشر عن x بـ -2 نحصل على صيغة غير معينة

-2	1	-3	-7	6
		-2	10	-6
	1	-5	3	0

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2-7x+6}{x+2}$$

$$=x^2-5x+3 \quad : x\neq -2$$

$$\therefore \lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}(x^2-5x+3)$$

$$=(-2)^2-5(-2)+3=17$$

18. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^4-7x^2-18}{x-3}$

بالتعويض المباشر عن x بـ 3 نحصل على صيغة غير معينة

3	1	0	-7	0	-18
		3	9	6	18
	1	3	2	6	0

$$f(x)=\frac{x^4-7x^2-18}{x-3}$$

$$=x^3+3x^2+2x+6 \quad : x\neq 3$$

$$\therefore \lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}(x^3+3x^2+2x+6)$$

$$=3^3+3(3)^2+2(3)+6=66$$

19. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x^3-5x^2-12}{x-2}$

بالتعويض المباشر عن x بـ 2 نحصل على صيغة غير معينة

2	4	-5	0	-12
		8	6	12
	4	3	6	0

$$f(x)=\frac{4x^3-5x^2-12}{x-2}$$

$$=4x^2+3x+6 \quad : x\neq 2$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(4x^2+3x+6)$$

$$=4(2)^2+3(2)+6=28$$

أسئلة من المريخ:

20. $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$

بالتعويض المباشر عن x بـ 1 نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}=\frac{1(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}=\frac{\overset{(1)}{\cancel{x-1}}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$$

$$=\frac{1}{x+1} \qquad : x\neq 1$$

$\therefore \lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$

نهاية المقام $\lim_{x\to1}(x+1)=2\ ,\ 2\neq 0$

21. $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)$

بالتعويض المباشر عن x بـ 1 نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{1(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}-\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

⚠️ معلق

$$=\frac{\overset{(1)}{\cancel{(x-1)}}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}=\frac{x+2}{(x^2+x+1)} \qquad : x\neq 1$$

$\therefore \lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{(x^2+x+1)}=\frac{1+2}{3}=1$

نهاية المقام $\lim_{x\to1}(x^2+x+1)=3,\quad 3\neq 0$

22. $\lim_{x\to2}\left(\frac{x}{x-2}-\frac{4x}{x^2-4}\right)$

بالتعويض المباشر عن x بـ 2 نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x)=\frac{x}{x-2}-\frac{4x}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)}-\frac{4x}{(x-2)(x+2)}=\frac{x^2-2x}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{x\overset{(1)}{\cancel{(x-2)}}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{x}{(x+2)} \qquad : x\neq 2$$

$\therefore \lim_{x\to2} f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x}{(x+2)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

نهاية المقام $\lim_{x\to2}(x+2)=4\ ,4\neq 0$

نهايات تشتمل على $\pm\infty$

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-2}=0$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^3}=0$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{2x+3}=\frac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left(2-\frac{x}{x+1}\right)\left(\frac{x^2}{5+x^2}\right)\right)=$

$$\left(\lim_{x\to-\infty}2-\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+1}\right)\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{5+x^2}\right)=\left(2-\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{1}\right)=1$$

5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{4x^2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{4x^2}}=\frac{1}{2|x|}=\begin{cases}\frac{1}{2x} & x>0\\ \frac{-1}{2x} & x<0\end{cases}$$

0

$$\frac{-1}{2x}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{(x-0)} \qquad \frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-0)}$$

معلق

$$\lim_{x\to0^-}\frac{1}{\sqrt{4x^2}}=\lim_{x\to0^-}\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{(x-0)} \qquad \lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{4x^2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-0)}$$

(1) $=+\infty$ $\because\frac{-1}{2}<0$ $\qquad$ $=+\infty$ (2)

$$(1),(2)\Longrightarrow\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{4x^2}}=\infty$$

6. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{3}{|x-5|}$

$$\frac{3}{|x-5|}=\begin{cases}\dfrac{3}{x-5} & x>5\\[2mm] \dfrac{-3}{x-5} & x<5\end{cases}$$

5

$$\frac{-3}{x-5}=(-3)\cdot\frac{1}{x-5}$$

$$\lim_{x\to 5^-}\frac{3}{|x-5|}=\lim_{x\to 5^-}(-3)\cdot\frac{1}{x-5}$$

① $=+\infty$: $-3<0$

$$\frac{3}{x-5}=3\cdot\frac{1}{x-5}$$

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{3}{|x-5|}=\lim_{x\to 5^+}3\cdot\frac{1}{x-5}$$

$=+\infty$ ②

$$①,②\Longrightarrow\lim_{x\to 5}\frac{3}{|x-5|}=+\infty$$

7. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{-7}{|x+2|}$

$$\frac{-7}{|x+2|}=\begin{cases}\dfrac{-7}{x+2} & x>-2\\[2mm] \dfrac{-7}{-x-2}=\dfrac{7}{x+2} & x<-2\end{cases}$$

معلق

-2

$$\frac{7}{x+2}=7\cdot\frac{1}{x+2}$$

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{-7}{|x+2|}=\lim_{x\to -2^-}7\cdot\frac{1}{(x+2)}$$

$=-\infty$ ①

$$\frac{-7}{x+2}=(-7)\cdot\frac{1}{x+2}$$

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{-7}{|x+2|}=\lim_{x\to -2^+}(-7)\cdot\frac{1}{(x+2)}$$

② $=-\infty$: $-7<0$

$$①,②\Longrightarrow\lim_{x\to -2}\frac{-7}{|x+2|}=-\infty$$

سؤال من المريخ:

8. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+}\frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^8}}$

$$\frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^8}}=\frac{(2x-1)}{(2x-1)^4}=\frac{1}{(2x-1)^3}\quad : x\neq\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^3}=\frac{1}{8\left(x-\frac{1}{2}\right)^3}$$

$$\therefore\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^8}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{1}{8\left(x-\frac{1}{2}\right)^3}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^3}=+\infty$$

صيغ غير معينة

1. $\lim_{x\to\infty}(3x^2-5x+4)=\lim_{x\to\infty}(3x^2)=\infty$

2. $\lim_{x\to\infty}(-4x^2+x-1)=\lim_{x\to\infty}(-4x^2)=-\infty \quad : -4<0$

3. $\lim_{x\to-\infty}(2x^3-3x+7)=\lim_{x\to-\infty}(2x^3)=-\infty$

4. $\lim_{x\to-\infty}(-4x^3+2x+5)=\lim_{x\to-\infty}(-4x^3)=\infty \quad : -4<0$

5. $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-5x+7}{-2x^2+3x-1}=\frac{4}{-2}=-2$ درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام

6. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+7x-1}{-5x^3+x+2}=\frac{2}{-5}$ درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام

7. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+5}{2x^3+x-1}=0$ درجة حدودية البسط < درجة حدودية المقام

8. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2-2x+3}=0$ درجة حدودية البسط < درجة حدودية المقام

9. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{\sqrt{x^2+2x+7}}$ $\quad f(x)=\frac{x+5}{\sqrt{x^2+2x+7}}=\frac{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}}$

$(x>0\,,|x|=x)$

$$=\frac{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}}\overset{(1)}{=}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}}=\frac{\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}} \quad : x\neq 0$$

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x^2}=1+0+0=1>0$:شرط الجذر

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}=1+0=1$:نهاية البسط

$\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}\sqrt{1}=1\neq 0$:نهاية المقام

$$\therefore \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}}=\frac{1}{1}=1$$

10. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{4x^2+5x+6}}$

$$f(x) = \frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}} = \frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}} \quad (x<0 \ \ , |x| = -x)$$

$$= \frac{\overset{(-1)}{\cancel{x}}\left(2-\frac{3}{x}\right)}{-\cancel{x}\sqrt{\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}} = \frac{-2+\frac{3}{x}}{\sqrt{\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}} \qquad : x \neq 0$$

شرط الجذر:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty}(4) + \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{x}\right) + \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{6}{x^2}\right)$$

$$= 4+0+0 = 4, \qquad 4>0$$

نهاية البسط

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-2+\frac{3}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}(-2) + \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{x}\right) = -2+0 = -2$$

نهاية المقام :

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)} = \sqrt{4} = 2 \neq 0$$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2+\frac{3}{x}}{\sqrt{\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2+\frac{3}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}} = \frac{-2}{2} = -1$$

11.إذا كانت: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+4}{3x^2-2x+1} = -1$ فأوجد قيم a,b

$$\because \lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+4}{3x^2-2x+1} = -1, \quad -1 \neq 0$$

∴ درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام أي أن حدودية البسط من الدرجة الثانية، بالتالي:

$$ax^3 = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{bx^2+4}{3x^2-2x+1} = -1 \Longrightarrow \frac{b}{3} = -1 \Rightarrow b = -3$$

12.إذا كانت: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+2x-5}{ax^3+bx^2+3} = -1$ فأوجد قيم a,b

$$\because \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+2x-5}{ax^3+bx^2+3} = -1, \quad -1 \neq 0$$

∴ درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام أي أن حدودية المقام من الدرجة الثانية، بالتالي

$$ax^3 = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+2x-5}{bx^2+3} = -1 \Longrightarrow \frac{2}{b} = -1 \Rightarrow b = -2$$

سؤال من المريخ:

13. إذا كانت: $\lim_{x\to\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{ax^2+7x-2}} = 2$ فأوجد قيم a

$$f(x) = \frac{3x-5}{\sqrt{ax^2+7x-2}} = \frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(a+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(a+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}} \overset{(1)}{=} \frac{\cancel{x}\left(3-\frac{5}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{\left(a+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}} = \frac{\left(3-\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{\left(a+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}} \qquad x>0, |x| = x$$

معلق

$$\therefore \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(3-\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{\left(a+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{5}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{\left(a+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 3 - \lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}}{\sqrt{\lim_{x\to\infty} a + \lim_{x\to\infty}\frac{7}{x} - \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}}} = \frac{3-0}{\sqrt{a+0-0}} = \frac{3}{\sqrt{a}}$$

$$\therefore \frac{3}{\sqrt{a}} = 2 \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

نهايات بعض الدوال المثلثية

1. $\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{3x}=\frac{5}{3}$

2. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}\times\frac{1+\cos 2x}{1+\cos 2x}=$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2\ 2x}{\sin 2x(1+\cos 2x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\ 2x}{\sin 2x(1+\cos 2x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=\frac{\lim_{x\to0}\sin 2x}{\lim_{x\to0}\ (1+\cos 2x)}=\frac{0}{2}=0$$

نهاية البسط: $\lim_{x\to0}\sin 2x=0$

نهاية المقام: $\lim_{x\to0}\ (1+\cos 2x)=\lim_{x\to0}1+\lim_{x\to0}\cos 2x=1+1=2\ \ ,2\neq0$

3. $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos2x}\times\frac{1+\cos 2x}{1+\cos 2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+\cos 2x)}{1-\cos^2\ 2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+\cos 2x)}{\sin^2\ 2x}$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin 2x}\right)^2\cdot(1+\cos 2x)=\left(\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin 2x}\right)^2\cdot\left(\lim_{x\to0}\ 1+\lim_{x\to0}\cos 2x\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot(1+1)=\frac{1}{2}$$

4. $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1+\cos x}$

$$=\frac{\lim_{x\to0}\ x^2}{\lim_{x\to0}\ 1+\cos x}=\frac{0^2}{2}=0$$

نهاية البسط: $\lim_{x\to0}\ x^2=0^2=0$

نهاية المقام: $\lim_{x\to0}(1+\cos x)$

$$=\lim_{x\to0}\ 1+\lim_{x\to0}\cos x=1+1=2\ \ ,\ \ 2\neq0$$

5. $\lim_{x\to0}\frac{1-\tan x}{\sin x-\cos x}$

$$=\frac{\lim_{x\to0}(1-\tan x)}{\lim_{x\to0}(\sin x-\cos x)}$$

$$=\frac{1}{-1}=-1$$

نهاية البسط: $\lim_{x\to0}(1-\tan x)$

$$=\lim_{x\to0}\ 1-\lim_{x\to0}\tan x=1-0=1$$

نهاية المقام: $\lim_{x\to0}(\sin x-\cos x)$

$$=\lim_{x\to0}\sin x-\lim_{x\to0}\cos x=0-1=-1$$

$-1\neq0$

8. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos x)} = \frac{\lim_{x\to 0} 1}{\lim_{x\to 0}(1+\cos x)} = \frac{1}{2}$

نهاية البسط: $\lim_{x\to 0}(1) = 1$

نهاية المقام: $\lim_{x\to 0}(1+\cos x) = \lim_{x\to 0} 1 + \lim_{x\to 0}\cos x = 1+1 = 2 , \quad 2 \neq 0$

9. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}(1+\cos x) = \lim_{x\to 0} 1 + \lim_{x\to 0}\cos x = 1+1 = 2$

10. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x \div x}{\sin 7x \div x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin 4x}{x}\right)}{\left(\frac{\sin 7x}{x}\right)} = \frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\right)}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 7x}{x}\right)} = \frac{4}{7}$

نهاية البسط: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\right) = 4$

نهاية المقام: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 7x}{x}\right) = 7, \quad 7 \neq 0$

11. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x \div x}{\tan 2x \div x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\tan 3x}{x}\right)}{\left(\frac{\tan 2x}{x}\right)} = \frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 3x}{x}\right)}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{x}\right)} = \frac{3}{2}$

نهاية البسط: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 3x}{x}\right) = 3$

نهاية المقام: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{x}\right) = \frac{2}{1} = 2 , \quad 2 \neq 0$

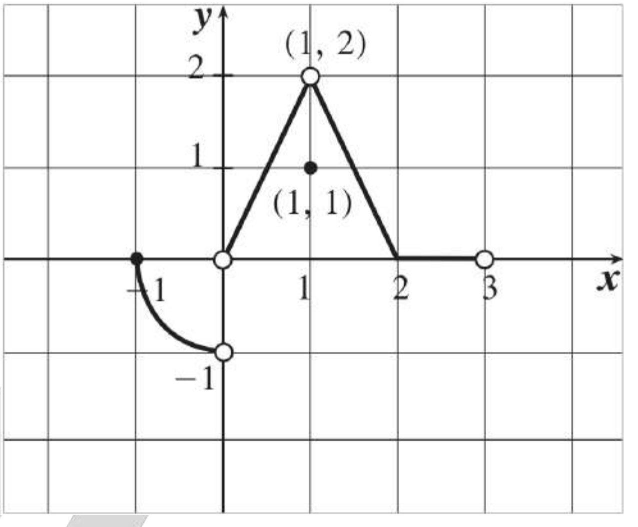
12. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x}{\cos 3x} = \frac{\lim_{x\to 0}\cos 5x}{\lim_{x\to 0}\cos 3x} = \frac{1}{1} = 1$

نهاية البسط: $\lim_{x\to 0}\cos 5x = 1$

نهاية المقام: $\lim_{x\to 0}\cos 3x = 1 , \quad 1 \neq 0$

الاتصال

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \le x < 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -2x + 4, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 \le x < 3 \end{cases}$$



1. ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

$f(0)$ غير موجودة

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\because \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ غير موجودة

$\therefore$ f غير متصلة عند $x = 0$

2. ابحث اتصال الدالة f عند $x = 1$

$f(1) = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2, \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$

$\because \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$

$\therefore \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

$\because \lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$

$\therefore$ f غير متصلة عند $x = 1$

3. ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

$f(2) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\because \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0$

$\therefore \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$

$\because \lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 0$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 2$

ابحث اتصال كل من الدوال التالية عند $x = c$:

6. $f(x) = \begin{cases} x+5 : x \geq 0 \\ 5-x : x < 0 \end{cases} \quad , \quad x = 0$

$5 - x$ | 0 | $x + 5$

$f(0) = 0 + 5 = 5$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x+5) = 0 + 5 = 5$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(5-x) = 5 - 0 = 5$

$\because \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 5 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 5$

$\because \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 5 \Rightarrow$ $\therefore$ f متصلة عند $x = 0$

7. $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x-4}{x+1} : x \neq -1 \\ -1 \quad : x = -1 \end{cases} \quad , \quad x = -1$

$h(-1) = -1 \rightarrow$ 1

$\lim_{x\to -1} h(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-3x-4}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-4)}{\cancel{x+1}}$ $\quad x \neq -1$

$= \lim_{x\to -1}(x-4) = (-1) - 4 = -5 \rightarrow$ 2

$\because \lim_{x\to -1} h(x) \neq h(-y1) \Rightarrow$ $\therefore$ h غير متصلة عند $x = -1$

ابحث اتصال $f(x)$ عند $x = 0$:

8. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x}{|x|} : x \neq 0 \\ -3 \quad : x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^2-3x}{x} = \frac{x(x-3)}{x} = x - 3 & : x > 0 \\ -3 & : x = 0 \\ \frac{x^2-3x}{-x} = \frac{x(x-3)}{-x} = -x + 3 & : x < 0 \end{cases}$

$f(0) = -3$

$-x + 3$ | 0 | $x - 3$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-x+3) = -0 + 3 = 3$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x-3) = 0 - 3 = -3$

$\because \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$ $\quad \therefore \lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة

$\therefore$ f غير متصلة عند $x = 0$

$\because \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = -3 \Rightarrow$ ملاحظة: الدالة f متصلة عند $x = 0$ من اليمين فقط

9. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & : x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & : x = 1 \end{cases} \quad , \quad x = 1$

$f(1) = \dfrac{1}{2} \rightarrow ①$

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$

$\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} \times \dfrac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2}$

$= \dfrac{x^2+3-2^2}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$= \dfrac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$= \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$= \dfrac{(x+1)}{(\sqrt{x^2+3}+2)} \quad : x \neq 1$

شرط الجذر:

$\lim\limits_{x\to1}(x^2+3) = 1^2+3 = 4, 4 > 0$

نهاية البسط:

$\lim\limits_{x\to1}(x+1) = 1+1 = 2$

نهاية المقام:

$\lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{x^2+3}+2\right) =$

$\sqrt{\lim\limits_{x\to1}(x^2+3)} + \lim\limits_{x\to1} 2 =$

$\sqrt{4}+2 = 4, \quad 4 \neq 0$

$= \dfrac{\lim\limits_{x\to1}(x+1)}{\lim\limits_{x\to1}(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$= \dfrac{1+1}{4} = \dfrac{1}{2} \rightarrow ②$

من ①,② نجد

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1) = \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 1$

10.أوجد قيمة a بحيث تصبح الدالة التالية متصلة عند $x = 3$

$f(x) = \begin{cases} x^2-1 \ , & x < 3 \\ 2ax \ , & x \geq 3 \end{cases}$

$\because$ f متصلة عند $x = 3$

$\therefore \lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to3^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to3^-}(x^2-1) = \lim\limits_{x\to3^+}(2ax)$

$\Longrightarrow 3^2-1 = 2a(3) \Longrightarrow 8 = 6a \Longrightarrow a = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

أوجد قيم x التي تكون عندها الدالة منفصلة ثم حدد نوع الانفصال و إمكانية التخلص منه مع ذكر السبب.

11. $y = \dfrac{x-1}{x^2-4x+3} = \dfrac{x-1}{(x-1)(x-3)}$

الدالة منفصلة عندما يكون المقام = صفرا

انفصال يمكن إزالته $(x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 1 \rightarrow$

انفصال لا يمكن إزالته $x = 3 \longrightarrow$

معلق

12. $y = 2x-1$

لا يوجد نقط انفصال (دالة كثيرة الحدود)

13. $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & , \ x\neq -1\\ 2 & , \ x=-1\end{cases}$

$f(-1)=2$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(1-x^2)=1-(-1)^2=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to -1} f(x)\neq f(-1)$ ∵ f ليست متصلة عند $x=-1$

انفصال لا يمكن إزالته

⚠ معلق

نظريات الاتصال

ابحث اتصال كل دالة مما يلي عند $x=c$:

1. $f(x)=x^2-|2x-3|,\ x=2$

$h(x)=x^2$ كثيرة حدود متصلة عند $x=2$

$g(x)=|2x-3|$ متصلة عند $x=2$ لأن:

$a(x)=2x-3$ كثيرة حدود متصلة عند $x=2$

$a(2)=2(2)-3=1$

$b(x)=|x|$ دالة متصلة عند $x=1$

إذاً: $g(x)=(b\circ a)(x)$ متصلة عند $x=2$

$\therefore f(x)=h(x)-g(x)$ متصلة عند $x=2$

2. $f(x)=\frac{x+3}{x^2+1}-\frac{3}{x},\ x=-1$

$h(x)=\frac{x+3}{x^2+1}$ حدودية نسبية متصلة عند $x=-1$ لأن المقام $\neq 0$ عند $x=-1$

$g(x)=\frac{3}{x}$ حدودية نسبية متصلة عند $x=-1$ لأن المقام $\neq 0$ عند $x=-1$

$\therefore f(x)=h(x)-g(x)$ متصلة عند $x=-1$

3. $f(x)=x^2+3x+|x|,\ x=3$

$u(x)=x^2+3x$ كثيرة حدود متصلة عند $x=3$

$v(x)=|x|$ متصلة عند $x=3$

$\therefore f(x)=u(x)+v(x)$ متصلة عند $x=3$

4. $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1},x=-1$

① $h(x)=\sqrt[3]{x}$ دالة جذر تكعيبي متصلة عند $x=-1$

② $g(x)=x^2+1$ كثيرة حدود متصلة عند $x=-1$

③ شرط المقام $2\neq 0$ ، $g(-1)=(-1)^2+1=2$

①,②,③ $\Rightarrow$ f متصلة عند $x=-1$

5. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 4},\ x = -5$

$g(x) = x^2 + 5x + 4$

g متصلة عند $x = -5$

$g(-5) = (-5)^2 + 5(-5) + 4 = 4, \quad 4 > 0$

$\therefore\ f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x = -5$

6. الدالتان f,g معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = -x + 2, g(x) = x^2 - 3$ أوجد

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 3 = (-x + 2)^2 - 3$
$= x^2 - 4x + 4 - 3 = x^2 - 4x + 1$

b) $(g \circ f)(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 1 = 6$

c) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -(g(x)) + 2 = -(x^2 - 3) + 2 = -x^2 + 5$

d) $(f \circ g)(-1) = -(-1)^2 + 5 = 4$

7. الدالتان f,g معرفتان كما يلي: $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x^2 + 4$ أوجد

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2 + 4}$

b) $(f \circ g)(2) = \sqrt{(2)^2 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

c) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 4 = x + 4$

d) $(g \circ f)(2) = (2) + 4 = 6$

8. الدالتان f,g معرفتان كما يلي: $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}, g(x) = \frac{1}{x^2+16}$ أوجد

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x^2 - 9}) = \frac{1}{(\sqrt{x^2-9})^2 + 16} = \frac{1}{x^2+7}$

b) $(g \circ f)(4) = \frac{1}{(4)^2+7} = \frac{1}{23}$

c) $(g \circ f)(-4) = \frac{1}{(-4)^2+7} = \frac{1}{23}$

9. لتكن: $f(x) = 2x^2 - 3$, $g(x) = \sqrt{x+4}$ ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

① $f(x) = 2x^2 - 3$ كثيرة حدود متصلة عند $x = -2$

② $f(-2) = 2(-2)^2 - 3 = 5$

③ $g(x) = \sqrt{x+4}$ متصلة عند $x = 5$ لأن

$$u(x) = x + 4 \left\{ \begin{array}{l} u \text{ متصلة عند } x = 5 \\ u(5) = (5) + 4 = 9, \quad 9 > 0 \end{array} \right.$$

①,②,③ $\Leftarrow$ $g \circ f$ متصلة عند $x = -2 \Rightarrow$

10. ابحث اتصال الدالة $f(x) = |\sqrt{x} - 3|$ عند $x = 4$

$$\begin{cases} h(x) = \sqrt{x} - 3 \\ g(x) = |x| \end{cases} \quad f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(\sqrt{x} - 3) = |\sqrt{x} - 3|$$

① $h(x) = \sqrt{x} - 3$ متصلة عند $x = 4$

لأنها طرح دالتين متصلتين عند $x = 4$ $(4 > 0)$

$h(4) = \sqrt{4} - 3 = -1$

② $g(x) = |x|$ دالة مطلقة متصلة عند $x = -1$

①,② $\Leftarrow$ $f = g \circ h$ متصلة عند $x = 4$

سؤال من المريخ:

11. ابحث اتصال الدالة $g(x) = \sqrt{x^2 + 1} - |x - 3|$ عند $x = 3$

$h(x) = |x - 3|$

$u(x) = x - 3$, $v(x) = |x|$

$h(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x)) =$

$v(x - 3) = |x - 3|$

① $u(x) = x - 3$ متصلة عند $x = 3$

$u(3) = 0$

② $v(x) = |x|$ متصلة عند $x = 0$

①,② $\Leftarrow$ $h = v \circ u$ متصلة عند $x = 3$

$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$a(x) = x^2 + 1$

$a(x)$ متصلة عند $x = 3$

$a(3) = 3^2 + 1 = 10, 10 > 0$

$\therefore$ $f(x) = \sqrt{a(x)}$ متصلة عند $x = 3$

إذا $g(x) = f(x) - h(x)$ متصلة عند $x = 3$

الاتصال على فترة

ادرس اتصال كل دالة مما يلي على الفترة المبينة:

1. $f(x) = x^2 + 2x - 3 \;,\; [-2,5]$

f كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$[-2,5] \subseteq \mathbb{R}$

$\therefore f$ متصلة على $[-2,5]$

2. $f(x) = \frac{7x}{x^2+5} \;,\; [1,3]$

$x^2 + 5 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore f$ حدودية نسبية متصلة على $\mathbb{R}$

$\because [1,3] \subseteq \mathbb{R}$

$\therefore f$ متصلة على $[1,3]$

3. $f(x) = \frac{2x+1}{x-3} \;,\; [0,5]$

$x - 3 = 0 \implies x = 3$

f حدودية نسبية متصلة $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$

$\because f$ غير متصلة عند $x = 3$, $3 \in [0,5]$

$\therefore f$ متصلة $\forall x \in [0,5] - \{3\}$

$\therefore f$ متصلة على كل من $[0,3)$, $(3,5]$

4. $f(x) = \frac{-x+3}{x^2-5x+4} \;,\; [-2,6]$

$x^2 - 5x + 4 = 0 \implies x = 1, x = 4$

$\therefore f$ حدودية نسبية متصلة $\forall x \in \mathbb{R} - \{1,4\}$

$\because f$ غير متصلة عند $x = 1 ,\; x = 4$

$1,4 \in [-2,6]$

$\therefore f$ متصلة $\forall x \in [-2,6] - \{1,4\}$

$\therefore f$ متصلة على كل من $[-2,1)$, $(1,4)$, $(4,6]$

5. ادرس اتصال الدالة على $[-3,4]$ حيث:

$$f(x) = \begin{cases} -5 & : x = -3 \\ -x^2 + 4 & : -3 < x < 4 \\ -10 & : x = 4 \end{cases}$$

$-3 \qquad\qquad 4$

① $f(x) = -x^2 + 4 \; : x \in (-3,4)$

$\forall c \in (-3,4)$

$f(c) = -c^2 + 4$

$\lim_{x\to c} f(x) = -c^2 + 4$

$\because \lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

$\therefore f$ متصلة على $(-3,4)$

② $f(-3) = -5$

$\lim_{x\to -3^+} f(x) =$

$\lim_{x\to -3^+} (-x^2 + 4) = -5$

$\because \lim_{x\to -3^+} f(x) = f(-3)$

$\therefore f$ متصلة عند $x = -3$ من اليمين

③ $f(4) = -10$

$\lim_{x\to 4^-} f(x) =$

$\lim_{x\to 4^-} (-x^2 + 4)$

$= -12$

$\because \lim_{x\to 4^-} f(x) \neq f(4)$

$\therefore f$ غير متصلة عند $x = 4$ من اليسار

$1,2,3 \implies f$ متصلة على $[-3,4)$

طريقة ثانية:

$-3 \qquad\qquad 4$

$g(x) = -x^2 + 4$

$g(x)$ كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\because f(x) = g(x)$

$\forall x \in (-3\,,4)$

$\therefore f$ متصلة على $(-3\,,4)$

①

$f(-3) = -5$

$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to -3^+} (-x^2 + 4) = -5$

$\because \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = f(-3)$

$\therefore f$ متصلة عند $x = -3$ من اليمين

②

$f(4) = -10$

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to 4^-} (-x^2 + 4)$

$= -12$

$\because \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) \neq f(4)$

$\therefore f$ غير متصلة عند $x = 4$ من اليسار

③

f متصلة على $[-3\,,4) \Longleftarrow 1,2,3$

6. ادرس اتصال الدالة على مجالها:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 4, & x \leq 7 \\ \frac{9}{-x+4}, & x > 7 \end{cases}$$

$Df = (-\infty\,, 7] \cup (7\,, \infty) = \mathbb{R}$

7

$h(x) = -x + 4$

h كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\because f(x) = h(x) \qquad \forall x \in (-\infty, 7]$

$\therefore f$ متصلة على $(-\infty, 7]$

①

$g(x) = \dfrac{9}{-x + 4}$

$g(x)$ حدودية نسبية متصلة

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-3\}$

$\because f(x) = g(x) \qquad \forall x \in (7, \infty)$

$\therefore f$ متصلة على $(7\,, \infty)$

②

ندرس الاتصال عند $x = 7$ من اليمين

$f(7) = -(7) + 4 = -3$

$\lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 7^+} \dfrac{9}{-x + 4} = \dfrac{9}{-3} = -3$

شرط المقام

$\lim\limits_{x\to 7^+} (-x + 4) =$

$-7 + 4 = -3$

$-3 \neq 0$

$\because \lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = f(7) \Rightarrow$ $\therefore f$ متصلة عند $x = 7$ من اليمين

③

من ①, ②, ③ نجد f متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

7. ادرس اتصال f على مجالها :

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+9} & : x\le 0\\ \frac{6}{x+3} & : x>0\end{cases}$$

$$D_f=(-\infty\,,0]\cup(0\,,\infty)=\mathbb{R}$$

0

$g(x)=\dfrac{6}{x+3}$

$g(x)$ حدودية نسبية متصلة

$\forall x\in\mathbb{R}-\{-3\}$

$\because f(x)=g(x)\quad \forall x\in(0,\infty)$

② $\therefore f(x)$ متصلة على $(0\,,\infty)$

$h(x)=\sqrt{x^2+9}$

بفرض: $a(x)=x^2+9$

$a(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$

$a(x)\ge 0\quad \forall x\in R$

$\therefore h(x)=\sqrt{a(x)}$ متصلة على $\mathbb{R}$

$\because f(x)=h(x)\quad \forall x\in(-\infty,0]$

① $\therefore f$ متصلة على $(-\infty,0]$

ندرس الاتصال عند $x=0$ من اليمين

نهاية المقام

$\lim_{x\to0^+}(x+3)=3$

$3\neq 0$:

$f(0)=\sqrt{0^2+9}=3$

$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\dfrac{6}{x+3}=\dfrac{6}{3}=2$

$\because \lim_{x\to0^+}f(x)\neq f(0)$

③ $\therefore f$ ليست متصلة عند 0 من اليمين

①, ②, ③ $\Rightarrow$

f غير متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

لكن f متصلة على كل من $(-\infty,0]\,,(0\,,\infty)$

8. ادرس اتصال f على مجالها : $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & , x \le -2 \\ x - 7 & , -2 < x < 4 \\ x^2 - 7 & , x \ge 4 \end{cases}$

$D_f = (-\infty , -2] \cup (-2 , 4) \cup [4 , \infty) = \mathbb{R}$

$u(x) = x^3 - 1$	$h(x) = x - 7$	$g(x) = x^2 - 7$
دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$	دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$	دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$
$\because f(x) = u(x)$	$\because f(x) = h(x)$	$\because f(x) = g(x)$
$\forall x \in (-\infty , -2]$	$\forall x \in (-2 , 4)$	$\forall x \in [4 , \infty)$
$\therefore f$ متصلة على	$\therefore f$ متصلة على	$\therefore f$ متصلة على
$(-\infty, -2]$	$(-2 , 4)$	$[4 , \infty)$
①	②	③

ندرس الاتصال عند $x = -2$ من اليمين

$f(-2) = (-2)^3 - 1 = -9$

$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} x - 7 = -9$

$\because \lim_{x \to -2^+} f(x) = f(-2)$

$\therefore f$ متصلة عند -2 من اليمين

④

ندرس الاتصال عند $x = 4$ من اليسار

$f(4) = (4)^2 - 7 = 9$

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} x - 7 = -3$

$\because \lim_{x \to 4^-} f(x) \ne f(4)$

$\therefore f$ غير متصلة عند 4 من اليسار

⑤

①, ②, ③, ④, ⑤ $\Rightarrow$

f غير متصلة على مجالها

لكن f متصلة على كل من $(-\infty, 4)$, $[4 , \infty)$

9. ادرس اتصال f على مجالها :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{4}{x+2} & : \ x\le -4\\ x^2+3x-6 & : \ -4<x\le 1\\ x^3-3x^2 & : \ x>1\end{cases}$$

$D_f=(-\infty\,,-4]\cup(-4\,,1]\cup(1\,,\infty)=\mathbb{R}$

-4 $\qquad$ 1

$h(x)=\dfrac{4}{x+2}$	$g(x)=x^2+3x-6$	$u(x)=x^3-3x^2$
h حدودية نسبية متصلة	كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$	كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$
$\forall x\in\mathbb{R}-\{-2\}$	$\because f(x)=g(x)$	$\because f(x)=u(x)$
$\because f(x)=h(x)$	$\forall x\in(-4\,,1]$	$\forall x\in(1\,,\infty)$
$\forall x\in(-\infty,-4]$		
$\therefore$ f متصلة على $(-\infty,-4]$ ①	$\therefore$ f متصلة على $(-4\,,1]$ ②	$\therefore$ f متصلة على $(1\,,\infty)$ ③

ندرس الاتصال عند $x=-4$ من اليمين

$$f(-4)=\frac{4}{(-4)+2}=-2$$

$$\lim_{x\to-4^+}f(x)=\lim_{x\to-4^+}(x^2+3x-6)$$

$$=(-4)^2+3(-4)-6=-2$$

$$\because \lim_{x\to-4^+}f(x)=f(-4)$$

$\therefore$ f متصلة عند -4 من اليمين ④

ندرس الاتصال عند $x=1$ من اليمين

$$f(1)=(1)^2+3(1)-6=-2$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(x^3-3x^2)$$

$$=(1)^3-3(1)^2=-2$$

$$\because \lim_{x\to1^+}f(x)=f(1)$$

$\therefore$ f متصلة عند 1 من اليمين ⑤

من ①, ②, ③, ④, ⑤ نجد : f متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

أوجد قيم b , a بحيث تكون كل دالة متصلة على مجال تعريفها

10. $f(x) = \begin{cases} x^2 - \sqrt{x} , & x < 1 \\ 3x + a , & x > 1 \\ b , & x = 1 \end{cases}$ $\quad Df = R \quad f(1) = b$

$x^2 - \sqrt{x} \quad 1 \quad 3x + a$

$\because$ f متصلة على مجالها $\therefore$ f متصلة عند $x = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^+} (3x + a) = f(1)$

$3(1) + a = b$

$3 + a = b$

$3 + a = 0$

$a = -3$

$\lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - \sqrt{x}) = f(1)$

$\lim\limits_{x \to 1^-} x^2 - \lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{x} = b$

$1 > 0$

$1^2 - \sqrt{1} = b$

$0 = b$

11. $f(x) = \begin{cases} x^2 , & x < -2 \\ \frac{x^2 - a}{x - b} , & -2 \le x < 1 \\ x , & x \ge 1 \end{cases}$

معلق

$x^2 \quad -2 \quad \frac{x^2 - a}{x - b} \quad 1 \quad x$

$\because$ f متصلة على مجالها R

fمتصلة عند 1 من اليسار

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2 - a}{x - b} = 1$

$\frac{1 - a}{1 - b} = \frac{1}{1} \Rightarrow 1 - a = 1 - b$

$a = b$

fمتصلة عند -2 من اليسار

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = f(-2)$

$\lim\limits_{x \to -2^-} x^2 = \frac{4 - a}{-2 - b}$

$(-2)^2 = \frac{4 - a}{-2 - b}$

$\frac{4}{1} = \frac{4 - a}{-2 - b}$

$4 - a = -8 - 4b \quad : (a = b)$

$4 - b = -8 - 4b$

$4b - b = -8 - 4$

$3b = -12 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow a = -4$

12.لتكن الدالة $f(x)=\sqrt{-x^2+5x+6}$ أوجد مجال الدالة f ثم ادرس اتصال f على الفترة $[0,4]$

$g(x)=-x^2+5x+6$

$D_f=\{x : g(x)\geq 0\}$

$-x^2+5x+6\geq 0$

$-x^2+5x+6=0 \Rightarrow \qquad x=-1 \,, x=6$

$-\qquad + \qquad -$

$-1 \qquad 6$

$D_f=[-1\,,6]$

$g(x)\geq 0 \quad \forall x\in[-1\,,6]$

$\because [0\,,4] \subseteq [-1\,,6]$

① $g(x)\geq 0 \quad \forall x\in[0\,,4]$

② $g(x)$ متصلة على $[0\,,4]$

①, ② $\Longrightarrow$ fمتصلة على $[0\,,4]$

ادرس اتصال كل من الدوال التالية على مجالها:

13.$f(x)=\sqrt{8-2x^2}$

$g(x)=8-2x^2$

$D_f=\{x : g(x)\geq 0\}$

$8-2x^2\geq 0$

$8-2x^2=0 \Rightarrow \qquad -2x^2=-8 \Rightarrow$

$x^2=4 \Rightarrow \qquad x=\mp 2$

$-\qquad + \qquad -$

$-2 \qquad 2$

$D_f=[-2\,,2]$

① $g(x)\geq 0 \quad \forall x\in[-2\,,2]$

② $g(x)$ متصلة على $[-2\,,2]$

①, ② $\Longrightarrow$ fمتصلة على $[-2\,,2]$

14.$f(x)=\sqrt{x^2-1}$

$g(x)=x^2-1$

$D_f=\{x : g(x)\geq 0\}$

$x^2-1\geq 0$

$x^2-1=0 \Rightarrow \qquad x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

$-\infty \quad + \qquad - \qquad + \quad \infty$

$-1 \qquad 1$

$D_f=(-\infty\,,-1]\cup[1\,,\infty)$

$=\mathbb{R}-(-1\,,1)$

① $g(x)\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}-(-1\,,1)$

② $g(x)$ متصلة على $\mathbb{R}-(-1\,,1)$

①, ② $\Longrightarrow$ fمتصلة على $\mathbb{R}-(-1\,,1)$

15. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 2}$

$h(x) = x^2 + 3x - 2$

$g(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(x^2 + 3x - 2) = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 2}$

$h(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$

$g(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore f(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها تركيب دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$

16. $f(x) = |3x^2 + 4x - 1|$

$h(x) = 3x^2 + 4x - 1$

$g(x) = |x|$

$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(3x^2 + 4x - 1) = |3x^2 + 4x - 1|$

$h(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$

$g(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore f(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها تركيب دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$

المشتقة

1. استخدم التعريف لإيجاد مشتقة الدالة $f(x)=\frac{3}{x}$ عند $x=3$

$$f(3)=\frac{3}{3}=1$$

(إن وجدت)

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{3}{x}-1}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\frac{3-x}{x}\right)}{x-3} \qquad x\neq 3$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{x}=\frac{-1}{3}$$

نهاية المقام $\because \lim_{x\to 3}x=3,3\neq 0$

2. استخدم التعريف لإيجاد مشتقة الدالة $f(x)=2x^3$ عند $x=1$

$$f(1)=2(1)^3=2$$

(إن وجدت)

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x^3-1^3)}{x-1}=2\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1^2)}{\cancel{x-1}}$$

$$=2\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=2(1^2+1+1)=6 \qquad x\neq 1$$

3. بين أن الدالة f لها مشتقة لجهة اليمين و مشتقة لجهة اليسار عند $x=1$ لكن ليس لها مشتقة عند $x=1$

$$f(x)=\begin{cases}x^3, & x\leq 1\\ x, & x>1\end{cases}$$

x^3 | 1 | x

$$f(1)=(1)^3=1$$

(إن وجدت)

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-1^3}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1^2)}{\cancel{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}(x^2+x+1)=1^2+1+1=3$$

(إن وجدت)

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}}=1$$

$\because f'_-(1)\neq f'_+(1)\Rightarrow$ غير موجودة $f'(1)$

4. لتكن f : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x : & x \le 1 \\ 4x - 1 : & x > 1 \end{cases}$ ابحث قابلية اشتقاق f عند $x = 1$.

الاتصال:

$4x - 1$	1	$x^2 + 2x$

$f(1) = 1^2 + 2(1) = 3$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + 2x)$

$= (1)^2 + 2(1) = 3$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (4x - 1)$

$= 4(1) - 1 = 3$

$\because \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3 \quad \therefore \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$

$\because \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ $\quad$ $\therefore$ f متصلة عند $x = 1$

الاشتقاق:

$f(1) = 1^2 + 2(1) = 3$

$f'_-(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ (إن وجدت)

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{\cancel{(x - 1)}(x + 3)}{\cancel{x - 1}}$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} (x + 3) = 4$

$f'_+(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ (إن وجدت)

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{4x - 1 - 3}{x - 1}$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{4x - 4}{x - 1}$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{4\cancel{(x - 1)}}{\cancel{x - 1}} = \lim\limits_{x \to 1^+} 4 = 4$

$\because f'_-(1) = f'_+(1) = 4 \Rightarrow f'(1) = 4$

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق عند $x = 1$

5. لتكن الدالة $f(x) = |x-3|$
بين أن الدالة f متصلة عند $x = 3$ و لكنها غير قابلة للاشتقاق عندها.

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & : x \geq 3 \\ -x+3 & : x < 3 \end{cases}$$

$-x+3$ | 3 | $x-3$

$f(3) = (3) - 3 = 0$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}(x-3) = 0$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}(-x+3) = 0$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 3$ لأن $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 0 = f(3)$

(إن وجدت) $f'_+(3) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$

$= \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x-3-0}{x-3} = 1$

(إن وجدت) $f'_-(3) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$

$= \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{-x+3-0}{x-3} = -1$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 3$ لأن $f'_-(3) \neq f'_+(3)$

6. لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} 0 : x < 0 \\ 1 : x = 0 \\ 2 : x > 0 \end{cases}$ بين أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة

$\therefore$ f غير متصلة عند $x = 0$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$

7. لتكن الدالة g : $g(x) = \begin{cases} (x+1)^2 , & x \leq 0 \\ 2x+1 , & x > 0 \end{cases}$ أوجد $g'(0)$.

$g(0) = (0+1)^2 = 1$

$(x+1)^2$ | 0 | $2x+1$

(إن وجدت) $g'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(x+1)^2 - 1^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(x+1-1)(x+1+1)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x(x+2)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}(x+2) = 2$

(إن وجدت) $g'_+(0) =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x+1-1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x}{x} = 2$

$\because g'_-(0) = g'_+(0) = 2 \Rightarrow g'(0) = 2$

8. لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases}x^2 & : x\le 2\\ 4x-4 & : x>2\end{cases}$ أوجد $f'(2)$.

x^2 2 $4x-4$

$f(2)=2^2=4$

$f'_-(2)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ (إن وجدت)

$=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2^-}(x+2)=4$

$f'_+(2)=$

$=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ (إن وجدت)

$=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{4x-4-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{4x-8}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{4(x-2)}{x-2}=4$

$\because f'_-(2)=f'_+(2)=4\Rightarrow f'(2)=4$

9. لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases}x^3 & , x\le 1\\ 3x+k & , x>1\end{cases}$
قابلة للاشتقاق عند $x=1$ فأوجد قيمة k

x^3 1 $3x+k$

$\because f$ قابلة للاشتقاق عند $x=1$ $\therefore f$ متصلة عند $x=1$

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}x^3=\lim\limits_{x\to 1^+}3x+k\Rightarrow 1=3+k\Longrightarrow k=-2$

سؤال من المريخ:

10. لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases}3-x & x<1\\ ax^2+bx & x\geq 1\end{cases}$ حيث a,b ثابتان.

a) إذا كانت f متصلة لكل قيم x فما العلاقة بين a و b ؟

b) أوجد القيم الوحيدة لكل من a,b التي تجعل f متصلة و قابلة للاشتقاق

$3-x$ 1 ax^2+bx

$\because$ f متصلة لكل قيم x $\therefore$ f متصلة عند $x=1$

$$\therefore \lim_{x\to 1^-}(3-x)=\lim_{x\to 1^+}(ax^2+bx)$$

$$2=a+b \quad \to (1)$$

(إن وجدت)

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

معلق

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax^2+bx-(a+b)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax^2+bx-a-b}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{a(x^2-1)+b(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{a(x-1)(x+1)+b(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(a(x+1)+b)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}(a(x+1)+b)=a(1+1)+b$$

$$=2a+b$$

(إن وجدت)

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{3-x-2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x}{x-1}=-1$$

$\because$ f قابلة للاشتقاق عند $x=1$

$$\therefore f'_-(1)=f'_+(1)\Rightarrow 2a+b=-1 \quad \to (2)$$

$(1),(2)\Rightarrow$

$$a=-3,\quad b=5$$

قواعد الاشتقاق

1. أوجد $\frac{dy}{dx}$

1. $y = \frac{x^3}{3} - x$ $\quad y' = \frac{1}{3}(3x^2) - 1 = x^2 - 1$

2. $y = 2x + 1$ $\quad y' = 2$

3. $y = x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 15$ $\quad y' = 4x^3 - 21x^2 + 4x$

4. $y = 4x^{-2} - 8x + 1$ $\quad y' = -8x^{-3} - 8 = \frac{-8}{x^3} - 8$

5. $f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x^3 + 2x^2 + 1)$

$$f'(x) = (2x-5)(x^3 + 2x^2 + 1) + (x^2 - 5x + 6)(3x^2 + 4x)$$
$$= 2x^4 + 4x^3 + 2x - 5x^3 - 10x^2 - 5 + 3x^4 - 15x^3 + 18x^2$$
$$+4x^3 - 20x^2 + 24x$$
$$= 5x^4 - 12x^3 - 12x^2 + 26x - 5$$

6. $f(x) = (2x^5 + 4)(5 - x^2)$

$$f'(x) = (10x^4)(5 - x^2) + (2x^5 + 4)(-2x)$$
$$= 50x^4 - 10x^6 - 4x^6 - 8x = -14x^6 + 50x^4 - 8x$$

7. لتكن $y = \frac{x^2+3}{x}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام:

a. قاعدة القسمة

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(2x)(x) - (x^2+3)(1)}{(x)^2}$$
$$= \frac{2x^2 - x^2 - 3}{x^2}$$
$$= \frac{x^2 - 3}{x^2}$$

b. توزيع حدود البسط على المقام

$$y = \frac{x^2+3}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{3}{x} = x + \frac{3}{x} \Rightarrow$$
$$y' = 1 - \frac{3}{x^2}$$

ملاحظة: الإجابتان مختلفتان بالشكل فقط

8. $y = \frac{x^2}{1-x^3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x)(1-x^3) - (x^2)(-3x^2)}{(1-x^3)^2} = \frac{2x - 2x^4 + 3x^4}{(1-x^3)^2} = \frac{x^4 + 2x}{(1-x^3)^2}$$

9. $y = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

سؤال من المريخ:

10.بفرض أن u,v دالتان في x و قابلتان للاشتقاق عند $x = 0$, و أن

$v'(0) = 2, \quad v(0) = -1, \quad u'(0) = -3, \quad u(0) = 5$

أوجد قيم المشتقات التالية عند $x = 0$

a) $(uv)'(0) = \big(u'(0)\big)\big(v(0)\big) + \big(u(0)\big)\big(v'(0)\big)$

$= (-3)(-1) + (5)(2) = 3 + 10 = 13$

b) $\left(\frac{u}{v}\right)'(0) = \frac{\big(u'(0)\big)\big(v(0)\big) - \big(u(0)\big)\big(v'(0)\big)}{\big(v(0)\big)^2} \qquad = \frac{(-3)(-1) - (5)(2)}{(-1)^2} = -7$

c) $\left(\frac{v}{u}\right)'(0) = \frac{\big(v'(0)\big)\big(u(0)\big) - \big(v(0)\big)\big(u'(0)\big)}{\big(u(0)\big)^2} \qquad = \frac{(2)(5) - (-1)(-3)}{(5)^2} = \frac{10-3}{25} = \frac{7}{25}$

d) $(7v - 2u)'(0) = 7v'(0) - 2u'(0) \qquad = 7(2) - 2(-3) = 14 + 6 = 20$

11.أوجد معادلة المماس للمنحنى $y = x^3 + x$ عند النقطة $(1,2)$.

$y = f(x) = x^3 + x$

$y' = f'(x) = 3x^2 + 1$

ميل المماس

$f'(a) = f'(1) = 3(1)^2 + 1 = 4$

معادلة المماس

$y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$y - 2 = 4(x - 1)$

$y = 4x - 4 + 2$

$y = 4x - 2$

معادلة الناظم (العمودي)

$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a)$

$y - f(1) = \frac{-1}{f'(1)}(x - 1)$

$y - 2 = \frac{-1}{4}(x - 1)$

$y = \frac{-1}{4}x + \frac{1}{4} + 2 \qquad y = \frac{-1}{4}x + \frac{9}{4}$

معلق

سؤال من المريخ:

12. أوجد الأجزاء المقطوعة من محوري السينات و الصادات بواسطة مماس منحنى الدالة $y = x^3$ عند النقطة $(-2,-8)$.

$$y = f(x) = x^3$$
$$y' = f'(x) = 3x^2$$

ميل المماس

$$f'(a) = f'(-2) = 3(-2)^2 = 12$$

معادلة المماس

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$
$$y - f(-2) = f'(-2)(x - -2)$$
$$y + 8 = 12(x + 2)$$
$$y = 12x + 24 - 8$$
$$y = 12x + 16$$

الجزء المقطوع من محورالسينات:

$$y = 0$$
$$y = 12x + 16 = 0$$
$$x = \frac{-16}{12} = \frac{-4}{3}$$

الجزء المقطوع من محور الصادات:

$$x = 0$$
$$y = 12x + 16$$
$$y = 12(0) + 16 = 16$$

13. أوجد معادلة المماس و معادلة العمودي (الناظم) لمنحنى الدالة $y = \frac{8}{4+x^2}$ عند النقطة $(2,1)$.

$$y = f(x) = \frac{8}{4 + x^2}$$

$$y' = f'(x) = \frac{-8(2x)}{(4 + x^2)^2} = \frac{-16x}{(4 + x^2)^2}$$

ميل المماس

$$f'(a) = f'(2) = \frac{-16(2)}{(4 + 2^2)^2} = \frac{-1}{2}$$

معادلة المماس

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$
$$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$
$$y - 1 = \frac{-1}{2}(x - 2)$$
$$y = \frac{-1}{2}x + 1 + 1$$
$$y = \frac{-1}{2}x + 2$$

معادلة الناظم (العمودي)

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a)$$
$$y - f(2) = \frac{-1}{f'(2)}(x - 2)$$
$$y - 1 = 2(x - 2)$$
$$y = 2x - 4 + 1$$
$$y = 2x - 3$$

14. لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x - \frac{4}{x} & ,x \geq 2 \\ x^2 - 4 & ,x < 2 \end{cases}$ أوجد $f'(x)$ وعين مجالها

$$D_f = (-\infty, 2) \cup [2, \infty) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{4}{x^2} & x > 2 \\ \text{تبحث} & x = 2 \\ 2x & x < 2 \end{cases}$$

$$f(2) = 2 - \frac{4}{2} = 0$$

$$\frac{x}{1} - \frac{4}{x} = \frac{x^2 - 4}{x} = \frac{(x-2)(x+2)}{x}$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{\frac{(\cancel{x-2})(x+2)}{x}}{\cancel{x-2}}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{x+2}{x} = \frac{4}{2} = 2 \qquad 2 \neq 0$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4 - 0}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{(\cancel{x-2})(x+2)}{\cancel{x-2}} = 4$$

$$\because f'_-(2) \neq f'_+(2)$$

$\therefore$ $f'(2)$ غير موجودة

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{4}{x^2} & x > 2 \\ 2x & : \ x < 2 \end{cases}$$

$$D_{f'} = \mathbb{R} - \{2\}$$

مشتقات الدوال المثلثية

في التمارين أوجد $\frac{dy}{dx}$

1. $y = 2\sin x - \tan x$

$y' = 2\cos x - \sec^2 x$

2. $y = 4 - x^2 \sin x$

$y' = (-2x)(\sin x) + (-x^2)(\cos x) = -2x\sin x - x^2\cos x$

3. $y = \frac{\cot x}{1+\cot x}$

$$y' = \frac{(-\csc^2 x)(1+\cot x) - (\cot x)(-\csc^2 x)}{(1+\cot x)^2}$$

$$= \frac{-\csc^2 x - \csc^2 x\cot x + \cot x\csc^2 x}{(1+\cot x)^2} = \frac{-\csc^2 x}{(1+\cot x)^2}$$

4. $y = \frac{\cos x}{1+\sin x}$

$$y' = \frac{(-\sin x)(1+\sin x)-(\cos x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{-\sin x - 1}{(1+\sin x)^2} = -\frac{\sin x + 1}{(1+\sin x)^2} = \frac{-1}{1+\sin x}$$

5. أوجد مشتقة الدالة $y = \frac{\tan x}{x}$ عند $x = \frac{\pi}{4}$.

$$y' = \frac{(\sec^2 x)(x) - (\tan x)(1)}{x^2} = \frac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\pi}{4}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan\frac{\pi}{4}}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{\frac{\pi}{4}(2) - 1}{\frac{\pi^2}{16}} \approx 0.925$$

سؤال من المريخ:

6. أثبت أن منحنى كل من الدالتين $y = \frac{1}{\cos x}$, $y = \cos x$ له مماس أفقي عند $x = 0$

$y = \frac{1}{\cos x} = \sec x \qquad y' = \sec x \cdot \tan x$

$y'(0) = \sec(0) \cdot \tan(0) = 0$

$\therefore$ ميل المماس عند $x = 0$ هو صفرا

$\therefore$ المماس أفقي

$y = \cos x \qquad y' = -\sin x$

$y'(0) = -\sin(0) = 0$

$\therefore$ ميل المماس عند $x = 0$ هو صفرا

$\therefore$ المماس أفقي

7. لتكن : $y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sin x} + \cot x$ أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة عند $P\left(\frac{\pi}{4}, 4\right)$

$y = 1 + \sqrt{2}\csc x + \cot x \Rightarrow y' = -\sqrt{2}\csc x \cot x - \csc^2 x$

ميل المماس

$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\csc\left(\frac{\pi}{4}\right)\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) - \csc^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4$

معادلة المماس

$y - 4 = -4\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$y = -4x + \pi + 4$

قاعدة السلسلة

في التمارين التالية أوجد $(f\circ g)'(x)$

1. $f(x) = 2x + 1\,,\ g(x) = 3x^2$

$$(f\circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = 2 \qquad g'(x) = 6x$$

$$f'\big(g(x)\big) = 2$$

$$(f\circ g)'(x) = 2\times 6x = 12x$$

2. $f(x) = \frac{x-1}{x}\,,\ g(x) = x^2 + 1$

$$f(x) = \frac{x}{x} - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

$$(f\circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = -\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \qquad g'(x) = \frac{2x}{1}$$

$$f'\big(g(x)\big) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

$$\therefore (f\circ g)'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

3. $f(x) = 5x^2 - 1\,,\ g(x) = x^{15}$

$$(f\circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = 10x \qquad g'(x) = 15x^{14}$$

$$f'\big(g(x)\big) = 10(x^{15})$$

$$(f\circ g)'(x) = 150x^{29}$$

أوجد $(f\circ g)'$ عند القيم المعطاة ل x .

4. $f(x)=x^5+1\ ,\ g(x)=\sqrt{x}\ ,\ x=1$

$$g(1)=\sqrt{1}=1$$

$$(f\circ g)'(1)=f'(g(1))\cdot g'(1)$$

$$=f'(1)\cdot g'(1)$$

$$f'(x)=5x^4$$

$$f'(1)=5(1)^4=5$$

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(1)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore (f\circ g)'(1)=5\times\frac{1}{2}=2.5$$

5. $f(x)=x+\frac{1}{\cos^2 x}\ ,\ g(x)=\pi x\ ,\ x=\frac{1}{4}$

$$f(x)=x+(\sec x)^2$$

$$(f\circ g)'\left(\frac{1}{4}\right)=f'\left(g\left(\frac{1}{4}\right)\right)\cdot g'\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$g\left(\frac{1}{4}\right)=\pi\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}$$

$$=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot g'\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$f'(x)=1+2\cdot\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+2\cdot\sec\frac{\pi}{4}\cdot\sec\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{4}=5$$

$$g'(x)=\pi$$

$$g'\left(\frac{1}{4}\right)=\pi$$

$$\Rightarrow (f\circ g)'\left(\frac{1}{4}\right)=5\pi$$

6. $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}\ ,\ g(x)=10x^2+x+1\ ,\ x=0$

$$(f\circ g)'(0)=f'(g(0))\cdot g'(0)$$

$$: g(0)=10(0)^2+0+1=1$$

$$=f'(1)\cdot g'(0)$$

$$f'(x)=\frac{(2)(x^2+1)-(2x)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(1)=\frac{2(1+1)-2\times 2}{(1+1)^2}=0$$

$$g'(x)=20x+1$$

$$g'(0)=20(0)+1=1$$

$$(f\circ g)'(0)=0\times 1=0$$

7. أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

a) $y = \cos u \;\; , \;\; u = 6x + 2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= -\sin u \cdot 6 = -6\sin(6x + 2)$$

b) $y = 5u^3 + 4 \;\; , \;\; u = 3x^2 + 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= (15u^2)(6x) = 90\,x\,u^2 = 90\,x\,(3x^2 + 1)^2$$

$$= 90x(9x^4 + 6x^2 + 1) = 810x^5 + 540x^3 + 90x$$

8. أوجد $\frac{ds}{dt}$ حيث $s = \sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}t\right)$

$$\frac{ds}{dt} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)\left(\frac{3\pi}{2}\right) + -\sin\left(\frac{7\pi}{4}t\right)\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right) - \frac{7\pi}{4}\sin\left(\frac{7\pi}{4}t\right)$$

أوجد $\frac{dy}{dx}$

9. $y = \tan(2x - x^3)$

$$y' = \sec^2(2x - x^3) \cdot (2 - 3x^2)$$

10. $y = \sin(3x + 1)$

$$y' = \cos(3x + 1) \cdot (3)$$

11. $y = (\tan x + \sec x)^2$

$$y' = 2(\tan x + \sec x) \cdot (\sec^2 x + \sec x \tan x)$$

12. $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$

$$y' = 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \frac{(1)(x+1) - (x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

$$= 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \frac{x + 1 - x + 1}{(x+1)^2} = \frac{4(x-1)}{(x+1)^3}$$

13. $y = (1 - 6x)^{\frac{2}{3}}$

$$y' = \frac{2}{3}(1 - 6x)^{-\frac{1}{3}} \cdot (-6) = -4(1 - 6x)^{-\frac{1}{3}}$$

14. $y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$y'=(1)\left((1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)+(x)\left(-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}(2x)\right)$$

$$=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}+x\left(-x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}-x^2(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

15. $y=\sin^2(3x-2)$

$$y'=2\sin(3x-2)\cos(3x-2)\,(3)=6\sin(3x-2)\cos(3x-2)$$

أوجد معادلة المماس ومعادلة الخط العمودي على المماس في كل مما يلي:

16. $f(x)=\sqrt{x^2+5}\quad,\quad(2,3)$

$$f(x)=(x^2+5)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}(x^2+5)^{-\frac{1}{2}}(2x)=x(x^2+5)^{-\frac{1}{2}}$$

ميل المماس

$$f'(a)=f'(2)=2(2^2+5)^{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

المماس

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

$$y-3=\frac{2}{3}(x-2)$$

$$y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}+3$$

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$$

الناظم

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

$$y-3=-\frac{3}{2}(x-2)$$

$$y=-\frac{3}{2}x+3+3$$

$$y=-\frac{3}{2}x+6$$

17. $g(x)=(x^3+1)^8\quad,\quad$ عند $(0,1)$

$$g'(x)=8(x^3+1)^7(3x^2)=24x^2(x^3+1)^7$$

$$g'(0)=24(0)^2(0^3+1)^7=0$$

ميل المماس

المماس أفقي معادلته

$$y=g(a)$$

$$y=1$$

الناظم رأسي معادلته

$$x=a$$

$$x=0$$

المشتقات ذات الرُتب العليا و الانشقاق الضمني

في التمارين (1-6)، أوجد: $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$

1. $y = 2x^4 - x^3 + x^2 - 3x$

$$y' = 8x^3 - 3x^2 + 2x - 3$$
$$y'' = 24x^2 - 6x + 2$$
$$y''' = 48x - 6$$

2. $y = -x^5 + 2x^3 - 4x + 1$

$$y' = -5x^4 + 6x^2 - 4$$
$$y'' = -20x^3 + 12x$$
$$y''' = -60x^2 + 12$$

3. $y = \frac{3}{(x-2)} = 3(x-2)^{-1}$

$$y' = 3(-1)(x-2)^{-2}(1) = -3(x-2)^{-2}$$
$$y'' = -3(-2)(x-2)^{-3}(1) = 6(x-2)^{-3}$$
$$y''' = 6(-3)(x-2)^{-4}(1) = -18(x-2)^{-4}$$

4. $y = \sin 2x$

$$y' = 2\cos 2x$$
$$y'' = 2(-\sin 2x)(2) = -4\sin 2x$$
$$y''' = -4\cos 2x(2) = -8\cos 2x$$

5. $y = \cos 4x$

$$y' = -\sin 4x(4) = -4\sin 4x$$
$$y'' = -4\cos 4x(4) = -16\cos 4x$$
$$y''' = -16(-\sin 4x)(4) = 64\sin 4x$$

6. $y = \sin^2 x$

$$y' = 2\sin x\cos x$$
$$y'' = (2\cos x)(\cos x) + (2\sin x)(-\sin x) = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$$
$$y''' = 2(2)\cos x(-\sin x) - 2(2)\sin x(\cos x)$$
$$= -4\sin x\cos x - 4\sin x\cos x = -8\sin x\cos x$$

في التمارين (7-9)، أوجد: $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$

7. $y^2 = x^2 + 4x + 2$

$$2yy' = 2x + 4 \Rightarrow y' = \frac{2x+4}{2y} = \frac{2(x+2)}{2y} = \frac{x+2}{y}$$

$$y'' = \frac{(1)(y) - (x+2)(y')}{y^2} = \frac{y - (x+2)\frac{(x+2)}{y}}{y^2}$$

$$= \frac{\left(y - \frac{(x+2)^2}{y}\right)\times y}{(y^2)\times y} = \frac{y^2 - (x+2)^2}{y^3}$$

8. $y^2 - 4y = x - 3$

$$2yy' - 4y' = 1$$

$$y'' = \frac{-1(2y')}{(2y-4)^2} = \frac{-2y'}{(2y-4)^2} = \frac{-2\times\frac{1}{(2y-4)}\times(2y-4)}{(2y-4)^2\times(2y-4)} = \frac{-2}{(2y-4)^3}$$

9. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot y' = 0$$

$$y' = \frac{-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}} = -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}} = -x^{-\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}}$$

$$y'' = \left(-x^{-\frac{1}{3}}\right)'\left(y^{\frac{1}{3}}\right) + \left(-x^{-\frac{1}{3}}\right)\left(y^{\frac{1}{3}}\right)'$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}\right)\left(y^{\frac{1}{3}}\right) + \left(-x^{-\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\cdot y'\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}\right)\left(y^{\frac{1}{3}}\right) + \left(-x^{-\frac{1}{3}}\right)\times\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(-x^{-\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}\right)\left(y^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$$

أوجد معادلة المماس ومعادلة الخط العمودي على المماس على منحنى الدالة عند كل نقطة معطاة.

10. $x^2 + 2xy - y^2 = 7\ , \quad (2,3)$

$$2x + (2)(y) + (2x)(y') - 2yy' = 0$$

$$y'(2x - 2y) = -2x - 2y$$

$$y' = \frac{-2x - 2y}{2x - 2y}, \Rightarrow \quad m = \frac{dy}{dx}\bigg|_{(2,3)} = \frac{-4 - 6}{4 - 6} = 5 = m$$ ميل المماس

المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = 5(x - 2)$$

$$y = 5x - 10 + 3$$

$$y = 5x - 7$$

الناظم

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{-1}{5}(x - 2)$$

$$y = \frac{-1}{5}x + \frac{2}{5} + 3$$

$$y = \frac{-1}{5}x + \frac{17}{5}$$

11. $6x^2 + 3xy - 2y^3 - 7y - 6 = 0\ , \quad (-1,0)$

$$12x + (3)(y) + (3x)(y') - 6y^2 \cdot y' - 7y' = 0$$

$$y' = \frac{-12x - 3y}{3x - 6y^2 - 7} \Rightarrow m = \frac{dy}{dx}\bigg|_{(-1,0)} = \frac{12 - 0}{-3 - 0 - 7} = \frac{-6}{5} = m$$

المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{-6}{5}(x + 1)$$

$$y = \frac{-6}{5}x - \frac{6}{5}$$

الناظم

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{5}{6}(x + 1)$$

$$y = \frac{5}{6}x + \frac{5}{6}$$

12. $2xy + \pi \sin y = 2\pi, \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

$$(2)(y) + (2x)(y') + \pi \cos y \, y' = 0$$

$$y'(2x + \pi \cos y) = -2y$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-2y}{2x + \pi \cos y}$$

$$\Rightarrow m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1, \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-2 \times \frac{\pi}{2}}{2 + \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-\pi}{2} = m$$

المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{2}(x - 1)$$

$$y = \frac{-\pi}{2}x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$y = \frac{-\pi}{2}x + \pi$$

الناظم

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}(x - 1)$$

$$y = \frac{2}{\pi}x - \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}$$

سؤال من المريخ:

13. أوجد A,B في : $y = A \sin x + B \cos x$ حيث $y'' - y = \sin x$

$$y' = A \cos x - B \sin x$$

$$y'' = -A \sin x - B \cos x$$

$$y'' - y = (-A \sin x - B \cos x) - (A \sin x + B \cos x)$$

$$= -A \sin x - B \cos x - A \sin x - B \cos x$$

$$= -2A \sin x - 2B \cos x = \sin x$$

$$\Rightarrow -2A \sin x - 2B \cos x = 1 \sin x + 0 \cos x$$

$$-2A = 1 \Rightarrow A = \frac{-1}{2} \quad , \qquad B = 0$$

معلق

14. أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y = \frac{\cos x}{1+\tan x}$

و اكتب معادلة المماس على منحنى الدالة عند $A(0,1)$

$$y' = \frac{(-\sin x)(1+\tan x) - (\cos x)(\sec^2 x)}{(1+\tan x)^2}$$

$$\Rightarrow m = y'(0) = \frac{0-(1)(1)^2}{(1+0)^2} = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -1(x - 0)$$

$$y = -x + 1$$

15. إذا كانت $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ فأثبت أن: $4x^2 f''(x) - 3f(x) = 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{-1}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$\therefore 4x^2 f''(x) - 3f(x) = 4x^2\cdot\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{-1}{2}} = 3x^{\frac{-1}{2}} - 3x^{\frac{-1}{2}} = 0$$

16. إذا كانت $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ فأثبت أن: $(1-x^2)f'''(x) - 6xf''(x) - 6f'(x) = 0$

$$\frac{y}{1} = \frac{1}{1-x^2}, \qquad y(1-x^2) = 1$$

① $(y')(1-x^2) + (y)(-2x) = 0$

② $(y'')(1-x^2) + (y')(-2x) + (y')(-2x) + (y)(-2) = 0$

$(y'')(1-x^2) + (-4x)y' - 2y = 0$

③ $(y''')(1-x^2) + (y'')(-2x) + (-4)(y') + (-4x)(y'') - 2y' = 0$

$(y''')(1-x^2) - 6xy'' - 6y' = 0$

معلق

القيم القصوى (العظمى و الصغرى) للدوال

في التمارين $(7-9)$ ، حدد النقاط الحرجة

7. $y = x^2(x+2) = x^3 + 2x^2$

دالة كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 + 4x$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(3x+4) = 0 \Rightarrow x = 0\ , \qquad x = -\frac{4}{3}$$

$$y(0) = 0, \qquad y\left(-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)^3 + 2\left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{32}{27}$$

النقاط الحرجة $\left(-\frac{4}{3}, \frac{32}{27}\right)$ $\quad (0,0)$

سؤال من المريخ:

8. $y = x\sqrt{3-x}$

$3 - x \geq 0\ , \qquad 3 \geq x\ , \qquad x \leq 3$

f متصلة على $(-\infty, 3]$ و قابلة للاشتقاق على $(-\infty, 3)$

$$y = x(3-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = (1)\left((3-x)^{\frac{1}{2}}\right) + (x)\left(\frac{1}{2}(3-x)^{-\frac{1}{2}}(-1)\right) = \sqrt{3-x} - \frac{1}{2}x\frac{1}{\sqrt{3-x}}$$

$$= \sqrt{3-x} - \frac{x}{2\sqrt{3-x}} = \frac{2(3-x) - x}{2\sqrt{3-x}} = \frac{6-3x}{2\sqrt{3-x}} \Rightarrow y' = \frac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}$$

معلق

لإيجاد النقاط الحرجة يجب أن ندرس الحالتين التاليتين:

① $y' = 0$

$6 - 3x = 0$

$-3x = -6$

$x = 2\ , \qquad 2 \in (-\infty, 3)$

$f(2) = 2\sqrt{3-2} = 2$

$(2,2)$ نقطة حرجة

② y' غير موجودة

$2\sqrt{3-x} = 0$

$\sqrt{3-x} = 0$

$3 - x = 0$

$x = 3\ , \qquad 3 \notin (-\infty, 3)$

لا يوجد نقطة حرجة في هذه الحالة

9. $y = f(x) = \begin{cases} 3 - x\ , & x < 0 \\ 3 + 2x - x^2\ , & x \geq 0 \end{cases}$

$$y'(x) = f'\ (x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ \text{تبحث} & x = 0 \\ 2 - 2x & x > 0 \end{cases}$$

$3 - x$ | 0 | $3 + 2x - x^2$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{3 - x - 3}{x}$$

$$= -1$$

$$f(0) = 3$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{3 + 2x - x^2 - 3}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x(2 - x)}{x} = 2$$

$\because f'_-(0) \neq f'_+(0)$

$\therefore$ $f'(0)$ غير موجودة بالتالي يوجد نقطة حرجة عند $x = 0$

النقاط الحرجة

$x < 0,\quad x \in (-\infty, 0)$	$x = 0$	$x > 0,\quad x \in (0, \infty)$
$y' = f'(x) = -1$	$f'(0)$ غير موجودة	$y' = 2 - 2x = 0$
$\forall x \in (-\infty, 0), f'\ (x) \neq 0$	للدالة نقطة حرجة عند $x = 0$ وهي:	$x = \frac{-2}{-2} = 1$
بالتالي لا توجد نقطة حرجة على هذه الفترة	$(0\ , f(0))$	$1 \in (0, \infty)$
	$(0\ , 3)$	للدالة نقطة حرجة عند $x = 1$
		$f(1) = 3 + 2 - 1 = 4$
		$\therefore$ $(1,4)$ نقطة حرجة

(10 – 14) أوجد القيم القصوى المطلقة لكل دالة من الدوال التالية في الفترة المبينة.

10. $y = 2x^2 - 8x + 9 \ , \ \ [0,4]$

بفرض: $y = f(x)$

∵ الدالة متصلة على $[0,4]$ إذاً: يوجد قيمة عظمى مطلقة و قيمة صغرى مطلقة

$f(0) = 2(0)^2 - 8(0) + 9 = 9 \ , \ \ f(4) = 2(4)^2 - 8(4) + 9 = 9$

$f'(x) = 4x - 8, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{4} = 2, \quad 2 \in (0,4)$

$f(2) = 2(2)^2 - 8(2) + 9 = 1$

∴ $(2,1)$ **نقطة حرجة**

من الجدول:

x	0	2	4
y	9	1	9

- أكبر قيمة للدالة في الفترة $[0,4]$ هي 9 ⇐ 9 قيمة عظمى مطلقة
- أصغر قيمة للدالة في الفترة $[0,4]$ هي 1 ⇐ 1 قيمة صغرى مطلقة

11. $f(x) = x^{\frac{3}{5}} \ , \ \ [-2,3]$

∵ الدالة متصلة على $[-2,3]$

∴ يوجد قيمة عظمى مطلقة و قيمة صغرى مطلقة

$f(-2) = (-2)^{\frac{3}{5}} = -1.516 \ , \quad f(3) = (3)^{\frac{3}{5}} = 1.933$

$f'(x) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5x^{\frac{2}{5}}} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$

لاحظ أن: $f'(x) \neq 0$ "لأن البسط لا يساوي الصفر"

$f'(x)$ غير موجودة "عندما يكون المقام يساوي صفراً"

$5\sqrt[5]{x^2} = 0 \Rightarrow x = 0, \quad 0 \in (-2,3) \ , f(0) = 0^{\frac{3}{5}} = 0$

∴ $(0,0)$ نقطة حرجة

x	-2	0	3
$f(x)$	-1.516	0	1.933

من الجدول:

- أكبر قيمة للدالة في الفترة $[-2,3]$ هي 1.933 ⇐ 1.933 قيمة عظمى مطلقة
- أصغر قيمة للدالة في الفترة $[-2,3]$ هي -1.516 ⇐ -1.516 قيمة صغرى مطلقة

سؤال من المريخ:

12. $y = \frac{x}{x^2+1}$, $[-3,0]$

بفرض: $y = f(x)$

∵ الدالة متصلة على $[-3,0]$

∴ يوجد قيمة عظمى مطلقة و قيمة صغرى مطلقة

$$f(-3) = \frac{-3}{(-3)^2+1} = \frac{-3}{10} \quad , \quad f(0) = \frac{0}{0^2+1} = 0$$

$$f'(x) = \frac{(1)(x^2+1)-(x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

لإيجاد النقاط الحرجة يجب مناقشة الحالتين التاليتين:

1. $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow (1-x)(1+x) = 0 \Rightarrow$

$x = 1 , 1 \notin (-3,0)$

معلق

$x = -1 , -1 \in (-3,0) \Rightarrow f(-1) = \frac{(-1)}{(-1)^2+1} = \frac{-1}{2}$

∴ $(-1,\frac{-1}{2})$ نقطة حرجة

2. $f'(x)$ غير موجودة $\Rightarrow (x^2+1)^2 = 0 \Rightarrow x^2+1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$

لا يوجد حلول بالتالي لا يوجد نقاط حرجة في هذه الحالة

x	-3	-1	0
y	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{2}$	0

من الجدول:

- أكبر قيمة للدالة في الفترة $[-3,0]$ هي 0 ⇐ 0 قيمة عظمى مطلقة
- أصغر قيمة للدالة في الفترة $[-3,0]$ هي $\frac{-1}{2}$ ⇐ $\frac{-1}{2}$ قيمة صغرى مطلقة

سؤال من المريخ:

13. $y = \sqrt{3 + 2x - x^2} \quad , \quad [-1,1]$

بفرض: $y = f(x)$

$\because$ الدالة متصلة على $[-1,1]$

$\therefore$ يوجد قيمة عظمى مطلقة و قيمة صغرى مطلقة

$f(-1) = 0 \quad , \quad f(1) = 2$

$$f(x) = (3 + 2x - x^2)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2}(3 + 2x - x^2)^{-\frac{1}{2}}(2 - 2x)$$

$$= \frac{(2 - 2x)}{2(3 + 2x - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2(1 - x)}{2\sqrt{3 + 2x - x^2}} = \frac{1 - x}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$$

معلق

لإيجاد النقاط الحرجة يجب مناقشة الحالتين التاليتين:

① $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1 \,, 1 \notin (-1,1) \Rightarrow$ لا يوجد نقاط حرجة في هذه الحالة

② $f'(x)$ غير موجودة $\Rightarrow \sqrt{3 + 2x - x^2} = 0 \Rightarrow 3 + 2x - x^2 = 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 \quad , 3 \quad \notin \; (-1,1) \\ x = -1 \,, -1 \notin (-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$ أيضاً لا يوجد نقاط حرجة في هذه الحالة

x	-1	1
y	0	2

من الجدول:

- أكبر قيمة للدالة في الفترة $[-1,1]$ هي 2 $\Leftarrow$ 2 قيمة عظمى مطلقة
- أصغر قيمة للدالة في الفترة $[-1,1]$ هي 0 $\Leftarrow$ 0 قيمة صغرى مطلقة

سؤال من المريخ:

14. $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

بفرض: $y = f(x)$

$\because$ الدالة متصلة على $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$\therefore$ يوجد قيمة عظمى مطلقة و قيمة صغرى مطلقة

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1.155 \;,\; f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1.155$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

لإيجاد النقاط الحرجة يجب مناقشة الحالتين التاليتين:

① $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \;,\quad 0 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y(0) = \frac{1}{\sqrt{1-(0)^2}} = 1$

$\therefore$ (0,1) نقطة حرجة

معلق

② $f'(x)$ غير موجودة $\Rightarrow (1-x^2)^{\frac{3}{2}} = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow$

$(1-x)(1+x) = 0 \Rightarrow x = 1 \quad ,1 \notin \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$x = -1 \,, -1 \notin \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow$ لا يوجد نقاط حرجة في هذه الحالة

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
y	1.155	1	1.155

من الجدول:

- أكبر قيمة للدالة في الفترة $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ هي 1.155 $\Leftarrow$ 1.155 قيمة عظمى مطلقة
- أصغر قيمة للدالة في الفترة $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ هي 1 $\Leftarrow$ 1 قيمة صغرى مطلقة

تزايد وتناقص الدوال

1. بيّن أن الدالة $f: f(x)=x^2+2x-1$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $[0,1]$ ثم أوجد قيمة c التي تنبئ بها النظرية. فسّر إجابتك.

الشروط : $f(x)=x^2+2x-1$ دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ فهي متصلة على الفترة $[0,1]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(0,1)$.

∵شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة $[0,1]$

∴يوجد على الأقل $c\in(0,1)$ بحيث :

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f(1)-f(0)}{1}$$

$$f'(x)=2x+2 \Rightarrow f'(c)=2c+2$$

$$f(1)=(1)^2+2(1)-1=2 \quad ,f(0)=(0)^2+2(0)-1=-1$$

$$\therefore 2c+2=\frac{2-(-1)}{1}=3 \Rightarrow 2c=1, \qquad c=\frac{1}{2}\in(0,1)$$

التفسير : يوجد مماس لمنحنى الدالة عند $x=\frac{1}{2}$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $(0,0)(2,4)$

2. بيّن أن الدالة $f: f(x)=x+\frac{1}{x}$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $\left[\frac{1}{2},2\right]$ ثم أوجد قيمة c التي تنبئ بها النظرية. فسّر إجابتك.

معلق

$$h(x)=x \qquad g(x)=\frac{1}{x}$$

$$D_h=\mathbb{R} \quad , \qquad D_g=\mathbb{R}-\{0\} \Rightarrow D_f=D_h\cap D_g=\mathbb{R}-\{0\}$$

∴ f متصلة على $\mathbb{R}-\{0\}$

الشروط: $f(x)=x+\frac{1}{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^*$ بالتالي هي متصلة على $\left[\frac{1}{2},2\right]$ و قابلة للاشتقاق على $\left(\frac{1}{2},2\right)$

∵شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة $\left[\frac{1}{2},2\right]$

∴يوجد على الأقل $c\in\left(\frac{1}{2},2\right)$ بحيث :

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(2)-f(0.5)}{2-0.5}=\frac{f(2)-f(0.5)}{1.5}$$

$$f'(x)=1+\frac{-1}{x^2} \Rightarrow f'(c)=1+\frac{-1}{c^2}$$

$$f(2)=2+0.5=2.5 \quad , \qquad f(0.5)=(0.5)+\frac{1}{(0.5)}=2.5$$

$$\therefore 1+\frac{-1}{c^2}=\frac{2.5-2.5}{1.5}=0 \Rightarrow \frac{1}{c^2}=1 \Rightarrow c^2=1 \Rightarrow c=\pm 1$$

$$c=-1\notin(0.5,2) \quad , \quad c=1\in(0.5,2)$$

التفسير: يوجد مماس أفقي لمنحنى الدالة f عند $x=1$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $(0.5,2.5)$, $(2,2.5)$

حدد فترات التزايد و التناقص لكل من الدوال :

3. $f(x) = 5x - x^2$

f كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 5 - 2x\ ,\qquad f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 2.5$

$-\infty \qquad 2.5 \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty, 2.5)$	$(2.5, \infty)$
إشارة f'	$+$	$-$
سلوك f	$\nearrow$	$\searrow$

f متزايدة على $(-\infty,2.5)$ ، f متناقصة على $(2.5,\infty)$

4. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24$

f كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 18x\ ,\qquad f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0\ \ ,\ x = 6$

$-\infty \qquad 0 \qquad 6 \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0,6)$	$(6, \infty)$
إشارة f'	$+$	$-$	$+$
سلوك f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

f متزايدة على كل من $(-\infty,0)$, $(6,\infty)$ ، f متناقصة على $(0,6)$

5. $k(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

k حدودية نسبية متصلة $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$k'(x) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3} \neq 0$$

$-\infty \qquad 0 \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty, \mathbf{0})$	غير معرفة	$(\mathbf{0}, \infty)$
إشارة k'	$+$		$-$
سلوك k	$\nearrow$		$\searrow$

k متناقصة على $(0,\infty)$ ، k متزايدة على $(-\infty,0)$

6. $h(x) = \frac{-x}{x^2+4}$

h حدودية نسبية متصلة على $\mathbb{R}$ $(x^2 + 4 \neq 0)$

$$h'(x) = \frac{(-1)(x^2+4) - (-x)(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2-4}{(x^2+4)^2}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$$

$-\infty \qquad -2 \qquad 2 \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty, -2)$	$(-2,2)$	$(2, \infty)$
إشارة h′	$+$	$-$	$+$
سلوك h	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

h متزايدة على كل من $(-\infty,-2)$, $(2,\infty)$ ، h متناقصة على $(-2,2)$

7. $f(x) = x^4 - 2x^2$

f كثيرة حدود متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow 4x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow$

$x = 0 , x = 1 , x = -1$

الفترات	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
إشارة f'	$-$	$+$	$-$	$+$
سلوك f	↘	↗	↘	↗

f متزايدة على كل من $(-1,0)$ ، $(1,\infty)$ f متناقصة على كل من $(0,1)$ ، $(-\infty,-1)$

ربط f', f'' ببيان الدالة f

(1 – 6) أوجد النقاط الحرجة و القيم القصوى المحليّة و عيّن فترات التزايد و فترات التناقص لكل دالة مما يلي :

1. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

f كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = 4 \,, & f(4) = 16 \\ x = 2 \,, & f(2) = 20 \end{matrix}$

$\therefore$ النقاط الحرجة $(2,20)$ ، $(4,16)$

الفترات	$(-\infty,2)$	$(2,4)$	$(4,\infty)$
إشارة f'	$+$	$-$	$+$
سلوك f	↗	↘	↗
	متزايدة	متناقصة	متزايدة

f متزايدة على كل من $(-\infty,2)$ ، $(4,\infty)$

f متناقصة على $(2,4)$

يوجد ل f قيمة عظمى محلية عند $x = 2$ و هي $f(2) = 20$

يوجد ل f قيمة صغرى محلية عند $x = 4$ و هي $f(4) = 16$

2. $g(x) = -2x^3 + 6x^2 - 3$

g كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$g'(x) = -6x^2 + 12x = 0 \Rightarrow -6x(x-2) = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} x = 0 \to f(0) = -3 & (0,-3) \\ x = 2 \to f(2) = 5 & (2,5) \end{array}\right\} \text{نقط حرجة}$$

الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0,2)$	$(2, \infty)$
إشارة g'	$-$	$+$	$-$
سلوك g	↘	↗	↘

g متزايدة على $(0,2)$

g متناقصة على كل من $(2,\infty)$، $(-\infty,0)$

يوجد ل g قيمة عظمى محلية عند $x = 2$ و هي $g(2) = 5$

يوجد ل g قيمة صغرى محلية عند $x = 0$ و هي $g(0) = -3$

3. $h(x) = -x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 1$

h كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$h'(x) = -4x^3 - 12x^2 - 8x = 0 \Rightarrow -4x(x^2 + 3x + 2) = 0$$

$$\left.\begin{array}{lll} x = 0 \ , & h(0) = 1 \ , & (0,1) \\ x = -1 \ , & h(-1) = 0 \ , & (-1,0) \\ x = -2 \ , & h(-2) = 1 \ , & (-2,1) \end{array}\right\} \text{نقاط حرجة}$$

الفترات	$(-\infty, -2)$	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	$(0, \infty)$
إشارة h'	$+$	$-$	$+$	$-$
سلوك h	↗	↘	↗	↘

h متزايدة على كل من $(-1,0)$، $(-\infty, -2)$

h متناقصة على كل من $(0,\infty)$، $(-2, -1)$

يوجد ل h قيمة عظمى محلية عند $x = -2$ و هي $h(-2) = 1$

يوجد ل h قيمة صغرى محلية عند $x = -1$ و هي $h(-1) = 0$

يوجد ل h قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ و هي $h(0) = 1$

4. $g(x) = \frac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 6x + \frac{9}{2}$

g كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$g'(x) = 6x^3 + 6x^2 - 6x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = 1\ , & g(1) = -1 \\ x = -1\ , & g(-1) = 7 \end{matrix}$

$\therefore$ $(1, -1)$, $(-1,7)$ نقاط حرجة

الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1,1)$	$(1, \infty)$
إشارة g'	$-$	$-$	$+$
سلوك g	↘	↘	↗

g متزايدة على $(1,\infty)$ & g متناقصة على كل من $(-1,1)$, $(-\infty, -1)$

$\therefore$ يوجد ل g قيمة صغرى محلية عند $x = 1$ و هي $g(1) = -1$

سؤال من المريخ:

5. $h(x) = 2 - |x - 1| = \begin{cases} 2 - (x - 1) = 2 - x + 1 = 3 - x & : x \geq 1 \\ 2 - (-x + 1) = 2 + x - 1 = 1 + x & : x < 1 \end{cases}$ $\quad D_h = \mathbb{R}$

$h'(x) = \begin{cases} -1 & : x > 1 \\ \text{تبحث} & : x = 1 \\ 1 & : x < 1 \end{cases}$ $\quad h(1) = 2 - |1 - 1| = 2$

$h'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1 + x - 2}{x - 1} = 1$

$h'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{3 - x - 2}{x - 1} = -1$

معلق

$\because h'_-(1) \neq h'_+(1) \ \therefore h'(1)$ غير موجودة

بالتالي: $(1, h(1)) = (1,2)$ نقطة حرجة

الفترات	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
إشارة h'	$+$	$-$
سلوك h	↗	↘
	متزايدة	متناقصة

h متناقصة على $(1,\infty)$ & h متزايدة على $(-\infty,1)$

يوجد ل h قيمة عظمى محلية عند $x = 1$ و هي $h(1) = 2$

6. $f(x) = \frac{x}{x-2}$ $\quad D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

$(-\infty, 2)$ $\quad (2, \infty)$ $\quad$ ∴ f متصلة وقابلة للاشتقاق على كل من الفترتين

$$f'(x) = \frac{(1)(x-2) - (x)(1)}{(x-2)^2} = \frac{x-2-x}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2}$$

$f'(x) \neq 0$ لا يوجد نقاط حرجة $\quad f'(x) < 0 \ , \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$

معلق

	$-\infty$	2	∞
الفترات	$(-\infty, 2)$	غير معرفة	$(2, \infty)$
إشارة f'	$-$		$-$
سلوك f	$\searrow$		$\searrow$
	متناقصة		متناقصة

h متناقصة على كل من: $(-\infty,2)$ ، $(2,\infty)$ $\quad$ لا يوجد قيم قصوى

استخدم مشتقة الدالة $y = f(x)$ لإيجاد قيم x التي تكون عندها f لها :

a) قيمة عظمى محلية

b) قيمة صغرى محلية

c) نقطة انعطاف

7. $y' = (x-1)^2(x-2)$

$y' = (x-1)^2(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1 \, , x = 2$ أعداد حرجة

x	$-\infty$	1		2	∞
إشارة y'	$-$	0	$-$	0	$+$
سلوك y	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

عند $x = 2$ يوجد قيمة صغرى محلية

$y'' = 2(x-1)\,(1)(x-2) + (x-1)^2(1)$

$y'' = (2x-2)(x-2) + x^2 - 2x + 1$

$y'' = 2x^2 - 4x \; - 2x + 4 \; + x^2 - 2x + 1$

$y'' = 3x^2 - 8x + 5$

$y'' = 0 \;\Rightarrow x = 1 \, , x = \frac{5}{3}$

x	$-\infty$	1		$\frac{5}{3}$	∞
إشارة y''	$+$	0	$-$	0	$+$
بيان الدالة	$\cup$		$\cap$		$\cup$

يوجد نقطتا انعطاف عند $x = 1 \;,\; x = \frac{5}{3}$

8. $y' = (x-1)^2(x-2)(x-4)$

$y' = (x-1)^2(x-2)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 1\,, x = 2, x = 4$

x	$-\infty$		1		2		4		∞
إشارة y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
سلوك y		↗		↗		↘		↗	

عند $x = 2$ يوجد قيمة عظمى محلية

عند $x = 4$ يوجد قيمة صغرى محلية

$$y' = (x-1)^2(x-2)(x-4) = (x^2-2x+1)(x^2-6x+8)$$
$$= x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 2x^3 + 12x^2 - 16x + x^2 - 6x + 8$$
$$= x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 22x + 8$$

$$y'' = 4x^3 - 24x^2 + 42x - 22 = 0 \Rightarrow x = 1, x = \frac{5 \mp \sqrt{3}}{2}$$

x	$-\infty$	1	$\frac{5-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5+\sqrt{3}}{2}$	∞
y''	$-$	$+$	$-$	$+$	
بيان الدالة	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	

يوجد 3 نقاط انعطاف عند $x = 1\,, x = \frac{5+\sqrt{3}}{2}\,, x = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$

10. $g(x) = 3x^2 - 2x^3$

g كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$g'(x) = 6x - 6x^2$

$g''(x) = 6 - 12x$, $g''(x) = 0 \rightarrow 6 - 12x = 0$, $x = \frac{1}{2}$

$-\infty$ $\frac{1}{2}$ ∞

الفترات	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
إشارة g''	$+$	$-$
بيان الدالة	$\cup$	$\cap$

بيان الدالة g مقعر لأسفل في $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ بيان الدالة g مقعر لأعلى في $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$

نقطة انعطاف $\left(\frac{1}{2}, g\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

11. $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 5$

g كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$g'(x) = x^2 - 4x + 1$

$g''(x) = 2x - 4$, $g''(x) = 0 \rightarrow 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$

$-\infty$ 2 ∞

الفترات	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة g''	$-$	$+$
سلوك g	$\cap$	$\cup$

بيان الدالة g مقعر لأسفل في $(-\infty,2)$ &بيان الدالة g مقعر لأعلى في $(2,\infty)$

نقطة انعطاف $(2, g(2)) = \left(2, -\frac{25}{3}\right)$

12. بين أن منحنى الدالة f: $f(x) = 1 - x^4$ ليس له نقاط انعطاف.

$f'(x) = -4x^3$

$f''(x) = -12x^2 \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ التقعر دائما إلى الأسفل" لا يتغير"

$\therefore$ لا يوجد نقاط انعطاف

أسئلة من المريخ:

13. أوجد قيمة كل من الثوابت a,b,c لمنحنى الدالة f : $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ الذي يمر بنقطة الأصل و له نقطة حرجة $(4,16)$.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

يمر بنقطة الأصل $\Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0)^3 + a(0)^2 + b(0) + c = 0 \Rightarrow c = 0$

نقطة حرجة $(4,16) \Rightarrow$

$$f'(4) = 0 \Rightarrow 3(4)^2 + 2a(4) + b = 0 \Rightarrow \qquad 8a + b = -48 \rightarrow (1)$$

$$f(4) = 16 \Rightarrow 4^3 + a(4)^2 + b(4) + 0 = 16 \Rightarrow 16a + 4b = -48 \rightarrow (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow a = -9 , b = 24$$

معلق

14. أوجد قيمة كل من الثوابت a,b بحيث يكون لمنحنى للدالة f : $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ نقطة حرجة عند $x = 2$ و نقطة انعطاف عند $x = \frac{1}{2}$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad , \quad f''(x) = 6x + 2a$$

$\because$ يوجد نقطة حرجة عند $x = 2$

$$\therefore f'(2) = 0 \Rightarrow 3(2)^2 + 2a(2) + b = 0 \Rightarrow 4a + b = -12 \quad \rightarrow (1)$$

$\because$ يوجد نقطة انعطاف عند $x = \frac{1}{2}$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 6\left(\frac{1}{2}\right) + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

بالتعويض في المعادلة (1)

$$4\left(-\frac{3}{2}\right) + b = -12 \Rightarrow b = -12 + 6 \Rightarrow b = -6$$

في التمرينين $(15 - 16)$ ، استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للدالة :

15. $f(x) = x^2 - 6x + 11$

f كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 2x - 6 , \ f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

$$f''(x) = 2 , \ \because 2 > 0$$

$\therefore$ يوجد لـ f عند $x = 3$ قيمة صغرى محلية و هي $f(3) = 2$

16. $f(x) = x^4 - 18x^2$ $\qquad$ f كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 36x$,

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x(x-3)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -3 , x = 3$

$f''(x) = 12x^2 - 36$

$f''(-3) = 72 > 0$	$f''(3) = 72 > 0$	$f''(0) = -36 < 0$
$f(-3) = -81$	$f(3) = -81$	$f(0) = 0$
قيمة صغرى محلية	قيمة صغرى محلية	قيمة عظمى محلية

رسم بيان دوال كثيرات الحدود

ادرس تغير كل من الدوال التالية و ارسم بيانها

3) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 7$

f كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = \infty$$

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$

$x = 2, f(2) = -1$

$x = \frac{-2}{3}, f\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{229}{27}$

نقط حرجة $\rightarrow \left(\frac{-2}{3}, \frac{229}{27}\right), (2,-1)$

	$-\infty$	$\frac{-2}{3}$		2	∞
إشارة f'	$+$		$-$		$+$
سلوك f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

f متزايدة على:
الفترة $\left(-\infty, \frac{-2}{3}\right)$ والفترة $(2,\infty)$

f متناقصة على $\left(\frac{-2}{3}, 2\right)$

$f(2) = -1$ قيمة صغرى محلية

$f\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{229}{27}$ قيمة عظمى محلية

$f''(x) = 6x - 4, f''(x) = 0 \Rightarrow$

$x = \frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{101}{27}$

	$-\infty$	$2/3$	∞
إشارة f''	$-$		$+$
بيان f	$\cap$		$\cup$

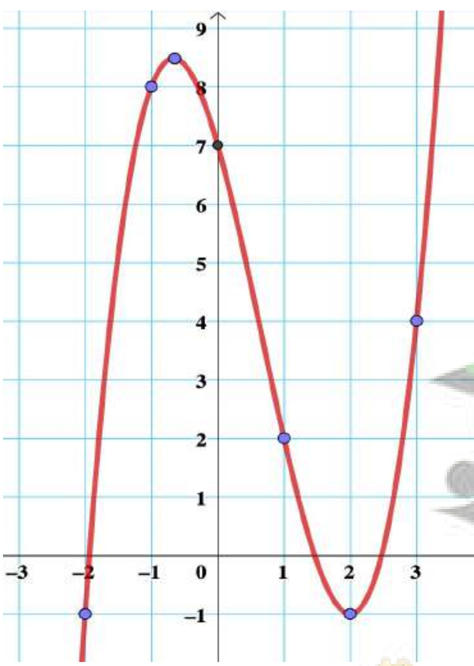
منحنى الدالة f مقعر ل:

أسفل في $\left(-\infty, \frac{-2}{3}\right)$

أعلى في $\left(\frac{-2}{3}, \infty\right)$

$\therefore$ نقطة انعطاف $\left(\frac{2}{3}, \frac{101}{27}\right)$

x	-1	$\frac{-2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	2	3
y	8	$\frac{101}{27}$	7	$\frac{229}{27}$	2	-1	4



4) $g(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5$

g كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

$\therefore$ g متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{4} = \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{4} = \infty$$

$g'(x) = x^3 - 4x, g'(x) = 0 \Rightarrow$

$x = 0, g(0) = 5$

$x = -2, g(-2) = 1$

$x = 2, g(2) = 1$

$\therefore$ $(0,5), (-2,1), (2,1)$ نقاط حرجة

	$-\infty$	-2	0	2	∞
إشارة g'	$-$	$+$	$-$	$+$	
سلوك g	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

g متزايدة على:

الفترة $(-2,0)$ والفترة $(2,\infty)$

g متناقصة على:

الفترة $(0,2)$ والفترة $(-\infty, -2)$

$g(0) = 5$ قيمة عظمى محلية

$g(-2) = 1$ قيمة صغرى محلية

$g(-2) = 1$ قيمة صغرى محلية

$g''(x) = 3x^2 - 4, g''(x) = 0 \Rightarrow$

$x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}, g\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{25}{9}$

$x = \frac{2\sqrt{3}}{3}, g\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{25}{9}$

	$-\infty$	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	∞
إشارة g''	$+$	$-$	$+$	
بيان g	$\cup$	$\cap$	$\cup$	

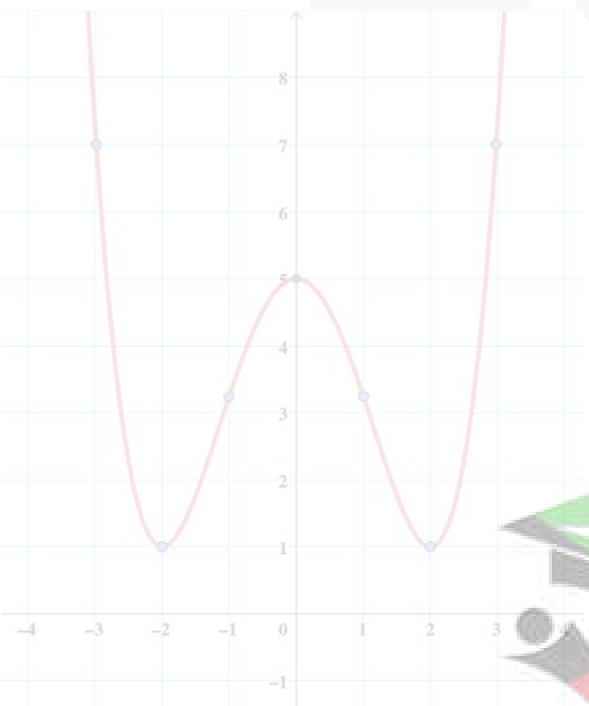
منحنى الدالة g مقعر لـ:

أعلى في كل من $\left(-\infty, \frac{-2\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$

أسفل في $\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

نقاط انعطاف $\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}, \frac{25}{9}\right), \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{25}{9}\right)$

x	-3	-2	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	-1	0	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	3
y	$\frac{29}{4}$	1	$\frac{25}{9}$	$\frac{13}{4}$	5	$\frac{13}{4}$	$\frac{25}{9}$	1	$\frac{29}{4}$



5) $h(x) = 8x^2 - x^4 - 8$

h كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$
$\therefore$ h متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} -x^4 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} -x^4 = -\infty$$

$h'(x) = 16x - 4x^3, h'(x) = 0$

$\Rightarrow 4x(4 - x^2) = 0$

$x = 0, h(0) = -8$

$x = -2, h(-2) = 8$

$x = 2, h(2) = 8$

نقاط حرجة $(0,-8), (-2,8), (2,8)$

x	$-\infty$	-2	0	2	∞
إشارة h'	+	−	+	−	
سلوك h	↗	↘	↗	↘	

h متزايدة على:
الفترة $(-\infty,-2)$ والفترة $(0,2)$

h متناقصة على:
الفترة $(-2,0)$ والفترة $(2,\infty)$

$h(0) = -8$ قيمة صغرى محلية
$h(-2) = 8$ قيمة عظمى محلية
$h(2) = 8$ قيمة عظمى محلية

$h''(x) = 16 - 12x^2, h''(x) = 0 \Rightarrow$

$x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}, h\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{8}{9}$

$x = \frac{2\sqrt{3}}{3}, h\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{8}{9}$

x	$-\infty$	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	∞
إشارة h''	−	+	−	
بيان h	∩	∪	∩	

منحنى الدالة h مقعر لـ :

أسفل في:
الفترة $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\infty\right)$ والفترة $\left(-\infty,\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)$
أعلى في الفترة $\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

نقاط انعطاف $\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3},\frac{8}{9}\right), \left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{8}{9}\right)$

x	-3	-2	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	-1	0	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	3
$h(x)$	-17	8	$\frac{8}{9}$	-1	-8	-1	$\frac{8}{9}$	8	-17

$f(x) = -x^3 - 3x$ (6

f كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$$

$f'(x) = -3x^2 - 3$

$f'(x) \neq 0$

لا يوجد حلول

بالتالي لا يوجد نقاط حرجة

	$-\infty$		∞
إشارة f'	$-$ $-$ $-$ $-$ $-$		
سلوك f	$\searrow$		

f متناقصة على $(-\infty,\infty)$

$f''(x) = -6x$, $f''(x) = 0 \Rightarrow$

$x = 0, f(0) = 0$

	$-\infty$	0	∞
إشارة f''	$+$		$-$
سلوك f	$\cup$		$\cap$

منحنى الدالة f مقعر لـ:

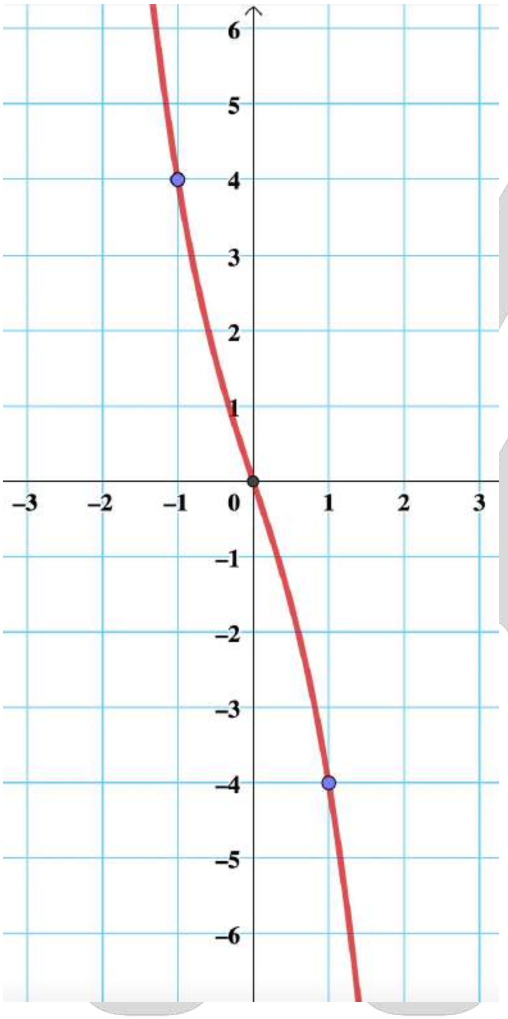
أعلى في $(-\infty,0)$

أسفل في $(0,\infty)$

$\therefore$ $(0,0)$ نقاط انعطاف

نقاط إضافية

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	14	4	0	-4	-14



تطبيقات القيم القصوى

1. مجموع عددين غير سالبين هو 20 أوجد العددين إذا كان

a) مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن

العدد الأول	العدد الثاني
x	$20-x$

$0<x<20$

$f(x)=(x)^2+(20-x)^2$

$f'(x)=2x+2(20-x)(-1)$

$=2x-40+2x=4x-40$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{40}{4}=10$

$10\in(0,20)$

$\therefore$ $(10\,,f(10))$ نقطة حرجة

$f''(x)=4\ ,4>0$

$\therefore$ $f(10)$ قيمة صغرى مطلقة

$\therefore$ العددان هما $10\,,10$ $20-10=10$

b) أحد العددين مضافا إليه الجذر التربيعي للآخر أكبر ما يمكن

العدد الأول	العدد الثاني
x	$20-x$

$0<x<20$

$f(x)=20-x+\sqrt{x}$

$f'(x)=-1+\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{-2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$

أصفار البسط:

$f'(x)=0$

$-2\sqrt{x}+1=0 \Rightarrow$

$\sqrt{x}=\frac{-1}{-2} \Rightarrow x=\frac{1}{4}\in(0,20)$

أصفار المقام:

$2\sqrt{x}=0 \Rightarrow x=0\notin(0,20)$

$\therefore$ $\left(\frac{1}{4}\,,f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ نقطة حرجة

	0	$\frac{1}{4}$	20
إشارة f'	$+$		$-$
سلوك f	$\nearrow$		$\searrow$

$\therefore$ $f\left(\frac{1}{4}\right)$ قيمة عظمى مطلقة

$\therefore$ العددان هما $\frac{1}{4}\,,\frac{79}{4}=20-\frac{1}{4}$

⚠ معلق

سؤال من المريخ:

2. ما أكبر مساحة ممكنة لمثلث قائم الزاوية وطول وتره يساوي 6cm. وما أبعاده ؟

$0 < x < 6$

$$A(x) = \frac{1}{2}\sqrt{36-x^2}.\,x = \frac{1}{2}x\ \ (36-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$A'(x) = \frac{1}{2}(36-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x\ \frac{1}{2}(36-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$$

$$= \frac{1}{2}(36-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^2(36-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{36-x^2} - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{\sqrt{36-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{36-x^2}}{1} - \frac{x^2}{\sqrt{36-x^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{36-x^2-x^2}{\sqrt{36-x^2}}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{36-2x^2}{\sqrt{36-x^2}}$$

أصفار البسط:

$A'(x) = 0$

$36 - 2x^2 = 0$

$x = 3\sqrt{2} \in (0\,,6)$

$x = -3\sqrt{2}\quad \notin (0\,,6)$ مرفوض

أصفار المقام:

$\sqrt{36-x^2} = 0$

$36 - x^2 = 0$

$x = -6\quad \notin (0\,,6)$ مرفوض

$x = \ 6\quad \notin (0\,,6)$ مرفوض

$\therefore$ $\left(3\sqrt{2}\,, A(3\sqrt{2})\right)$ نقطة حرجة

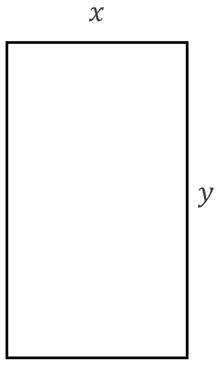
x	0	$3\sqrt{2}$	6
إشارة A'	$+$	0	$-$
سلوك الدالة A	$\nearrow$		$\searrow$

يوجد لـ A قيمة عظمى مطلقة عند $x = 3\sqrt{2}$

أكبر مساحة: $A(3\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ 3\sqrt{2}\left(36-(3\sqrt{2})^2\right)^{\frac{1}{2}} = 9cm^2$

الأبعاد $\sqrt{36-(3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}cm \quad , \quad x = 3\sqrt{2}cm$

3. أثبت أن من بين المستطيلات التي محيطها $8m$ واحدا منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعا ؟



محيط المستطيل $= y + y + x + x = 2x + 2y = 8$

مساحة المستطيل $= f(x) = xy = x.(4 - x) \Rightarrow$
$f(x) = 4x - x^2$

$f'(x) = 4 - 2x, f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{-4}{-2} = 2$

$\therefore$ $(2, f(2))$نقطة حرجة

$f''(x) = -2 \ , \quad -2 < 0$

$\Rightarrow \quad x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x \rightarrow (1)$

$\therefore$ يوجد f قيمة عظمى مطلقة عند $x = 2$

$\therefore$ أبعاد المستطيل 2,2

بالتالي الشكل مربع لأنه مستطيل بعداه متساويان

سؤال من المريخ:

4. يراد التخطيط لغلق ركن في الربع الأول من المستوي الإحداثي بقطعة مستقيمة طولها 20 وحدة طول نبدأ العمل لغلق الركن من نقطة $(a,0)$ إلى نقطة $(0,b)$ المطلوب : أثبت أن مساحة المثلث الذي تحده القطعة المستقيمة يكون أكبر ما يمكن عندما $a = b$

$$b = \sqrt{20^2 - a^2} \quad 0 < a < 20$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} a \cdot \sqrt{400 - a^2}$$

$$= \frac{1}{2} a \, (400 - a^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$A' = \frac{1}{2} \cdot (400 - a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a \frac{1}{2} (400 - a^2)^{\frac{-1}{2}} (-2a)$$

$$A' = \frac{1}{2} \cdot (400 - a^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} a^2 (400 - a^2)^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sqrt{400 - a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{400 - a^2}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{400 - 2a^2}{\sqrt{400 - a^2}} \right] = 0$$

أصفار البسط:

$A' = 0$

$a = 10\sqrt{2} \in (0 , 20)$

$400 - 2a^2 = 0$

$a = -10\sqrt{2} \notin (0 , 20)$

معلق

أصفار المقام:

$\sqrt{400 - a^2} = 0$

$400 - a^2 = 0$

$a = -20 \notin (0 , 20)$ مرفوض

$a = 20 \notin (0 , 20)$ مرفوض

$\therefore$ $\left(10\sqrt{2} , A(10\sqrt{2})\right)$ نقطة حرجة

a	0	$10\sqrt{2}$	20
A' إشارة	+	0	−
A سلوك الدالة	↗		↘

يوجد لـ A قيمة عظمى مطلقة $a = 10\sqrt{2}$

$$\boxed{b = \sqrt{20^2 - a^2} = \sqrt{400 - (10\sqrt{2})^2} = 10\sqrt{2}}$$

إذا $a = b$

5. مزرعة على شكل قطعة مستطيلة من الأرض تقع على حافة نهر مستقيم يراد وضع سياج على الجوانب الثلاثة الأخرى، ما أكبر مساحة يمكن إحاطتها بسياج طوله $800m$ ؟ وما أبعادها؟

المساحة = الطول × العرض $\quad 0 < x < 400$

$f(x) = x(800 - 2x) = 800x - 2x^2$

$f'(x) = 800 - 4x$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{-800}{-4} = 200 \qquad \therefore (200\,, f(200))$ نقطة حرجة

$f''(x) = -4 \quad , -4 < 0$

$\therefore$ يوجد لـ f قيمة عظمى عندما $x = 200$

الأبعاد هي $200m \quad , \quad 800 - 2(200) = 400m$

أكبر مساحة $= f(200) = -2(200)^2 + 800(200) = 80000\ m^2$

6. يراد تصميم خزان حديدي لأحد المصانع على شكل شبه مكعب، قاعدته مربعه ومفتوح من أعلى وحجمه $500m^3$. لصنع الخزان يتم وصل ألواح الحديد مع بعضها من أطرافها أوجد أبعاد القاعدة والارتفاع التي تجعل وزن الخزان أقل ما يمكن

الحجم $V = x^2y = 500 \Longrightarrow y = \dfrac{500}{x^2}$ $\qquad x > 0\,, y > 0$

المساحة $A = x^2 + 4(xy)$

$A(x) = x^2 + 4x\dfrac{500}{x^2} = x^2 + \dfrac{2000}{x}$

$A'(x) = 2x + \dfrac{-2000}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 2000}{x^2}$

أصفار البسط:

$A'(x) = 0$

$2x^3 - 2000 = 0 \Rightarrow x^3 = 1000$

$x = \sqrt[3]{1000} = 10 \in (0, \infty)$

أصفار المقام:

$x^2 = 0 \Rightarrow$
$x = 0 \notin (0\,, \infty)$ مرفوض

$\therefore (10\,, A(10))$ نقطة حرجة

x	0	10	∞
إشارة A'	−	0	+
سلوك الدالة A	↘		↗

$\therefore$ يوجد لـ A قيمة صغرى مطلقة عند $x = 10$ $\qquad y = \dfrac{500}{10^2} = 5$

$\therefore$ أبعاد القاعدة هي: $10cm \ , 10cm$

الارتفاع : $5cm$

7. ضلعان في مثلث طولاهما a,b والزاوية بينهما θ المطلوب: ما قيمة θ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن؟ (إرشاد : مساحة المثلث $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$)

$$A(\theta)=\frac{1}{2}ab\ \sin\theta \qquad 0<\theta<180$$

$$A'(\theta)=\frac{1}{2}ab\ \cos\theta=0$$

$$A'(\theta)=0\ \Rightarrow \cos\theta=0 \Rightarrow \theta=\cos^{-1}(0)=90° \rightarrow$$ قيمة حرجة

$$A''(\theta)=\frac{-1}{2}ab\ \ \sin\theta$$

$$A''(90°)=\frac{-1}{2}ab\ \sin(90°) \qquad =-\frac{1}{2}ab<0$$

∴ يوجد للمساحة A قيمة عظمى مطلقة عند $\theta=90°$

8. علبة من الصفيح على شكل أسطوانة قائمة مفتوحة من أعلى حجمها $1000\ cm^3$ أوجد أبعاد العلبة بحيث يكون وزنها أقل ما يمكن

$$v=\pi r^2h=1000\rightarrow h=\frac{1000}{\pi r^2} \qquad r>0\ ,h>0$$

$$A=2\pi rh+\pi r^2=2\pi r\frac{1000}{\pi r^2}+\pi r^2=\frac{2000}{r}+\pi r^2$$

$$A'=\frac{-2000}{r^2}+2\pi r=\frac{-2000+2\pi r^3}{r^2}$$

أصفار البسط: $A'=0$ أصفار المقام:

$-2000+2\pi r^3=0$ مرفوض $r^2=0\ \Rightarrow r=0$

$$r^3=\frac{2000}{2\pi}=\frac{1000}{\pi}$$

$$r=\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}\approx 6.83\rightarrow$$ قيمة حرجة

r	0	6.83	∞
A' إشارة	−	0	+
A سلوك الدالة	↘		↗

∴ يوجد لـ A قيمة صغرى مطلقة عند $r=6.83\ cm$

$$h=\frac{1000}{\pi(6.83)^2}=6.82\ cm$$

سؤال من المريخ:

9. أوجد أكبر حجم لمخروط دائري قائم داخل كرة نصف قطرها $3m$

$0 < x < 3$

$h = 3 + x$

$r = \sqrt{3^2 - x^2} = \sqrt{9 - x^2}$

h ارتفاع المخروط

r نصف قطر قاعدة المخروط

معلق

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\sqrt{9 - x^2}\right)^2 (3 + x) \Rightarrow$$

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi(9 - x^2)(3 + x) = \frac{1}{3}\pi(-x^3 - 3x^2 + 9x + 27)$$

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi(-3x^2 - 6x + 9) = \pi(-x^2 - 2x + 3)$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \in (0,3) \,, x = -3 \notin (0,3)$$

$\therefore$ $(1 , V(1))$ نقطة حرجة

$$V''(x) = \pi(-2x - 2)$$

$$V''(1) = \pi(-2(1) - 2) = -4\pi \qquad , -4\pi < 0$$

$\therefore$ يوجد لـ V قيمة عظمى مطلقة عند $x = 1$

$\therefore$ أكبر حجم هو:

$$V(1) = \frac{1}{3}\pi\left(-(1)^3 - 3(1)^2 + 9(1) + 27\right) = \frac{32}{3}\pi \ m^3$$

10. ما أقصر بعد للنقطة $(\frac{3}{2},0)$ عن منحى الدالة : $y=\sqrt{x}$ ؟

$(x\,,y)$ $\qquad$ $0<x<\infty$

$y=\sqrt{x}$

$y^2=x$

$$f(x)=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-0)^2}$$

$$=\sqrt{x^2-3x+\frac{9}{4}+x}=\left(x^2-3x+\frac{9}{4}+x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-2x+\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}(2x-2)\;,=\frac{1}{2}\frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}}$$

$$=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}}$$

أصفار البسط

$f'(x)=0\Rightarrow$

$x-1=0\Rightarrow\quad x=1$

$\therefore$ $(1\,,f(1))$ نقطة حرجة

أصفار المقام

$$\sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}=0\Rightarrow$$

$$x^2-2x+\frac{9}{4}=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$=(-2)^2-4\times1\times\frac{9}{4}$$

$$=-5<0$$

لا يوجد حل

x	0	1	∞
f' إشارة	$-$	0	$+$
f سلوك الدالة	↘		↗

$\therefore$ يوجد لـ f قيمة صغرى مطلقة عندما $x=1$

أصغر مسافة= $f(1)=\left(1^2-2(1)+\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ units

التقدير

1. أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\propto}{2}}$ لكل من درجات الثقة التالية، وذلك باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

معلق

ⓐ 97% $\frac{0.97}{2} = 0.485 \rightarrow Z_{\frac{\propto}{2}} = 2.17$

ⓑ 99.2% $\frac{0.992}{2} = 0.496 \rightarrow Z_{\frac{\propto}{2}} = 2.65$

2. قامت شركة عالمية بدراسة لمعرفة مدي أداء سيارتها، فأخذت عينة من 1000 سيارة. استنتجت أن المتوسط الحسابي لبقاء السيارة في حالة جيدة هو 5 سنوات. أوجد فترة الثقة للمعلمة μ عند درجة ثقة 95% ، علماً أن التباين σ^2 معلوم ويساوي 0.25 وآخذاً بالاعتبار أن المجتمع يتبع توزيعاً طبيعياً.

$n = 1000$

$\sigma = \sqrt{0.25} = 0.5$

$\bar{x} = 5$

① ∵ مستوى الثقة 95% $\therefore \quad Z_{\frac{\propto}{2}} = 1.96$

σ معلومة

$E = Z_{\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$= 1.96 \times \frac{0.5}{\sqrt{1000}} \approx 0.03$

② فترة الثقة $(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$

$(5 - 0.03 , \quad 5 + 0.03)$

$(4.97, \quad 5.03)$

3. عينة عشوائية حجمها $n = 13$ ، أعطت $\bar{x} = 30$, $\sigma = 3.5$. أوجد فترة الثقة عند درجة ثقة 95% لمعلمة المجتمع μ المجهولة علماً أن المجتمع يتبع توزيعاً طبيعياً. هل تتضمن هذه الفترة المتوسط الحسابي μ ؟

$n = 13$

$\sigma = 3.5$

$\bar{x} = 30$

① ∵ مستوى الثقة 95% $\therefore \quad Z_{\frac{\propto}{2}} = 1.96$

σ معلومة

$E = Z_{\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$= 1.96 \times \frac{3.5}{\sqrt{13}} \approx 1.9$

② فترة الثقة $(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$

$(30 - 1.9 , \quad 30 + 1.9)$

$(28.1 , \quad 31.9)$

③ التفسير

عند اختيار 100 عينة حجم كل منها $n = 13$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحتوي علي μ

4. إذا كان المتوسط الحسابي لعينة من 40 شخصاً هو $\bar{x} = 172.5$ والانحراف المعياري $\sigma = 119.5$ فأوجد تقديراً لفترة ثقة عند درجة ثقة 95% للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.

$n = 40$
$\sigma = 119.5$
$\bar{x} = 172.5$

① ∵ مستوى الثقة 95% $\therefore \quad Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

σ معلومة

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$= 1.96 \times \frac{119.5}{\sqrt{40}} \approx 37.0334$$

② فترة الثقة $(\bar{x} - E , \bar{x} + E)$

$$(172.5 - 37.0338 \;, 172.5 + 37.0338)$$

$$(135.4666 \;,\; 209.5334)$$

5. في دراسة للمدة الزمنية المطلوبة من طلاب جامعيين لإنهاء دراستهم، اختير عشوائياً 80 طالباً ، فكان متوسط السنوات لهذه العينة S=2.2 .أوجد فترة الثقة عند درجة ثقة 95% لمعلمة المجتمع μ .

$n = 80$
$\bar{x} = 4.8$
$s = 2.2$
95%

① ∵ مستوى الثقة 95% $\therefore \quad Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

σ غير معلومة ، $n > 30$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$= 1.96 \times \frac{2.2}{\sqrt{80}} \approx 0.48$$

② فترة الثقة $(\bar{x} - E , \bar{x} + E)$

$$(4.8 - 0.48 \;, 4.8 + 0.48)$$

$$(4.32 \;,\; 5.28)$$

6. عينة عشوائية حجمها $n = 16$ أخذت من مجتمع إحصائي حيث التباين $s^2 = 15$ ، وعلم أن المتوسط الحسابي $\bar{x} = 13$ أوجد فترة الثقة للمعلمة المجهولة μ عند درجة ثقة 95% .

① ∵ مستوى الثقة 95%

σ غير معلومة $n \leq 30$ ،

نستخدم t

$a = 0.05$ ، $\frac{a}{2} = 0.025$

درجة الحرية $n - 1 = 15$

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.132$$

$$s = \sqrt{15}$$

$$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.132 \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{16}} \approx 2.0643$$

② فترة الثقة $(\bar{x} - E , \bar{x} + E)$

$$(13 - 2.0643 \;, 13 + 2.0643)$$
$$(10.9357 \;,\; 15.0643)$$

اختبارات الفروض الإحصائية

1. يزعم أستاذ الرياضيات أن المتوسط الحسابي لدرجات الطلاب في مادته هو 16 حيث النهاية العظمي 20 درجة. إذا أعطيت عينة من 25 طالباً متوسطاً حسابياً (درجة) $\bar{x} = 15$ والانحراف المعياري (درجة) $\sigma = 1.4$ ، فاختبر فرضية الأستاذ عند مستوى المعنوية $a = 5\%$.

① صياغة الفروض
$H_0 \quad \mu = 16$
$H_1 \quad \mu \neq 16$

② معلومة
$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{15 - 16}{\frac{1.4}{\sqrt{25}}} \approx -3.57$$

③ مستوى الثقة 95%
$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

④ منطقة القبول
$$(-1.96\,, 1.96)$$

⑤ $-3.57 \notin (-1.96\,, 1.96)$ نقبل $H_1 \quad \mu \neq 16$

2. يزعم مسؤول في متجر لبيع الأدوات الكهربائية، أن متوسط أسعار هو 300 دينار أعطت عينة من 49 آلة (دينار) $\bar{x} = 280$ والانحراف المعياري معلوم (دينار) $\sigma = 40$ ، تأكد من فرضية المسؤول عند مستوى المعنوية $a = 5\%$.

① صياغة الفروض
$H_0 \quad \mu = 300$
$H_1 \quad \mu \neq 300$

② معلومة
$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{280 - 300}{\frac{40}{\sqrt{49}}} \approx -3.5$$

③ مستوى الثقة 95%
$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

④ منطقة القبول
$$(-1.96\,, 1.96)$$

⑤ $-3.5 \notin (-1.96\,, 1.96)$ نقبل $H_1 \quad \mu \neq 300$

3. في عينة من مجتمع إحصائي إذا كانت قيمة $\bar{x} = 40$ والانحراف المعياري $s = 7$ ، اختبر الفرض البديل $\mu \neq 35$ عند مستوى المعنوية 0.05 في الحالات التالية.

ⓐ حجم العينة $n = 50$

① صياغة الفروض $H_0 \quad \mu = 35$ ، $H_1 \quad \mu \neq 35$

② غير معلومة $n > 30$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{40 - 35}{\frac{7}{\sqrt{50}}} \approx 5.0508$$

③ مستوى الثقة 95% $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

④ منطقة القبول $(-1.96\,, 1.96)$

⑤ $5.0508 \notin (-1.96\,,1.96)$ نقبل $H_1 \quad \mu \neq 35$

ⓑ حجم العينة $n = 20$

① صياغة الفروض $H_0 \quad \mu = 35$ ، $H_1 \quad \mu \neq 35$

② غير معلومة $n \leq 30$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{40 - 35}{\frac{7}{\sqrt{20}}} \approx 3.1944$$

③ مستوى الثقة 95% $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.093$

④ منطقة القبول $(-2.093\,, 2.093)$

⑤ $3.1944 \notin (-2.262\,, 2.062)$ نقبل $H_1 \quad \mu \neq 35$

4. في دراسة لعدد ساعات استخدام الحاسوب، أخذت عينة من 100 شخص يعملون في مختلف المجالات، فوجد أن المتوسط الحسابي لعدد ساعات استخدام الحاسوب هو $\bar{x} = 4.5$ ، والانحراف المعياري $s = 1$.
اختبر الفرض إذا كان متوسط عدد الساعات للمجتمع هو $\mu = 5$ مقابل الفرض البديل $\mu \neq 5$ عند مستوى المعنوية $\propto = 5\%$.

① صياغة الفروض $H_0 \quad \mu = 5$ ، $H_1 \quad \mu \neq 5$

② غير معلومة $n > 30$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{4.5 - 5}{\frac{1}{\sqrt{100}}} = -5$$

③ مستوى الثقة 95% $Z_{\frac{\propto}{2}} = 1.96$

④ منطقة القبول $(-1.96\,, 1.96)$

⑤ $-5 \notin (-1.96\,,1.96)$ $\therefore$ نقبل $H_1 \quad \mu \neq 5$

5. أخذت عينة عشوائية من مجتمع قيد الدراسة حجمها $n = 150$ ، فوجد أن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 30.3$ مع انحراف معياري $s = 6.5$. اختبر الفرض إذا كان المتوسط الحسابي للمجتمع هو $\mu = 30$ ، مقابل الفرض البديل $\mu \neq 30$ عند مستوى المعنوية $\propto = 5\%$.

① صياغة الفروض $H_0 \quad \mu = 30$ ، $H_1 \quad \mu \neq 30$

② غير معلومة $n > 30$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{30.3 - 30}{\frac{6.5}{\sqrt{150}}} \approx 0.565$$

③ مستوى الثقة 95% $Z_{\frac{\propto}{2}} = 1.96$

④ منطقة القبول $(-1.96\,, 1.96)$

⑤ $0.565 \in (-1.96\,,1.96)$ $\therefore$ نقبل $H_0 \quad \mu = 30$

6. المتوسط الحسابي للراتب السنوي لموظف حكومي في دولة الكويت هو 9600 دينار، أما المتوسط الحسابي لعينة من 64 موظفاً حكومياً في إحدى الدول الخليجية المجاورة (دينار) $\bar{x} = 9480$ مع انحراف معياري (دينار) s=640 . اختبر إذا كان بالإمكان اعتبار الراتب السنوي في إحدى الدول الخليجية المجاورة للموظف الحكومي هو الراتب ذاته الذي يحصل عليه الموظف الحكومي في الكويت، مستخدماً درجة الثقة 95% .

① صياغة الفروض $H_0 \quad \mu = 9600$ ، $H_1 \quad \mu \neq 9600$

② غير معلومة $n > 30$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{9480 - 9600}{\frac{640}{\sqrt{64}}} = 1.5$$

③ مستوى الثقة 95% $Z_{\frac{\propto}{2}} = 1.96$

④ منطقة القبول $(-1.96\,, 1.96)$

⑤ $\because -1.5 \in (-1.96\,,1.96)$ $\therefore$ نقبل $H_0 \quad \mu = 9600$