الرياضيات

الكورس الأول

12

UULA.COM 2023-2022

UULA

الـريـاضـيـات

الكورس الأول

12

المعلق

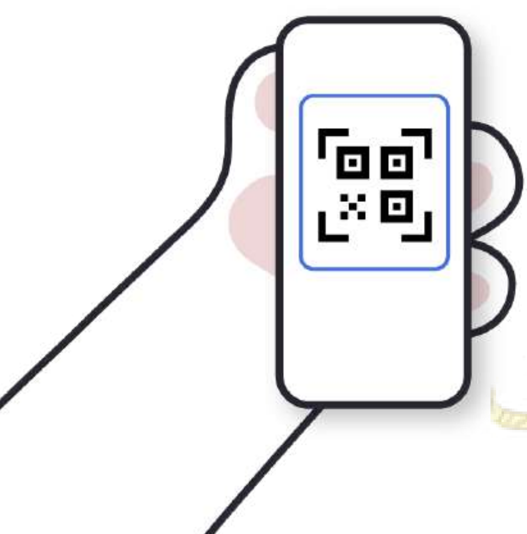
هذه المذكرة تغطي المادة كاملة.

في حال وجود أي تغيير للمنهج أو تعليق جزء منه يمكنكم مسح رمز QR للتأكد من المقرر.

المنقذ

أول ما تحتاج مساعدة بالمادة ، المنقذ موجود!

صور الQR بكاميرا التلفون أو اضغط عليه إذا كنت تستخدم المذكرة من جهازك و يطلع لك فيديو يشرح لك.



قائمة المحتوى

النهايات

النهايات

تعريف 1 لتكن x كمية متغيرة, c عدداً حقيقياً , نقول أن x تقترب من c باطراد، إذا كان بالإمكان جعل الكمية $|x-c|$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب

تعريف 2 ليكن c , L عددين حقيقيين ، f دالة حقيقية معرفة في جوار أو جوار ناقص للعدد c نكتب : $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$ تعني أنه عندما تقترب x من c باطراد، $x\neq c$ فإنه قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L

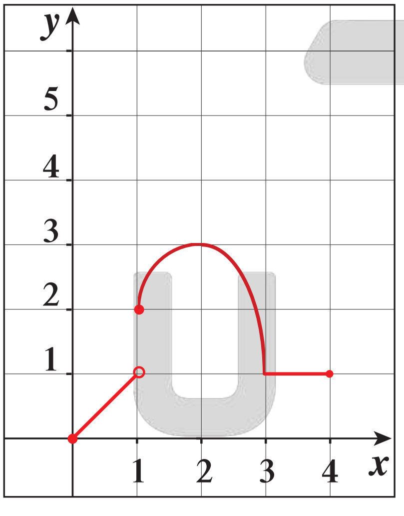
النهاية من جهة واحدة أو من جهتين :

نظرية 1

$$\lim_{x\to c} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to c^+} f(x)=L=\lim_{x\to c^-} f(x)$$

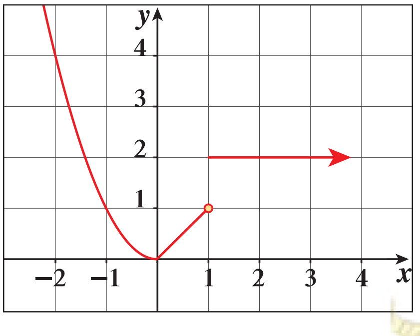
الشكل المقابل يمثل بيان الدالة $f(x)$ أكمل ما يلي :

$f:[0,4]\to\mathbb{R}$

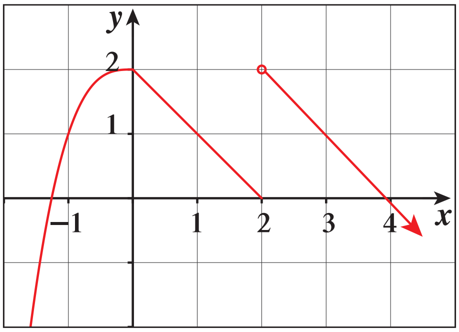


- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=$ 2
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=$ 1
- $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=$ 3
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=$ 3
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=$ 3
- $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=$ 1
- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=$ 1
- $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=$ 1
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=$ 0
- $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=$ 1

1. الشكل المقابل يمثل بيان الدالة $f(x)$ أوجد إن أمكن:



- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$ 0
- $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=$ 2
- $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=$ 4



الشكل المقابل يمثل بيان الدالة $f(x)$ أ وجد إن أمكن :

- $\lim_{x\to -1} f(x) =$ 1
- $\lim_{x\to 0} f(x) =$ 2
- $\lim_{x\to 2} f(x) =$ غير موجودة
- $\lim_{x\to 3} f(x) =$ 1

حساب النهايات:

نظرية 2

إذا كانت $f(x) = k$ دالة وكان c,k عددين حقيقيين فإن:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} k = k$$

نظرية 3

إذا كانت $f(x) = x$ دالة وكان c عدداً حقيقياً فإن:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} x = c$$

نظرية 4

إذا كانت: $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة و $\lim_{x\to c} g(x)$ موجودة فإن:

$$\lim_{x\to c}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$$

$$\lim_{x\to c}\left(f(x)\times g(x)\right) = \lim_{x\to c} f(x)\times \lim_{x\to c} g(x)$$

$$\lim_{x\to c}\left(k.\, g(x)\right) = k.\ \lim_{x\to c} g(x)$$

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} \quad : \lim_{x\to c} g(x) \neq 0$$

2) بفرض : $\lim_{x\to 1} g(x) = 5$, $\lim_{x\to 1} f(x) = -2$ أوجد :

- $\lim_{x\to 1}\left(f(x) - g(x)\right)$

$$\lim_{x\to 1} f(x) - \lim_{x\to 1} g(x) = (-2) - (5) = -7$$

- $\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)}{g(x)}$

نهاية البسط: $\lim_{x\to 1}\left(2f(x)\right) = 2\lim_{x\to 1} f(x) = 2(-2) = -4$

نهاية المقام: $\lim_{x\to 1} g(x) = 5$, $5 \neq 0$

$$= \frac{\lim_{x\to 1}\left(2f(x)\right)}{\lim_{x\to 1} g(x)} = \frac{-4}{5}$$

- $\lim_{x\to1} \frac{g(x)+4}{f(x).g(x)}$

$= \frac{\lim_{x\to1}(g(x)+4)}{\lim_{x\to1}(f(x).g(x))}$

$= \frac{9}{-10} = -\frac{9}{10}$

نهاية البسط: $\lim_{x\to1}(g(x)+4) = \lim_{x\to1} g(x) + \lim_{x\to1} 4$
$= 5+4 = 9$

نهاية المقام: $\lim_{x\to1}(f(x).g(x)) =$

$\lim_{x\to1} f(x) . \lim_{x\to1} g(x) = (-2)\times(5) = -10 \,, -10 \neq 0$

- بفرض : $\lim_{x\to2} g(x) = -3$, $\lim_{x\to2} f(x) = 7$ أوجد :

Q $\lim_{x\to2}(f(x)+g(x)) =$ $\lim_{x\to2} f(x) + \lim_{x\to2} g(x) \quad = 7+(-3) = 4$

Q $\lim_{x\to2}(f(x)\cdot g(x)) =$ $\lim_{x\to2} f(x) \cdot \lim_{x\to2} g(x) \quad = (7)\times(-3) = -21$

Q $\lim_{x\to2}\left(\frac{8f(x)\cdot g(x)}{f(x)+g(x)}\right)$

$= \frac{\lim_{x\to2}(8f(x)\cdot g(x))}{\lim_{x\to2}(f(x)+g(x))}$

$= \frac{-168}{4} = -42$

نهاية البسط: $\lim_{x\to2}(8f(x)\cdot g(x)) =$
$8\lim_{x\to2} f(x) \cdot \lim_{x\to2} g(x) = 8\times7\times(-3) = -168$

نهاية المقام: $\lim_{x\to2}(f(x) + g(x)) =$

$\lim_{x\to2} f(x) + \lim_{x\to2} g(x) = 7+(-3) = 4 \,, 4 \neq 0$

نظرية 5 إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة حدود ، c عدداً حقيقياً فإن:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

إذا كانت $g(x)$, $f(x)$ كثيرتي حدود ، c عدداً حقيقياً فإن:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} \quad , g(c) \neq 0$$

3) أوجد :

- $\lim_{x\to-1}(x^4 - 2x^3 + 5)$ $= (-1)^4 - 2(-1)^3 + 5 = 8$

- $\lim_{x\to2} \frac{x^2+2x+4}{x+2}$ $= \frac{(2)^2+2(2)+4}{4} = 3$

المقام $g(x) = x+2$

$g(2) = (2)+2 = 4, \quad 4 \neq 0$

- $\lim_{x\to 3}(x^2(2-x))$ $= \lim_{x\to 3}(2x^2 - x^3) = 2(3)^2 - (3)^3 = -9$

- أوجد :

$\lim_{x\to 1}(x^3 + 3x^2 - 2x - 17)$ $= (1)^3 + 3(1)^2 - 2(1) - 17 = -15$

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x+6}{x+2}$ $= \frac{(2)^2 + 5(2) + 6}{4} = 5$

المقام $h(x) = x + 2$

$h(2) = (2) + 2 = 4, \quad 4 \neq 0$

حساب النهايات من جهة واحدة:

4) أوجد إن أمكن: $\lim_{x\to 1} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & : x < 1 \\ 5 & : x = 1 \\ \frac{5}{x} & : x > 1 \end{cases}$$

$3x+2$ 1 $\frac{5}{x}$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) =$

$= \lim_{x\to 1^-}(3x+2)$

$= 3(1) + 2 = 5$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) =$

$\lim_{x\to 1^+}\frac{5}{x} = \frac{5}{1} = 5$

نهاية المقام $\lim_{x\to 1^+} x = 1 \quad , \quad 1 \neq 0$

$\because \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 5 \quad \therefore \lim_{x\to 1} f(x) = 5$

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & : x < 2 \\ x - 1 & : x > 2 \end{cases}$ أوجد إن أمكن $\lim_{x\to 2} f(x)$:

$x^2 - 3$ 2 $x - 1$

$\lim_{x\to 2^-} f(x)$

$= \lim_{x\to 2^-}(x^2 - 3)$

$= 2^2 - 3 = 1$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)$

$= \lim_{x\to 2^+}(x - 1)$

$= 2 - 1 = 1$

$\because \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 1 \quad \therefore \lim_{x\to 2} f(x) = 1$

5) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & : x \le 0 \\ 1 - 2x & : x > 0 \end{cases}$ أوجد إن أمكن $\lim_{x\to0} g(x)$:

$x^2 - 2$ | 0 | $1 - 2x$

$\lim_{x\to0^-} g(x)$
$= \lim_{x\to0^-} (x^2 - 2)$
$= 0^2 - 2 = -2$

$\lim_{x\to0^+} g(x)$
$= \lim_{x\to0^+} (1 - 2x)$
$= 1 - 2(0) = 1$

$\because \lim_{x\to0^-} g(x) \ne \lim_{x\to0^+} g(x) \quad \therefore \lim_{x\to0} g(x)$ غير موجودة

▪ $g(x) = \begin{cases} x^3 + x & : x > 1 \\ \frac{x}{x^2+1} & : x \le 1 \end{cases}$ أوجد إن أمكن $\lim_{x\to1} g(x)$:

$\frac{x}{x^2+1}$ | 1 | $x^3 + x$

$\lim_{x\to1^-} g(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$

نهاية المقام:

$\lim_{x\to1^-} (x^2 + 1) = 2, \quad 2 \ne 0$

$\lim_{x\to1^+} g(x) = \lim_{x\to1^+} (x^3 + x)$
$= (1)^3 + 1 = 2$

$\because \lim_{x\to1^+} g(x) \ne \lim_{x\to1^-} g(x) \quad \therefore \lim_{x\to1} g(x)$ غير موجودة

تذكر: إعادة تعريف القيمة المطلقة

- $|x| = \begin{cases} x & : x \ge 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$
- $|x-8| = \begin{cases} x - 8 & : x \ge 8 \\ -x + 8 & : x < 8 \end{cases}$
- $|2x+6| = \begin{cases} 2x + 6 & : x \ge -3 \\ -2x - 6 & : x < -3 \end{cases}$

نهايات دوال تحتوي على قيمة مطلقة:

6. لتكن الدالة : $f(x) = |x-3| + 2x$

- اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة
- أوجد $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$
- هل للدالة f نهاية عندما $x \to 3$ ؟

$$f(x) = \begin{cases} x-3+2x & : x \ge 3 \\ -x+3+2x & : x < 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3x-3 & : x \ge 3 \\ x+3 & : x < 3 \end{cases}$$

3

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x+3)$$
$$= 3+3 = 6$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (3x-3)$$
$$= 3(3)-3 = 6$$

$$\because \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = 6 \quad \therefore \lim_{x\to 3} f(x) = 6$$

- لتكن الدالة: $f(x) = x^2 - |x+2|$
- اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة
- أوجد $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$
- هل للدالة f نهاية عندما $x \to -2$ ؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2-(x+2) & : x \ge -2 \\ x^2-(-x-2) & : x < -2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2-x-2 & : x \ge -2 \\ x^2+x+2 & : x < -2 \end{cases}$$

x^2+x+2 $\qquad$ x^2-x-2

-2

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} (x^2+x+2)$$
$$= (-2)^2 + (-2) + 2 = 4$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} (x^2-x-2)$$
$$= (-2)^2 - (-2) - 2 = 4$$

$$\because \lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^-} f(x) = 4 \quad \therefore \lim_{x\to -2} f(x) = 4$$

نظرية 6 : بفرض $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة ، n عدداً صحيحاً موجباً

$$\lim_{x\to c}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim_{x\to c} f(x)\right)^n$$

$$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{c}$$ في حالة n عدد زوجي يشترط أن يكون $c>0$

$$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$$ في حالة n عدد زوجي يشترط أن يكون $\lim\limits_{x\to c} f(x)>0$

7. أوجد :

$\lim\limits_{x\to -1}(x^2-3x-1)^5$ $=\left(\lim\limits_{x\to -1}(x^2-3x-1)\right)^5$

$=\left((-1)^2-3(-1)-1\right)^5=243$

$\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{x-3}$ $=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}=\sqrt[3]{(2-3)}=-1$

أوجد :

$\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x^2-5}$ $=\sqrt{\lim\limits_{x\to 5}(x^2-5)}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

شرط الجذر: $\lim\limits_{x\to 5}(x^2-5)=(5)^2-5=20,\quad 20>0$

$\lim\limits_{x\to 4}(x+\sqrt{x})^4$ $=\left(\lim\limits_{x\to 4}x+\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}\right)^4=(4+\sqrt{4})^4=1296$

شرط الجذر: $4>0$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x^2-2}}{x-2}$

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{3x^2-2}}{\lim\limits_{x\to 3}(x-2)}$

$=\dfrac{5}{1}=5$

شرط الجذر: $\lim\limits_{x\to 3}(3x^2-2)=3(3)^2-2=25,\ 25>0$

نهاية البسط: $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{3x^2-2}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}(3x^2-2)}=\sqrt{25}=5$

نهاية المقام: $\lim\limits_{x\to 3}(x-2)=3-2=1,\quad 1\neq 0$

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-4x+5}}{x-2}$

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to -1}\sqrt[3]{x^3-4x+5}}{\lim\limits_{x\to -1}(x-2)}$

$=-\dfrac{2}{3}$

نهاية البسط: $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt[3]{x^3-4x+5}$

$=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to -1}(x^3-4x+5)}=\sqrt[3]{(-1)^3-4(-1)+5}=2$

نهاية المقام: $\lim\limits_{x\to -1}(x-2)=(-1)-2=-3:\ -3\neq 0$

إلغاء العامل الصفري في المقام

مراجعة مهمة جداً: تحليل كثيرات الحدود من الدرجة الثانية:

$ax^2 + bx + c$

- $x^2 + x - 2 \quad = (x-1)(x+2)$
- $x^2 + 3x + 2 \quad = (x+1)(x+2)$
- $t^2 - 3t + 2 \quad = (t-2)(t-1)$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

- $x^2 - 4 \quad = (x-2)(x+2)$
- $x^2 - 25 \quad = (x-5)(x+5)$
- $x^2 - 1 \quad = (x-1)(x+1)$

إخراج عامل مشترك

- $x^2 - x \quad = x(x-1)$
- $x^2 + 7x \quad = x(x+7)$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

- $(x+3)^2 \quad = (x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2 \quad = x^2 + 6x + 9$
- $(x-5)^2 \quad = (x)^2 - 2(x)(5) + (5)^2 \quad = x^2 - 10x + 25$

إلغاء العامل الصفري في المقام

8. أوجد :

- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$

بالتعويض عن $x = 1$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \frac{\overset{(1)}{\cancel{(x-1)}}(x+2)}{x\cancel{(x-1)}} = \frac{x+2}{x} \qquad : x \neq 1$$

نهاية المقام:

$\lim\limits_{x\to 1} x = 1, \quad 1 \neq 0$

$$\therefore \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = 3$$

- $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

بالتعويض عن $x = -2$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2-4} = \frac{(x+1)\cancelto{1}{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}} = \frac{x+1}{x-2} \qquad : x \neq -2$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+3x+2}{x^2-4} = \lim_{x \to -2} \frac{x+1}{x-2} = \frac{(-2)+1}{-4} = \frac{1}{4}$$

نهاية المقام $\lim\limits_{x \to -2} (x-2)$
$= (-2) - 2 = -4 :\ -4 \neq 0$

💡 **تمارين مشابهة من الكراسة**

12. $\lim\limits_{t \to 2} \frac{t^2-3t+2}{t^2-4}$

8) أوجد :

- $\lim\limits_{x \to -7} \frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x}$

بالتعويض المباشر عن $x = -7$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$\frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x} = \frac{(x+4)^2-3^2}{x^2+7x} = \frac{(x+4-3)(x+4+3)}{x(x+7)}$$

$$= \frac{(x+1)\cancelto{(1)}{(x+7)}}{x\cancel{(x+7)}} = \frac{x+1}{x} \qquad : x \neq -7$$

$$\lim_{x \to -7} \frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x} = \lim_{x \to -7} \frac{x+1}{x} = \frac{(-7)+1}{-7} = \frac{6}{7}$$

نهاية المقام:

$\lim\limits_{x \to -7} x = -7 \quad , -7 \neq 0$

💡 **ملاحظة:**

يمكن إلغاء العامل الصفري وفق الطريقة التالية:

$$\frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x} = \frac{x^2+8x+16-9}{x^2+7x} = \frac{x^2+8x+7}{x^2+7x} = \frac{(x+1)\cancelto{(1)}{(x+7)}}{x\cancel{(x+7)}} \qquad : x \neq -7$$

$$= \frac{x+1}{x}$$

💡 **تمارين مشابهة من الكراسة**

11. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(4+x)^2-16}{x}$

مراجعة مهمة جداً: تحليل كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$x^3 - 8 \quad = x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 2^2) = (x-2)(x^2+2x+4)$

$x^3 + 8 \quad = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 2^2) = (x+2)(x^2-2x+4)$

8) أوجد :

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(2+x)^3-8}{x}$

بالتعويض المباشر عن $x = 0$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$\frac{(2+x)^3-8}{x} = \frac{(2+x-2)((2+x)^2+2(2+x)+2^2)}{x}$$

$$= \frac{\cancel{x}((2+x)^2+2(2+x)+4)}{\cancel{x}} \qquad : x \neq 0$$

$$= (2+x)^2 + 2(2+x) + 4$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{(2+x)^3-8}{x} = \lim_{x\to 0}[(2+x)^2+2(2+x)+4]$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}(2+x)\right)^2 + 2\lim_{x\to 0}(2+x) + \lim_{x\to 0} 4 \quad = (2+0)^2 + 2(2+0) + 4 = 12$$

تمارين مشابهة من الكراسة

13. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(3+x)^3-27}{x}$

مسائل القيمة المطلقة:

8) أوجد :

- $\lim\limits_{x\to1}\frac{|x-1|}{x^2-1}$

بالتعويض عن $x=1$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x)=\frac{|x-1|}{x^2-1^2}=\begin{cases}\frac{\cancel{x-1}^{\,1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{1}{x+1} & x>1 \quad : x\neq1\\[2ex] \frac{\cancel{-x+1}^{\,-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{-1}{x+1} & x<1 \quad : x\neq1\end{cases}$$

$\frac{-1}{x+1}$ 1 $\frac{1}{x+1}$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{-1}{x+1}=\frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

نهاية المقام $\lim\limits_{x\to1^-}(x+1)=2\ ,2\neq0$

نهاية المقام $\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)=2\ ,2\neq0$

$\because \lim\limits_{x\to1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ $\therefore \lim\limits_{x\to1}f(x)$ غير موجودة

- $\lim\limits_{x\to5}\frac{|x+2|-7}{x^2-25}$

بالتعويض عن $x=5$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\cancel{x+2-7}^{\,1}}{\cancel{(x-5)}(x+5)}=\frac{1}{x+5} & x\geq-2\\[2ex] \frac{-x-2-7}{(x-5)(x+5)}=\frac{-x-9}{(x-5)(x+5)} & x<-2\end{cases}\qquad (x\neq5)$$

$\frac{-x-9}{(x-5)(x+5)}$ -2 $\frac{1}{x+5}$

$$\lim_{x\to5}f(x)=\lim_{x\to5}\frac{1}{x+5}=\frac{1}{10}$$

نهاية المقام $\lim\limits_{x\to5}(x+5)=10\ ,\quad 10\neq0$

تمارين مشابهة من الكراسة

14. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{|x+2|}{x^2+3x+2}$

مراجعة مهمة جداً: الضرب بمرافق الجذر التربيعي

- $(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x}) = (3)^2 - (\sqrt{x})^2 = 9 - x$
- $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) = (\sqrt{x})^2 - (1)^2 = x - 1$
- $(\sqrt{2x-3}-1)(\sqrt{2x-3}+1) =$
  $(\sqrt{2x-3})^2 - (1)^2 = 2x - 3 - 1 = 2x - 4$

9. أوجد :

- $\lim\limits_{x\to 9} \frac{x-9}{3-\sqrt{x}}$

بالتعويض عن $x = 9$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$\frac{x-9}{3-\sqrt{x}} \times \frac{3+\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} = \frac{\overset{(-1)}{\cancel{(x-9)}}(3+\sqrt{x})}{\cancel{9-x}} = -3-\sqrt{x} \qquad x \neq 9$$

$$\lim_{x\to 9} f(x) = \lim_{x\to 9}(-3-\sqrt{x})$$

شرط الجذر $9 > 0$

$$= \lim_{x\to 9}(-3) - \lim_{x\to 9}\sqrt{x} = (-3) - \sqrt{9} = -6$$

- $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$

بالتعويض عن $x = 2$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2} \times \frac{\sqrt{2x-3}+1}{\sqrt{2x-3}+1} = \frac{2x-3-1}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$$= \frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)} = \frac{2\overset{(1)}{\cancel{(x-2)}}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{2x-3}+1)} = \frac{2}{\sqrt{2x-3}+1} \qquad x \neq 2$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 2} 2}{\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{2x+3}+1)}$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

شرط الجذر:

$\lim\limits_{x\to 2}(2x-3) = 2(2) - 3 = 1 \quad , 1 > 0$

نهاية البسط: $\lim\limits_{x\to 2} 2 = 2$

نهاية المقام: $\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{2x-3}+1)$

$= \lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x-3} + \lim\limits_{x\to 2} 1$

$= \sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)} + \lim\limits_{x\to 2} 1$

$= \sqrt{1} + 1 = 2 \quad , \quad 2 \neq 0$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$$

بالتعويض عن $x = 2$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x} = \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x} \times \frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2-(3)^2}{(x^2-2x)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} = \frac{x^2+5-9}{(x^2-2x)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}$$

$$= \frac{x^2-4}{(x^2-2x)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}$$

$$= \frac{\overset{(1)}{\cancel{(x-2)}}(x+2)}{x\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} = \frac{x+2}{x\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} \qquad : x \neq 2$$

شرط الجذر:

$$\lim_{x\to 2}(x^2+5) = 2^2+5 = 9 \;, 9 > 0$$

نهاية البسط:

$$\lim_{x\to 2}(x+2) = 2+2 = 4$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to 2} x\left(\sqrt{x^2+5}+3\right) =$$

$$\lim_{x\to 2} x\left(\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2+5} + \lim_{x\to 2} 3\right) =$$

$$\lim_{x\to 2} x\left(\sqrt{\lim_{x\to 2}(x^2+5)} + \lim_{x\to 2} 3\right) =$$

$$2\left(\sqrt{9}+3\right) = 12 \qquad ، 12 \neq 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 2}(x+2)}{\lim_{x\to 2}\left(x\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)\right)}$$

$$= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

تمارين مشابهة من الكراسة

15. $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}$

مسائل الجذر التكعيبي:

أوجد :

$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

بالتعويض عن $x=1$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

(1)

$$\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{(\sqrt[3]{x})^3-(1)^3}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{\cancel{(\sqrt[3]{x}-1)}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1^2)}{\cancel{\sqrt[3]{x}-1}}=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1 \qquad : x\neq 1$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)=\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{x^2}+\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{x}+\lim_{x\to 1}1$$

$$=\sqrt[3]{\lim_{x\to 1}x^2}+\sqrt[3]{\lim_{x\to 1}x}+1=\sqrt[3]{(1)^2}+\sqrt[3]{1}+1=3$$

$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$

بالتعويض عن $x=-1$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}}=\sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x+1}}=\sqrt[3]{\frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1^2)}{\cancel{x+1}}}=\sqrt[3]{x^2-x+1} \qquad : x\neq -1$$

$$\therefore \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}}=\lim_{x\to -1}\sqrt[3]{x^2-x+1}=\sqrt[3]{\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)}=\sqrt[3]{(-1)^2-(-1)+1}$$

$$=\sqrt[3]{3}\approx 1.44$$

$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}$

بالتعويض عن $x=-2$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^{\frac{1}{3}}}=(x-2)(x+2)^{\frac{2}{3}} \qquad : x\neq -2$$

$$\therefore \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}=\lim_{x\to -2}\left((x-2)(x+2)^{\frac{2}{3}}\right)=\lim_{x\to -2}(x-2)\cdot\lim_{x\to -2}(x+2)^{\frac{2}{3}}$$

$$=\lim_{x\to -2}(x-2)\cdot\left(\lim_{x\to -2}(x+2)\right)^{\frac{2}{3}}=(-2-2)\cdot(-2+2)^{\frac{2}{3}}=0$$

طريقة ثانية:

$$\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}\times\frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}=\frac{(x-2)\cancel{(x+2)}\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\cancel{x+2}}=(x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2} \qquad : x\neq -2$$

$$\therefore \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}=\lim_{x\to -2}\left((x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2}\right)=\lim_{x\to -2}(x-2)\times\lim_{x\to -2}\sqrt[3]{(x+2)^2}=$$

$$=\lim_{x\to -2}(x-2)\times\sqrt[3]{\lim_{x\to -2}(x+2)^2}=(-2-2)\times\sqrt[3]{(-2+2)^2}=0$$

مسائل القسمة التركيبية:

10. أوجد :

- $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}$

بالتعويض عن $x = -1$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

-1	1	6	2	-3
	↓	-1	-5	3
	1	5	-3	0
	x^2	x		

$$\therefore \frac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1} = x^2+5x-3 \qquad : x \neq -1$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x^2+5x-3)$$

$$= (-1)^2 + 5(-1) - 3 = -7$$

- $\lim_{x\to 2} \frac{-x^5+x^3+x+22}{x-2}$

بالتعويض عن $x = 2$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

2	-1	0	1	0	1	22
	↓	-2	-4	-6	-12	-22
	-1	-2	-3	-6	-11	0
	x^4	x^3	x^2	x		

$$\therefore \frac{-x^5+x^3+x+22}{x-2} = -x^4-2x^3-3x^2-6x-11 \qquad : x \neq 2$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{-x^5+x^3+x+22}{x-2} = \lim_{x\to 2}(-x^4-2x^3-3x^2-6x-11)$$

$$= -(2)^4 - 2(2)^3 - 3(2)^2 - 6(2) - 11 = -67$$

- $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^5+32}{x+2}$

بالتعويض عن $x=-2$ في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

-2	1	0	0	0	0	32
	$\downarrow$	-2	4	-8	16	-32
	1	-2	4	-8	16	0
	x^4	x^3	x^2	x		

$\therefore \frac{x^5+32}{x+2} = x^4-2x^3+4x^2-8x+16 \qquad : x \neq -2$

$$\therefore \lim_{x\to-2} \frac{x^5+32}{x+2} = \lim_{x\to-2} (x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$$

$$= (-2)^4-2(-2)^3+4(-2)^2-8(-2)+16 = 80$$

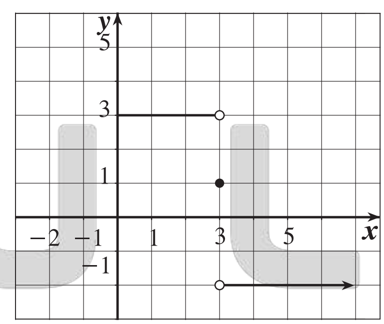
تمارين مشابهة من الكراسة

17. $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^3-3x^2-7x+6}{x+2}$ 18. $\lim\limits_{x\to3} \frac{x^4-7x^2-18}{x-3}$ 19. $\lim\limits_{x\to2} \frac{4x^3-5x^2-12}{x-2}$

النهايات - التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = -2$ (في الرسم البياني أدناه) (a) **(b)**



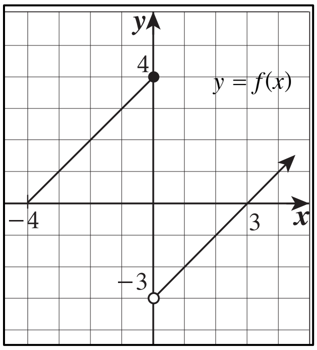
2. $\lim\limits_{y\to2} \frac{y^2+5y+6}{y+2} = 5$ **(a)** (b)

3. $\lim\limits_{x\to0} \frac{5x^3+8x^2}{3x^4-16x^2} = 0$ (a) **(b)**

4. $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{\sqrt{x^2}-x}{x} = -2$ **(a)** (b)

5. $\lim\limits_{x\to1^+} (2x-|x|+2) = 3$ **(a)** (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.



6. الشكل المقابل هو بيان دالة f
العبارة الصحيحة في ما يلي هي:

ⓐ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 4$ ⓑ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -3$

ⓒ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 4$ ⓓ $\lim_{x\to 0} f(x) = -3$

7. $\lim_{x\to -2}(x^3 + 3x^2 - 2x - 17) =$

ⓐ 17 ⓑ -17 ⓒ 9 ⓓ -9

8. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1} =$

ⓐ 1 ⓑ 0 ⓒ $\frac{1}{2}$ ⓓ غير موجودة

9. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2} =$

ⓐ 1 ⓑ 0 ⓒ $\frac{1}{2}$ ⓓ $\frac{1}{3}$

10. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} =$

ⓐ -1 ⓑ 1 ⓒ $\frac{1}{2}$ ⓓ 0

11. $\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|}{x^2-4} =$

ⓐ $\frac{1}{2}$ ⓑ $-\frac{1}{2}$ ⓒ $\frac{1}{4}$ ⓓ $-\frac{1}{4}$

12. $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x} =$

ⓐ $-\frac{1}{2}$ ⓑ $\frac{1}{2}$ ⓒ $\frac{1}{4}$ ⓓ $-\frac{1}{4}$

13. $\lim_{x\to -8}\frac{x+8}{\sqrt[3]{x}+2} =$

ⓐ 12 ⓑ -12 ⓒ 4 ⓓ -4

14. $\lim_{x\to -3}\frac{2x^3+9x^2+9x}{x+3} =$

ⓐ 9 ⓑ 0 ⓒ -3 ⓓ -9

نهايات تشتمل على $\pm\infty$

أولاً: نهايات محددة عندما $x \to \pm\infty$

الدالة f معرفة على الفترة (a,∞) $\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = L$

الدالة f معرفة على الفترة $(-\infty,a)$ $\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

نظرية 7 : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

نظرية 8 : $\lim_{x\to+\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \,, k \in \mathbb{R} \,, n \in \mathbb{Z}^+ \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{k}{x^n} = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x^7} = 0 \,,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x^7} = 0 \,,\ \lim_{x\to-\infty} \frac{20}{x^3} = 0 \ \ \lim_{x\to+\infty} \frac{20}{x^3} = 0$$

ثانياً: نهايات غير محددة $(\pm\infty)$ عندما $x \to c$

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty \ , \quad \lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

نظرية 9 :

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty \,,\ \lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty \iff \lim_{x\to c} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty \,,\ \lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty \iff \lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

ملاحظات:

1. إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ وكان b عدداً حقيقياً فإن $\quad \lim_{x\to c}(f(x)+b) = \pm\infty$

2. إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ وكان

معلق ⚠

- b عدداً حقيقياً موجباً فإن: $\quad \lim_{x\to c}\left(b.f(x)\right) = \pm\infty$
- b عدداً حقيقياً سالباً فإن: $\quad \lim_{x\to c}\left(b.f(x)\right) = \mp\infty$

3. إذا كان $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$ ، $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ فإن:

$$\lim_{x\to c}\left(f(x).g(x)\right) = \infty \quad , \quad \lim_{x\to c}\left(f(x)+g(x)\right) = \infty$$

4. إذا كان $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty$ ، $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ فإن:

$$\lim_{x\to c}\left(f(x).g(x)\right) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to c}\left(f(x)+g(x)\right) = -\infty$$

5. إذا كان $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$ ، $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ فإن:

$$\lim_{x\to c}\left(f(x).g(x)\right) = -\infty$$

نظرية 10 :

$c \in \mathbb{R} \ , \ n \in \mathbb{Z}^+$

n عدد **زوجي** $\lim_{x \to c} \frac{1}{(x-c)^n} = \infty$

n عدد **فردي** $\lim_{x \to c^-} \frac{1}{(x-c)^n} = -\infty$ $\lim_{x \to c^+} \frac{1}{(x-c)^n} = \infty$

تدرب: أوجد إن أمكن كلاً مما يلي:

$\lim_{x \to 4^-} \frac{1}{(x-4)} = -\infty$

$\lim_{x \to 4^+} \frac{1}{(x-4)} = +\infty$

$\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$

$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{(x-2)^3} = -\infty$

$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{(x-2)^3} = +\infty$

$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^4} = +\infty$

معلق ⚠

$\lim_{x \to -5^-} \frac{1}{(x+5)^9} = -\infty$

$\lim_{x \to -5^+} \frac{1}{(x+5)^9} = +\infty$

$\lim_{x \to -5} \frac{1}{(x+5)^6} = +\infty$

$\lim_{x \to 2^+} \frac{-6}{(x-2)^3} = \lim_{x \to 2^+} \left((-6)\frac{1}{(x-2)^3}\right) = -\infty \ , \ -6 < 0$

$\lim_{x \to -5} \frac{-8}{(x+5)^4} = \lim_{x \to -5} \left((-8)\frac{1}{(x+5)^4}\right) = -\infty \ , \ -8 < 0$

$\lim_{x \to 2} \frac{7}{(x-2)^2} = \lim_{x \to 2} \left((7)\frac{1}{(x-2)^2}\right) = \infty$

$\lim_{x \to 2^-} \frac{-10}{(x-2)^5} = \lim_{x \to 2^-} \left((-10)\frac{1}{(x-2)^5}\right) = +\infty \ , \ -10 < 0$

أوجد إن أمكن : $\lim_{x\to 2}\frac{1}{|x-2|}$

$$\frac{1}{|x-2|}=\begin{cases}\frac{1}{x-2} & x>2\\ \frac{-1}{x-2} & x<2\end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c} \frac{-1}{x-2} \quad 2 & \frac{1}{x-2}\end{array}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{|x-2|}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-1}{(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}(-1)\frac{1}{(x-2)}=+\infty \quad ①$$

$$-1<0$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{|x-2|}=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x-2)}$$

$$=\infty \quad ②$$

$$①,② \Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{1}{|x-2|}=\infty$$

معلق ⚠

أوجد إن أمكن : $\lim_{x\to -1}\frac{3}{|x+1|}$

$$\frac{3}{|x+1|}=\begin{cases}\frac{3}{x+1} & x>-1\\ \frac{-3}{x+1} & x<-1\end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c} \frac{-3}{x+1} \quad -1 & \frac{3}{x+1}\end{array}$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{3}{|x+1|}=\lim_{x\to -1^-}\frac{-3}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1^-}(-3)\frac{1}{(x+1)}=+\infty \quad ①$$

$$(-3)<0$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{3}{|x+1|}=\lim_{x\to -1^+}\frac{3}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1^+}(3)\frac{1}{(x+1)}=\infty \quad ②$$

$$①,② \Rightarrow \lim_{x\to -1}\frac{3}{|x+1|}=\infty$$

تمارين مشابهة من الكراسة

6. $\lim_{x\to 5}\frac{3}{|x-5|}$

7. $\lim_{x\to -2}\frac{-7}{|x+2|}$

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. $\lim_{x \to -4^-} \frac{1}{(x+4)^9} = -\infty$ — معلق — (a) (b)

2. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{|x|-3} = 2$ — (a) (b)

3. $\lim_{x \to -\infty} \frac{|x|-3}{x+3} = -1$ — (a) (b)

4. $\lim_{x \to \infty} \frac{1-x}{2x^2-5x-3} = -\infty$ — (a) (b)

5. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{|2x-3|} = \frac{1}{2}$ — (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. $\lim_{x \to \infty} \frac{|x|}{|x|+1} =$

(a) 0 (b) 1 (c) ∞ (d) $\frac{1}{2}$

7. $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+3} =$

(a) ∞ (b) $-\infty$ (c) 1 (d) 0

8. $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{x}+1\right)\left(\frac{5x^2-1}{x^2}\right) =$

(a) 0 (b) 5 (c) 1 (d) $-\infty$

9. $\lim_{x \to \infty} \frac{-|x+3|}{2x} =$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) ∞ (d) $-\infty$

10. $\lim_{x \to 2^-} \left(\frac{3}{x-2}\right)^5 =$

(a) 0 (b) 2 (c) ∞ (d) $-\infty$

معلق

11. $\lim_{x \to 4^+} \frac{2}{(x-4)^3} =$

(a) ∞ (b) 2 (c) $-\infty$ (d) 0

صيغ غير معينة

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n \;:\; n\in\mathbb{Z}^+$$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^6=\infty$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^8=\infty$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x^3=\infty$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x=\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} a\,x^n :\quad n\in\mathbb{Z}^+\;,a\in\mathbb{R}-\{0\}$$

- $\lim\limits_{x\to\infty} 5x^2=\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^4}{3}=\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} -4x^6=-\infty\,,\quad -4<0$
- $\lim\limits_{x\to\infty} -3x^8=-\infty\,,\quad -3<0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^7=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to\infty} 5x^7=\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^5=+\infty,\quad -1<0$
- $\lim\limits_{x\to\infty} -x^5=-\infty,\quad -1<0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to\infty} 2x^3=\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} -4x=\infty\,,\quad -4<0$
- $\lim\limits_{x\to\infty} -4x=-\infty,\quad -4<0$

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}\,x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0\quad : a_n\in\mathbb{R}^*$$

$$\therefore \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n$$

- $\lim\limits_{x\to\infty}(-3x^2+2x-4)$

  $=\lim\limits_{x\to\infty}(-3x^2)=-\infty\,,\qquad -3<0$

- $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2-3x+1)$

  $=\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2)\;=\infty$

تمارين مشابهة من الكراسة

أوجد إن أمكن كلا من :

1) $\lim\limits_{x\to\infty} (3x^2 - 5x + 4)$

$= \lim\limits_{x\to\infty} (3x^2) = \infty$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} (-4x^2 + x - 1)$

$= \lim\limits_{x\to\infty} (-4x^2) = -\infty: \ -4 < 0$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^3 - 3x + 7)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} (2x^3) = -\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-4x^3 + 2x + 5)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} (-4x^3) = \infty: \ -4 < 0$

نظرية 11 : إذا كانت كل من f ,g دالة حدودية حيث:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0$$

بالتالي:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m} \ : n = m$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \ : n < m$

أوجد :

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4-3x^3}{2x^3+5} = -\frac{3}{2}$ (درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام)
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2+x-1}{3x^4-x} = 0$ (درجة حدودية البسط < درجة حدودية المقام)
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^4-1}{7-2x^4} = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2}$ (درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام)
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-3x^2+5x+1}{6x^2-x+1} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$ (درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام)
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{4x^3-2x+3} = 0$ (درجة حدودية البسط < درجة حدودية المقام)
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2-5x+7}{-2x^2+3x-1} = \frac{4}{-2} = -2$ (درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام)
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^3+7x-1}{-5x^3+x+2} = \frac{2}{-5} = \frac{-2}{5}$ (درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام)

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+5}{2x^3+x-1} = 0$ (درجة حدودية البسط < درجة حدودية المقام)

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2-2x+3} = 0$ (درجة حدودية البسط < درجة حدودية المقام)

إذا كانت: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+3}{2x+5} = 3$ فأوجد قيمة كل من a,b

$\because \lim\limits_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+3}{2x+5} = 3 \quad , \qquad 3 \neq 0$

$\therefore$ درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام ، أي أن حدودية البسط من الدرجة الأولى بالتالي:

$ax^2 = 0 \Longrightarrow a = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{bx+3}{2x+5} = \frac{b}{2} = \frac{3}{1} \qquad \Longrightarrow b = 6$

إذا كانت: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-2}{ax^2+bx-3} = -1$ فأوجد قيمة كل من a,b

$\because \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-2}{ax^2+bx-3} = -1 , \qquad -1 \neq 0$

$\therefore$ درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام أي أن حدودية المقام من الدرجة الأولى ، بالتالي:

$ax^2 = 0 \Longrightarrow a = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-2}{bx-3} = \frac{1}{b} = \frac{-1}{1} \qquad \Longrightarrow b = -1$

تمارين مشابهة من الكراسة

11. إذا كانت: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ax^3+bx^2+4}{3x^2-2x+1} = -1$ فأوجد قيم a,b

12. إذا كانت: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2+2x-5}{ax^3+bx^2+3} = -1$ فأوجد قيم a,b

أوجد: $\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$

$$f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$$

$$=\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}}=\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}=\frac{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}=\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$(x>0\text{، }|x|=x)$

$x\neq 0$

شرط الجذر:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=1+0-0=1\ ,1>0$$

نهاية البسط:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=1-0=1$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}$$
$$=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}=\sqrt{1}=1\quad ,1\neq 0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}f(x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$
$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$
$$=\frac{1}{1}=1$$

أوجد : $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2\left(2-\frac{1}{x}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{|x|\sqrt{\left(2-\frac{1}{x}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{\cancel{x}\sqrt{\left(2-\frac{1}{x}\right)}}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{\sqrt{\left(2-\frac{1}{x}\right)}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$(x>0\text{،}|x|=x)$

$:x\neq 0$

شرط الجذر:

$$\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}2-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=2-0=2\ ,2>0$$

نهاية البسط:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\sqrt{2}$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=1+0=1\ ,1\neq 0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}f(x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\left(2-\frac{1}{x}\right)}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$
$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\sqrt{\left(2-\frac{1}{x}\right)}}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$$

أوجد : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}$

$$f(x) = \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$= \frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}} = \frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}} = \frac{\overset{(-1)}{\cancel{x}}\left(3-\frac{5}{x}\right)}{-\cancel{x}\sqrt{\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}} = \frac{-3+\frac{5}{x}}{\sqrt{\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}}$$

$(x<0\ ,|x|=-x)$

$: x \neq 0$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty} f(x)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3+\frac{5}{x}}{\sqrt{\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}}$$
$$= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3+\frac{5}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}}$$
$$= \frac{-3}{1} = -3$$

شرط الجذر:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{9}{x^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} 1 - \lim_{x\to-\infty}\frac{9}{x^2} = 1-0 = 1\ , 1>0$$

نهاية البسط:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-3+\frac{5}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} -3 + \lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x} = -3+0 = -3$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}$$
$$= \sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{9}{x^2}\right)} = \sqrt{1} = 1\ , 1\neq 0$$

تمارين مشابهة من الكراسة

10. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{4x^2+5x+6}}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+5}{\sqrt{x^2+2x+7}}$

صيغ غير معينة-التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2+7x-8) = \infty$ — (a) ● (b)

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3-2x+1) = -\infty$ — (a) (b) ●

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2+x-3) = -\infty$ — (a) ● (b)

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x+4}{3x^2-5x+1} = 0$ — (a) ● (b)

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^3+7x^2-1}{2x^3-4} = 2$ — (a) ● (b)

6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x-7}{\sqrt{4x^2-8x+5}} = \frac{3}{2}$ — (a) (b) ●

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3-2x+5}{2x^4+x^2-2} =$

(a) ∞ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) $-\infty$

8. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}} =$

(a) ∞ (b) $-\infty$ (c) 3 (d) -3

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-5x+3}{\sqrt{9x^2-2x+4}} =$

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $-\frac{5}{3}$ (c) $\frac{5}{9}$ (d) $-\frac{5}{9}$

10. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x+1}{\sqrt{4x^2-x+3}} =$

(a) -1 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

11. إذا كان: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{mx^2+nx+4}{\sqrt{x^2-2x+4}} = -2$ فإن قيم m,n هي:

(a) $m = 0 , n = -2$
(b) $m = 0 , n = 2$
(c) $m = 1 , n = -1$
(d) $m = 1 , n = 1$

12. إذا كان: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+3}}{mx^2+nx-4} = 1$ فإن قيم m,n هي:

(a) $m = 0 , n = -2$
(b) $m = 0 , n = 2$
(c) $m = 0 , n = 4$
(d) $m = 0 , n = -4$

نهايات بعض الدوال المثلثية

تنبيه مهم

تذكر :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{1}{\sin x} = \csc x \quad , \quad \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

قوانين للحفظ

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0 \ , \ \lim_{x\to 0} \cos x = 1 \ , \ \lim_{x\to 0} \tan x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \ , \ \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \ , \ \lim_{x\to 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$$

$a \neq 0 , b \neq 0$

تدرب :

أوجد :

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \frac{5}{3}$
- $\lim_{x\to 0} \sin(5x) = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{9x}{\sin 4x} = \frac{9}{4}$
- $\lim_{x\to 0} \cos(7x) = 1$
- $\lim_{x\to 0} \tan(9x) = 0$

أوجد :

- $\lim_{x\to 0} \frac{x-3}{\cos x}$

نهاية البسط $\lim_{x\to 0}(x-3) = 0 - 3 = -3$

نهاية المقام $\lim_{x\to 0} \cos x = 1 , 1 \neq 0$

$$= \frac{\lim_{x\to 0}(x-3)}{\lim_{x\to 0} \cos x} = \frac{-3}{1} = -3$$

تمارين مشابهة من الكراسة

4. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1+\cos x}$

5. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\tan x}{\sin x - \cos x}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{2x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\sin x}{2x} = \lim_{x\to0}\left(\sin x\cdot\frac{\sin x}{2x}\right)$$

$$= \lim_{x\to0}\sin x\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x} = 0\times\frac{1}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x^2-x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x(2x-1)} = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{(2x-1)}\right)$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{(2x-1)}$$

نهاية المقام $\lim_{x\to0}(2x-1) = -1$, $-1\neq0$

$$= 1\times\frac{1}{-1} = -1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{3x\cos x} = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{3x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{3x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{\lim\limits_{x\to0}1}{\lim\limits_{x\to0}\cos x}$$

نهاية البسط $\lim_{x\to0}1 = 1$

نهاية المقام $\lim_{x\to0}\cos x = 1$, $1\neq0$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

أوجد :

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{x^2\,(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to0}\frac{x^2\,(1+\cos x)}{\sin x^2}$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot(1+\cos x)\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\lim_{x\to0}(1+\cos x)$$

$$= \left(\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\left(\lim_{x\to0}1+\lim_{x\to0}\cos x\right) = (1)^2\cdot(1+1) = 2$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{\cos x-1}\times\frac{\cos x+1}{\cos x+1}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x\sin x\,(\cos x+1)}{\cos x^2-1} = \lim_{x\to0}\frac{x\cancel{\sin x}\,(\cos x+1)}{-\sin^{\cancel{2}} x}$$

$x\neq0$

$$= \lim_{x\to0}\left(\left(\frac{x}{-\sin x}\right)\cdot(\cos x+1)\right)$$

$$= \left(\lim_{x\to0}\frac{-x}{\sin x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to0}\cos x+\lim_{x\to0}1\right) = \left(\frac{-1}{1}\right)\cdot(1+1) = -2$$

تمارين مشابهة من الكراسة

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos 2x}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

نتيجة:

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1\ ,\ \lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{bx}=\frac{a}{b}\qquad a\neq0\,,b\neq0$$

أوجد :

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{2\tan x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{\left(2\frac{\tan x}{x}\right)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{x\to0}\left(2\frac{\tan x}{x}\right)}=\frac{1}{2}$$

نهاية البسط: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

نهاية المقام: $\lim\limits_{x\to0}\left(2\frac{\tan x}{x}\right)$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=2\times1=2\ ,2\neq0$$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{5\tan x-3\sin x}{4x}$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{5\tan x}{4x}-\frac{3\sin x}{4x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{5\tan x}{4x}-\lim_{x\to0}\frac{3\sin x}{4x}$$

$$=\frac{5}{4}\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}-\frac{3}{4}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$$

$$=\frac{5}{4}(1)-\frac{3}{4}(1)=\frac{1}{2}$$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{3\tan x+x^2\cos x}{5x}$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{3\tan x}{5x}+\frac{x^{\cancel{2}}\cos x}{5\cancel{x}}\right)\qquad x\neq0$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3\tan x}{5x}+\lim_{x\to0}\frac{x\cos x}{5}$$

$$=\frac{3}{5}\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}+\frac{1}{5}\lim_{x\to0}x\cdot\lim_{x\to0}\cos x$$

$$=\frac{3}{5}(1)+\frac{1}{5}\times0\times1=\frac{3}{5}$$

أوجد :

Q $\lim_{x\to0} \frac{x\sin x - x^2}{3x^2} =$ $\lim_{x\to0}\left(\frac{\cancel{x}\sin x}{3x^{\cancel{2}}} - \frac{x^2}{3x^2}\right)$ $x \neq 0$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{3x} - \lim_{x\to0}\frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

Q $\lim_{x\to0} \frac{\cos x\tan x - 2x\cos x}{3x} =$ $\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x\tan x}{3x} - \frac{2\cancel{x}\cos x}{3\cancel{x}}\right)$ $x \neq 0$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to0}\cos x \cdot \lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x} - \frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to0}\cos x$$

$$= \frac{1}{3}\times1\times1 - \frac{2}{3}\times1 = \frac{-1}{3}$$

Q $\lim_{x\to0} \frac{5x+\sin x}{x} =$ $\lim_{x\to0}\left(\frac{5\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{\sin x}{x}\right)$ $x \neq 0$

$$= \lim_{x\to0}5 + \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 5 + 1 = 6$$

Q $\lim_{x\to0} \frac{\tan 2x + 3x\cos 4x}{5x}$ $= \lim_{x\to0}\left(\frac{\tan 2x}{5x} + \frac{3\cancel{x}\cos 4x}{5\cancel{x}}\right)$ $x \neq 0$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{5x} + \frac{3}{5}\lim_{x\to0}\cos 4x = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\times1 = 1$$

نهايات بعض الدوال المثلثية-التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

3. $\lim_{x\to0}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = 0$ (a) **(b)**

4. $\lim_{x\to0}\frac{1+\sin 2x}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}$ **(a)** (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. $\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\sin x} =$

(a) 2 (b) -2 (c) 0 (d) ∞

9. $\lim_{x\to 0} \frac{4x^2+5\sin^2 x}{3x^2} =$

ⓐ 3 ⓑ 9 ⓒ 0 ⓓ ∞

تمارين موضوعية إضافية:

Q $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin 4x} =$

ⓐ $-\frac{1}{4}$ ⓑ $\frac{1}{4}$ ⓒ 1 ⓓ 0

Q $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 6x}{\tan 3x} =$

ⓐ 0 ⓑ 1 ⓒ -2 ⓓ 2

Q $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 7x}{\cos x} =$

ⓐ -7 ⓑ 7 ⓒ 1 ⓓ 0

Q $\lim_{x\to 0} \sin 4x =$

ⓐ $-\frac{1}{4}$ ⓑ $\frac{1}{4}$ ⓒ 1 ⓓ 0

Q $\lim_{x\to 0} \tan 6x =$

ⓐ 0 ⓑ 1 ⓒ -2 ⓓ 2

Q $\lim_{x\to 0} \cos 4x =$

ⓐ 0 ⓑ 1 ⓒ -1 ⓓ 4

الاتصال

الاتصال عند نقطة تكون الدالة f متصلة عند $x=c$ في مجالها إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

ابحث اتصال الدالة f عند $x=1$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x & : x\ge 1 \\ 5x-1 & : x<1 \end{cases}$$

$5x-1$ 1 x^2+3x

$f(1)=(1)^2+3(1)=4 \quad \to (1)$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x^2+3x)$

$=(1)^2+3(1)=4$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(5x-1)$

$=5(1)-1=4$

$\because \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 4 \quad \therefore \lim_{x\to 1} f(x)=4 \quad \to (2)$

$(1),(2) \Longrightarrow \because \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$, $\therefore$ f متصلة عند $x=1$

ابحث اتصال الدالة f عند $x=0$

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x & : x\le 0 \\ \frac{x^2}{x+1} & : x>0 \end{cases}$$

x^3+x 0 $\frac{x^2}{x+1}$

$f(0)=(0)^3+(0)=0 \quad \to (1)$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x^3+x)$

$=(0)^3+(0)=0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x+1}$

$=\frac{0^2}{1}=0$

نهاية المقام:

$\lim_{x\to 0^+}(x+1)$

$=1 , 1\ne 0$

$\because \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \quad \therefore \lim_{x\to 0} f(x)=0 \quad \to (2)$

$(1),(2) \Longrightarrow \because \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, $\therefore$ f متصلة عند $x=0$

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 3$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & : x > 3 \\ 7 & : x \leq 3 \end{cases}$$

7 | 3 | $\frac{x^2-9}{x-3}$

$f(3) = 7 \quad \rightarrow 1$

$\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to3^-} 7 = 7$

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to3^+} \frac{x^2-9}{x-3}$

$= \lim\limits_{x\to3^+} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} \qquad : x \neq 3$

$= \lim\limits_{x\to3^+} (x+3) = 3+3 = 6$

$\because \lim\limits_{x\to3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to3^+} f(x) \qquad \therefore \lim\limits_{x\to3} f(x)$ غير موجودة $\rightarrow 2$

$\therefore$ f غير متصلة عند $x = 3$

ملاحظة: f متصلة عند $x = 3$ من جهة اليسار فقط $\Leftarrow$ $\because \lim\limits_{x\to3^-} f(x) = f(3)$

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & : x < 2 \\ 1 & : x = 2 \\ x^2+1 & : x > 2 \end{cases}$$

$2x+1$ | 2 | x^2+1

$f(2) = 1 \quad \rightarrow 1$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} (2x+1)$

$= 2(2)+1 = 5$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} (x^2+1)$

$= 2^2+1 = 5$

$\because \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 5 \quad \therefore \lim\limits_{x\to2} f(x) = 5 \quad \rightarrow 2$

$1, 2 \implies \because \lim\limits_{x\to2} f(x) \neq f(2) \Rightarrow$ f ليست متصلة عند $x = 2$

تمارين مشابهة من الكراسة

ابحث اتصال الدالة التالية عند $x = 0$:

6. $f(x) = \begin{cases} x+5 : x \geq 0 \\ 5-x : x < 0 \end{cases}$

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{|x-2|} & : x \neq 2 \\ 1 & : x = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x-2} & : x > 2 \\ 1 & : x = 2 \\ \frac{x-2}{-x+2} & : x < 2 \end{cases} = \begin{cases} 1 & : x > 2 \\ 1 & : x = 2 \\ -1 & : x < 2 \end{cases}$$

$f(2) = 1 \quad \to ①$

$f(x) = -1$ | 2 | $f(x) = 1$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -1$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$

$\because \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$ $\therefore \lim_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة $\to ②$

$\therefore f$ ليست متصلة عند $x = 2$

ملاحظة: $\because \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow$ f متصلة عند $x = 2$ من جهة اليمين فقط

ابحث اتصال الدالة f عند $x = -1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x+1|}{x+1} - 2x & : x \neq -1 \\ 2 & : x = -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x+1} - 2x = 1 - 2x & : x > -1 \\ 2 & : x = -1 \\ \frac{-x-1}{x+1} - 2x = -1 - 2x & : x < -1 \end{cases}$$

$f(-1) = 2 \quad \to ①$

$-1 - 2x$ | -1 | $1 - 2x$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (-1 - 2x)$

$= -1 - 2(-1) = 1$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (1 - 2x)$

$= 1 - 2(-1) = 3$

$\because \lim_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim_{x\to -1^+} f(x)$ $\therefore \lim_{x\to -1} f(x)$ غير موجودة $\to ②$

$\therefore f$ ليست متصلة عند $x = -1$

تمارين مشابهة من الكراسة

ابحث الاتصال عند x=0

8. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x}{|x|} & : x \neq 0 \\ -3 & : x = 0 \end{cases}$

تمارين مشابهة من الكراسة

7) ادرس اتصال الدالة التالية عند $x = -1$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} & : x \neq -1 \\ -1 & : x = 1 \end{cases}$$

9) ادرس اتصال الدالة التالية عند $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & : x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & : x = 1 \end{cases}$$

10) أوجد قيمة a بحيث تصبح الدالة التالية متصلة عند $x = 3$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & : x < 3 \\ 2ax & : x \geq 3 \end{cases}$$

الاتصال ، التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. الدالة $f : f(x) = \frac{1}{(x+2)^2} + 1$ متصلة عند $x = -2$

(a) (b)

2. الدالة : $y = \frac{1}{x^2+1}$ متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$

(a) (b)

3. الدالة : $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ متصلة عند $x = -1$

(a) (b)

4. إذا كانت الدالة f متصلة عند $x = -1$
وكان $\lim\limits_{x \to -1} (f(x) - 2) = -1$ فإن $f(-1) = 1$

(a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

5. نقاط انفصال الدالة $f : f(x) = \cot x$ هي:

(a) $0 , \pi$
(b) $2k\pi , k \in \mathbb{Z}$
(c) $k\pi , k \in \mathbb{Z}$
(d) $\frac{\pi}{2} + k\pi , k \in \mathbb{Z}$

6. نقاط الدالة $f : f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$ التي يمكن التخلص من الانفصال عندما هي:

(a) 2
(b) $-2 , 2$
(c) -2
(d) $-5 , 2$

7. نقاط الدالة $f : f(x) = \frac{2x^3+16}{x^2+x-2}$ التي لا يمكن التخلص من الانفصال عندما هي:

(a) $-1 , 2$
(b) -2
(c) $1 , -2$
(d) 1

8. إذا كانت الدالة f متصلة عند $x = 2$ فإن $f(x)$ يمكن أن تكون:

ⓐ $\frac{1}{|x-2|}$ ⓑ $\sqrt{x-2}$ ⓒ $\frac{|x-2|}{x-2}$ ⓓ $\begin{cases} \sqrt{x^2-3} : x > 2 \\ 3x-5 : x \leq 2 \end{cases}$

9. إذا كانت الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^2+1 : x \geq 2 \\ \frac{x^2-4}{x-2} : x < 2 \end{cases}$ فإن:

ⓐ $\lim_{x \to 2+} f(x) = 4$ ⓑ $\lim_{x \to 2-} f(x) = 4$

ⓒ $\lim_{x \to 2} f(x)$ موجودة ⓓ f متصلة عند $x = 2$

10. معلق

11. إذا كانت الدالة f متصلة عند $x = -2$
وكانت $\lim_{x \to -2}(x^2 + f(x)) = 7$ فإن $f(-2)$ تساوي:

ⓐ 3 ⓑ 5 ⓒ 9 ⓓ 11

12. إذا كانت الدالة g متصلة عند $x = 1$ وكانت النقطة $(1, -3)$ تقع على منحنى الدالة g فإن $\lim_{x \to 1}(g(x))^2$ تساوي

ⓐ -6 ⓑ -3 ⓒ 1 ⓓ 9

لكل سؤال مما يلي إجابة صحيحة من القائمة، اختر الإجابة الصحيحة

13. $g(x) = \begin{cases} x+1 & : x > a \\ 3-x & : x \leq a \end{cases} \Rightarrow a = \ldots$ ⓓ

14. $g(x) = \begin{cases} 2ax-2 & : x \neq a \\ 3a & : x = a \end{cases} \Rightarrow a = \ldots$ ⓑ

15. $g(x) = \begin{cases} 3x^2 & : x > a \\ 2x & : x \leq a \end{cases} \Rightarrow a = \ldots$ ⓒ

ⓐ -1
ⓑ 2
ⓒ 0
ⓓ 1
ⓔ $\frac{2}{3}$

نظريات الاتصال

نظرية (14) :

خواص الدوال المتصلة

إذا كانت f,g دالتين متصلتين عند $x=c$ فإن الدوال التالية متصلة أيضاً عند $x=c$:

$f+g$ $\quad$ $f-g$ $\quad$ $k.f \ : k\epsilon\mathbb{R}$

$f.g$ $\quad$ $\dfrac{f}{g} \ : g(c)\neq 0$

دوال متصلة: الدوال التالية متصلة عند كل عدد حقيقي. $c\epsilon\mathbb{R}$

- الدوال الثابتة
- الدوال كثيرات الحدود
- الدوال الحدودية النسبية (شرط المقام لا يساوي صفرا)
- دالة القيمة المطلقة $f(x) = |x|$
- الدوال المثلثية الأساسية متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها

ابحث اتصال الدالة f عند $x=c$ في كل مما يلي:

Q $f(x)=x^2+|x| \quad , \quad c=-1$

$h(x)=x^2$ كثيرة حدود متصلة عند $x=-1$

$g(x)=|x|$ دالة متصلة عند $x=-1$

$\therefore f(x)=h(x)+g(x)$ دالة متصلة عند $x=-1$

Q $f(x)=\sin x - \cos x \quad , \quad c=\frac{\pi}{2}$

$h(x)=\sin x$ دالة مثلثية متصلة عند $x=\frac{\pi}{2}$

$g(x)=\cos x$ دالة مثلثية متصلة عند $x=\frac{\pi}{2}$

$\therefore f(x)=h(x)-g(x)$ دالة متصلة عند $x=\frac{\pi}{2}$

Q $f(x)=x^2-4x+3+|x| \quad , \quad c=3$

$m(x)=x^2-4x+3$ كثيرة حدود متصلة عند $x=3$

$n(x)=|x|$ دالة متصلة عند $x=3$

$\therefore f(x)=m(x)+n(x)$ دالة متصلة عند $x=3$

مسألة مشابهة من الكراسة:

ابحث اتصال كل دالة مما يلي عند كل قيمة:

1. $f(x) = x^2 - |2x-3|, \quad x = 2$
3. $f(x) = x^2 + 3x + |x|, \quad x = 3$

- $f(x) = \frac{\tan x}{x+1} \quad , \quad c = \frac{\pi}{4}$

$a(x) = \tan x$ دالة مثلثية متصلة عند $x = \frac{\pi}{4}$

$b(x) = x + 1$ دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = \frac{\pi}{4}$

المقام $b(x) = x + 1, \quad b\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + 1 \neq 0$

$\therefore f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ دالة متصلة عند $x = \frac{\pi}{4}$

ابحث اتصال $f(x) = \frac{x-2}{x^2+9} - \frac{1}{x}$ عند $x = 3$

$g(x) = \frac{x-2}{x^2+9}$ حدودية نسبية متصلة عند $x = 3$ لأن المقام $\neq 0$ عند $x = 3$

$h(x) = \frac{1}{x}$ حدودية نسبية متصلة عند $x = 3$ لأن المقام $\neq 0$ عند $x = 3$

$\therefore f(x) = g(x) - h(x)$ دالة متصلة عند $x = 3$

ابحث اتصال $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{2x}{x-2}$ عند $x = 1$

$u(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$: حدودية نسبية متصلة عند $x = 1$ لأن المقام $\neq 0$ عند $x = 1$

$v(x) = \frac{2x}{x-2}$: حدودية نسبية متصلة عند $x = 1$ لأن المقام $\neq 0$ عند $x = 1$

$\therefore f(x) = u(x) - v(x)$ متصلة عند $x = 1$

مسألة مشابهة من الكراسة:

2. $f(x) = \frac{x+3}{x^2+1} - \frac{3}{x}, \quad x = -1$

نظرية (15): **اتصال الدوال الجذرية عند نقطة:**

- الدالة $y = \sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x = c \in \mathbb{R}^+$ ، n عدد صحيح زوجي موجب
- الدالة $y = \sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x = c \in \mathbb{R}$ ، n عدد صحيح فردي أكبر من 1
- إذا كانت الدالة g متصلة عند كل $x = c$ ، وكان $g(c) > 0$
فإن الدالة $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x = c$

ابحث اتصال كل دالة عند العدد المبين:

$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1} \quad ,x=1$

$g(x)=\sqrt[3]{x}$ دالة جذر تكعيبي متصلة عند $x=1$

$h(x)=x^2+1$ دالة كثيرة حدود متصلة عند $x=1$

شرط المقام $h(1)=1^2+1=2 \;,\; 2\neq 0$

$\therefore f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ دالة متصلة عند $x=1$

$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+4} \quad ,x=-2$

$g(x)=\sqrt[3]{x}$ دالة جذر تكعيبي متصلة عند $x=-2$

$h(x)=x^2+4$ دالة كثيرة حدود متصلة عند $x=-2$

شرط المقام $h(-2)=(-2)^2+4=8 \;,\; 8\neq 0$

$\therefore f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ دالة متصلة عند $x=-2$

$f(x)=\sqrt{x+3} \quad ,x=-1$

$g(x)=x+3$

g متصلة عند $x=-1$

$g(-1)=(-1)+3=2 \quad ,2>0$

$\therefore f(x)=\sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x=-1$

$f(x)=\sqrt{x^2-4x+3} \quad ,x=-2$

$g(x)=x^2-4x+3$

g متصلة عند $x=-2$

$g(-2)=(-2)^2-4(-2)+3=15\,,15>0$

$\therefore f(x)=\sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x=-2$

مسائل مشابهة من الكراسة:

5. $f(x)=\sqrt{x^2+5x+4},\; x=-5$

4. $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1},x=-1$

الدالة المركبة

إذا كانت $f\,,g$ دالتين حقيقيتين، وكان مدى الدالة f هو مجموعة جزئية من مجال الدالة g فإنه يتعين دالة مركبة

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

ملاحظة: سنقتصر في دراستنا فقط على الدوال القابلة للتركيب

أوجد : $f(x) = 1 + x \;\; , g(x) = x^2 - 1$

$(g \circ f)(x) \quad = g(f(x)) = g(1+x) = (1+x)^2 - 1$

$= 1 + 2x + x^2 - 1 = x^2 + 2x$

$(g \circ f)(2) \quad = (2)^2 + 2(2) = 8$

$(f \circ g)(x) \quad = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = 1 + (x^2 - 1) = x^2$

$(f \circ g)(2) \quad = (2)^2 = 4$

$f(x) = 2x + 3 \;\; , g(x) = x^2 + 3$

$(g \circ f)(x) \quad = g(f(x)) \quad = g(2x+3) = (2x+3)^2 + 3$

$= 4x^2 + 12x + 9 + 3 = 4x^2 + 12x + 12$

$(g \circ f)(-1) \quad = 4(-1)^2 + 12(-1) + 12 = 4$

$(f \circ g)(x) \quad = f(g(x)) \quad = f(x^2+3) = 2(x^2+3)+3 = 2x^2 + 9$

$(f \circ g)(-1) \quad = 2(-1)^2 + 9 = 11$

$f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x^4 + 2$

$(f \circ g)(x) \quad = f(g(x)) = f(x^4 + 2) = \sqrt{x^4 + 2}$

$(f \circ g)(0) \quad = \sqrt{0^4 + 2} = \sqrt{2}$

$(g \circ f)(x) \quad = g(f(x)) \quad = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^4 + 2 \quad = x^2 + 2$

$(g \circ f)(0) \quad = 0^2 + 2 = 2$

$f(x) = \sqrt{1 + x^2} \quad , \quad g(x) = \dfrac{3}{x^2 + 4}$

$(f \circ g)(x) \quad = f(g(x)) \quad = f\left(\dfrac{3}{x^2+4}\right) = \sqrt{1 + \left(\dfrac{3}{x^2+4}\right)^2}$

$(g \circ f)(\sqrt{3}) \quad = g\left(f(\sqrt{3})\right) = g\left(\sqrt{1 + (\sqrt{3})^2}\right) \quad = g(2) = \dfrac{3}{(2)^2 + 4} = \dfrac{3}{8}$

تمارين مشابهة من الكراسة

6. الدالتان f,g معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = -x + 2, g(x) = x^2 - 3$ أوجد

a) $(g \circ f)(x)$ b) $(g \circ f)(-1)$ c) $(f \circ g)(x)$ d) $(f \circ g)(-1)$

7. الدالتان f,g معرفتان كما يلي: $g(x) = x^2 + 4, f(x) = \sqrt{x}$ أوجد

a) $(f \circ g)(x)$ b) $(f \circ g)(2)$ c) $(g \circ f)(x)$ d) $(g \circ f)(2)$

8. الدالتان f,g معرفتان كما يلي: $g(x) = \frac{1}{x^2+16}, f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ أوجد

a) $(g \circ f)(x)$ b) $(g \circ f)(4)$ c) $(g \circ f)(-4)$

نظرية (16) : اتصال الدوال المركبة

إذا كانت f متصلة عند c ، g متصلة عند $f(c)$ ؛ فإن الدالة المركبة gof متصلة عند c

لتكن: $g(x) = \sqrt{x}, f(x) = x^2 + 5$ ابحث اتصال $g_o f$ عند $x = -2$

① $f(x) = x^2 + 5$ كثيرة حدود متصلة عند $x = -2$

$f(-2) = (-2)^2 + 5 = 9$

② $g(x) = \sqrt{x}$ دالة جذر تربيعي متصلة عند $x = 9$ $(9 > 0)$

①,② $\Leftarrow$ gof متصلة عند $x = -2$

لتكن: $g(x) = 2x + 3$, $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$ ابحث اتصال $fo\,g$ عند $x = 1$

① $g(x) = 2x + 3$ كثيرة حدودمتصلة عند $x = 1$

$g(1) = 2(1) + 3 = 5$

② $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$ متصلة عند $x = 5$ لأن:

شرط المقام $v(5) = 5 + 2 = 7$ $7 \neq 0$,	$v(x) = x + 2$ متصلة عند $x = 5$	$u(x) = \lvert x \rvert$ متصلة عند $x = 5$

①,② $\Leftarrow$ fog متصلة عند $x = 1$

لتكن: $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ ابحث اتصال f عند $x = 2$

$$\begin{cases} h(x) = x^2 - 5x + 6 \\ g(x) = |x| \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (g \circ h)(x) = g\big(h(x)\big) \\ &= g\,(x^2 - 5x + 6) = |x^2 - 5x + 6| \end{aligned}$$

① $h(x) = x^2 - 5x + 6$ كثيرة حدود متصلة عند $x = 2$

$h(2) = (2)^2 - 5(2) + 6 = 0$

② $g(x) = |x|$ دالة متصلة عند $x = 0$

① , ② $\Leftarrow$ $f = g \circ h$ متصلة عند $x = 2$

لتكن: $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ ابحث اتصال f عند $x = 0$

$$\begin{cases} h(x) = x^2 - 3x + 2 \\ g(x) = |x| \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (g \circ h)(x) = g\big(h(x)\big) \\ &= g\,(x^2 - 3x + 2) = |x^2 - 3x + 2| \end{aligned}$$

① $h(x) = x^2 - 3x + 2$ كثيرة حدود متصلة عند $x = 0$

$h(0) = (0)^2 - 3(0) + 2 = 2$

② $g(x) = |x|$ دالة متصلة عند $x = 2$

① , ② $\Leftarrow$ $f = g \circ h$ متصلة عند $x = 0$

تمارين مشابهة من الكراسة

9. لتكن: $g(x) = \sqrt{x+4}\,,\, f(x) = 2x^2 - 3$ ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$
10. ابحث اتصال الدالة $f(x) = \left|\sqrt{x} - 3\right|$ عند $x = 4$

نظريات الاتصال - التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. الدالة f: $f(x) = x^2 + |x - 1|$ متصلة عند $x = 3$ — **ⓐ** ⓑ
2. الدالة f: $f(x) = \frac{2x+5}{x+2} - \frac{2}{x}$ متصلة عند $x = 0$ — ⓐ **ⓑ**
3. الدالة f: $f(x) = \frac{2x-2}{|x|-1}$ متصلة عند $x = 0$ — **ⓐ** ⓑ
4. الدالة f: $f(x) = \frac{\sqrt[3]{3x-1}}{x^2}$ متصلة عند $x = 3$ — **ⓐ** ⓑ
5. الدالة f: $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 4}$ متصلة عند $x = 2$ — **ⓐ** ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. نقاط انفصال الدالة f : $f(x) = \frac{-x+2}{x^2+9}$ عند :

ⓐ $x = 3$ ⓑ $x = -3$ ⓒ $x = 2$ ⓓ لا توجد نقاط انفصال

7. نقاط انفصال الدالة f : $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-1}$ عند x تساوي :

ⓐ $1 , -1$ ⓑ $2 , -2$ ⓒ $1 , 2$ ⓓ $-1 , -2$

8. $f(x) = x^2 + 3 , g(x) = \frac{x}{x-3} : x \neq 0 \Rightarrow (g \circ f)(x) =$

ⓐ $\frac{4x^2 - 18x + 27}{(x-3)^2}$ ⓑ $\frac{x^2}{x^2-3}$ ⓒ $\frac{x^2+3}{x^2}$ ⓓ $\frac{x^2}{x^2+3}$

9. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-3}} \; , g(x) = x^2 + 3 , \; x \neq 0 \; \Rightarrow (f \circ g)(x) =$

ⓐ $\frac{x^2}{x-3} + 3$ ⓑ $\frac{x^2}{\sqrt{x-3}} + 3$ ⓒ $\frac{-(x^2+3)}{x}$ ⓓ $\frac{x^2+3}{|x|}$

10. لتكن الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^2+7}$, g : $g(x) = x^2 - 3$ فإن: $(f \circ g)(0)$ يساوي :

ⓐ 4 ⓑ -4 ⓒ 1 ⓓ -1

11. إذا كانت g دالة متصلة عند $x = 2$ فإن الدالة المتصلة عند $x = 2$ فيما يلي هي :

ⓐ $\sqrt{g(x)}$ ⓑ $\frac{1}{g(x)}$ ⓒ $\frac{g(x)}{x-2}$ ⓓ $|g(x)|$

12. إذا كانت الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^2 - a}$ متصلة عند $x = 3$ فإن a يمكن أن تساوي :

ⓐ 4 ⓑ 9 ⓒ 16 ⓓ 25

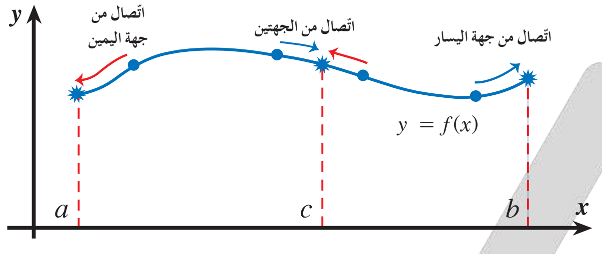
الاتصال على فترة

الاتصال على فترة مفتوحة

تكون الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة $(a\,,b)$ إذا كانت متصلة عند كل x تنتمي إلى الفترة $(a\,,b)$

الاتصال على فترة مغلقة

تكون الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a\,,b]$إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:



① الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة $(a\,,b)$

② الدالة f متصلة عند $x=a$ من جهة اليمين أي:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$$

③ الدالة f متصلة عند $x=b$ من جهة اليسار أي: $\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

ملاحظات:

- إذا تحقق الشرطان ① ، ② من التعريف السابق تكون الدالة متصلة على الفترة $[a,b)$
- إذا تحقق الشرطان ① ، ③ من التعريف السابق تكون الدالة متصلة على الفترة $(a,b]$
- إذا كانت الدالة متصلة على فترة ما فإنها متصلة على أي فترة جزئية منها
- إذا كانت الدالة متصلة على كل من الفترتين $[a,c]$,$[c,b]$ فإن الدالة متصلة على الفترة $[a,b]$
- يبقى التعريف السابق صحيحاً في حالة الفترات على الصورة $[a,\infty)$,$(-\infty,b]$

ادرس اتصال الدالة f على $[1,3]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}-2 & : x=1\\ x^2-3 & : 1<x<3\\ 6 & : x=3\end{cases}$$

1   3

$f(x)=x^2-3 : x\in(1,3)$

$\forall c\in(1,3)$

$f(c)=c^2-3$

$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c}(x^2-3)$

$=c^2-3$

$\because \lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

$\forall c\in(1,3)$

$\therefore$ f متصلة على $(1,3)$

①

$f(1)=-2$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-3)$

$=(1)^2-3=-2$

$\because \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

$\therefore$ f متصلة
عند $x=1$ من اليمين

②

$f(3)=6$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

$=\lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-3)$

$=(3)^2-3=6$

$\because \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3)$

$\therefore$ f متصلة
عند $x=3$ من اليسار

③

①,②,③ $\Longrightarrow$ f متصلة على $[1,3]$

طريقة ثانية

ادرس اتصال الدالة f على $[1,3]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}-2 & : x=1\\ x^2-3 & : 1<x<3\\ 6 & : x=3\end{cases}$$

1   3

نفرض: $h(x)=x^2-3$

h كثيرة حدود
متصلة على $\mathbb{R}$

$\because f(x)=h(x)\ \forall x\in(1,3)$

$\therefore$ f متصلة على $(1,3)$

①

$f(1)=-2$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-3)$

$=(1)^2-3=-2$

$\because \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

$\therefore$ f متصلة
عند $x=1$ من اليمين

②

$f(3)=6$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=$

$=\lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-3)$

$=(3)^2-3=6$

$\because \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3)$

$\therefore$ f متصلة
عند $x=3$ من اليسار

③

①,②,③ $\Longrightarrow$ f متصلة على $[1,3]$

ادرس اتصال الدالة f على $[1,5]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & : x=1 \\ \dfrac{x^2+1}{x} & : 1<x<5 \\ \dfrac{26}{5} & : x=5 \end{cases}$$

1 5

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x} : x\in(1,5)$$

$$\forall c\in(1,5)$$

$$f(c)=\frac{c^2+1}{c}$$

$$\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c}\frac{x^2+1}{x}$$

$$=\frac{c^2+1}{c}$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to c} x = c\ , c\neq 0$$

$$\because \lim_{x\to c} f(x)=f(c)$$

$$\forall c\in(1,5)$$

$\therefore$ f متصلة على $(1,5)$

①

$$f(1)=2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+1}{x}$$

$$=\frac{1^2+1}{1}$$

$$=2$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to 1^+} x = 1\ , 1\neq 0$$

$$\because \lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$$

$\therefore$ f متصلة عند $x=1$ من اليمين

②

$$f(5)=\frac{26}{5}$$

$$\lim_{x\to 5^-} f(x)$$

$$=\lim_{x\to 5^-}\frac{x^2+1}{x}$$

$$=\frac{5^2+1}{5}=\frac{26}{5}$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to 5^-} x = 5\ , 5\neq 0$$

$$\because \lim_{x\to 5^-} f(x)=f(5)$$

$\therefore$ f متصلة عند $x=5$ من اليسار

③

①,②,③ $\Longrightarrow$ f متصلة على $[1,5]$

طريقة ثانية

ادرس اتصال الدالة f على $[1,5]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & : x=1 \\ \dfrac{x^2+1}{x} & : 1<x<5 \\ \dfrac{26}{5} & : x=5 \end{cases}$$

1 ———— 5

نفرض: $g(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

g حدودية نسبية متصلة

$\forall x \in \mathbb{R}-\{0\}$

$\because f(x)=g(x) \;\; \forall x \in (1,5)$

$\therefore f$ متصلة على $(1,5)$

①

$f(1)=2$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+1}{x}$

$=\dfrac{1^2+1}{1}=2$

نهاية المقام:

$\lim\limits_{x\to1^+} x=1\,,1\neq0$

$\because \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)$

$\therefore f$ متصلة

عند $x=1$ من اليمين

②

$f(5)=\dfrac{26}{5}$

$\lim\limits_{x\to5^-} f(x)$

$=\lim\limits_{x\to5^-}\dfrac{x^2+1}{x}$

$=\dfrac{5^2+1}{5}=\dfrac{26}{5}$

نهاية المقام:

$\lim\limits_{x\to5^-} x=5\,,5\neq0$

$\because \lim\limits_{x\to5^-} f(x)=f(5)$

$\therefore f$ متصلة

عند $x=5$ من اليسار

③

①,②,③ $\Longrightarrow$ f متصلة على $[1,5]$

تمرين مشابه من الكراسة:

.5 ادرس اتصال الدالة على $[-3,4]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases} -5 & : x=-3 \\ -x^2+4 & : -3<x<4 \\ -10 & : x=4 \end{cases}$$

ادرس اتصال كل من الدوال التالية على الفترة المبينة:

Q $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, $[-1,5]$

f حدودية نسبية

$\forall x\in\mathbb{R}\ , x^2+1\neq 0 \Rightarrow$ f متصلة على $\mathbb{R}$

$\because [-1\,,5] \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow$ f متصلة على $[-1\,,5]$

Q $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$, $[0,5]$

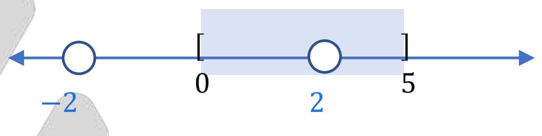
f حدودية نسبية

$x^2-4=0 \Rightarrow$ $(x-2)(x+2)=0 \Rightarrow x=2\,, x=-2$

$\therefore f$ متصلة $\forall x\in\mathbb{R}-\{\pm 2\}$

$\because f$ غير متصلة عند $x=2\,,\ 2\in[0,5]$

$\therefore f$ متصلة $\forall x\in[0,5]-\{2\}$



f متصلة على كل من $(2\,,5]$, $[0\,,2)$

ادرس اتصال كل من الدوال التالية على الفترة المبينة:

Q $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+2}$, $[0,3]$

f حدودية نسبية

$\forall x\in\mathbb{R},\quad x^2+2\neq 0 \Rightarrow$ f متصلة على $\mathbb{R}$

$\because [0\,,3] \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow$ f متصلة على $[0\,,3]$

Q $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$, $[0,2]$

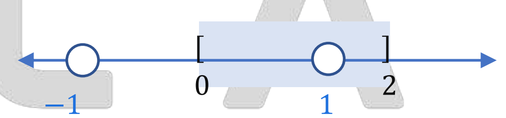
f حدودية نسبية

$x^2-1^2=(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow$ $x=1\,, x=-1$

$\therefore f$ متصلة $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\,,1\}$

$\because f$ غير متصلة عند $x=1\,,\ 1\in[0,2]$

$\therefore f$ متصلة $\forall x\in[0,2]-\{1\}$



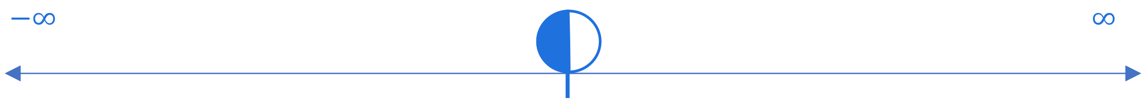
f متصلة على كل من $(1\,,2]$, $[0\,,1)$

تمارين مشابهة من الكراسة:

1. $f(x)=x^2+2x-3$, $[-2,5]$
2. $f(x)=\frac{7x}{x^2+5}$, $[1,3]$
3. $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$, $[0,5]$
4. $f(x)=\frac{-x+3}{x^2-5x+4}$, $[-2,6]$

ادرس اتصال الدالة على مجالها: $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le -1 \\ \frac{4}{x+3}, & x>-1 \end{cases}$

$D_f=(-\infty,-1]\cup(-1,\infty)=\mathbb{R}$



نفرض: $g(x)=x+3$ $\quad$ -1 $\quad$ نفرض: $h(x)=\dfrac{4}{x+3}$

$g(x)$ كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$h(x)$ حدودية نسبية متصلة $\forall x\in\mathbb{R}-\{-3\}$

$\because f(x)=g(x)\quad \forall x\in(-\infty,-1]$

① $\therefore f$ متصلة على $(-\infty,-1]$

$\because f(x)=h(x)\quad \forall x\in(-1,\infty)$

② $\therefore f$ متصلة على $(-1,\infty)$

ندرس اتصال الدالة f عند $x=-1$ من اليمين

$f(-1)=(-1)+3=2$

نهاية المقام

$\lim\limits_{x\to -1^+}(x+3)=2\,,\ 2\neq 0$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{4}{x+3}=\dfrac{4}{2}=2$

③ $\because \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)\ \Rightarrow$ f متصلة عند $x=-1$ من اليمين

من ①, ②, ③ نجد أن f متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

تمرين مشابه من الكراسة:

6. ادرس اتصال الدالة على مجالها : $f(x)=\begin{cases} -x+4, & x\le 7 \\ \frac{9}{-x+4}, & x>7 \end{cases}$

ادرس اتصال الدالة على مجالها:
$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & ,x<1\\ -x+2 & ,1\le x<3\\ 1 & ,x\ge 3\end{cases}$$

$D_f=(-\infty,1)\cup[1,3)\cup[3,\infty)=\mathbb{R}$

نفرض:	نفرض:	نفرض:
$a(x)=1$	$v(x)=-x+2$	$u(x)=2x-1$
دالة ثابتة (كثيرة حدود) متصلة على $\mathbb{R}$	كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$	كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$
$\forall x\in[3,\infty)$	$\forall x\in[1,3)$	$\forall x\in(-\infty,1)$
$f(x)=a(x)$	$f(x)=v(x)$	$f(x)=u(x)$
$\therefore$ f متصلة على $[3,\infty)$ ③	$\therefore$ f متصلة على $[1,3)$ ②	$\therefore$ f متصلة على $(-\infty,1)$ ①

معلق

الاتصال عند 3 من اليسار

$f(3)=1$

$\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}(-x+2)=-(3)+2=-1$

$\because \lim\limits_{x\to3^-}f(x)\ne f(3)\Rightarrow$

$\therefore$ f غير متصلة عند 3 من اليسار ⑤

الاتصال عند 1 من اليسار

$f(1)=-(1)+2=1$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(2x-1)=2(1)-1=1$

$\because \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)\Rightarrow$

$\therefore$ f متصلة عند 1 من اليسار ④

من ①, ②, ③, ④, ⑤ نجد : f غير متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

لكن f متصلة على كل من $(-\infty,3),[3,\infty)$

تمارين مشابهة من الكراسة:

ادرس اتصال كل دالة على مجالها :

(9)
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x+2} & : x\le-4\\ x^2+3x-6 & : -4<x\le1\\ x^3-3x^2 & : x>1\end{cases}$$

(8)
$$f(x)=\begin{cases}x^3-1 & , x\le-2\\ x-7 & , -2<x<4\\ x^2-7 & , x\ge4\end{cases}$$

إذا كانت الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ أوجد قيمة الثابتين $a\ ,b$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-a, & x<0 \\ 2, & x=0 \\ ax+b, & x>0 \end{cases}$$

$f(0)=2$

x^2-a $\quad$ $ax+b$

0

$\because f$ متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

$\therefore f$ متصلة عند $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}(ax+b)=f(0)$

$a(0)+b=2 \quad \Rightarrow b=2$

$\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-a)=f(0)$

$0^2-a=2 \quad \Rightarrow a=-2$

إذا كانت الدالة f متصلة على $[1,4]$ أوجد قيمة الثابتين $a\ ,b$

$$f(x)=\begin{cases} 5, & x=1 \\ ax+b, & 1<x<4 \\ b+8, & x=4 \end{cases}$$

1 $\quad$ $ax+b$ $\quad$ 4

$f(1)=5$ $\quad$ $f(4)=b+8$

$\because f$ متصلة على $[1,4]$

$\therefore f$ متصلة عند 4 من اليسار & $\therefore f$ متصلة عند 1 من اليمين

$\lim\limits_{x\to 4^-}f(x)=f(4)$

$\lim\limits_{x\to 4^-}(ax+b)=b+8$

$4a+\cancel{b}=\cancel{b}+8 \quad \Rightarrow a=2$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=5$

$a+b=5 \Rightarrow \quad 2+b=5 \Rightarrow b=3$

تمارين مشابهة من الكراسة:

أوجد قيم a , b بحيث تكون كل دالة متصلة على مجال تعريفها

معلق

$$10.\ f(x)=\begin{cases} x^2-\sqrt{x} & : \ x<1 \\ 3x+a & : \ x>1 \\ b & : \ x=1 \end{cases} \qquad 11.\ f(x)=\begin{cases} x^2 & : \ x<-2 \\ \frac{x^2-a}{x-b} & : \ -2\le x<1 \\ x & : \ x\ge 1 \end{cases}$$

تعميم :

إذا كانت g متصلة على فترة ما، $g(x) \geq 0$ في هذه الفترة
فإن الدالة $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة على هذه الفترة

Q $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ أوجد مجال الدالة f ثم ادرس اتصال f على الفترة $[-5,0]$

$g(x) = x^2 - 2x$

$D_f = \{x : g(x) \geq 0\}$

$x^2 - 2x \geq 0$

$x^2 - 2x = 0$ المعادلة المناظرة

$x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \ , x = 2$

$D_f = (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

$= \mathbb{R} - (0, 2)$

اتصال الدالة f على $[-5, 0]$

$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - (0, 2)$

$\because [-5, 0] \subseteq \mathbb{R} - (0, 2)$

① $\therefore g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-5, 0]$

② $g(x)$ متصلة على $[-5,0]$

①,② $\Longrightarrow$ f متصلة على $[-5,0]$

Q $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$ أوجد مجال الدالة f ثم ادرس اتصال f على الفترة $[6,10]$

$g(x) = x^2 - 7x + 10$

$D_f = \{x : g(x) \geq 0\}$

$x^2 - 7x + 10 \geq 0$

$x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow$

$x = 5 \ , x = 2$

$D_f = (-\infty, 2] \cup [5, \infty)$

$= \mathbb{R} - (2, 5)$

اتصال الدالة f على $[6, 10]$

$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - (2, 5)$

$\because [6, 10] \subseteq \mathbb{R} - (2, 5)$

① $\therefore g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [6, 10]$

② $g(x)$ متصلة على $[6,10]$

①,② $\Longrightarrow$ f متصلة على $[6,10]$

$f(x) = \sqrt{9-x^2}$ أوجد مجال الدالة f ثم ادرس اتصال f على الفترة $[-3,3]$

$g(x) = 9 - x^2$

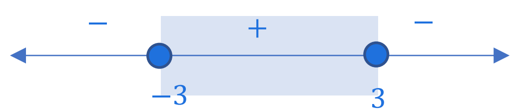
$Df = \{x : g(x) \geq 0\}$

$9 - x^2 \geq 0$

$9 - x^2 = 0$ المعادلة المناظرة

$(3-x)(3+x) = 0 \Rightarrow$

$x = 3 \, , x = -3$



$D_f = [-3\,,3]$

اتصال الدالة f على $[-3\,,3]$

① $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-3\,,3]$

② $g(x)$ متصلة على $[-3\,,3]$

①,② $\Rightarrow$ f متصلة على $[-3\,,3]$

$f(x) = \sqrt{-x^2+4x-3}$ ادرس اتصال f على الفترة $[1,3]$

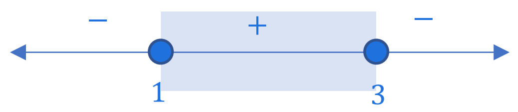
$g(x) = -x^2 + 4x - 3$

$Df = \{x : g(x) \geq 0\}$

$-x^2 + 4x - 3 \geq 0$

$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow$

$x = 1 \, , x = 3$



$D_f = [1, 3]$

اتصال الدالة f على $[1\,,3]$

① $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1\,,3]$

② $g(x)$ متصلة على $[1\,,3]$

①,② $\Rightarrow$ f متصلة على $[1\,,3]$

تمارين مشابهة من الكراسة:

12. أوجد مجال الدالة ثم ادرس اتصالها على الفترة $[0,4]$ $\quad f(x) = \sqrt{-x^2+5x+6}$

13. ادرس اتصال الدالة على مجالها $\quad f(x) = \sqrt{8-2x^2}$

14. ادرس اتصال الدالة على مجالها $\quad f(x) = \sqrt{x^2-1}$

ملاحظة :
ناتج تركيب دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$ هو دالة متصلة على $\mathbb{R}$

ادرس اتصال f على $\mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4}$

$h(x) = x^2 - 5x + 4$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g\,(x^2 - 5x + 4) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4}$

$\because$ $h(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$ ، $g(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore$ $f(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها تركيب دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$

ادرس اتصال f على $\mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x + 5}$

$h(x) = -x^2 + 2x + 5,$ $g(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g\,(-x^2 + 2x + 5) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x + 5}$

$\because$ $h(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$ ، $g(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore$ $f(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها تركيب دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$

تمارين مشابهة من الكراسة:

ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$

16. $f(x) = |3x^2 + 4x - 1|$

15. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 2}$

الاتصال على فترة - التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. إذا كانت f دالة متصلة كل من $[1,3),[3,5]$ فإن f متصلة على $[1,5]$ (a) (b)
2. الدالة f : $f(x) = x^2 - |x|$ متصلة لكل قيم $x \in \mathbb{R}$ (a) (b)
3. الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ متصلة على $[-2,2]$ (a) (b)
4. الدالة f : $f(x) = \frac{2x-3}{x+2}$ متصلة على $(-\infty,0)$ (a) (b)
5. الدالة f : $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ متصلة على $(-\infty,2)$ فقط (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. لتكن الدالة f: $f(x)=\frac{x+1}{x-4}$ فإن الدالة f:

ⓐ لها نقطتا انفصال عند كل من $x=-1\,,x=4$

ⓑ متصلة على $(-\infty,4]$

ⓒ متصلة على كل من $(-\infty,4),(4,\infty)$

ⓓ ليس أي مما سبق

7. إذا كانت f دالة متصلة على $[-2,3]$ فإن:

معلق

ⓐ $\lim_{x\to-2^+} f(x)=\lim_{x\to3^-} f(x)$

ⓑ $\lim_{x\to-2^+} f(x)=f(3)$

ⓒ $\lim_{x\to-2^+} f(x)=f(-2)$

ⓓ $\lim_{x\to3^-} f(x)=f(-2)$

8. الدالة f: $f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-25}}$ متصلة على:

ⓐ $(-\infty,\frac{1}{2}]$

ⓑ $(5,\infty)$

ⓒ $\mathbb{R}$

ⓓ $(-5,5)$

9. لتكن f: $f(x)=\begin{cases}\frac{5}{2} & : x\le-3\\ \frac{\sqrt{x^2+16}}{2} & : -3<x<0\\ \frac{4-x^2}{x-2} & : x\ge0\,,x\ne2\end{cases}$ فإن f دالة متصلة على:

ⓐ $(-\infty,\infty)$

ⓑ $(-\infty,2)$

ⓒ $(-\infty,0]$

ⓓ $(-\infty,-3]$

معلق

10. الدالة f: $f(x)=\begin{cases}\frac{3x+m}{x-2} & : x<1\\ x+n & : x>1\\ 2m & : x=1\end{cases}$ متصلة على $\mathbb{R}$ إذا كان:

ⓐ $m=-1\,,n=3$

ⓑ $m=1\,,n=-3$

ⓒ $m=-1\,,n=-3$

ⓓ $m=1\,,n=3$

11. الدالة g: $g(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & : \; x>1\\ 3x & : \; x\le1\end{cases}$ متصلة على:

ⓐ $(-\infty,1]\,,(1,\infty)$

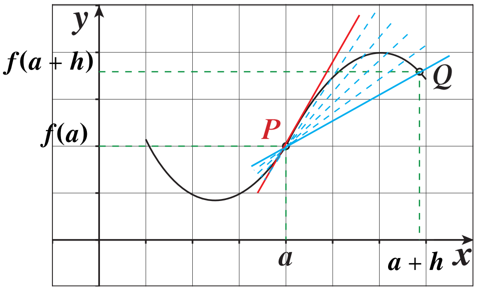
ⓑ $(-\infty,1)\,,[1,\infty)$

ⓒ $(-\infty,\infty)$

ⓓ $(-\infty,3]$

معدلات التغير وخطوط المماس

لو فرضنا أن جسيماً يتحرك في خط مستقيم خلال فترة زمنية صغيرة جدا مقدارها h فإنه عندما $t = t_1$ يكون الجسيم عند الموقع $d\,(t_1)$ وعندما $t = t_1 + h$ يكون الموقع هو $d\,(t_1 + h\,)$



السرعة المتوسطة $\bar{v} = \dfrac{d(t_1+h)-d(t_1)}{h}$

السرعة اللحظية $v = \lim\limits_{h\to 0} \bar{v} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{d(t_1+h)-d(t_1)}{h}$

ميل القاطع للمنحنى $m\,(\overleftrightarrow{PQ}) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

ميل المماس للمنحنى عند النقطة $P(a\,,f(a))$ $\quad m= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

أوجد ميل المماس للقطع المكافئ $y = x^2$ عند النقطة $p(2,4)$.

ميل القاطع $= \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{f(2+h)-4}{h} = \dfrac{(2+h)^2-2^2}{h} = \dfrac{\cancel{(2+h-2)}(2+h+2)}{\cancel{h}} = 4+h \quad : h \neq 0$

ميل المماس $= m = \lim\limits_{h\to 0}(4+h) = 4+0=4$

أوجد ميل المماس للقطع المكافئ $y = (x-2)^2+2$ عند النقطة $A\,(1\,,3)$

ميل القاطع $= \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{f(1+h)-3}{h} = \dfrac{(1+h-2)^2+2-3}{h} = \dfrac{(h-1)^2-1^2}{h}$

$= \dfrac{(h-1-1)\cancel{(h-1+1)}}{\cancel{h}} = h-2 \qquad : h \neq 0$

ميل المماس $= m = \lim\limits_{h\to 0}(h-2) = 0-2 = -2$

معدلات التغير وخطوط المماس-التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. ميل مماس منحنى الدالة f عند النقطة $(c\,,f(c))$ هو $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ — (a) (b)

2. السرعة المتوسطة لجسم متحرك على خط مستقيم هي: $\overline{v}=\frac{d(t_1+h)-d(t_1)}{h}$ — (a) (b)

معلق

3. ميل مماس منحنى الدالة f : $f(x)=x^2$ عند $x=-2$ هو 4 — (a) (b)

4. ميل مماس منحنى الدالة f : $f(x)=|x|$ عند $x=-2$ هو 2 — (a) (b)

5. يكون مماس منحنى الدالة f : $f(x)=4$ عند النقطة $(-1\,,4)$ موازياً لمحور السينات — (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. ميل مماس منحنى الدالة f : $f(x)=9-x^2$ عند $x=2$ هو :

(a)	(b)	(c)	(d)
-5	-4	4	5

7. ليكن منحنى الدالة f : $f(x)=x^2-4x+3$ فإن النقطة التي يكون مماس المنحنى عندها أفقيا هي :

(a)	(b)	(c)	(d)
$(3\,,0)$	$(1\,,0)$	$(2\,,-1)$	$(-1\,,2)$

المشتقة

المشتقة عند نقطة

تعريف مشتقة الدالة f عند $x = a$ هي : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

تعريف (بديل) لمشتقة الدالة f عند $x = a$ هي : $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f: $f(x) = 2x^2 + 1$ عند $x = 1$

الحل بطريقة التعريف البديل :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$ (إن وُجدت)

$$x = 1 \Rightarrow a = 1, f(1) = 2(1)^2 + 1 = 3$$

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + 1 - 3}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2\cancel{(x - 1)}(x + 1)}{\cancel{x - 1}} =$$

$$= 2 \lim_{x \to 1}(x + 1) = 2(1 + 1) = 4$$

باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f: $f(x) = 3x^2$ عند $x = -2$

الحل بطريقة التعريف البديل :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$ (إن وُجدت)

$$x = -2 \Rightarrow a = -2, f(-2) = 3(-2)^2 = 12$$

$$f'(-2) = \lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \to -2} \frac{3x^2 - 12}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{3(x^2 - 4)}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{3(x - 2)\cancel{(x + 2)}}{\cancel{x + 2}} \quad : x \neq -2$$

$$= 3 \lim_{x \to -2}(x - 2) = 3(-2 - 2) = -12$$

الحل باستخدام التعريف: $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = 2x^2 + 1$ عند $x = 1$

إن وجدت

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$x = 1 \Rightarrow a = 1, f(1) = 2(1)^2 + 1 = 3$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2(1+h)^2+1-3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(1+h)^2-2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2[(1+h)^2-1^2]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2[\cancel{(1+h-1)}(1+h+1)]}{\cancel{h}}$$

$$= 2\lim_{h\to 0}(2+h) = 2(2+0) = 4$$

باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = 3x^2$ عند $x = -2$

إن وجدت

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$x = -2 \Rightarrow a = -2, f(-2) = 3(-2)^2 = 12$$

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-12}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3(-2+h)^2-12}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3[(-2+h)^2-4]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3(-2+h-2)\cancel{(-2+h+2)}}{\cancel{h}} = 3\lim_{h\to 0}(-4+h) = 3(-4+0) = -12$$

باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة $f: f(x)=\sqrt{x}$ عند $x=a$ حيث $a>0$

الحل بطريقة التعريف البديل :

إن وجدت

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\overset{1}{\cancel{x-a}}}{\cancel{(x-a)}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$: x\neq a$

$$=\frac{\lim_{x\to a}1}{\lim_{x\to a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

شرط الجذر $a>0$

نهاية البسط: $\lim_{x\to a}1=1$

نهاية المقام $\lim_{x\to a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})$

$$=\lim_{x\to a}\sqrt{x}+\lim_{x\to a}\sqrt{a}$$

$$=\sqrt{a}+\sqrt{a}=2\sqrt{a}\ :2\sqrt{a}\neq 0$$

أوجد باستخدام التعريف مشتقة الدالة $f: f(x)=\frac{1}{x}$ عند $x=b$, $b\neq 0$

إن وجدت

$$f'(b)=\lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{b}}{x-b}$$

$$=\lim_{x\to b}\frac{\frac{\overset{-1}{\cancel{b-x}}}{xb}}{\cancel{x-b}}=\lim_{x\to b}\frac{-1}{xb}=\frac{-1}{(b).b}=\frac{-1}{b^2}$$

نهاية المقام:

$: \lim_{x\to b}(xb)=b^2,\ b^2\neq 0$

💡 **تمارين مشابهة من الكراسة:**

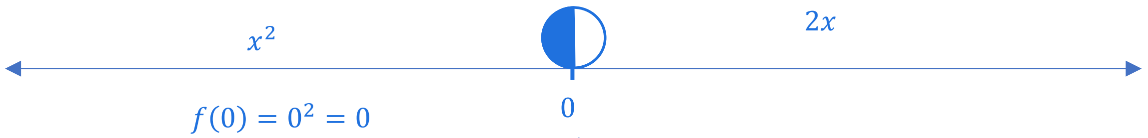
1. باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة $f: f(x)=\frac{3}{x}$ عند $x=3$

2. باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة $f: f(x)=2x^3$ عند $x=1$

المشتقة من جهة واحدة

بين أن الدالة التالية لها مشتقة من جهة اليمين ولها مشتقة من جهة اليسار عند $x = 0$ لكن ليس لها مشتقة عند $x = 0$:

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & ,x \le 0 \\ 2x & ,x > 0 \end{cases}$



$f(0) = 0^2 = 0$

(إن وُجدت) $f'_+(0) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$= \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2x-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+} 2 = 2$

(إن وُجدت) $f'_-(0) = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

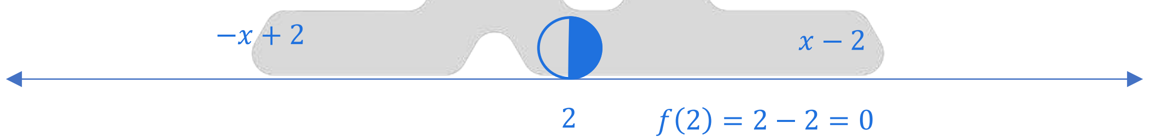
$= \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x^2-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x\to0^-} x = 0$

$\because f'_-(0) \ne f'_+(0) \Longrightarrow$ $f'(0)$ غير موجودة

لتكن f : $f(x) = |x-2|$ ، **ابحث** قابلية اشتقاق الدالة f عند $x = 2$

الدالة f متصلة عند $x = 2$، نبحث قابلية اشتقاق الدالة عند $x = 2$

$f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2 & x \ge 2 \\ -x+2 & x < 2 \end{cases}$



$f(2) = 2-2 = 0$

(إن وُجدت) $f'_+(2) = \lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{\overset{1}{\cancel{x-2}}-0}{\cancel{x-2}} = \lim\limits_{x\to2^+} 1 = 1$

(إن وُجدت) $f'_-(2) = \lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{\overset{-1}{\cancel{-x+2}}-0}{\cancel{x-2}} = \lim\limits_{x\to2^-} -1 = -1$

$\because f'_-(2) \ne f'_+(2) \Longrightarrow f'(2)$ غير موجودة

الدالة f متصلة عند $x = 2$، لكنها غير قابلة للاشتقاق عند $x = 2$

لتكن f : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} & ,x \le 1 \\ \sqrt{x} & ,x > 1 \end{cases}$ بين أن للدالة f مشتقة لجهة اليمين مساوية للمشتقة لجهة اليسار عند $x = 1$

$$f(1) = \frac{1}{4}(1)^2 + \frac{3}{4} = 1$$

$\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}$ 1 $\sqrt{x}$

إن وجدت $f'_+(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\overset{1}{\cancel{x - 1}}}{\cancel{(x - 1)}(\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 1^+} 1}{\lim\limits_{x \to 1^+} (\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{2}$$

شرط الجذر $1 > 0$

نهاية البسط: $\lim\limits_{x \to 1^+} 1 = 1$

نهاية المقام $\lim\limits_{x \to 1^+} (\sqrt{x} + 1) =$

$$\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x} + \lim_{x \to 1^+} 1 = \sqrt{1} + 1 = 2$$

$$2 \ne 0$$

إن وجدت $f'_-(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{1}{4}(x^2 - 1)}{x - 1}$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{x \to 1^-} \frac{\cancel{(x - 1)}(x + 1)}{\cancel{x - 1}}$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{x \to 1^-} (x + 1)$$

$$= \frac{1}{4}(1 + 1) = \frac{1}{2}$$

$$\because f'_-(1) = f'_+(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$

لتكن الدالة: $f: f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , x \le -1 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} & , x > -1 \end{cases}$ بين أن للدالة f مشتقة لجهة اليمين مساوية للمشتقة لجهة اليسار عند $x = -1$

$f(-1) = \frac{1}{-1} = -1$

$\frac{1}{x}$	-1	$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}$

$f'_{+}(-1) = \lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$ (إن وُجدت)

$= \lim_{x \to -1^+} \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} + 1}{x + 1}$

$= \lim_{x \to -1^+} \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}}{x + 1}$

$= \lim_{x \to -1^+} \frac{\frac{1}{2}(x^2 - 1)}{x + 1}$

$= \frac{1}{2} \lim_{x \to -1^+} \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}$

$= \frac{1}{2} \lim_{x \to -1^+} (x - 1)$

$= \frac{1}{2}(-1 - 1) = -1$

$f'_{-}(-1) = \lim_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$ (إن وُجدت)

$= \lim_{x \to -1^-} \frac{\frac{1}{x} + 1}{x + 1}$

$= \lim_{x \to -1^-} \frac{\left(\frac{\cancel{1+x}}{x}\right)}{\cancel{x+1}}$

$= \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{-1} = -1$

$\lim_{x \to -1^-} x = -1, -1 \ne 0$ نهاية المقام

$\because f'_{-}(-1) = f'_{+}(-1) = -1 \Longrightarrow f'(-1) = -1$

⚠ معلق

تمارين مشابهة من الكراسة:

3. بين أن الدالة f لها مشتقة لجهة اليمين و مشتقة لجهة اليسار عند $x = 1$

لكن ليس لها مشتقة عند $x = 1$ $\quad f(x) = \begin{cases} x^3, & x \le 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$

لتكن $f(x) = x^3$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة إن وجدت

طريقة (1) :

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \text{(إن وُجدت)}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}(x^2+ax+a^2)}{\cancel{x-a}}$$

$$= (a)^2 + a(a) + a^2 = 3a^2$$

$$\because f'(a) = 3a^2 \qquad \therefore f'(x) = 3x^2$$

طريقة (2) :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{(x+h-x)}\left((x+h)^2+x(x+h)+x^2\right)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0}(x+h)^2 + \lim_{h\to 0}x(x+h) + \lim_{h\to 0}x^2$$

$$= (x+0)^2 + x(x+0) + x^2 \qquad = x^2+x^2+x^2 = 3x^2$$

لتكن $f(x) = x^2 + 2$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة

طريقة (1) :

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \text{(إن وُجدت)}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{x^2+2-(a^2+2)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x^2+2-a^2-2}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{x-a}} = \lim_{x\to a}(x+a) = a+a = 2a$$

$$\because f'(a) = 2a \qquad \therefore f'(x) = 2x$$

طريقة (2) :

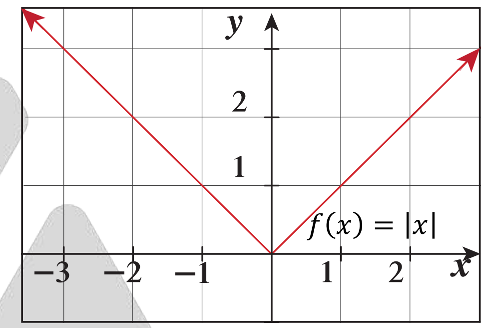
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+2-(x^2+2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+2-x^2-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{(x+h-x)}(x+h+x)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x+0 = 2x$$

▪ **ركن :**

تكون المشتقة من جهة اليمين لا تساوي المشتقة من جهة اليسار $f'_+(a) \neq f'_-(a)$



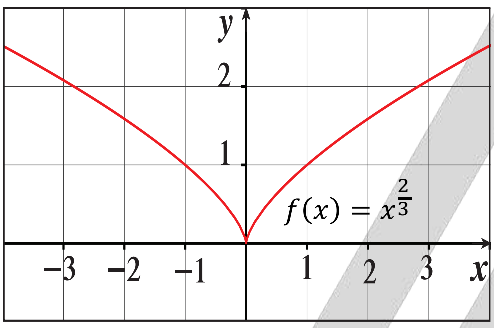
▪ **ناب :**

يكون ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطع محددة يقترب من ∞ من جهة ويقترب من ∞− من الجهة الثانية

$$f'_-(a) \to \infty \ \& \ f'_+(a) \to -\infty$$

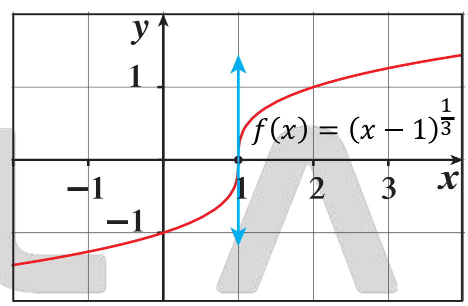
أو

$$f'_-(a) \to -\infty \ \& \ f'_+(a) \to +\infty$$



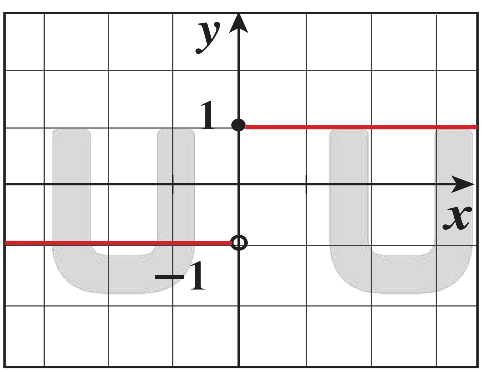
▪ **مماس رأسي :**

يكون المماس رأسياً عند نقطة محددة



▪ **عدم اتصال :**

إذا كانت الدالة غير متصلة عند $x = a$ فإن $f'(a)$ غير موجودة



لتكن الدالة: $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x<2 \\ 2x-1 & ,x\geq 2\end{cases}$ ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x=2$

نبحث اتصال الدالة f عند $x=2$

x^2 2 $2x-1$

$f(2)=2(2)-1=3$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x^2=(2)^2=4$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(2x-1)$
$=2(2)-1=3$

$\because \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ $\quad\therefore \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة

بالتالي f ليست متصلة عند $x=2$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x=2$

لتكن الدالة: $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & ,x\leq 2 \\ 3x-2 & ,x>2\end{cases}$ ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x=2$

نبحث اتصال الدالة f عند $x=2$

x^2-4 2 $3x-2$

$f(2)=2^2-4=0$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-4)=(2)^2-4=0$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=$
$\lim\limits_{x\to 2^+}(3x-2)=3(2)-2=4$

$\because \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ $\quad\therefore \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة

بالتالي f ليست متصلة عند $x=2$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x=2$

لتكن الدالة: $f(x) = \begin{cases} 6x-1 & ,x > \frac{1}{2} \\ 2x+1 & ,x \le \frac{1}{2} \end{cases}$ بيّن أن الدالة f متصلة عندما $x = \frac{1}{2}$

ولكنها غير قابلة للاشتقاق عندها

الاتصال

$2x+1 \qquad \frac{1}{2} \qquad 6x-1$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 2$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} (2x+1)$

$= 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 2$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} (6x-1)$

$= 6\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 2$

$\because \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = 2$

$\because \lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$ f متصلة عند $x = \frac{1}{2}$

معلق

الاشتقاق

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 2$

إن وجدت $f'_-\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}}$

$= \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{2x+1-2}{x-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{2x-1}{x-\frac{1}{2}}$

$= \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{2\cancel{\left(x-\frac{1}{2}\right)}}{\cancel{x-\frac{1}{2}}} = \quad : x \ne \frac{1}{2}$

$= \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} (2) = 2$

إن وجدت $f'_+\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}}$

$= \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{6x-1-2}{x-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{6x-3}{x-\frac{1}{2}}$

$= \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{6\cancel{\left(x-\frac{1}{2}\right)}}{\cancel{x-\frac{1}{2}}} = \quad : x \ne \frac{1}{2}$

$= \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} (6) = 6$

$\because f'_-\left(\frac{1}{2}\right) \ne f'_+\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$ غير موجودة $f'\left(\frac{1}{2}\right)$

الدالة f متصلة عند $x = \frac{1}{2}$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند $x = \frac{1}{2}$

لتكن الدالة: $f(x)=\begin{cases}-x-1 & ,x>-\frac{1}{3}\\ 5x+1 & ,x\le -\frac{1}{3}\end{cases}$ بين أن الدالة f متصلة وغير قابلة للاشتقاق عند $x=-\frac{1}{3}$

الاتصال

$$\xleftarrow{\quad 5x+1 \quad}\ \frac{-1}{3}\ \xrightarrow{\quad -x-1 \quad}$$

$f\left(\frac{-1}{3}\right)=5\left(\frac{-1}{3}\right)+1=\frac{-2}{3}$

$\lim\limits_{x\to\frac{-1}{3}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{-1}{3}^-}(5x+1)$

$=5\left(\frac{-1}{3}\right)+1=\frac{-2}{3}$

$\lim\limits_{x\to\frac{-1}{3}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{-1}{3}^+}(-x-1)$

$=-\left(\frac{-1}{3}\right)-1=\frac{-2}{3}$

$\because \lim\limits_{x\to\frac{-1}{3}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{-1}{3}^+} f(x)=\frac{-2}{3}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{-1}{3}} f(x)=\frac{-2}{3}$

$\because \lim\limits_{x\to\frac{-1}{3}} f(x)=f\left(-\frac{1}{3}\right)\Rightarrow$ $\therefore$ f متصلة عند $x=-\frac{1}{3}$

الاشتقاق

$f'_-\left(\frac{-1}{3}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{-1}{3}^-}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{-1}{3}\right)}{x-\left(\frac{-1}{3}\right)}$ إن وجدت

$=\lim\limits_{x\to\frac{-1}{3}^-}\dfrac{5x+1-\frac{-2}{3}}{x+\frac{1}{3}}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{-1}{3}^-}\dfrac{5x+\frac{5}{3}}{x+\frac{1}{3}}$ $: x\ne-\frac{1}{3}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{-1}{3}^-}\dfrac{5\cancel{\left(x+\frac{1}{3}\right)}}{\cancel{x+\frac{1}{3}}}=\lim\limits_{x\to\frac{-1}{3}^-}(5)=5$

$f'_+\left(\frac{-1}{3}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{-1}{3}^+}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{-1}{3}\right)}{x-\left(\frac{-1}{3}\right)}$ إن وجدت

$=\lim\limits_{x\to\frac{-1}{3}^+}\dfrac{-x-1-\frac{-2}{3}}{x+\frac{1}{3}}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{-1}{3}^+}\dfrac{\overset{(-1)}{\cancel{-x-\frac{1}{3}}}}{\cancel{x+\frac{1}{3}}}$ $: x\ne-\frac{1}{3}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{-1}{3}^+}(-1)=-1$

$\because f'_-\left(\frac{-1}{3}\right)\ne f'_+\left(\frac{-1}{3}\right)\Rightarrow f'\left(\frac{-1}{3}\right)$ غير موجودة

الدالة f متصلة عند $x=\frac{-1}{3}$ لكنها غير قابلة للاشتقاق عند $x=\frac{-1}{3}$

لتكن f: $f(x)=\begin{cases} x^2-x-2 & ,x\le 2 \\ -x^2+7x-10 & ,x>2 \end{cases}$ بيّن الدالة f متصلة عند $x=2$ وادرس قابلية الاشتقاق عندها

الاتصال

x^2-x-2	2	$-x^2+7x-10$

$f(2)=2^2-2-2=0$

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=$

$\lim_{x\to 2^-}(x^2-x-2)$

$=(2)^2-(2)-2=0$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=$

$\lim_{x\to 2^+}(-x^2+7x-10)$

$=-(2)^2+7(2)-10=0$

$\therefore \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=0 \Rightarrow$ $\therefore \lim_{x\to 2} f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)=0=f(2) \Rightarrow$ $\therefore f$ متصلة عند $x=2$

الاشتقاق

معلق

$f(2)=2^2-2-2=0$

إن وجدت $f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-x-2-0}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2^-}\frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{x-2}}$ $: x\neq 2$

$=\lim_{x\to 2^-}(x+1)=(2)+1=3$

إن وجدت $f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+7x-10-0}{x-2}$

$=-1\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-7x+10}{x-2}$

$=-\lim_{x\to 2^+}\frac{\cancel{(x-2)}(x-5)}{\cancel{x-2}}$ $: x\neq 2$

$=-\lim_{x\to 2^+}(x-5)=-(2-5)=3$

$\because f'_-(2)=f'_+(2)=3 \Rightarrow f'(2)=3$

الدالة f متصلة و قابلة للاشتقاق عند $x=2$

ادرس اتصال الدالة f عندما $x = 1$ وقابلية اشتقاقها عند هذه النقطة حيث:

- $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2+1} & , x \leq 1 \\ 2x - 1 & , x > 1 \end{cases}$

الاتصال

$\frac{2}{x^2+1}$ | 1 | $2x - 1$

$$f(1) = \frac{2}{1^2+1} = 1$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{2}{x^2+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\lim_{x\to1^-}(x^2+1) =$$ نهاية المقام

$$1^2 + 1 = 2, \qquad 2 \neq 0$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}(2x-1)$$

$$= 2(1) - 1 = 1$$

$$\because \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) \Longrightarrow \lim_{x\to1} f(x) = 1$$

$\because \lim_{x\to1} f(x) = f(1) \Longrightarrow$ $\therefore$ f متصلة عند $x = 1$

معلق

الاشتقاق

$$f(1) = \frac{2}{1^2+1} = 1$$

$$f'_-(1) = \lim_{x\to1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$ إن وجدت

$$= \lim_{x\to1^-} \frac{\left(\frac{2}{x^2+1}\right) - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to1^-} \frac{\frac{\overset{-1}{\cancel{(1-x)}}(1+x)}{x^2+1}}{\cancel{x-1}}$$ $: x \neq 1$

$$= \lim_{x\to1^-} \frac{-1-x}{x^2+1} = \frac{-1-1}{2} = -1$$

$$\lim_{x\to1^-}(x^2+1) =$$ نهاية المقام

$$1^2 + 1 = 2, \qquad 2 \neq 0$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$ إن وجدت

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{\left(\frac{1-x^2}{x^2+1}\right)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{2x-1-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{2x-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$ $: x \neq 1$

$$= \lim_{x\to1^+}(2) = 2$$

$\because f'_-(1) \neq f'_+(1)$ $\therefore$ $f'(1)$ غير موجودة

الدالة f متصلة عند $x = 1$ لكنها غير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

Q لتكن $f:$ $f(x)=\begin{cases} x+5 & ,x\le 3 \\ x^2-1 & ,x>3 \end{cases}$ أوجد إن أمكن $f'(3)$

$f(3)=3+5=8$

$x+5$ | 3 | x^2-1

إن وجدت

$$f'_-(3)=\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{x+5-8}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{\cancel{x-3}}{\cancel{x-3}}^{(1)}=\lim_{x\to 3^-}(1)=1 \qquad : x\ne 3$$

إن وجدت

$$f'_+(3)=\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-1-8}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} \qquad : x\ne 3$$

$$=\lim_{x\to 3^+}(x+3)=3+3=6$$

$\because f'_-(3)\ne f'_+(3)\Longrightarrow f'(3)$ غير موجودة

Q لتكن $f:$ $f(x)=\begin{cases} x^2+x & , \quad x\le -1 \\ x^2-x-2 & , \quad x>-1 \end{cases}$ أوجد إن أمكن $f'(-1)$

$f(-1)=(-1)^2+(-1)=0$

x^2+x | -1 | x^2-x-2

إن وجدت

$$f'_-(-1)=\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x--1}$$

$$=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+x-0}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1^-}\frac{x\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} \qquad : x\ne -1$$

$$=\lim_{x\to -1^-}x=-1$$

إن وجدت

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x--1}$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-x-2-0}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{x+1}} \qquad : x\ne -1$$

$$=\lim_{x\to -1^+}(x-2)=-3$$

$\because f'_-(-1)\ne f'_+(-1)\Longrightarrow f'(-1)$ غير موجودة

تمارين إضافية من كراسة التمارين

4. لتكن f : $f(x)=\begin{cases} x^2+2x : & x\le 1 \\ 4x-1 : & x>1 \end{cases}$ ابحث قابلية اشتقاق f عند $x=1$.

5. لتكن الدالة: $f(x)=|x-3|$ بيّن أن الدالة f متصلة عند $x=3$ ولكنها غير قابلية الاشتقاق عندها

7. لتكن الدالة: $g(x)=\begin{cases} (x+1)^2 , & x\le 0 \\ 2x+1 , & x>0 \end{cases}$ أوجد إن أمكن $g'(0)$

8. لتكن الدالة: $f(x)=\begin{cases} x^2 , & x\le 2 \\ 4x-4 , & x>2 \end{cases}$ أوجد $f'(2)$

9. لتكن الدالة: $f(x)=\begin{cases} x^3 , & x\le 1 \\ 3x+k , & x>1 \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x=1$ فأوجد قيمة k

المشتقة-التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

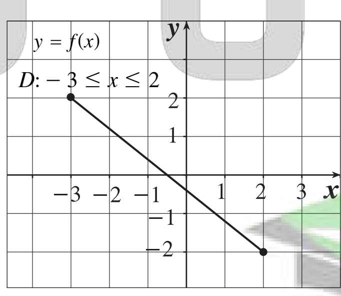
1. إذا كانت f : $f(x)=3x-12$ فإن $f'(x)=3$ — **a** b

2. إن الدالة f : $f(x)=x|x|$ غير قابلة لاشتقاق $\forall x\in\mathbb{R}$ — a **b**

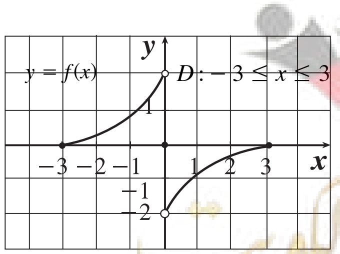
3. إن الدالة f : $f(x)=\frac{x^3-8}{x^2-4x-5}$ غير قابلة للاشتقاق عندما x تساوي -1 فقط — a **b**

4. إن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & : & x<4 \\ x^2-9 & : & x>4 \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x=4$ — a **b**

5. إن الدالة f ذات الرسم البياني قابلة للاشتقاق على الفترة $[-3,2]$ — a **b**



6. إن الدالة f ذات الرسم البياني أدناه هي متصلة على الفترة $[-3,3]$ ولكن غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$ — a **b**

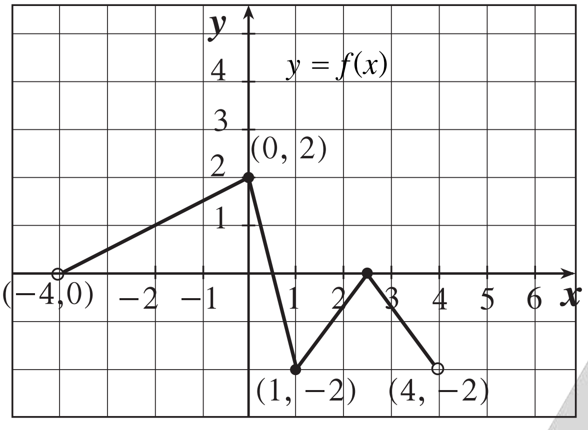


ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

7. إن الدالة f : $f(x) = x + \sqrt{x^2} + 2$ ليست قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ و السبب هو :

ⓐ ناب ⓑ ركن ⓒ مماس عمودي ⓓ غير متصلة

8. تكون الدالة f ذات الرسم البياني أدناه غير قابلة للاشتقاق عند كل $x = \cdots$



ⓐ $0 , 1 , 2\frac{1}{2}$

ⓑ $-2 , +2$

ⓒ $-4 , 0 , 1 , 4$

ⓓ $1 , 4$

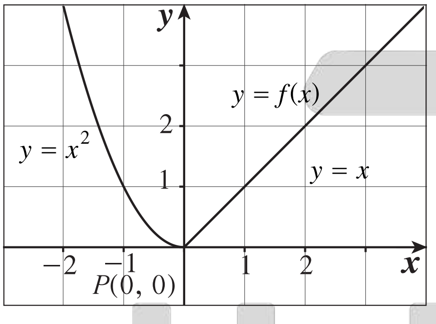
9. الدالة f القابلة للاشتقاق عند $x = 3$ فيما يلي هي :

ⓐ $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ ⓑ $\sqrt{3-x}$ ⓒ $\begin{cases} 3x-1 & : x \le 3 \\ 1 & : x > 3 \end{cases}$ ⓓ $\sqrt[3]{x+2}$

10. إذا كانت $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ فإن مجال f' هو

ⓐ $\mathbb{R} - \{-2 , 2\}$ ⓑ $\mathbb{R} - \{-2\}$ ⓒ $\mathbb{R} - \{2\}$ ⓓ $\mathbb{R} - (-2 , 2)$

11. في الشكل المقابل , عند النقطة P :



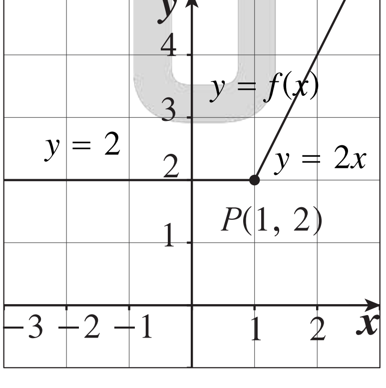
ⓐ المشتقة جهة اليسار موجبة

ⓑ المشتقة جهة اليمين سالبة

ⓒ الدالة قابلة للاشتقاق

ⓓ ليس أي مما سبق

12. في الشكل المقابل , عند النقطة P :



ⓐ $f'_{+}(1) = 1$

ⓑ $f'_{-}(1) = 0$

ⓒ $f'_{-}(1) = 2$

ⓓ f قابلة للاشتقاق

قواعد الاشتقاق

قاعدة (1) :

مشتقة أي دالة ثابتة تساوي الصفر

قاعدة (2) :

إذا كان $f(x) = x$ فإن: $f'(x) = 1$

قاعدة (3) :

إذا كان $f(x) = x^n$ فإن: $f'(x) = n.x^{n-1}$

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

- $f(x) = x^4$ $\qquad f'(x) = 4\,x^{4-1} = 4\,x^3$
- $f(x) = x^{10}$ $\qquad f'(x) = 10\,x^{10-1} = 10\,x^9$
- $f(x) = x^{12}$ $\qquad f'(x) = 12\,x^{12-1} = 12\,x^{11}$

قاعدة (4) :

إذا كانت f دالة في x قابلة للاشتقاق وكان k عددا حقيقيا ثابتا فإن:

$$(k.f(x))' = k.f'(x)$$

قاعدة (5) :

قاعدة الجمع والطرح: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

- أوجد $\frac{dy}{dt}$ حيث : $y = t^3 + 6t^2 + 16$

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2 + 12t$$

- أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث : $y = 5x^3 - 4x^2 + 6$

$$\frac{dy}{dx} = 15x^2 - 8x$$

قاعدة (6) :

قاعدة اشتقاق ضرب دالتين: $(f.g)' = f'.g + f.g'$

- أوجد $f'(x)$ حيث : $f(x) = (x^2+1)(x^3+3)$

$$f'(x) = (2x)(x^3+3) + (x^2+1)(3x^2) = 2x^4 + 6x + 3x^4 + 3x^2$$

$$= 5x^4 + 3x^2 + 6x$$

أوجد $f'(x)$ حيث :

$f(x) = (2x+1)(3x-2)$

$f'(x) = (2)(3x-2) + (2x+1)(3) \qquad = 6x - 4 + 6x + 3 = 12x - 1$

$f(x) = 4x^2(x+6)$

طريقة أولى :

$f'(x) = (8x)(x+6) + (4x^2)(1)$

$= 8x^2 + 48x + 4x^2$

$= 12x^2 + 48x$

طريقة ثانية :

$f(x) = 4x^2(x+6) = 4x^3 + 24x^2 \Rightarrow$

$f'(x) = 12x^2 + 48x$

$f(x) = (x^3-4)^2$

$f(x) = (x^3-4)^2 = (x^3-4)(x^3-4)$

$f'(x) = (3x^2)(x^3-4) + (x^3-4)(3x^2)$

$= 3x^5 - 12x^2 + 3x^5 - 12x^2 = 6x^5 - 24x^2$

تمارين مشابهة من الكراسة:

أوجد $f'(x)$

5. $f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x^3 + 2x^2 + 1)$
6. $f(x) = (2x^5 + 4)(5 - x^2)$

قاعدة (7) :

قاعدة القسمة : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$

أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \frac{x^3-1}{5x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(5x^2+1) - (x^3-1)(10x)}{(5x^2+1)^2}$$

$$= \frac{15x^4 + 3x^2 - 10x^4 + 10x}{(5x^2+1)^2}$$

$$= \frac{5x^4 + 3x^2 + 10x}{(5x^2+1)^2}$$

أوجد مشتقة الدالة: $f(x)=\frac{4x^2+2x}{2x^3+5}$

$$f'(x)=\frac{(8x+2)(2x^3+5)-(4x^2+2x)(6x^2)}{(2x^3+5)^2}$$

$$=\frac{16x^4+40x+4x^3+10-24x^4-12x^3}{(2x^3+5)^2}$$

$$=\frac{-8x^4-8x^3+40x+10}{(2x^3+5)^2}$$

تمارين مشابهة من الكراسة:

أوجد مشتقة الدالة

7. $y=\frac{x^2+3}{x}$
8. $y=\frac{x^2}{1-x^3}$

إيجاد معادلة المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة $(a,f(a))$ ومعادلة المستقيم العمودي (الناظم) على منحنى الدالة عند النقطة

ميل المماس	ميل الناظم (العمودي)
$f'(a)$	$\frac{-1}{f'(a)}$
معادلة المماس	معادلة الناظم (العمودي)
$y-f(a)=f'(a)(x-a)$	$y-f(a)=\frac{-1}{f'(a)}(x-a)$

أوجد معادلة المماس للمنحنى $y=x^3+x$ عند النقطة : $(1,2)$

$$y=f(x)=x^3+x$$
$$y'=f'(x)=3x^2+1$$

ميل المماس $f'(a)=f'(1)=3(1)^2+1=4$

معادلة المماس

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$
$$y-f(1)=f'(1)(x-1)$$
$$y-2=4(x-1)$$
$$y=4x-4+2$$
$$y=4x-2$$

معادلة الناظم (العمودي)

$$y-f(a)=\frac{-1}{f'(a)}(x-a)$$
$$y-f(1)=\frac{-1}{f'(1)}(x-1)$$
$$y-2=\frac{-1}{4}(x-1)$$
$$y=\frac{-1}{4}x+\frac{1}{4}+2$$
$$y=\frac{-1}{4}x+\frac{9}{4}$$

أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم عند النقطة: $(1,\frac{2}{3})$ لمنحنى الدالة : $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+2}$

$$f'(x)=\frac{(3x^2)(x^2+2)-(x^3+1)(2x)}{(x^2+2)^2}$$

ميل المماس

$$f'(a)=f'(1)=\frac{(3\times1^2)(1^2+2)-(1^3+1)(2)}{(1^2+2)^2}=\frac{5}{9}$$

معادلة المماس

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

$$y-\frac{2}{3}=\frac{5}{9}(x-1)$$

$$y=\frac{5}{9}x-\frac{5}{9}+\frac{2}{3}$$

$$y=\frac{5}{9}x+\frac{1}{9}$$

معادلة الناظم (العمودي)

$$y-f(a)=\frac{-1}{f'(a)}(x-a)$$

$$y-f(1)=\frac{-1}{f'(1)}(x-1)$$

$$y-\frac{2}{3}=\frac{-9}{5}(x-1)$$

$$y=\frac{-9}{5}x+\frac{9}{5}+\frac{2}{3}$$

$$y=\frac{-9}{5}x+\frac{37}{15}$$

أوجد معادلة المماس و معادلة الناظم عند النقطة: $(1,0)$ لمنحنى الدالة: $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$

$$f'(x)=\frac{(1)(x+2)-(x-1)(1)}{(x+2)^2}=\frac{x+2-x+1}{(x+2)^2}=\frac{3}{(x+2)^2}$$

$$f'(a)=f'(1)=\frac{3}{(1+2)^2}=\frac{1}{3}$$

معادلة المماس

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

$$y-0=\frac{1}{3}(x-1)$$

$$y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$$

معادلة الناظم (العمودي)

$$y-f(a)=\frac{-1}{f'(a)}(x-a)$$

$$y-f(1)=\frac{-1}{f'(1)}(x-1)$$

$$y-0=-3(x-1)$$

$$y=-3x+3$$

نتيجة:

إذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق وكانت $g(x)\neq 0$ ، k عدد ثابتاً فإن:

$$\left(\frac{k}{g(x)}\right)'=\frac{-k.g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

أوجد : $f'(x)$

$f(x)=\frac{3}{x^2+1}$ $\quad f'(x)=\frac{-3(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{-6x}{(x^2+1)^2}$

$f(x)=\frac{-4}{x^2+2x+5}$ $\quad f'(x)=\frac{4(2x+2)}{(x^2+2x+5)^2}=\frac{8x+8}{(x^2+2x+5)^2}$

الأسس الصحيحة السالبة

لتكن $y=\frac{x^2+3}{2x}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x=1$

$$y=\frac{x^2}{2x}+\frac{3}{2x}=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}$$

$$y'=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{-1}{x^2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}=y'(1)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2(1)^2}=-1$$

لتكن $y=\frac{3x^2+7}{8x^2}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x=-1$

$$y=\frac{3x^2}{8x^2}+\frac{7}{8x^2}=\frac{3}{8}+\frac{7}{8}x^{-2}$$

$$y'=\frac{7}{8}(-2x^{-3})=\frac{-7}{4}x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=-1}=y'(-1)=\frac{-7}{4}(-1)^{-3}=\frac{7}{4}$$

إذا كانت $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$ حيث m, n عددان صحيحان مختلفان $n\neq 0$ فإن : $f'(x)=\frac{m}{n}x^{\left(\frac{m}{n}-1\right)}$

إذا كانت $f(x)=\sqrt{x}$ تكون $f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

أوجد : $f'(x)$

$f(x)=x^{\frac{3}{2}};x>0$ $\quad f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$f(x)=x^{\frac{4}{3}}$ $\quad f'(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$

تمرين من الكراسة:

13.أوجد معادلة المماس و معادلة الناظم لمنحنى الدالة : $y=\frac{8}{4+x^2}$
عند النقطة $(2,1)$

لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & ,x\le 1 \\ 2x+1 & ,x>1 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها أوجد $f'(x)$ إن أمكن

$$D_f=(-\infty\,,1]\cup(1\,,\infty)=\mathbb{R}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x<1 \\ \text{تبحث} & x=1 \\ 2 & x>1 \end{cases}$$

$$f(1)=1^2+2=3$$

x^2+2 1 $2x+1$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$ إن وجدت

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+2-3}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}\qquad x\ne1$$

$$=\lim_{x\to1^-}(x+1)=2$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$ إن وجدت

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{2x+1-3}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{2x-2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}\qquad x\ne1$$

$$=\lim_{x\to1^+}2=2$$

$$\because f'_-(1)=f'_+(1)=2$$

$$\therefore f'(1)=2$$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases} 2x & x<1 \\ 2 & x=1 \\ 2 & x>1 \end{cases}=\begin{cases} 2x & x<1 \\ 2 & x\ge1 \end{cases}$$

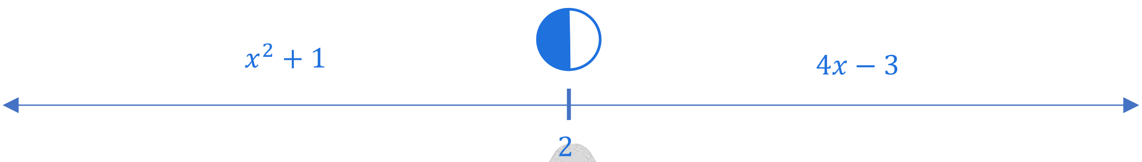
أوجد المشتقة إن أمكن لكل من الدوال التالية:

- $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & ,x\le 2 \\ 4x-3 & ,x>2 \end{cases}$

$D_f=(-\infty\,,2]\cup(2\,,\infty)=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x<2 \\ \text{تبحث} & x=2 \\ 4 & x>2 \end{cases}$$

$$f(2)=2^2+1=5$$



$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \quad \text{إن وجدت}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+1-5}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} \quad x\ne 2$$

$$=\lim_{x\to 2^-}(x+2)=4$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \quad \text{إن وجدت}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{4x-3-5}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{4x-8}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{4\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} \quad x\ne 2$$

$$=\lim_{x\to 2^+}4=4$$

$$\because f'_-(2)=f'_+(2)=4$$

$$\therefore f'(2)=4$$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases} 2x & x<2 \\ 4 & x=2 \\ 4 & x>2 \end{cases}=\begin{cases} 2x & x<2 \\ 4 & x\ge 2 \end{cases}$$

- $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & ,x<1 \\ 2\sqrt{x} & ,x\geq 1 \end{cases}$

$D_f=(-\infty,1)\cup[1,\infty)=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x<1 \\ \text{تبحث} & x=1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & x>1 \end{cases}$$

$f(1)=2\sqrt{1}=2$

x^2+1 | 1 | $2\sqrt{x}$

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ إن وجدت

$=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+1-2}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$ $x\neq1$

$=\lim\limits_{x\to1^-}(x+1)$

$=1+1=2$

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ إن وجدت

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2\sqrt{x}-2}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2(\sqrt{x}-1)}{x-1}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}$ $x\neq1$

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to1^+}2}{\lim\limits_{x\to1^+}(\sqrt{x}+1)}=\dfrac{2}{2}=1$

نهاية المقام:

$\lim\limits_{x\to1^+}(\sqrt{x}+1)=\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{x}+\lim\limits_{x\to1^+}1$

$=\sqrt{1}+1$ $=2,2\neq0$ $,1>0$

$\because f'_-(1)\neq f'_+(1)\Rightarrow$ $f'(1)$ غير موجودة $\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x & x<1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & x>1 \end{cases}$

$D_{f'}=\mathbb{R}-\{1\}$

تمرين مشابه من الكراسة:

14. لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases} x-\frac{4}{x} & ,x\geq2 \\ x^2-4 & ,x<2 \end{cases}$ ... وعين مجالها

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. إذا كانت $y=-x^2+3$ فإن $\frac{dy}{dx}=-2$ ⓐ **ⓑ**

2. إذا كانت $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{3}+x$ فإن $\frac{dy}{dx}=x^2+\frac{2}{3}x+1$ **ⓐ** ⓑ

3. إذا كانت $y=\frac{2x+5}{3x-2}$ فإن $\frac{dy}{dx}=\frac{12x+11}{(3x-2)^2}$ ⓐ **ⓑ**

4. إذا كانت $y=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$ فإن $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{x^4}$ **ⓐ** ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

5. إذا كانت $y=1-x+x^2-x^3$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

ⓐ $-1+2x-3x^2$ ⓑ $2-3x$
ⓒ $-6x+2$ ⓓ $1-x$

6. إذا كانت $f(x)=5x^3-3x^5$ فإن $f'(x)$ تساوي :

ⓐ $20x+60x^2$ **ⓑ** $15x^2-15x^4$
ⓒ $30x-30x^4$ ⓓ $30x-60x^3$

7. إذا كانت $y=\frac{x^2+5x-1}{x^2}$ فإن $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ تساوي :

ⓐ $\frac{-7}{2}$ **ⓑ** -3 ⓒ 3 ⓓ $\frac{7}{2}$

8. ميل مماس منحنى $y=x^2+5x$ عند $x=3$ تساوي :

ⓐ 24 ⓑ $-\frac{5}{2}$ **ⓒ** 11 ⓓ 8

9. ميل مماس منحنى الدالة $f(x)=\frac{2}{x}$ عند $x=-2$ تساوي :

ⓐ -1 **ⓑ** $-\frac{1}{2}$ ⓒ $\frac{1}{2}$ ⓓ 1

10. ميل مماس منحنى الدالة $f(x)=\frac{-1}{x-1}$ عند $x=0$ تساوي :

ⓐ -1 ⓑ 0 **ⓒ** 1 ⓓ 2

11. للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ مماس رأسي معادلته :

ⓐ $x = 0$ ⓑ $y = 0$ ⓒ $x = 1$ ⓓ $y = 1$

12. ميل الناظم لمنحنى الدالة $y = x^3 - 3x + 1$ عند النقطة $(2,3)$ هي :

ⓐ 9 ⓑ 3 ⓒ $-\frac{1}{3}$ ⓓ $\frac{-1}{9}$

13. النقاط على منحنى الدالة $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ التي يكون المماس عندها موازياً لمحور السينات هي :

ⓐ $(-1, 27)$ ⓑ $(2, 0)$
ⓒ $(2, 0), (-1, 27)$ ⓓ $(-1, 27), (0, 20)$

14. لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & : \ x \geq 1 \\ 4x - 1 & : \ x < 1 \end{cases}$ فإن مجال f' هو :

ⓐ $\{1\}$ ⓑ $\mathbb{R} - \{1\}$
ⓒ $[1, \infty)$ ⓓ $\mathbb{R}$

15. إن معادلة المماس لمنحنى الدالة f : $f(x) = 2x^2 - 13x + 2$ عند $x = 3$ هي :

ⓐ $y = x - 16$ ⓑ $y = -x + 16$
ⓒ $y = -x - 13$ ⓓ $y = -x - 16$

16. إذا كانت $f(2) = 3$, $f'(2) = 5$ عند النقطة P على منحنى الدالة f فإن :

ⓐ معادلة خط المماس : $y = 5x + 7$
ⓑ معادلة الخط العمودي (الناظم) : $y = -\frac{1}{5}x + 7$
ⓒ معادلة الخط العمودي (الناظم) : $y = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$
ⓓ معادلة خط المماس : $y = 5x + 3$

مشتقات الدوال المثلثية

$$(\cos x)' = -\sin x \quad , \quad (\sin x)' = \cos x$$

أوجد مشتقات الدوال التالية:

- $y = x^2 . \sin x$

$$y' = (2x)(\sin x) + (x^2)(\cos x) \qquad = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$$

- $u = \frac{\cos x}{1-\sin x}$

$$u' = \frac{(-\sin x)(1-\sin x) - (\cos x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2} = \frac{-\sin x + 1}{(1-\sin x)^2} = \frac{\cancelto{1}{(1-\sin x)}}{(1-\sin x)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{1-\sin x}$$

- $f(x) = \sin^2 x$

$$= \sin x \quad \sin x$$

$$f'(x) = (\sin x)'(\sin x) + (\sin x)(\sin x)'$$

$$= (\cos x)(\sin x) + (\sin x)(\cos x) \quad = 2 \quad \sin x \quad \cos x$$

- $h(x) = \cos^2 x$

$$= \cos x \quad \cos x$$

$$h'(x) = (\cos x)'(\cos x) + (\cos x)(\cos x)'$$

$$= (-\sin x)(\cos x) + (\cos x)(-\sin x) \qquad = -2 \quad \sin x \quad \cos x$$

- $g(x) = \frac{x}{\cos x}$

$$g'(x) = \frac{(1)(\cos x) - (x)(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x + x \quad \sin x}{(\cos x)^2}$$

- $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

$$y' = \frac{(\cos x)(\sin x + \cos x) - (\sin x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cancel{\cos x \cdot \sin x} + \cos{}^2 x \cancel{- \sin x \cdot \cos x} + \sin{}^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$(tan\, x)' = sec^2\, x \quad , \quad (cot\, x)' = -\, csc^2\, x$$

$$(sec\, x)' = sec\, x\, .\, tan\, x \;, (csc\, x)' = -\, csc\, x\, .\, cot\, x$$

أوجد مشتقات الدوال التالية:

Q $h(x) = \csc x + \sin x \,.\, \tan x$

$h'(x) = -\csc x \cot x + (\cos x)(\tan x) + (\sin x)(\sec^2 x)$

Q $g(x) = \sec x(1 + \sin x)$

$g'(x) = (\sec x \tan x)(1 + \sin x) + (\sec x)(\cos x)$

$= \sec x\ \tan x + \sec x\ \tan x\ \sin x + 1$

Q $f(x) = \tan x + \cot x$

$f'(x) = \sec^2 x + \ (-\csc^2 x) = \sec^2 x - \csc^2 x$

Q $f(x) = \frac{1+\tan x}{\tan x}$

$f(x) = \frac{1}{\tan x} + \frac{\tan x}{\tan x} \quad = \cot x + 1 \Longrightarrow f'\ (x) = -\csc^2 x$

Q $g(x) = \sec x + \csc x$

$g'(x) = \sec x \quad \tan x \quad - \csc x \quad \cot x$

Q $h(x) = \frac{\sec x}{\csc x}$

$h(x) = \frac{\sec x}{\csc x} = \frac{\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{1} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \Longrightarrow h'(x) = \sec^2 x$

تمرين مشابه من الكراسة:

Q أوجد $\frac{dy}{dx}$

1. $y = 2\, sin\, x - tan\, x$

2. $y = 4 - x^2 .\, sin\, x$

3. $y = \frac{cot\, x}{1+cot\, x}$

4. $y = \frac{cos\, x}{1+sin\, x}$

أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \tan x$ عند النقطة $p(\frac{\pi}{4},1)$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}\right)^2 = 2 = m$$

بالتالي ميل المستقيم العمودي هو: $\frac{-1}{m} = \frac{-1}{2}$

معادلة المستقيم العمودي : $y - 1 = \frac{-1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{\pi}{8} + 1$$

أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \sec x$ عند النقطة $p(\frac{\pi}{3},2)$

$$\frac{dy}{dx} = \sec x \cdot \tan x$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{3}} = \sec\left(\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} \times \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} = m$$

بالتالي ميل المستقيم العمودي هو: $\frac{-1}{m} = \frac{-1}{2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{6}$

معادلة المستقيم العمودي : $y - 2 = \frac{-\sqrt{3}}{6}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

$$y = \frac{-\sqrt{3}}{6}x + \frac{\sqrt{3}\pi}{18} + 2$$

تمرين مشابه من الكراسة:

5. أوجد مشتقة الدالة: $y = \frac{\tan x}{x}$ عند $x = \frac{\pi}{4}$

7. لتكن $y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sin x} + \cot x$ أوجد معادلة المماس عند $p\left(\frac{\pi}{4},4\right)$

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. إذا كانت $y = 1 + x - \cos x$ فإن $\frac{dy}{dx} = 1 + \sin x$ — ⓐ ⓑ

2. إذا كانت $y = \frac{4}{\cos x}$ فإن $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{\cos^2 x}$ — ⓐ ⓑ

3. ميل المماس لمنحنى الدالة $y = \sin x + 3$ عند $x = \pi$ هو 1 — ⓐ ⓑ

4. إن منحنى الدالة $y = \tan x$ ومنحنى الدالة $y = \cot x$ ليست لهما مماسات أفقية — ⓐ ⓑ

معلق

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

5. إذا كانت $y = \frac{1}{x} + 5\sin x$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

ⓐ $-\frac{1}{x^2} - 5\cos x$ ⓑ $\frac{1}{x^2} + 5\cos x$ ⓒ $-\frac{1}{x^2} + 5\cos x$ ⓓ $\frac{1}{x^2} - 5\cos x$

6. إذا كانت $f(x) = 3x + x\tan x$ فإن $f'(0)$ يساوي :

ⓐ -3 ⓑ 0 ⓒ 11 ⓓ 3

7. إذا كانت $y = \frac{x}{1+\cos x}$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

ⓐ $-\frac{x\sin x}{(1+\cos x)^2}$ ⓑ $\frac{1+\cos x - x\sin x}{(1+\cos x)^2}$

ⓒ $\frac{1+\cos x - x\sin x}{1+\cos^2 x}$ ⓓ $\frac{1+\cos x + x\sin x}{(1+\cos x)^2}$

8. معادلة المستقيم العمودي على المماس لبيان الدالة $y = 2\cos x$ عند النقطة $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ هي :

ⓐ $y = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$ ⓑ $y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$

ⓒ $y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$ ⓓ $y = -\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$

9. إذا كانت $y = \frac{1}{\sin x}$ فإن y' تساوي :

ⓐ $\cot x \cdot \csc x$ ⓑ $\cos x$ ⓒ $-\cot x \cdot \csc x$ ⓓ $-\cos x$

قاعدة السلسلة

$$(fog)'(x) = f'\big(g(x)\big) \, . \, g'(x)$$

إذا كانت $f(x) = 3x^2 + 1$, $g(x) = x^{10}$ فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة :

Q $(f \circ g)'(x)$

$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$

$f'(x) = 6x \Rightarrow f'\big(g(x)\big) = 6\big(g(x)\big) = 6(x^{10}) = 6x^{10}$

$g'(x) = 10x^9$

$\therefore (f \circ g)'(x) = (6x^{10}) \cdot (10x^9) = 60x^{19}$

Q $(g \circ f)'(-1)$

طريقة أولى:

$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$

$g'(x) = 10x^9 \Rightarrow \quad g'(f(x)) = 10(3x^2 + 1)^9$

$f'(x) = 6x$

$\therefore (g \circ f)'(x) = 10(3x^2 + 1)^9 \, . \, 6x = 60x \, (3x^2 + 1)^9$

$\therefore (g \circ f)' \, (-1) = 60(-1) \, (3(-1)^2 + 1)^9 \; = -15728640$

طريقة ثانية:

$(g \circ f)'(-1) = g'\big(f(-1)\big) \cdot f'(-1)$

$f(-1) = 3(-1)^2 + 1 = 4$

$(g \circ f)'(-1) = g'(4) \quad \cdot \quad f'(-1)$

$g'(x) = 10x^9 \Rightarrow \quad g'(4) = 10(4)^9$

$f'(x) = 6x \Rightarrow f'(-1) = 6(-1) = -6$

$\therefore (g \circ f)'(-1) = 10 \, (4)^9 \times (-6) = -15728640$

إذا كانت $f(x) = -2x^3 + 4$, $g(x) = x^{13}$ فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة :

- $(f \circ g)'(x)$

$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$

$f'(x) = -6x^2 \Rightarrow f'\big(g(x)\big) = -6\big(g(x)\big)^2 = -6(x^{13})^2 = -6x^{26}$

$g'(x) = 13x^{12}$

$\therefore (f \circ g)'(x) = -6x^{26} \cdot 13x^{12} = -78x^{38}$

- $(g \circ f)'(0)$

طريقة أولى:

$(g \circ f)'(0) = g'\big(f(0)\big) \cdot f'(0)$

$f(0) = -2(0)^3 + 4 = 4$

$g'\big(f(0)\big) = g'(4)\ .\ f'(0)$

$g'(x) = 13x^{12} \Rightarrow g'(4) = 13(4)^{12}$

$f'(x) = -6x^2 \Rightarrow f'(0) = -6(0)^2 = 0$

$\therefore (g \circ f)'(0) = 13(4)^{12} \times 0 = 0$

طريقة ثانية:

$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$

$g'(x) = 13x^{12}$

$\Rightarrow g'(f(x)) = 13(-2x^3 + 4)^{12}$

$f'(x) = -6x^2$

$(g \circ f)'(x) = 13(-2x^3 + 4)^{12} . (-6x^2)$

$(g \circ f)'(x) = -78x^2(-2x^3 + 4)^{12}$

$\therefore (g \circ f)'(0) =$

$-78(0)^2(-2(0)^3 + 4)^{12} = 0$

- إذا كانت $f(x) = \frac{2x+1}{x}$, $g(x) = x^2 + 1$ فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$

$(f\ o\ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$

$f(x) = \frac{2x+1}{x} = \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f'\big(g(x)\big) = \frac{-1}{(x^2+1)^2}$

$g'(x) = 2x$

$\therefore (f \circ g)'(x) = \frac{-1}{(x^2+1)^2} \cdot 2x = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

إذا كانت $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$, $g(x) = \sqrt{x}$ فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة : $(f \circ g)'(1)$

$$(f \circ g)'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1)$$

$$g(1) = \sqrt{1} = 1$$

$$\therefore (f \circ g)'(1) = f'(1) \cdot g'(1)$$

$$f'(x) = \frac{(2x)(x^2+4) - (x^2-4)(2x)}{(x^2+4)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{(2)(1+4) - (1-4)(2)}{(1^2+4)^2} = \frac{16}{25}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow g'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore (f \circ g)'(1) = \frac{16}{25} \times \frac{1}{2} = \frac{8}{25}$$

تمرين مشابه من الكراسة:

أوجد $(f \circ g)'(x)$ في الحالات التالية :

2. $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 3x^2$

2. $f(x) = \frac{x-1}{x}$, $g(x) = x^2 + 1$

3. $f(x) = 5x^2 - 1$, $g(x) = x^{15}$

أوجد $(f \circ g)'(x)$ عند القيم المعطاة :

4. $f(x) = x^5 + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$, $x = 1$

5. $f(x) = x + \frac{1}{\cos^2 x}$, $g(x) = \pi x$, $x = \frac{1}{4}$

6. $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, $g(x) = 10x^2 + x + 1$, $x = 0$

صورة أخرى لقاعدة السلسلة

إذا كانت: $u = g(x)$ ، $y = f(u)$ فإن: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

إذا كانت: $y = u^3 - 3u + 1$, $u = 5x^2 + 2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= (3u^2 - 3)(10x)$$

$$= (3(5x^2 + 2)^2 - 3)(10x)$$

$$= 30x(5x^2 + 2)^2 - 30x$$

$$= 30x(25x^4 + 20x^2 + 4) - 30x$$

$$= 750\,x^5 + 600x^3 + 90x$$

لتكن $y = u^2 + 4u - 3$, $u = 2x^3 + x$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة السلسلة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= (2u + 4) \cdot (6x^2 + 1)$$

$$= (2(2x^3 + x) + 4) \cdot (6x^2 + 1)$$

$$= (4x^3 + 2x + 4) \cdot (6x^2 + 1)$$

$$= 24x^5 + 4x^3 + 12x^3 + 2x + 24\,x^2 + 4$$

$$= 24x^5 + 16x^3 + 24\,x^2 + 2x + 4$$

تمرين مشابه من الكراسة:

7. أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة السلسلة:

$a)\ y = \cos u \quad , \quad u = 6x + 2$

$b)\ y = 5u^3 + 4 \quad , \quad u = 3x^2 + 1$

يتحرك جسيم على محور السينات بحيث إن موضعه عند أي لحظة $t \geq 0$ يعطى بالدالة: $S = \cos(t^2 + 1)$.
أوجد السرعة اللحظية للجسيم كدالة في t

$$\frac{ds}{dt} = -\sin(t^2+1)(2t) \qquad = -2t\sin(t^2+1)$$

أوجد مشتقة $y = \sin(x^2 + x)$ بالنسبة إلى المتغير x

$$y' = \cos(x^2+x)(2x+1) \qquad = (2x+1)\cos(x^2+x)$$

قاعدة سلسلة القوى:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)^n = n\left(f(x)\right)^{n-1}.f'(x)$$

أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \sin^3 x$ باستخدام قاعدة السلسلة

$$f'(x) = 3\sin^2 x\,(\cos x)$$

معلق

أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \cos^5 x$ باستخدام قاعدة السلسلة

$$f'(x) = 5\cos^4 x\,(-\sin x) \qquad = -5\cos^4 x \cdot \sin x$$

لتكن $y = \sqrt[5]{(x^2+3x+5)^3}$ أوجد y'

$$y = (x^2+3x+5)^{\frac{3}{5}}$$

$$y' = \frac{3}{5}(x^2+3x+5)^{\frac{-2}{5}}\ (2x+3) = \frac{3}{5}\ \frac{(2x+3)}{\sqrt[5]{(x^2+3x+5)^2}}$$

لتكن $y = \sqrt[4]{(2x^4-3x^2+4)^3}$ أوجد y'

$$y = (2x^4-3x^2+4)^{\frac{3}{4}}$$

$$y' = \frac{3}{4}(2x^4-3x^2+4)^{\frac{-1}{4}} \cdot (8x^3-6x) = \frac{3}{4}\ \frac{(8x^3-6x)}{\sqrt[4]{(2x^4-3x^2+4)}}$$

تمرين مشابه من الكراسة:

أوجد $\frac{dy}{dx}$

9. $y = \tan(2x - x^3)$
10. $y = \sin(3x+1)$
11. $y = (\tan x + \sec x)^2$
12. $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$
13. $y = (1-6x)^{\frac{2}{3}}$
14. $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
15. $y = \sin^2(3x-2)$

أوجد ميل مماس المنحنى $y = \sin^5 x$ عند $x = \frac{\pi}{3}$

$$\frac{dy}{dx} = 5\sin^4 x \cdot (\cos x)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{3}} = 5\sin^4\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{45}{32}$$ ميل المماس

بين أن ميل أي مماس للمنحنى $y = \frac{1}{(-2x-1)^3}$ دائما يكون موجباً حيث $x \neq -\frac{1}{2}$

$$y = (-2x-1)^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = -3(-2x-1)^{-4}\ (-2) = \frac{6}{(-2x-1)^4}$$

$$\frac{6}{(-2x-1)^4} > 0$$

$\therefore$ ميل المماس دائما يكون موجبا حيث $x \neq -\frac{1}{2}$

تمرين مشابه من الكراسة:

في التمارين التالية أوجد معادلة المماس ومعادلة الخط العمودي:

16. $f(x) = \sqrt{x^2+5}$: $(2,3)$

17. $g(x) = (x^3+1)^8$: $(0,1)$

قاعدة السلسلة - التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. إذا كانت $y = \cos(\sqrt{3}x)$ فإن $\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x)$ — (a) **(b)**

2. إذا كانت $y = 5\cot\left(\frac{2}{x}\right)$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{10}{x^2}\csc^2\left(\frac{2}{x}\right)$ — **(a)** (b)

3. إذا كانت $y = (x+\sqrt{x})^{-2}$ فإن $\frac{dy}{dx} = -2(x+\sqrt{x})^{-1}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ — (a) **(b)**

4. إذا كانت $s = \cos\left(\frac{\pi}{2}-3t\right)$ فإن $\frac{ds}{dt} = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}-3t\right)$ — **(a)** (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

5. إذا كانت $y=\sin^{-5}x-\cos^{3}x$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

ⓐ $5\sin^{-6}x\cos x-3\cos^{2}x\sin x$
ⓑ $5\sin^{-6}x\cos x+3\cos^{2}x\sin x$
ⓒ $-5\sin^{-6}x\cos x-3\cos^{2}x\sin x$
ⓓ $-5\sin^{-6}x\cos x+3\cos^{2}x\sin x$

6. إذا كانت $y=\frac{3}{\sqrt{2x+1}}$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

ⓐ $3(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$
ⓑ $-3(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$
ⓒ $-3(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$
ⓓ $3(2x+1)^{-1}$

7. إذا كانت $s=\frac{4}{3\pi}\sin 3t+\frac{4}{5\pi}\cos 5t$ فإن $\frac{ds}{dt}$ تساوي :

ⓐ $\frac{4}{\pi}\sin 3t-\frac{4}{\pi}\cos 5t$
ⓑ $\frac{4}{\pi}\cos 3t+\frac{4}{\pi}\sin 5t$
ⓒ $\frac{4}{\pi}\cos 3t-\frac{4}{\pi}\sin 3t$
ⓓ $\frac{4}{\pi}\cos 3t-\frac{4}{\pi}\sin 5t$

8. إذا كانت $r=\tan(2-\theta)$ فإن $\frac{dr}{d\theta}$ تساوي :

ⓐ $\sec^{2}(2-\theta)$
ⓑ $-\sec^{2}(2-\theta)$
ⓒ $\sec^{2}(\theta+2)$
ⓓ $\sec(2-\theta)$

9. إذا كانت $f(u)=\cot\frac{\pi u}{10}$ و $u=g(x)=5\sqrt{x}$ فإن $(f\circ g)'(x)$ عند $x=+1$ تساوي :

معلق

ⓐ $\frac{3\pi}{4}$
ⓑ $\frac{\pi}{4}$
ⓒ $-\frac{\pi}{4}$
ⓓ $-\frac{3\pi}{4}$

المشتقات ذات الرتب العليا

أوجد المشتقات حتى الرتبة الرابعة للدالة:
$y = 2x^7 - 4x^2 + 3x - 5$
بدلالة المتغير x

$y' = 14x^6 - 8x + 3$

$y'' = 84x^5 - 8$

$y''' = 420x^4$

$y^{(4)} = 1680x^3$

إذا كانت: $y = \sin x$ فبين أن:
$y^{(4)} = y$

$$\left.\begin{aligned} y &= \sin x \\ y' &= \cos x \\ y'' &= -\sin x \\ y''' &= -\cos x \\ y^{(4)} &= --\sin x = \sin x \end{aligned}\right\} \therefore y^{(4)} = y$$

إذا كانت $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$
فأوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة

$y = 4x^5 - 5x^3 + 7$

$y' = 20x^4 - 15x^2$

$y'' = 80x^3 - 30x$

$y''' = 240x^2 - 30$

لتكن الدالة: $y = \cos x$ بين أن:
$y^{(4)} + y'' = 0$

$y' = -\sin x$

$y'' = -\cos x$

$y''' = --\sin x = \sin x$

$y^{(4)} = \cos x$

$\Rightarrow y^{(4)} + y'' = \cos x + \ -\cos x = 0$

أوجد "y حيث: $y = \frac{1}{\cos x}$

$y = \frac{1}{\cos x} = \sec x$

$y' = \sec x \cdot \tan x$

$y'' = (\sec x\ \tan x)(\tan x) + (\sec x)(\sec^2 x) = \sec x \cdot\ \tan^2 x + \sec^3 x$

أوجد "y حيث: $y = \frac{1}{\sin x}$

$y = \frac{1}{\sin x} = \csc x$

$y' = -\csc x\ \cot x$

$y'' = (--\csc x\ \cot x)(\cot x) + (-\csc x)(-\csc^2 x) = \csc x\ \ \cot^2 x + \ \csc^3 x$

مسائل مشابهة من كراسة التمارين :

في التمارين التالية: أوجد $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$

1. $y = 2x^4 - x^3 + x^2 - 3x$
2. $y = -x^5 + 2x^3 - 4x + 1$
3. $y = \frac{3}{x-2}$
4. $y = \sin 2x$
5. $y = \cos 4x$
6. $y = \sin^2 x$

الاشتقاق الضمني

أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ في الحالات التالية:

$a)\ y^2 + xy = 7x$

$2y \cdot y' + (x)'(y) + (x)(y)' = 7$

$2y \cdot y' + (1)(y) + (x)(y') = 7$

$y'(2y + x) + y = 7$

$\frac{y'\cancel{(2y+x)}}{\cancel{(2y+x)}} = \frac{7-y}{2y+x}$

$y' = \frac{7-y}{2y+x}$

$b)\ y = x + x^2y^5$

$y' = (x)' + (x^2)'(y^5) + (x^2)(y^5)'$

$y' = 1 + (2x)(y^5) + (x^2)(5y^4\, y')$

$y' = 1 + 2x\, y^5 + 5x^2\, y^4\, y'$

$y' - 5x^2\, y^4\, y' = 1 + 2x\, y^5$

$y'(1 - 5x^2\, y^4) = 1 + 2x\, y^5$

$y' = \frac{1 + 2x\, y^5}{1 - 5x^2\, y^4}$

لتكن $y^2 = x^2 - 2x$ أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$

$y^2 = x^2 - 2x$

$(y^2)' = (x^2 - 2x)'$

$2yy' = 2x - 2$

$y' = \frac{2x-2}{2y} = \frac{x-1}{y}$

أوجد ميل المماس لمنحنى الدائرة الذي معادلته: $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(3, -4)$

$2x + 2y \cdot y' = 0$

$\frac{2}{2}(x + y \cdot y') = \frac{0}{2}$

$x + y\ y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$

بالتعويض بـ $(3, -4)$

$\frac{dy}{dx}\Big|(3, -4) = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

∴ميل المماس $= \frac{3}{4}$

أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1,1)$

$2x - 2y \cdot y' + y'x + y = 0$

$y'(-2y + x) = -2x - y$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{-2y + x}$

بالتعويض بـ $(1,1)$

$\frac{dy}{dx}\Big|(1,1) = \frac{-2(1) - 1}{-2(1) + 1} = 3$

∴ميل المماس $= 3$

أوجد ميل المماس $\frac{dy}{dx}$ للمنحنى الذي معادلته :
$2y = x^2 + \sin y$ عند النقطة $(2\sqrt{\pi}, 2\pi)$

$$2y' = 2x + \cos y \cdot y'$$

$$2y' - \cos y \cdot y' = 2x$$

$$y'(2 - \cos y) = 2x$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2 - \cos y}$$

بالتعويض بـ $(2\sqrt{\pi}, 2\pi)$

$\therefore$ ميل المماس $= 4\sqrt{\pi}$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{(2\sqrt{\pi}\,,\,2\pi)} = \frac{2(2\sqrt{\pi})}{2 - \cos(2\pi)}$$

$$= \frac{4\sqrt{\pi}}{1} = 4\sqrt{\pi}$$

أوجد ميل المماس $\frac{dy}{dx}$ للمنحنى الذي معادلته : $x^2 + y^2 - 2xy = 1$
حيث $x \neq y$ عند النقطة $(2,1)$

$$2x + 2y \cdot y' - 2y - 2xy' = 0$$

$$y'(2y - 2x) = -2x + 2y$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-2x + 2y}{2y - 2x} = 1$$

بالتعويض بـ $(2,1)$

$$\frac{dy}{dx}\Big|(2\,,1) = 1$$

$\therefore$ ميل المماس $= 1$

للمنحنى الذي معادلته : $2\sqrt{y} + y = x$ أوجد y' ، ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(3,1)$

$$2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' + y' = 1$$

$$y'\left(\frac{1}{\sqrt{y}} + 1\right) = 1$$

$$y' = \frac{1 \times \sqrt{y}}{\left(\frac{1}{\sqrt{y}} + 1\right) \times \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{1 + \sqrt{y}}$$

بالتعويض بـ $(3,1)$

$$\frac{dy}{dx}\Big|(3\,,1) = \frac{\sqrt{1}}{1 + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ ميل المماس $= \frac{1}{2}$

للمنحنى الذي معادلته : $y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$ أوجد y'، ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1,1)$

$$2y \cdot y' + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' + 2x = 0$$

$$y'\left(2y + \frac{1}{2\sqrt{y}}\right) = -2x$$

$$y' = \frac{-2x \times 2\sqrt{y}}{\left(2y + \frac{1}{2\sqrt{y}}\right) 2\sqrt{y}} = \frac{-4x\sqrt{y}}{4y\sqrt{y} + 1}$$

بالتعويض بـ $(1,1)$

$$\frac{dy}{dx}\Big|(1\,,1) = \frac{-4(1)\cdot\sqrt{1}}{4(1)\cdot\sqrt{1} + 1} = \frac{-4}{5}$$

$\therefore$ ميل المماس $= \frac{-4}{5}$

مسائل مشابهة من كراسة التمارين :

في التمارين التالية أوجد معادلة المماس ومعادلة الخط العمودي:

10. $x^2+2xy-y^2=7$, $(2,3)$

11. $6x^2+3xy-2y^3-7y-6=0$, $(-1,0)$

12. $2xy+\pi\sin y=2\pi$, $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$

إذا كانت $y=x.\sin x$ فأثبت أن: $y'''+y'+2\sin x=0$

$y=x\sin x$

$y'=(1)(\sin x)+(x)(\cos x)$

$y'=\sin x+x\cos x$

$y''=\cos x+(1)(\cos x)+(x)(-\sin x)$

$y''=2\cos x-x\sin x \qquad y''=2\cos x-y$

$y'''=-2\sin x-y'$

$y'''+y'+2\sin x=0$

إذا كانت $y=\sqrt{1-2x}$ أثبت أن: $yy''+(y')^2=0$

$y=\sqrt{1-2x}$ بتربيع الطرفين نجد أن :

$y^2=1-2x$

$2y\cdot y'=-2$

$y\cdot y'=-1$

$(y')(y')+(y)(y'')=0$

$(y')^2+yy''=0$

لتكن : $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ أثبت أن : $(1+x^2)f'''(x)+6xf''(x)+6f'(x)=0$

$$y=f(x)=\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \frac{y}{1}=\frac{1}{(1+x^2)} \Rightarrow y(1+x^2)=1$$

① $(y')(1+x^2)+(y)(2x)=0$

② $(y'')(1+x^2)+(y')(2x)+(y')(2x)+(y)(2)=0$

$(y'')(1+x^2)+4x\cdot y'+2y=0$

③ $(y''')(1+x^2)+(y'')(2x)+(4)(y')+(4x)(y'')+2y'=0$

معلق

$(y''')(1+x^2)+6x\,y''+6y'=0$

لتكن $f(x)=\frac{1}{1-x}$ فأثبت أن: $f'''(x)=\frac{3!}{(1-x)^4}$

$f(x)=\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}$

$f'(x)=-1(1-x)^{-2}\cdot(-1)=(1-x)^{-2}$

$f''(x)=-2(1-x)^{-3}\cdot(-1)=2(1-x)^{-3}$

$f'''(x)=2(-3)\cdot(1-x)^{-4}\cdot(-1)=6(1-x)^{-4}=\frac{3!}{(1-x)^4}$

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. إذا كانت $y = \frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$ فإن $\frac{d^2y}{dx^2} = -2x$ ⓐ ⓑ

2. إذا كانت $y = \frac{-3x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 4x$ فإن $\frac{d^3y}{dx^3} = -18x$ ⓐ ⓑ

3. معادلة المماس لمنحنى $x^2 - y^2 - x^2y = 7$ عند النقطة $(2\,,-1)$ هي : $y = 4x - 9$ ⓐ ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

4. إذا كانت : $f(x) = (1+6x)^{\frac{2}{3}}$ فإن : $f''(x)$ تساوي :

ⓐ $\frac{8}{27}(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$ ⓑ $8(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

ⓒ $-8(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$ ⓓ $-64(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

5. إذا كانت $f(x) = \frac{2x+1}{3x+2}$ فإن $f^{(4)}(x)$ تساوي :

ⓐ $24(3x+2)^{-5}$ ⓑ $-24(3x+2)^{-5}$

ⓒ $648(3x+2)^{-5}$ ⓓ $-648(3x+2)^{-5}$

6. ميل الخط العمودي على المماس (الناظم) عند النقطة $A(3\,,2)$ على منحنى : $x^2 - y^2 - 2xy = -7$ هو:

ⓐ -5 ⓑ $-\frac{1}{5}$ ⓒ $\frac{1}{5}$ ⓓ -5

7. ميل المماس عند النقطة $A(1\,,1)$ على منحنى : $x^2 - 3y^2 + 2xy = 0$ هي :

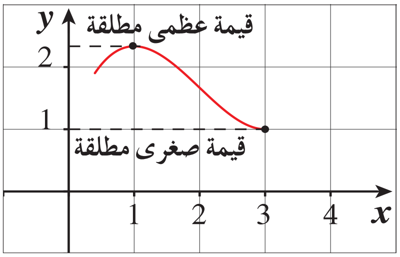
ⓐ -1 ⓑ 0 ⓒ 1 ⓓ 2

القيم القصوى (العظمى والصغرى) للدوال

تعريف (1): القيم القصوى المطلقة

إذا كانت f دالة مجالها D, $c \in D$ فإن $f(c)$ تسمى :

- قيمة عظمى مطلقة للدالة f على D عندما:
$f(c) \geq f(x) \quad , \quad \forall x \in D$
- قيمة صغرى مطلقة للدالة f على D عندما:
$f(c) \leq f(x) \quad , \quad \forall x \in D$



نظرية (1): نظرية القيمة القصوى

إذا كانت f دالة متصلة على فترة مغلقة $[a,b]$ فإن f تكون لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة

ملاحظة :

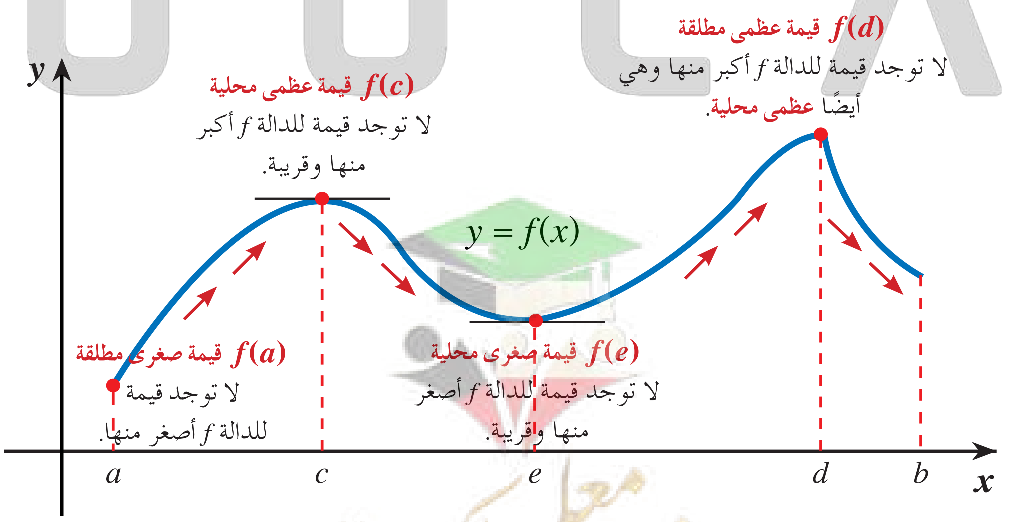
لتكن الدالة f المعرفة على $[a,b]$ ، $c \in (a,b)$ فإننا نسمي:

- $(a,f(a))$ ، $(b,f(b))$ نقاطا طرفية
- $(c,f(c))$ نقطة داخلية

تعريف (2): القيم القصوى المحلية:

لتكن $(c,f(c))$ نقطة داخلية للدالة f، D فترة مفتوحة تحوي c ، تكون $f(c)$:

- قيمة عظمى محلية عند c عندما:
$$f(c) \geq f(x) \quad , \quad \forall x \in D$$
- قيمة صغرى محلية عند c عندما:
$$f(c) \leq f(x) \quad , \quad \forall x \in D$$



تعريف (3): النقطة الحرجة

النقطة الداخلية للدالة f ,$(c, f(c))$ تسمى نقطة حرجة عندما $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة

أوجد النقاط الحرجة لكل من الدوال المتصلة التالية:

$g(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

$g(x)$ دالة كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$g'(x) = 3x^2 - 6x$

$g'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ، $x = 2$

$g(0) = (0)^3 - 3(0)^2 + 5 = 5 \Rightarrow (0, 5)$

$g(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 5 = 1 \Rightarrow (2, 1)$

نقطتان حرجتان للدالة g على مجالها

$f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 10$

f دالة كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 3x - 4) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \qquad x = 4 \qquad x = -1$

$f(0) = (0)^4 - 4(0)^3 - 8(0)^2 + 10 = 10 \quad \Rightarrow (0, 10)$

$f(4) = (4)^4 - 4(4)^3 - 8(4)^2 + 10 = -118 \quad \Rightarrow (4, -118)$

$f(-1) = (-1)^4 - 4(-1)^3 - 8(-1)^2 + 10 = 7 \quad \Rightarrow (-1, 7)$

نقاط حرجة للدالة f على مجالها

تمرين مشابه من الكراسة:

أوجد النقاط الحرجة لكل من الدوال التالية:

7. $y = x^2(x+2)$

$f(x)=\begin{cases} x^2+1 , x<1 \\ 3x-1 \ , \ x\geq 1 \end{cases}$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x<1 \\ \text{تبحث} & x=1 \\ 3 & x>1 \end{cases}$$

x^2+1 | 1 | $3x-1$

$f(1)=3(1)-1=2$

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ إن وُجدت

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=2$

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ إن وُجدت

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{3x-1-2}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{3x-3}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{3\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=3$

معلق

$\because f'_-(1)\neq f'_+(1)$

$\therefore$ $f'(1)$ غير موجودة بالتالي يوجد نقطة حرجة عند $x=1$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x<1 \\ 3 & x>1 \end{cases}$$

النقاط الحرجة

$x<1 , x\in(-\infty,1)$

$f'(x)=2x$

$2x=0\Rightarrow x=0$

$0\in(-\infty,1)$

للدالة نقطة حرجة
عند $x=0$

$f(0)=0^2+1=1$

$\therefore$ $(0,1)$ نقطة حرجة

$x=1$

$f'(1)$ غير موجودة

للدالة نقطة حرجة
عند $x=1$ وهي:

$(1,f(1))$

$(1,2)$

$x>1 , x\in(1,\infty)$

$f'(x)=3$

$\forall x\in(1,\infty), f'(x)\neq 0$

بالتالي لا توجد نقاط حرجة
على هذه الفترة

$f(x) = |x-5|$

$$f(x) = |x-5| = \begin{cases} x-5 & x \geq 5 \\ -x+5 & x < 5 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 5 \\ \text{تبحث} & x = 5 \\ -1 & x < 5 \end{cases}$$

$$f(5) = 0$$

$-x+5$ | $x-5$

5

$f'_-(5) = \lim_{x \to 5^-} \frac{f(x)-f(5)}{x-5}$ إن وُجدت

$= \lim_{x \to 5^-} \frac{-x+5-0}{x-5} = -1$

$f'_+(5) = \lim_{x \to 5^+} \frac{f(x)-f(5)}{x-5}$ إن وُجدت

$= \lim_{x \to 5^+} \frac{x-5-0}{x-5} = 1$

$\because f'_-(5) \neq f'_+(5)$

$\therefore$ $f'(5)$ غير موجودة بالتالي يوجد نقطة حرجة عند $x = 5$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 5 \\ -1 & x < 5 \end{cases}$$

معلق

النقاط الحرجة

$x > 5 , x \in (5, \infty)$	$x = 5$	$x < 5 , x \in (-\infty, 5)$
$f'(x) = 1$	$f'(5)$ غير موجودة	$f'(x) = -1$
$\forall x \in (5, \infty), f'(x) \neq 0$	للدالة نقطة حرجة عند $x = 5$ وهي:	$\forall x \in (-\infty, 5), f'(x) \neq 0$
بالتالي لا توجد نقطة حرجة على هذه الفترة	$(5 , f(5))$	بالتالي لا توجد نقاط حرجة على هذه الفترة
	$(5 , 0)$	

تمارين مشابهة من كراسة التمارين:

أوجد النقاط الحرجة لكل من الدوال التالية:

8. $y = x\sqrt{3-x}$

9. $y = \begin{cases} 3-x & , x < 0 \\ 3+2x-x^2 & , x \geq 0 \end{cases}$

نظرية (2): نظرية القيم القصوى المحلية

إذا كانت للدالة f قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محلية عند $x=c$ فإن $(c\,,f(c))$ نقطة حرجة

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة : $f(x)=x^3-3x+1$ في الفترة $[0,3]$

$\because f$ متصلة على $[0\,,3]$ $\therefore$ يوجد قيمة عظمى مطلقة و قيمة صغرى مطلقة في الفترة $[0,3]$

$f(0)=0^3-3(0)+1=1 \quad , \quad f(3)=3^3-3(3)+1=19$

$f'(x)=3x^2-3, f'(x)=0 \Rightarrow 3(x^2-1)=0 \Rightarrow 3(x-1)(x+1)=0$

$x=-1 : \quad -1 \notin \ (0\,,3)$

$x=1 : \quad 1 \in \ (0\,,3) \Rightarrow \quad f(1)=1^3-3(1)+1=-1$

$\therefore (1\,,-1)$ نقطة حرجة

من الجدول:

x	0	1	3
$f(x)$	1	-1	19

- أكبر قيمة للدالة f في الفترة $[0,3]$ هي $19 \Leftarrow 19$ قيمة عظمى مطلقة
- أصغر قيمة للدالة f في الفترة $[0,3]$ هي $-1 \Leftarrow -1$ قيمة صغرى مطلقة

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة: $f(x)=x^3-3x+1$ في الفترة $[-2,1]$

$\because f$ متصلة على $[-2\,,1]$ $\therefore$ يوجد قيمة عظمى مطلقة و قيمة صغرى مطلقة في الفترة $[-2,1]$

$f(-2)=(-2)^3-3(-2)+1=-1 \quad , f(1)=1^3-3(1)+1=-1$

$f'(x)=3x^2-3, f'(x)=0 \Rightarrow 3(x^2-1)=0 \Rightarrow 3(x-1)(x+1)=0$

$x=1 \quad ,1 \notin \ (-2\,,1)$

$x=-1 \quad ,-1 \in \ (-2\,,1) \Rightarrow \quad f(-1)=(-1)^3-3(-1)+1=3$

$\therefore (-1\,,3)$ نقطة حرجة

من الجدول:

x	-2	-1	1
$f(x)$	-1	3	-1

- أكبر قيمة للدالة f في الفترة $[-2,1]$ هي $3 \Leftarrow 3$ قيمة عظمى مطلقة
- أصغر قيمة للدالة f في الفترة $[-2,1]$ هي $-1 \Leftarrow -1$ قيمة صغرى مطلقة

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ في الفترة $[-2,3]$

$\because f$ متصلة على $[-2\,,3]$ $\therefore$ يوجد قيمة عظمى مطلقة و قيمة صغرى مطلقة في الفترة $[-2,3]$

$f(-2) = (-2)^{\frac{2}{3}} \approx 1.587$ ، $f(3) = (3)^{\frac{2}{3}} \approx 2.08$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

لاحظ أن: $f'(x) \neq 0$ "لأن البسط لا يساوي الصفر"

$f'(x)$ غير موجودة "عندما يكون المقام يساوي صفرا"

$3\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0,\quad 0 \in (-2\,,3)\ ,f(0) = 0^{\frac{2}{3}} = 0$

$\therefore (0\,,0)$ نقطة حرجة

x	-2	0	3
$f(x)$	1.587	0	2.08

من الجدول:

- أكبر قيمة للدالة f في الفترة $[-2\,,3]$ هي $2.08 \Leftarrow 2.08$ قيمة عظمى مطلقة
- أصغر قيمة للدالة f في الفترة $[-2\,,3]$ هي $0 \Leftarrow 0$ قيمة صغرى مطلقة

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ في الفترة $[1,3]$

$\because f$ متصلة على $[1\,,3]$ $\therefore$ يوجد قيمة عظمى مطلقة و قيمة صغرى مطلقة في الفترة $[1,3]$

$f(1) = \frac{1}{1^2} = 1\ ,\quad f(3) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$$f'(x) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

لاحظ أن: $f'(x) \neq 0$ "لأن البسط لا يساوي الصفر"

$f'(x)$ غير موجودة "عندما يكون المقام يساوي صفرا "

$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0,\quad 0 \notin (1\,,3)$

إذاً لا يوجد للدالة f نقاط حرجة في الفترة $(1\,,3)$

x	1		3
$f(x)$	1		$\frac{1}{9}$

من الجدول:

- أكبر قيمة للدالة f في الفترة $[1\,,3]$ هي $1 \Leftarrow 1$ قيمة عظمى مطلقة
- أصغر قيمة للدالة f في الفترة$[1\,,3]$ هي $\frac{1}{9} \Leftarrow \frac{1}{9}$ قيمة صغرى مطلقة

تمارين مشابهة من كراسة التمارين:

أوجد القيم القصوى المطلقة لكل من الدوال التالية:

$11.\ y = x^{\frac{3}{5}} \quad ,[-2,3]$

$10.\ y = 2x^2 - 8x + 9 \quad ,[0,4]$

$13.\ y = \sqrt{3 + 2x - x^2} \quad ,[-1,1]$

$12.\ y = \frac{x}{x^2+1} \quad ,[-3,0]$

$14.\ y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

معلق

لتكن f ، $a,b \in R$ ، $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$ و كان للدالة قيمة قصوى محلية عند كل من : $x = \frac{1}{3}$ ، $x = 1$ المطلوب : أوجد قيمة كل من الثابتين a,b

$\because$ f كثيرة حدود $\therefore$ f متصلة و قابلة للاشتقاق على R

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$\because$ للدالة قيمة قصوى محلية عند كل من $x = 1 \ , \ x = \frac{1}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} \therefore f'(1) = 0 \Longrightarrow 3(1)^2 + 2a(1) + b = 0 \Longrightarrow 2a + b = -3 \\ f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Longrightarrow 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2a\left(\frac{1}{3}\right) + b = 0 \Longrightarrow \frac{2}{3}a + b = \frac{-1}{3} \end{array}\right\} \Longrightarrow a = -2 \ , b = 1$$

لتكن f ، $a,b \in R$ ، $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1$ و كان للدالة قيمة قصوى محلية عند كل من: $x = 2$ ، $x = -1$ المطلوب : أوجد قيمة كل من الثابتين a,b

$\because$ f كثيرة حدود $\therefore$ f متصلة و قابلة للاشتقاق على R

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$$

$\because$ للدالة قيمة قصوى محلية عند كل من $x = -1 \ , \ x = 2$

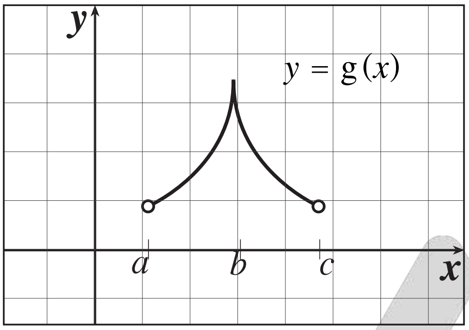
$$\left.\begin{array}{l} f'(-1) = 0 \Longrightarrow 6(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0 \Longrightarrow -2a + b = -6 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 6(2)^2 + 2a(2) + b = 0 \Longrightarrow 4a + b = -24 \end{array}\right\} \Longrightarrow a = -3 \ , b = -12$$

القيم القصوى للدوال - التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. إذا كانت f دالة متصلة على (a, b) فإن f لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة. (a) (b)

2. في الشكل التالي، للدالة g قيمة قصوى محلية عند $x = c$ (a) (b)



3. الدالة g : $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ لها قيمة عظمى في مجالها (a) (b)

4. الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ لها قيمة عظمى في مجالها (a) (b)

5. الدالة h : $h(x) = |3x - 5|$ لها قيمة حرجة عند $x = 5$ (a) (b)

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

معلق

6. لتكن $y = |x|$ فإن الدالة y:

(a) لها قيمة عظمى مطلقة فقط

(b) لها قيمة صغرى مطلقة فقط

(c) لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة

(d) ليس لها قيمة صغرى مطلقة وليس لها قيمة عظمى مطلقة

7. عدد النقاط الحرجة للدالة $y = 3x^3 - 9x = -4$ على الفترة $(0 , 2)$ هو:

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 0

8. الدالة k: $k(x) = |x^2 - 4|$ لها:

معلق

(a) قيمة عظمى مطلقة (b) قيمة صغرى مطلقة

(c) نقطتان حرجتان فقط (d) ليس أي مما سبق

9. إذا كانت $f(x) = ax^2 - 25x$ لها قيمة قصوى محلية عند $x = \frac{5}{2}$ فإن a تساوي:

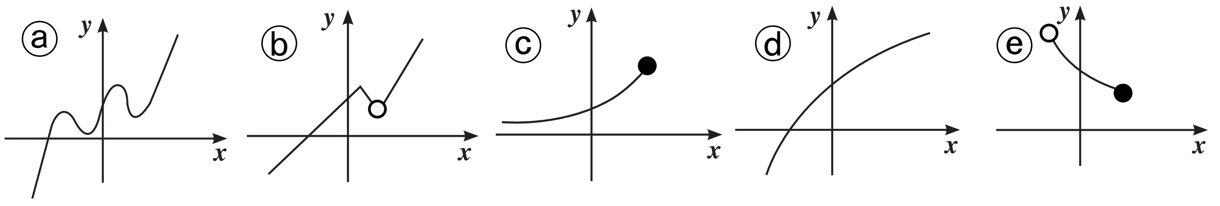
(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

اختر من القائمة ما يناسب كل عبارة من التمثيلات البيانية أدناه

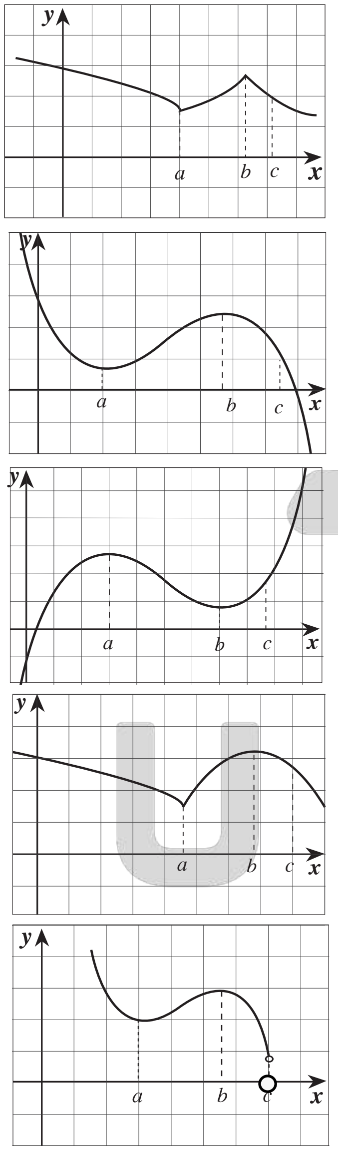
10. لها قيمة عظمى مطلقة c

11. لها أكثر من قيمة قصوى محلية a

12. ليس لها قيم قصوى محلية أو مطلقة d



اختر من القائمة ما يناسب كل عبارة من التمثيلات البيانية



a

b

c

d

e

13. c

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	أكبر من الصفر

14. b

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	أصغر من الصفر

15. d

x	$f'(x)$
a	غير موجودة
b	0
c	أصغر من الصفر

16. a

x	$f'(x)$
a	غير موجودة
b	غير موجود
c	أصغر من الصفر

تزايد وتناقص الدوال

نظرية (3) نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت f دالة:

- متصلة على الفترة $[a,b]$
- قابلة للاشتقاق على الفترة (a,b) فإنه يوجد على الأقل $c \in (a,b)$ بحيث :

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

بين أن الدالة: $f(x) = x^2$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0,2]$ ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك

الشروط : $f(x) = x^2$ دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ فهي متصلة على الفترة $[0\,,2]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(0\,,2)$.

$\because$ شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة $[0\,,2]$

$\therefore$ يوجد على الأقل $c \in (0\,,2)$ بحيث :

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{f(2)-f(0)}{2}$$

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(c) = 2c \quad , f(2) = (2)^2 = 4 \quad , f(0) = (0)^2 = 0$$

$$\therefore 2c = \frac{4-0}{2} \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1 \in (0\,,2)$$

التفسير : يوجد مماس لمنحنى الدالة عند $x = 1$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $(0\,,0)(\,2\,,4\,)$

بين أن الدالة: $f(x) = x^2 + 2x$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3,1]$ ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك

الشروط : $f(x) = x^2 + 2x$ دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ فهي متصلة على الفترة $[-3\,,1]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(-3\,,1)$.

$\because$ شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة $[-3\,,1]$

$\therefore$ يوجد على الأقل $c \in (-3\,,1)$ بحيث :

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(1)-f(-3)}{1-(-3)} = \frac{f(1)-f(-3)}{4}$$

$$f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow f'(c) = 2c + 2$$

$$f(-3) = (-3)^2 + 2(-3) = 3 \quad , \quad f(1) = 1^2 + 2(1) = 3$$

$$\therefore 2c + 2 = \frac{3-3}{4} \Rightarrow 2c + 2 = 0 \Rightarrow c = -1 \in (-3\,,1)$$

التفسير : يوجد مماس لمنحنى الدالة عند $x = -1$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $(-3\,,3)(\,1\,,3\,)$

بين أن الدالة: $f(x)=x^3+1$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3,3]$ ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك

الشروط : $f(x)=x^3+1$ دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ فهي متصلة على الفترة $[-3,3]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(-3,3)$.

$\because$ شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة $[-3,3]$
$\therefore$ يوجد على الأقل $c \in (-3,3)$ بحيث :

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(3)-f(-3)}{3-(-3)}=\frac{f(3)-f(-3)}{6}$$

$f'(x)=3x^2 \Longrightarrow f'(c)=3c^2$
$f(-3)=(-3)^3+1=-26\,, \qquad f(3)=(3)^3+1=28$

$$\therefore 3c^2=\frac{28-(-26)}{6}=9 \Longrightarrow c^2=3 \Longrightarrow c=\pm\sqrt{3}$$
$c=-\sqrt{3}\in(-3,3)\,,\, c=\sqrt{3}\in(-3,3)$

التفسير : يوجد مماسان لمنحنى الدالة عند $x=-\sqrt{3}\,,\, x=\sqrt{3}$

يوازيان القاطع المار بالنقطتين $(3,28)\,(-3,-26)$

بين أن الدالة : $f(x)=x^3-3x+2$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0,4]$ ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك

معلق

الشروط : $f(x)=x^3-3x+2$ دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ فهي متصلة على الفترة$[0,4]$وقابلة للاشتقاق على الفترة $(0,4)$.

$\because$ شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة $[0,4]$
$\therefore$ يوجد على الأقل $c \in (0,4)$ بحيث :

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{f(4)-f(0)}{4}$$

$f'(x)=3x^2-3 \Longrightarrow f'(c)=3c^2-3$
$f(4)=(4)^3-3(4)+2=54\,, \qquad f(0)=(0)^3-3(0)+2=2$

$$\therefore 3c^2-3=\frac{54-2}{4}=13 \Longrightarrow 3c^2=16 \Longrightarrow c^2=\frac{16}{3} \Longrightarrow c=\mp\sqrt{\frac{16}{3}}$$

$$c=\frac{4\sqrt{3}}{3}\in(0,4) \qquad c=\frac{-4\sqrt{3}}{3}\notin(0,4)$$

التفسير : يوجد مماس لمنحنى الدالة عند $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

يوازي القاطع المار بالنقطتين $(4,54)\,(0,2)$

💡 **تمارين مشابهة من الكراسة:**

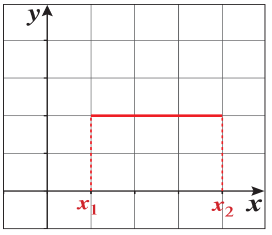
معلق ⚠

1. بيّن أن الدالة $f: f(x) = x^2 + 2x - 1$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $[0,1]$ ثم أوجد قيمة c التي تنبئ بها النظرية. فسّر إجابتك.

2. بيّن أن الدالة $f: f(x) = x + \frac{1}{x}$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ ثم أوجد قيمة c التي تنبئ بها النظرية. فسّر إجابتك.

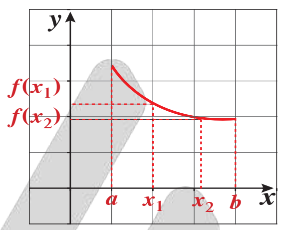
تزايد وتناقص الدوال : لتكن f دالة معرفة على الفترة I نقول إن الدالة

دالة ثابتة



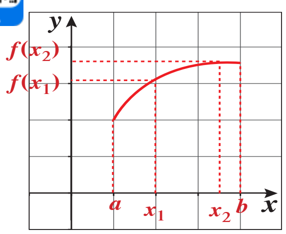
$\forall x_1, x_2 \in I \implies f(x_1) = f(x_2)$

دالة متناقصة



$\forall\, x_1, x_2 \in I$
$x_1 < x_2 \implies$
$f(x_1) > f(x_2)$

دالة متزايدة



$\forall\, x_1, x_2 \in I$
$x_1 < x_2 \implies$
$f(x_1) < f(x_2)$

الدالة المطردة: هي الدالة التي تكون دائماً متزايدة على فترة أو دائماً متناقصة على فترة

نظرية (4) الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة والدوال الثابتة

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a,b)

- إذا كانت $f'(x) > 0$ عند كل x تنتمي للفترة (a,b) فإن f تتزايد على (a,b)
- إذا كانت $f'(x) < 0$ عند كل x تنتمي للفترة (a,b) فإن f تتناقص على (a,b)
- إذا كانت $f'(x) = 0$ عند كل x تنتمي للفترة (a,b) فإن f ثابتة على (a,b)

Q حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة:

- $f(x) = x^2 - 5x + 6$

f كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 2x - 5\,,\qquad f'(x) = 0 \implies x = \frac{5}{2}$

	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	∞
الفترات	$\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$		$\left(\frac{5}{2}, \infty\right)$
اشارة f'	$-$		$+$
سلوك f	↘		↗

f متناقصة على $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$

f متزايدة على $\left(\frac{5}{2}, \infty\right)$

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة:

- $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

f كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = -2x + 4\,, \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{-4}{-2} = 2$

الفترات	$(-\infty, 2)$	$(2\,, \infty)$
اشارة f'	$+$	$-$
سلوك f	$\nearrow$	$\searrow$

f متزايدة على $(-\infty, 2)$ ، f متناقصة على $(2\,, \infty)$

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

f كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = -1\,, x = 3$

الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1\,, 3)$	$(3\,, \infty)$
اشارة f'	$+$	$-$	$+$
سلوك f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

f متزايدة على كل من $(-\infty, -1)\,, (3\,, \infty)$

f متناقصة على $(-1\,, 3)$

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x) = x^3 - 6x$

f كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \mp\sqrt{2}$

الفترات	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}\,, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}\,, \infty)$
اشارة f'	$+$	$-$	$+$
سلوك f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

f متزايدة على كل من $(-\infty, -\sqrt{2})\,, (\sqrt{2}\,, \infty)$ ، f متناقصة على $(-\sqrt{2}\,, \sqrt{2})$

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$

f حدودية نسبية متصلة $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$

$$f'(x)=\frac{(2x)(x-1)-(x^2)(1)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Longrightarrow x^2-2x=0 \Longrightarrow x=0\,,x=2$$

$-\infty$ ... 0 ... 1 ... 2 ... ∞

الفترات	$(-\infty,0)$	$(0\,,1)$		$(1\,,2)$	$(2\,,\infty)$
اشارة f'	$+$	$-$	غير معرفة	$-$	$+$
سلوك f	$\nearrow$	$\searrow$		$\searrow$	$\nearrow$

fمتزايدة على كل من $(-\infty,0),(2\,,\infty)$

fمتناقصة على كل من $(0\,,1),(1\,,2)$

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$

f حدودية نسبية متصلة $\forall x \in \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

$$f'(x)=\frac{(2x)(2x-1)-(x^2)(2)}{(2x-1)^2}=\frac{4x^2-2x-2x^2}{(2x-1)^2}=\frac{2x^2-2x}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Longrightarrow 2x^2-2x=0 \qquad \Longrightarrow 2x(x-1)=0 \Rightarrow x=0\,,x=1$$

$-\infty$ ... 0 ... $\frac{1}{2}$ ... 1 ... ∞

الفترات	$(-\infty,0)$	$\left(0\,,\frac{1}{2}\right)$		$\left(\frac{1}{2}\,,1\right)$	$(1\,,\infty)$
اشارة f'	$+$	$-$	غير معرفة	$-$	$+$
سلوك f	$\nearrow$	$\searrow$		$\searrow$	$\nearrow$

fمتزايدة على كل من $(-\infty,0),(1\,,\infty)$

fمتناقصة على كل من $\left(0\,,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2}\,,1\right)$

تزايد وتناقص الدوال - التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. الدالة g : $g(x) = x^2 - x - 3$ متزايدة على $(-\infty , \frac{1}{2})$ — a b

2. الدالة f : $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ متناقصة على كل من الفترة $(-\infty , -\sqrt{5})$ والفترة $(\sqrt{5} , \infty)$ — a b

3. الدالة f : $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $[0,1]$ — a b

معلق

4. الدالة f : $f(x) = x^3 + 1$ مطّردة على $\mathbb{R}$ — a b

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

5. تكون الدالة k : $k(x) = \frac{x}{x^2-4}$

a. متزايدة على كل فترة من مجال تعريفها
b. متناقصة على كل فترة من مجال تعريفها
c. متناقصة على كل من $(-\infty , -2)$, $(-2 ,2)$ ومتزايدة على $(2 ,\infty)$
d. ليس أي مما سبق

6. الدالة R : $R(x) = |x|$

a. متزايدة على مجال تعريفها
b. متناقصة على مجال تعريفها

معلق

c. متزايدة على الفترة $(0 , \infty)$ ومتناقصة على الفترة $(-\infty , 0)$
d. متناقصة على الفترة $(0 , \infty)$ ومتزايدة على الفترة $(-\infty , 0)$

7. إذا كانت f' : $f'(x) = -x^2$ فإن الدالة f :

a. متزايدة على مجال تعريفها
b. متزايدة على الفترة $(-\infty ,0)$ فقط
c. متناقصة على مجال تعريفها
d. متناقصة على الفترة $(0 , \infty)$ فقط

8. إذا كانت f' : $f'(x) = -3x$ فإن الدالة f :

a. متزايدة على الفترة $(0 , \infty)$
b. متناقصة على الفترة $(-\infty , 0]$
c. متزايدة على مجال تعريفها
d. متزايدة على الفترة $(-\infty , 0)$ ومتناقصة على الفترة $(0 , \infty)$

ربط المشتقة الأولى f' و المشتقة الثانية f'' بمنحى الدالة f

نظرية (5) اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية

لتكن f دالة متصلة على مجالها وكانت $(c,f(c))$ نقطة حرجة:

- إذا كانت إشارة f' تتغير من الموجب إلى السالب عند $x = c$ ، فإن للدالة قيمة عظمى محلية عند c
- إذا كانت إشارة f' تتغير من السالب إلى الموجب عند $x = c$ ، فإن للدالة قيمة صغرى محلية عند c
- إذا لم تتغير إشارة f' عند $x = c$ ، فإنه لا يكون لـ f قيمة قصوى محلية عند c

لتكن الدالة $f(x) = x^3 - 12x - 5$ أوجد كلا مما يلي :

- النقاط الحرجة للدالة
- الفترات التي تكون الدالة f متناقصة أو متزايدة عليها
- القيم القصوى المحلية

f كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 12, \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x-2)(x+2) = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} x = -2\,, f(-2) = 11 & (-2\,, 11) \\ x = 2\,, f(2) = -21 & (2\,, -21) \end{array}\right\} \text{نقاط حرجة}$$

الفترات	$(-\infty\,, -2)$	$(-2\,, 2)$	$(2\,, \infty)$
اشارة f'	$+$	$-$	$+$
سلوك f	متزايدة	متناقصة	متزايدة

f متزايدة على كل من $(-\infty\,, -2)\,, (2\,, \infty)$

f متناقصة على $(-2\,, 2)$

يوجد لـ f قيمة عظمى محلية عند $x = -2$ و تساوي $f(-2) = 11$

يوجد لـ f قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ و تساوي $f(2) = -21$

لتكن الدالة $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$ أوجد كلا مما يلي :

- النقاط الحرجة للدالة
- الفترات التي تكون الدالة f متناقصة أو متزايدة عليها
- القيم القصوى المحلية

f كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$

$f'(x) = -3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow -3x(x-2) = 0$

نقاط حرجة

$x = 0 , f(0) = -4 \quad (0, -4)$

$x = 2 , f(2) = 0 \quad (2, 0)$

	$-\infty$ … 0	0 … 2	2 … ∞
الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
اشارة f'	$-$	$+$	$-$
سلوك f	متناقصة ↘	متزايدة ↗	متناقصة ↘

f متناقصة على كل من $(-\infty, 0), (2, \infty)$ ، f متزايدة على $(0, 2)$

يوجد لـ f قيمة صغرى محلية عند $x = 0$ و تساوي $f(0) = -4$

يوجد لـ f قيمة عظمى محلية عند $x = 2$ و تساوي $f(2) = 0$

لتكن الدالة $f(x) = x - 3 + \frac{4}{x-1}$ أوجد كلا مما يلي:

- النقاط الحرجة للدالة
- الفترات التي تكون الدالة g متناقصة أو متزايدة عليها
- القيم القصوى المحلية

$f(x)$ مجموع دالتين "كثيرة حدود" و "حدودية نسبية" بالتالي $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق على كل من الفترتين $(-\infty , -1) , (1 , \infty)$

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1-2)(x-1+2)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow$

$x = 3 , f(3) = 2 \Rightarrow (3 , 2)$

$x = -1 , f(-1) = -6 \Rightarrow (-1 , -6)$

نقاط حرجة

$-\infty$ ، -1 ، 1 ، 3 ، ∞

الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1 , 1)$	$(1 , 3)$	$(3 , \infty)$
اشارة f'	$+$	$-$	$-$	$+$
سلوك f	↗	↘	↘	↗

غير معرفة

fمتزايدة على كل من $(-\infty, -1), (3 , \infty)$

fمتناقصة على كل من $(-1 , 1), (1 , 3)$

يوجد لـ f قيمة عظمى محلية عند $x = -1$ و تساوي $f(-1) = -6$

يوجد لـ f قيمة صغرى محلية عند $x = 3$ و تساوي $f(3) = 2$

لتكن الدالة $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ أوجد كلا مما يلي:

- النقاط الحرجة للدالة
- الفترات التي تكون الدالة g متناقصة أو متزايدة عليها
- القيم القصوى المحلية

$\therefore$ $g(x)$ متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ $\qquad D_g = \mathbb{R}$ $\qquad g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

$$g'(x) = \frac{(1)(x^2+1)-(x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow (1-x)(1+x) = 0$$

نقاط حرجة
$$\left.\begin{array}{ll} x = 1\,, f(1) = 0.5 & (1\,, 0.5) \\ x = -1\,, f(-1) = -0.5 & (-1\,, -0.5) \end{array}\right\}$$

$-\infty \qquad -1 \qquad 1 \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty\,, -1)$	$(-1\,, 1)$	$(1\,, \infty)$
اشارة g'	$-$	$+$	$-$
سلوك g	متناقصة	متزايدة	متناقصة

g متناقصة على كل من الفترة $(-\infty\,, -1)\,, (1\,, \infty)$

g متزايدة على الفترة $(-1\,, 1)$

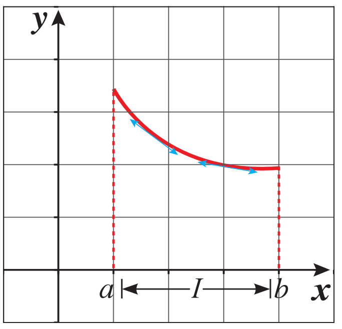
يوجد لـ g قيمة صغرى محلية عند $x = -1$ و تساوي $g(-1) = -0.5$

يوجد لـ g قيمة عظمى محلية عند $x = 1$ و تساوي $g(1) = 0.5$

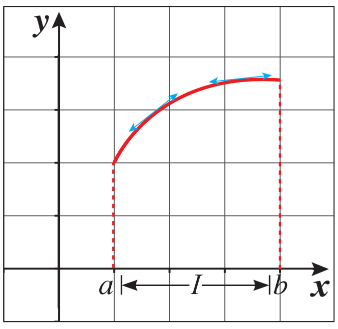
التقعر

تعريف التقعر:

- إذا وقع منحنى الدالة أعلى جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعراً لأعلى على هذه الفترة
- إذا وقع منحنى الدالة أسفل جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعراً لأسفل على هذه الفترة



التقعر نحو الأعلى



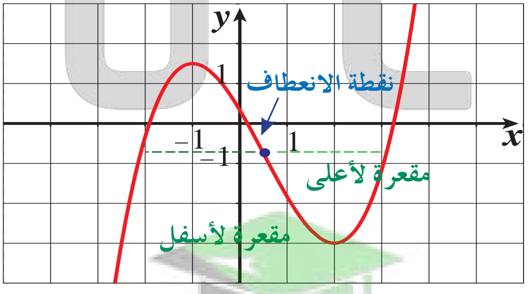
التقعر نحو الأسفل

اختبار التقعر

- إذا كانت $\forall x \in I$, $f''(x) > 0$ فإنه يكون مقعراً لأعلى على الفترة I
- إذا كانت $\forall x \in I$, $f''(x) < 0$ فإنه يكون مقعراً لأسفل على الفترة I

نقطة الانعطاف:

تُسمى النقطة $(c,f(c))$ نقطة انعطاف لبيان الدالة f إذا كانت الدالة متصلة عند c ومنحنى الدالة يغير تقعّره عند هذه النقطة من أعلى إلى أسفل أو بالعكس



ملاحظة:

إذا كانت $(c,f(c))$ نقطة انعطاف لبيان الدالة f فإن:
$f''(c) = 0$ أو $f''(c)$ غير موجودة

Q $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

f كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 6x^2 + 6x \, , f''(x) = 12x + 6 ، f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2}$

	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	∞
الفترات	$\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right)$		$\left(\frac{-1}{2}, \infty\right)$
اشارة f''	$-$		$+$
بيان f	$\cap$ مقعر للأسفل		$\cup$ مقعر للأعلى

بيان الدالة f مقعراً لأسفل في الفترة $\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right)$ ومقعراً لأعلى في الفترة $\left(\frac{-1}{2}, \infty\right)$

نقطة انعطاف $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

Q $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

f كثيرة حدود متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 4x \, , f''(x) = 6x - 4 ، f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 = \frac{11}{27}$

	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	∞
الفترات	$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$		$\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$
اشارة f''	$-$		$+$
بيان f	$\cap$ مقعر للأسفل		$\cup$ مقعر للأعلى

بيان الدالة f مقعراً لأسفل في الفترة $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ و مقعراً لأعلى في الفترة $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$

نقطة انعطاف $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{27}\right)$

نظرية (6): اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية

إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) < 0$ فإن f تكون لها قيمة عظمى محلية عند $x = c$

إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) > 0$ فإن f تكون لها قيمة صغرى محلية عند $x = c$

أوجد القيم القصوى المحلية للدالة:

$f(x) = x^3 - 12x - 5$

$f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow 3(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2 \,, x = 2$

$f''(x) = 6x$

$f''(-2) = 6(-2) = -12$

$\because -12 < 0$

$\therefore$ يوجد لـ f عند $x = -2$

قيمة عظمى محلية و هي $f(-2) = 11$

$f''(2) = 6(2) = 12$

$\because 12 > 0$

$\therefore$ يوجد لـ f عند $x = 2$

قيمة صغرى محلية و هي $f(2) = -21$

$f(x) = 4x^3 - 12x^2$

$f'(x) = 12x^2 - 24x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \,, x = 2$

$f''(x) = 24x - 24$

$f''(2) = 24 > 0$

يوجد لـ f عند $x = 2$

قيمة صغرى محلية و هي $f(2) = -16$

$f''(0) = -24 < 0$

يوجد لـ f عند $x = 0$

قيمة عظمى محلية و هي $f(0) = 0$

تمارين مشابهة من كراسة التمارين:

أوجد القيمة القصوى المحلية للدالة:

15. $f(x) = x^2 - 6x + 11$

16. $f(x) = x^4 - 18x^2$

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. الدالة $y = x^3 - 3x^2 + 5$ على الفترة $(0 , 3)$ مقعرة لأسفل — ⓐ ⓑ

2. الدالة $y = \frac{x}{x-1}$ على $(-\infty , 0)$ مقعرة لأعلى — معلق — ⓐ ⓑ

3. إذا كانت $f''(c) = 0$ ، فإن لمنحنى الدالة f نقطة انعطاف هي $(c , f(c))$ — ⓐ ⓑ

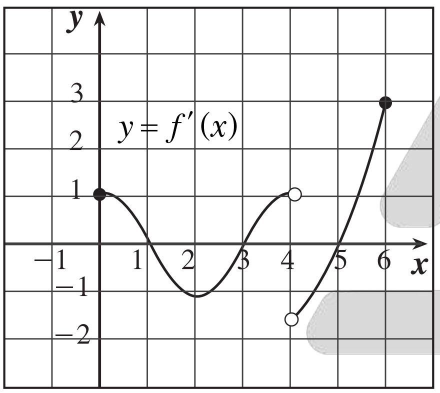
4. إذا كان لمنحنى الدالة f نقطة انعطاف هي $(c , f(c))$ فإن $f''(c) = 0$ — ⓐ ⓑ

5. يمكن أن تكون النقطة الحرجة نقطة انعطاف — ⓐ ⓑ

6. منحنى الدالة $y = -3x^8$ مقعرة للأعلى — ⓐ ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

7. إذا كان الشكل المقابل يمثل بيان دالة المشتقة (f') فإن الدالة f تكون



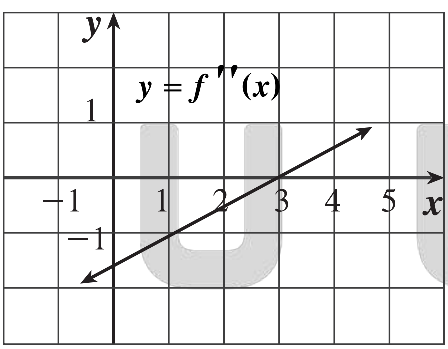
ⓐ متزايدة على كل من $(4 , 5)$ ،$(1 , 3)$

ⓑ متناقصة على كل من $(4 , 5)$ ،$(1 , 3)$

ⓒ لها قيمة صغرى محلية عند $x = 3$ فقط

ⓓ لها نقطة انعطاف عند كل من $x = 4 , x = 2$

8. إذا كانت f دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة والشكل المقابل يوضح بيان f'' فإن منحنى f مقعر للأسفل في الفترة:



ⓐ $(-\infty , 3)$ ⓑ $(3 , \infty)$

ⓒ $(-1 , 4]$ ⓓ $(3 , 5)$

9. أي من منحنيات الدوال التالية يكون مقعراً لأسفل في الفترة $(-1 , 1)$

ⓐ $f(x) = x^2$ ⓑ $f(x) = x|x|$ ⓒ $f(x) = -x^3$ ⓓ $f(x) = -x^2$

10. إذا كانت f دالة كثيرة الحدود، $(c , f(c))$ نقطة انعطاف لها فإن:

ⓐ $f''(c) = 0$ ⓑ $f'(c) = 0$ ⓒ $f(c) = 0$ ⓓ $f''(c)$ غير موجودة

11. أي من الدوال التالية ليس لها نقطة انعطاف:

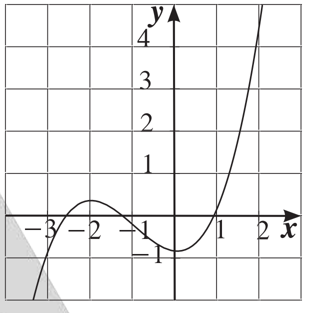
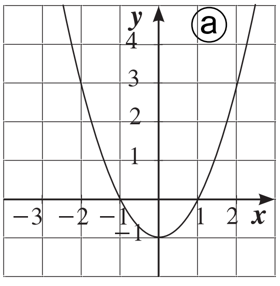
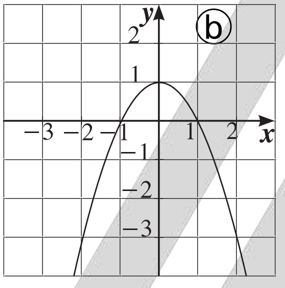
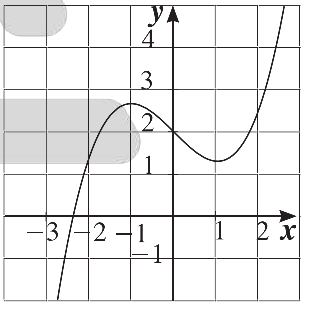
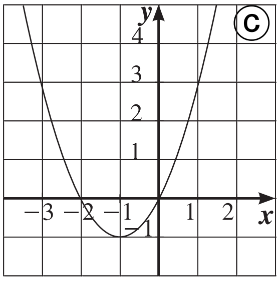
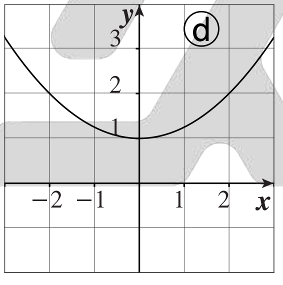
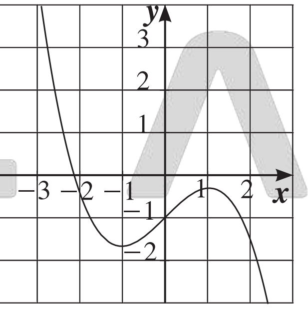
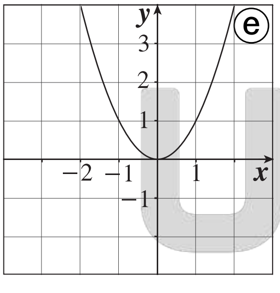
ⓐ $f(x) = x^3 + 5x$ ⓑ $f(x) = 4x^2 - 2x^4$

ⓒ $f(x) = x^3$ **ⓓ** $f(x) = (x-2)^4$

12. للدالة f : $f(x) = (x^2 - 3)^2$ نقاط انعطاف عددها:

ⓐ 1 **ⓑ** 2 ⓒ 3 ⓓ 4

اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1)

منحنى الدالة f	منحنى دالة المشتقة f'
13. **ⓒ** 	 
14. **ⓐ** 	 
15. **ⓑ** 	

رسم بيان دوال كثيرات الحدود

ادرس تغير الدالة: $f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بيانها

f دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = \infty$$

$f'(x) = 3x^2 - 3\ , f'(x) = 0 \Rightarrow$

$3(x-1)(x+1) = 0$

$x = 1 \longrightarrow f(1) = 2$

$\therefore$ $(1\ ,2)$ نقطة حرجة

$x = -1 \longrightarrow f(-1) = 6$

$\therefore$ $(-1\ ,6)$ نقطة حرجة

	$-\infty$	-1	1	∞
اشارة f'	$+$	$-$	$+$	
سلوك f	↗	↘	↗	

$f(-1) = 6$
قيمة عظمى محلية

$f(1) = 2$
قيمة صغرى محلية

f متزايدة على كل من:
الفترة $(-\infty\ , -1)$ والفترة $(1\ ,\infty)$

f متناقصة على الفترة $(-1\ ,1)$

$f''(x) = 6x\ , f''(x) = 0 \Rightarrow$

$x = 0\ , f(0) = 4$

	$-\infty$	0	∞
اشارة f''	$-$	$+$	
بيان f	$\frown$ للأسفل	$\smile$ للأعلى	

منحنى الدالة f مقعر لـ:

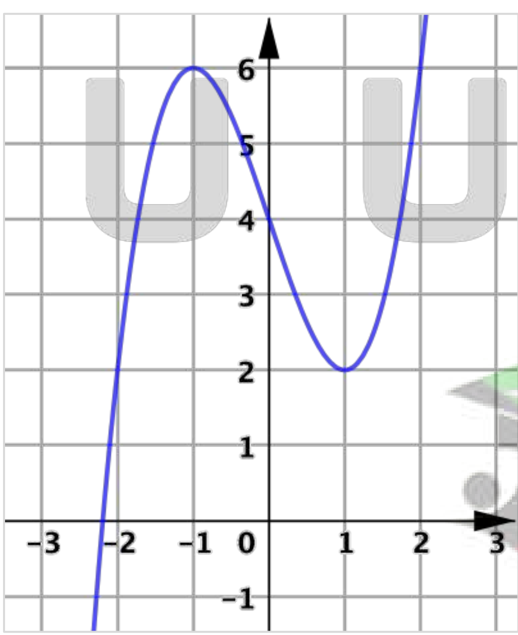
أعلى في $(0\ ,\infty)$, أسفل في $(-\infty\ ,0)$

$\therefore$ $(0\ ,4)$ نقطة انعطاف

نقاط إضافية :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	6	4	2	6

بيان الدالة f :



ادرس تغير الدالة: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها

f كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = \infty$$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x-3)(x-1) = 0$

$x = 3 \longrightarrow f(3) = -4$

$\therefore$ $(3,-4)$ نقطة حرجة

$x = 1 \longrightarrow f(1) = 0$

$\therefore$ $(1,0)$ نقطة حرجة

	$-\infty$	1		3		∞
اشارة f'	+		−		+	
سلوك f	↗		↘		↗	

$f(1) = 0$
قيمة عظمى محلية

$f(3) = -4$
قيمة صغرى محلية

f متزايدة على كل من:
الفترة $(-\infty,1)$ والفترة $(3,\infty)$

f متناقصة على الفترة $(1,3)$

$f''(x) = 6x - 12 , f''(x) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{12}{6} = 2 \longrightarrow f(2) = -2$

	$-\infty$	2		∞
اشارة f''	−		+	
بيان f	$\cap$ للأسفل		$\cup$ للأعلى	

منحنى الدالة f مقعر ل:

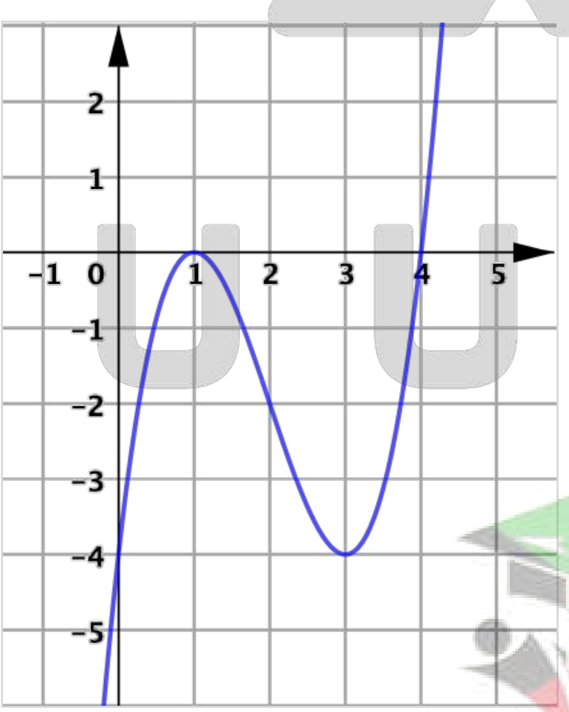
أعلى في $(2,\infty)$, أسفل في $(-\infty,2)$

$\therefore$ $(2,-2)$ نقطة انعطاف

نقاط إضافية :

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-4	0	-2	-4	0

بيان الدالة f :



ادرس تغير الدالة: $f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها

f كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-x^3) = -\infty$$

$f'(x) = -3x^2 \, , f'(x) = 0 \Rightarrow$

$x = 0 \longrightarrow f(0) = 1$

$\therefore$ $(0\,,1)$ نقطة حرجة

	$-\infty$	0	∞
اشارة f'	$-$		$-$
سلوك f	$\searrow$ متناقصة		$\searrow$ متناقصة

f متناقصة على :

الفترة $(-\infty\,,0)$ والفترة $(0,\infty)$

$f''(x) = -6x \;\; , f''(x) = 0 \Rightarrow$

$x = 0 \longrightarrow f(0) = 1$

	$-\infty$	0	∞
اشارة f''	$+$		$-$
بيان f	$\cup$ للأعلى		$\cap$ للأسفل

منحنى الدالة f مقعر لـ:

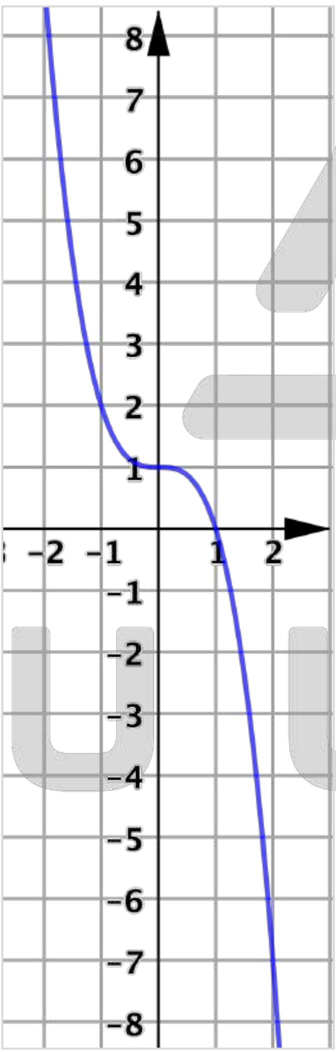
أسفل في $(0\,,\infty)$, أعلى في $(-\infty\,,0)$

$\therefore$ $(0\,,1)$ نقطة انعطاف

نقاط إضافية :

x	-2	-1	0	1	2
y	9	2	1	0	-7

بيان الدالة f :



ادرس تغير الدالة: $f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها

f كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -2x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -2x^3 = -\infty$$

$$f'(x) = 1 - 6x^2 , f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$1 - 6x^2 = 0 , x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-\sqrt{6}}{6} , f\left(\frac{-\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{-\sqrt{6}}{9}$$

$\therefore$ $\left(\frac{-\sqrt{6}}{6} , \frac{-\sqrt{6}}{9}\right)$ نقطة حرجة

$$x = \frac{\sqrt{6}}{6} , f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{9}$$

$\therefore$ $\left(\frac{\sqrt{6}}{6} , \frac{\sqrt{6}}{9}\right)$ نقطة حرجة

	$-\infty$	$\frac{-\sqrt{6}}{6}$		$\frac{\sqrt{6}}{6}$	∞
اشارة f'	$-$		$+$		$-$
سلوك f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$f\left(\frac{-\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{-\sqrt{6}}{9}$ قيمة صغرى محلية

$f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{9}$ قيمةعظمى محلية

f متناقصة على:

الفترة $\left(-\infty , \frac{-\sqrt{6}}{6}\right)$ والفترة $\left(\frac{\sqrt{6}}{6} ,\infty\right)$

f متزايدة على الفترة: $\left(\frac{-\sqrt{6}}{6} , \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

$$f''(x) = -12x , f''(x) = 0 \Rightarrow$$

$$x = 0 , f(0) = 0$$

	$-\infty$	0	∞
اشارة f''	$+$		$-$
بيان f	$\cup$		$\cap$
	للأعلى		للأسفل

منحنى الدالة f مقعر لـ:

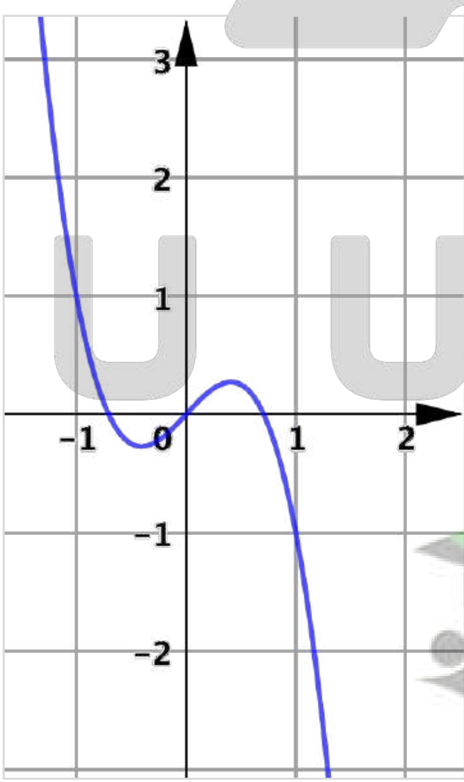
أسفل في $(0 ,\infty)$, أعلى في $(-\infty ,0)$

$\therefore$ $(0 ,0)$ نقطة انعطاف

نقط إضافية :

x	-1	$\frac{-\sqrt{6}}{6}$	0	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	1
y	1	$\frac{-\sqrt{6}}{9}$	0	$\frac{\sqrt{6}}{9}$	-1

بيان الدالة f :



ادرس تغير الدالة: $f(x)=3x^4+4x^3+2$ وارسم بيانها

f كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 3x^4=\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 3x^4=\infty$$

$f'(x)=12x^3+12x^2 , f'(x)=0$

$\Rightarrow 12x^2(x+1)=0$

$x=0 , f(0)=2$

$\therefore$ $(0,2)$ نقطة حرجة

$x=-1 , f(-1)=1$

$\therefore$ $(-1,1)$ نقطة حرجة

x	$-\infty$	-1	0	∞
إشارة	$-$	$+$	$+$	
سلوك f	↘	↗	↗	

fمتناقصة على $(-\infty,0)$

fمتزايدة على:
الفترة $(-1,0)$والفترة $(0,\infty)$

$f(-1)=1$ قيمة صغرى محلية

$f''(x)=36x^2+24x , f''(x)=0$

$\Rightarrow 12x(3x+2)=0$

$x=0 , f(0)=2$

$x=\frac{-2}{3} , f\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{38}{27}$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	0	∞
إشارة f''	$+$	$-$	$+$	
بيان f	$\cup$	$\cap$	$\cup$	

منحنى الدالة f مقعر ل:

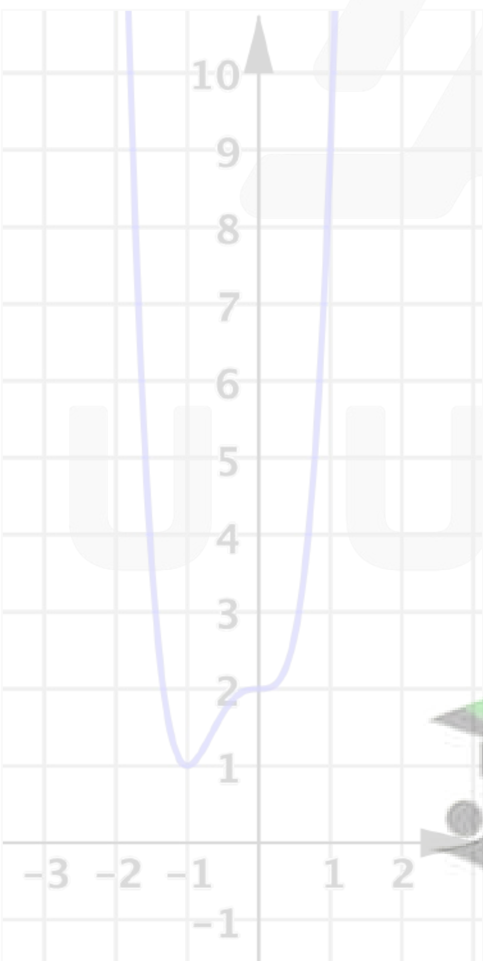
أعلى في كل من $(0,\infty)$, $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$,
لأسفل في $\left(-\frac{2}{3},0\right)$

$\therefore$ $(0,2)$, $\left(\frac{-2}{3},\frac{38}{27}\right)$ نقاط انعطاف

نقاط إضافية :

x	-2	-1	$\frac{-2}{3}$	0	1
$f(x)$	18	1	$\frac{38}{27}$	2	9

بيان الدالة f :



ادرس تغير الدالة: $f(x) = x^4 - 2x^2$ وارسم بيانها

f كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

∴ f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^4 = \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^4 = \infty$$

$f'(x) = 4x^3 - 4x, f'(x) = 0$

$\Rightarrow 4x(x-1)(x+1) = 0$

نقاط حرجة:

$x = 0 , f(0) = 0 \quad ,(0 , 0)$

$x = 1 , f(1) = -1 \quad ,(1 , -1)$

$x = -1 , f(-1) = -1 , (-1 , -1)$

	$-\infty$	-1	0	1	∞
اشارة f'	$-$	$+$	$-$	$+$	
سلوك f	↘	↗	↘	↗	

fمتزايدة على:
الفترة $(-1, 0)$ والفترة $(1,\infty)$

fمتناقصة على :
الفترة $(-\infty , -1)$ والفترة $(0,1)$

$f(-1) = -1$ قيمة صغرى محلية

$f(0) = 0$ قيمة عظمى محلية

$f(1) = -1$ قيمة صغرى محلية

$f''(x) = 12x^2 - 4 , f''(x) = 0$

$x = \frac{-\sqrt{3}}{3} , f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{-5}{9}$

$x = \frac{\sqrt{3}}{3} , f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{-5}{9}$

	$-\infty$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	∞
اشارة f''	$+$	$-$	$+$	
بيان f	∪	∩	∪	

منحنى الدالة f مقعر لـ:

أعلى في كل من $\left(-\infty, \frac{-\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$ ،

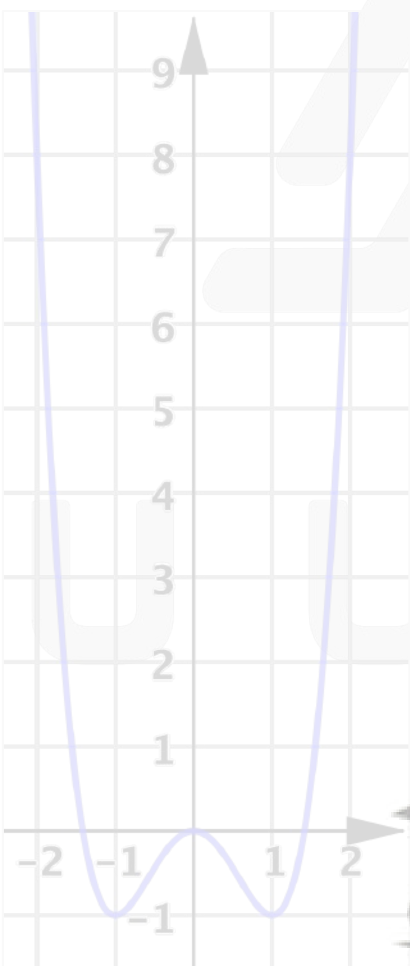
لأسفل في $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

∴ نقاط انعطاف $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{-5}{9}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-5}{9}\right)$

نقاط إضافية :

x	-2	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	2
$f(x)$	8	-1	$\frac{-5}{9}$	0	$\frac{-5}{9}$	-1	8

بيان الدالة f :



ادرس تغير الدالة: $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ وارسم بيانها

f كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x^4 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x^4 = -\infty$$

$f'(x) = -4x^3 + 4x, f'(x) = 0$

$\Rightarrow -4x(x-1)(x+1) = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} x = 0 , f(0) = 1 & (0 , 1) \\ x = 1 , f(1) = 2 & (1 , 2) \\ x = -1 , f(-1) = 2 & (-1 , 2) \end{array}\right\} \text{نقاط حرجة}$$

	$-\infty$	-1	0	1	∞
إشارة f'	$+$	$-$	$+$	$-$	
سلوك f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

fمتزايدة على:
الفترة $(-\infty,-1)$ والفترة $(0,1)$

fمتناقصة على :
الفترة $(-1,0)$والفترة $(1,\infty)$

$f(-1) = 2$ قيمة عظمى محلية

$f(0) = 1$ قيمة صغرى محلية

$f(1) = 2$ قيمة عظمى محلية

$f''(x) = -12x^2 + 4 , f''(x) = 0 \Rightarrow$

$x = \frac{-\sqrt{3}}{3} , f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{14}{9}$

$x = \frac{\sqrt{3}}{3} , f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{14}{9}$

	$-\infty$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	∞
إشارة f''	$-$	$+$	$-$	
بيان f	$\frown$	$\smile$	$\frown$	

منحنى الدالة f مقعر ل:

أسفل في كل من $\left(-\infty,\frac{-\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty\right)$

لأعلى في $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\therefore$ $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{14}{9}\right) , \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{14}{9}\right)$ نقاط انعطاف

نقاط إضافية :

x	-2	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	2
$f(x)$	-7	2	$\frac{14}{9}$	1	$\frac{14}{9}$	2	-7

بيان الدالة f :

ادرس تغير الدالة: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$ وارسم بيانها

f كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = \infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = \infty$

$f'(x) = 4x^3 - 16x = 0$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$

$4x(x-2)(x+2) = 0$

نقاط حرجة:

$x = 0 , f(0) = 7 \qquad (0 , 7)$

$x = 2 , f(2) = -9 \qquad (2 , -9)$

$x = -2 , f(-2) = -9 \qquad (-2 , -9)$

	$-\infty$	-2	0	2	∞
اشارة f'	$-$	$+$	$-$	$+$	
سلوك f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

fمتزايدة على:
الفترة $(2,\infty)$ والفترة $(-2,0)$

fمتناقصة على :
الفترة $(0,2)$والفترة $(-\infty,-2)$

$f(-2) = -9$ قيمة صغرى محلية
$f(0) = 7$ قيمة عظمى محلية
$f(2) = -9$ قيمة صغرى محلية

$f''(x) = 12x^2 - 16 , f''(x) = 0 \Rightarrow$

$x = \frac{-2\sqrt{3}}{3} , f\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{-17}{9}$

$x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad , f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{-17}{9}$

	$-\infty$	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	∞
اشارة f''	$+$	$-$	$+$	
بيان f	$\cup$	$\cap$	$\cup$	

منحنى الدالة f مقعر لـ:

أعلى في كل من $\left(-\infty,\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\infty\right)$

أسفل في $\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

$\therefore$ نقاط انعطاف $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{-17}{9}\right)$, $\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3},\frac{-17}{9}\right)$

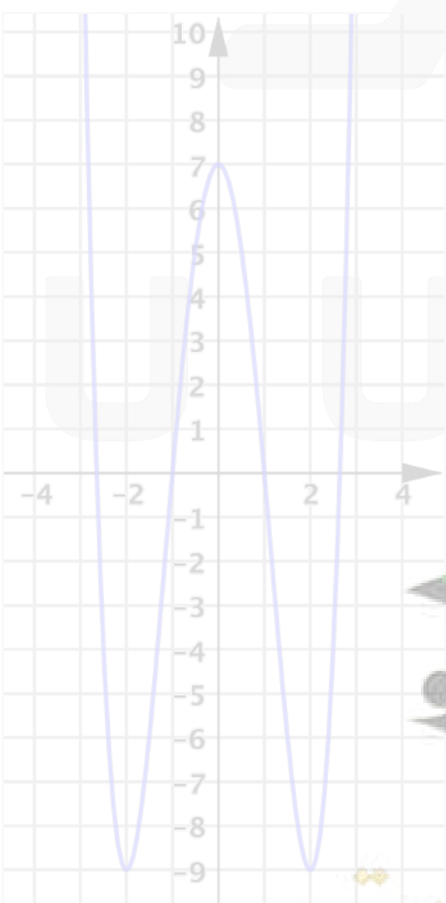
نقاط إضافية :

x	-3	-2	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	-1
$f(x)$	16	-9	$\frac{-17}{9}$	0

x	0	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	3
$f(x)$	7	0	$\frac{-17}{9}$	-9	16

⚠ معلق

بيان الدالة f :



💡 **تمارين مشابهة من الكراسة:**

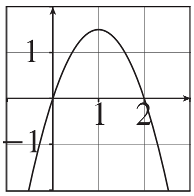
ادرس تغير كل من الدوال التالية وارسم بيانها:

4. مغلق	3. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 7$
6. $f(x) = -x^3 - 3x$	5. مغلق

رسم بيان دوال كثيرات الحدود-التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

لتكن f : $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2$ و (C) منحناها



1. يمر المنحنى (C) بنقطة الأصل — ⓐ ⓑ
2. الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة f' — ⓐ ⓑ
3. المماس عند النقطة التي إحداثيها السيني يساوي 2 موازٍ لمحور السينات — ⓐ ⓑ
4. 4 هي قيمة عظمى محلية — ⓐ ⓑ
5. المنحنى (C) مقعر لأعلى على الفترة $(-\infty, 1)$ — ⓐ ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

في التمارين التالية، الدالة f دالة كثيرة حدود جدول تغيرها:

x	$-\infty$		-1		5		∞
$f(x)$	∞	↘	-5	↗	3	↘	$-\infty$

6. العبارة الصحيحة فيما يلي هي:

ⓐ $f(-2) > f(0)$ ⓑ $f(0) < f(6)$

ⓒ $f(-9) > f(-2)$ ⓓ $f(-1) > f(8)$

7. للمعادلة $f(x) = 0$

ⓐ لا حل لها ⓑ ثلاثة حلول ⓒ حلان ⓓ حل واحد

8. جدول تغير الدالة f يوضح أن:

ⓐ 5- قيمة صغرى مطلقة

ⓑ 3 قيمة عظمى مطلقة

ⓒ 5- قيمة صغرى محلية، 3 قيمة عظمى محلية

ⓓ 1- قيمة صغرى محلية، 5 قيمة عظمى محلية

9. لتكن الدالة f : $f(x) = -x^2 + 7x + 1$

a) لمنحنى f قيمة عظمى محلية
b) لمنحنى f نقطة انعطاف
c) لمنحنى f مقعر لأعلى
d) لمنحنى f قيمة صغرى محلية

10. لتكن f : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$ لمنحنى f دائماً

a) قيمة عظمى محلية وقيمة صغرى محلية
b) نقطة انعطاف
c) تقعر لأسفل ثم تقعر لأعلى
d) لا تمر بنقطة الأصل

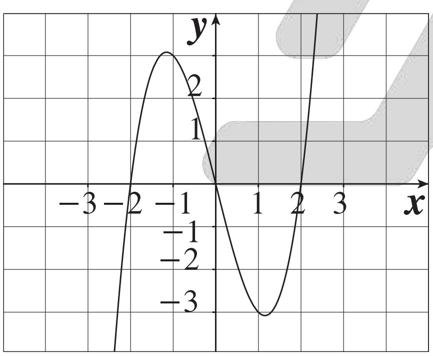
⚠ معلق

11. الدالة f كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة:

a) لمنحنى f دائماً نقطة انعطاف
b) لمنحنى f أكثر من قيمة عظمى محلية
c) منحنى f يقطع دائماً محور السينات
d) قد لا يكون لمنحنى f قيمة صغرى محلية

اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1)

الشكل المقابل يمثل بيان الدالة f



12. $f'(x) = 0$ ......d......
13. $f'(x) > 0$ في ......b......
14. $f''(x) < 0$ في ......a......

a) $(-\infty , 0)$
b) $(-\infty , -1) , (1 , \infty)$
c) $-2 , 0 , \quad 2$
d) $-1 , 1$
e) $(0 , \infty)$

تطبيقات على القيم القصوى

● عـــددان موجبـــان مجموعهمـــا 100 ومجمـــوع مربعيهما أصغر ما يمكن، ما العددان؟

العدد الأول x

العدد الثاني $(100-x)$

مجموع مربعيهما $0 < x < 100$

$f(x) = x^2 + (100-x)^2$

$f'(x) = 2x + 2(100-x)(-1)$

$= 2x - 200 + 2x$

$= 4x - 200$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$

$4x - 200 = 0 \Rightarrow$

$x = \dfrac{200}{4} = 50$

$\therefore$ $(50\,,f(50))$ نقطة حرجة

$f''(x) = 4\ ,\quad 4 > 0$

$\therefore$ $f(50)$ قيمة صغرى مطلقة عند:

$x = 50$

$\therefore$ العددان هما $50\,,50$

● أوجد عددين مجموعهما 14 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن؟

العدد الأول x

العدد الثاني $14-x$

ناتج ضربهما

$f(x) = x(14-x)$

$f(x) = 14x - x^2$

$f'(x) = 14 - 2x$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow 14 - 2x = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{-14}{-2} = 7$

$\therefore$ $(7\,,f(7))$ نقطة حرجة

$f''(x) = -2\ ,\ -2 < 0$

$\therefore$ $f(7)$ قيمة عظمى مطلقة

$x = 7$

$\therefore$ العددان هما $14 - 7 = 7\,,7$

تمارين مشابهة من الكراسة:

1. مجموع عددين غير سالبين هو 20 أوجد العددين إذا كان

a) مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن

b) أحد العددين مضافا إليه الجذر التربيعي للآخر أكبر ما يمكن

3. أثبت أن من بين المستطيلات التي محيطها $8m$ واحدا منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعا ؟

يراد صنع صندوق بدون غطاء بقص مربعات متطابقة طول ضلع كل منها x من أركان طبقة صفيح أبعادها $6cm$, $16cm$ و ثني جوانبها إلى أعلى (الشكل جانبا) المطلوب:

- أوجد قيمة x بحيث يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن وما هو حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة

$0 < 2x < 6$

$0 < x < 3$

الارتفاع × العرض × الطول = حجم الصندوق

$V(x) = (16 - 2x)(6 - 2x)x$

$= (96 - 32x - 12x + 4x^2) \cdot x$

$= 4x^3 - 44x^2 + 96x$

$V'(x) = 12x^2 - 88x + 96$

$V'(x) = 0 \Rightarrow$

$12x^2 - 88x + 96 = 0 \Rightarrow$

$x = 6 \notin (0, 3) \qquad x = \frac{4}{3} \in (0, 3)$

$V''(x) = 24x - 88$

$V''\left(\frac{4}{3}\right) = 24\left(\frac{4}{3}\right) - 88 = -56$

$-56 < 0$

∴ أكبر حجم للصندوق عند $x = \frac{4}{3}$

وهو: $V\left(\frac{4}{3}\right) = 4\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 44\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 96\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1600}{27} cm^3$

تمارين مشابهة من الكراسة:

6. يراد تصميم خزان حديدي لأحد المصانع على شكل شبه مكعب، قاعدته مربعة ومفتوح من أعلى وحجمه $500m^3$. لصنع الخزان يتم وصل ألواح الحديد مع بعضها من أطرافها أوجد أبعاد القاعدة والارتفاع التي تجعل وزن الخزان أقل ما يمكن

معلق

طلب إليك تصميم علبة زيت تسع لترا واحدا تكون على شكل أسطوانة دائرية قائمة ما أبعادها لتكون كمية المعدن المستخدم لصنعها أقل ما يمكن

$V = 1l = 1000\ cm^3$

$\pi r^2 . h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$

$\therefore A = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$ $: r > 0$

معلق

$A' = 0 \Rightarrow \frac{4\pi r}{1} + \frac{-2000}{r^2} = 0 \Rightarrow \frac{4\pi r^3 + -2000}{r^2} = 0 \Rightarrow$

$4\pi r^3 + \ -2000 = 0 \Longrightarrow r^3 = \frac{2000}{4\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5.42$

	0	5.42	∞
إشارة A'	$-$		$+$
سلوك A	↘		↗

$\therefore$ يوجد لـ A قيمة صغرى مطلقة عند $r \approx 5.42$ بالتالي: $h = \frac{1000}{\pi(5.42)^2} \approx 10.84\ cm$

تعطى الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h

- أوجد الارتفاع $h(cm)$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة
- ما قيمة هذا الحجم

$h \in (0\,,\infty)$

$v(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$

$v'(h) = 2\pi(-3h^2 + 36)$

$v'(h) = 0 \Rightarrow -3h^2 + 36 = 0$

$h = -2\sqrt{3} \notin (0\,,\infty)$

$h = 2\sqrt{3} \quad \in (0\,,\infty)$

$v'' = 2\pi(-6h) = -12\pi h$

$v''(2\sqrt{3}) = -12\pi(2\sqrt{3})$

$\approx -130.6 < 0$

$\therefore$ أكبر حجم الأسطوانة عندما $h = 2\sqrt{3}\ cm$

$v(2\sqrt{3}) = 2\pi\left(-(2\sqrt{3})^3 + 36(2\sqrt{3})\right) \approx 522.37\ cm^3$

تمارين مشابهة من الكراسة:

معلق

8. علبة من الصفيح على شكل إسطوانة قائمة مفتوحة من أعلى حجمها $1000\ cm^3$ أوجد أبعاد العلبة بحيث يكون وزنها أقل ما يمكن

أوجد أقصر مسافة بين النقطة $p(x,y)$ على المنحنى الذي معادلته $y^2 - x^2 = 16$ والنقطة $Q(6,0)$

$$PQ = \sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 - 2.x.6 + 6^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{x^2 - 12x + 36 + 16 + x^2} \qquad : y^2 = 16 + x^2$$

دالة المسافة:

$$\therefore f(x) = (2x^2 - 12x + 52)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - 12x + 52)^{-\frac{1}{2}}(4x - 12)$$

$$= \frac{4x - 12}{2\sqrt{2x^2 - 12x + 52}}$$

أصفار البسط

$$f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$\therefore$ $(3\,, f(3))$ نقطة حرجة

⚠ معلق

أصفار المقام

$$2\sqrt{2x^2 - 12x + 52} = 0 \Rightarrow$$

$$2x^2 - 12x + 52 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= (-12)^2 - 4\times2\times52$$
$$= -272 < 0$$

لا يوجد أصفار مقام

	$-\infty$	3	∞
إشارة f'	$-$		$+$
سلوك f	$\searrow$		$\nearrow$

$$f(3) = (2(3)^2 - 12(3) + 52)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{34}$$

$\therefore$ أقصر مسافة $= \sqrt{34}\ units$

أوجد أقصر مسافة بين النقطة $A(x,y)$ على المنحنى الذي معادلته $y=\sqrt{x}$ والنقطة $B(3,0)$

$$AB=\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2-6x+9+y^2}$$

$$=\sqrt{x^2-6x+9+x}=\sqrt{x^2-5x+9}$$

$$\therefore f(x)=(x^2-5x+9)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x^2-5x+9)^{-\frac{1}{2}}(2x-5)=\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+9}}$$

أصفار البسط

$f'(x)=0 \Rightarrow$

$2x-5=0 \Rightarrow \quad x=\frac{5}{2}$

$\therefore \left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ نقطة حرجة

أصفار المقام

$2\sqrt{x^2-5x+9}=0 \Rightarrow$

$x^2-5x+9=0$

$\Delta=b^2-4ac$
$=(-5)^2-4\times1\times9=-11<0$

لا يوجد أصفار للمقام

	0	$\frac{5}{2}$	∞
إشارة f'	$-$		$+$
سلوك f	$\searrow$		$\nearrow$

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2-5\left(\frac{5}{2}\right)+9\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$$

$\therefore$ أقصر مسافة $=\frac{\sqrt{11}}{2}$ $units$

تمارين مشابهة من الكراسة:

10. ما أقصر بعد للنقطة $\left(\frac{3}{2},0\right)$ عن منحنى الدالة : $y=\sqrt{x}$ ؟

تنتج إحدى الشركات في فترة زمنية محددة كمية x من الخلاطات الكهربائية، يعطى معدل كلفة إنتاج كل قطعة بالدينار بالعلاقة $C(x) = x - 20 + \frac{400}{x}$
أوجد كمية عدد القطع المنتجة خلال الفترة لتحقيق أقل كلفة ممكنة

الحل: المتغير x يمثل عدد القطع المنتجة، بالتالي هو عدد صحيح موجب

$$C'(x) = 1 - \frac{400}{x^2} = \frac{x^2 - 400}{x^2} \quad , C'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 400 = 0 \Rightarrow (x - 200)(x + 200) = 0 \Rightarrow x = -20$$ مرفوض

$$x = 20$$

من الجدول نجد أن إنتاج 20 قطعة يحقق أقل كلفة ممكنة

	0		20		∞
إشارة c'		−		+	
سلوك c		↘		↗	

2) تباع كل قطعة بـ 100 دينار

a. عبر عن الربح بمعلومية x

b. أوجد قيمة x التي تحقق أكبر ربح، وما قيمته؟

الربح = سعر المبيع - سعر التكلفة
سعر الكمية المباعة: $100x$
كلفة الكمية المباعة:

$$= \left(x - 20 + \frac{400}{x}\right)x = x^2 - 20x + 400$$

الربح:

$$P(x) = 100x - (x^2 - 20x + 400) = -x^2 + 120x - 400$$
$$p'(x) = -2x + 120$$
$$P'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 120 = 0 \Rightarrow$$
$$x = -\frac{120}{-2} = 60$$

	0		60		∞
إشارة P'		+		−	
سلوك P		↗		↘	

من الجدول نجد أن مبيع 60 قطعة يحقق أكبر ربح للشركة ويساوي

$$P(60) = -(60)^2 + 120(60) - 400 = 3200$$

أكبر قيمة للربح 3200 دينار

تنتج إحدى الشركات في فترة زمنية محددة كمية x بالآلاف من المكثفات، يعطى معدل كلفة إنتاج كل قطعة بالدينار بالعلاقة $C(x) = x - 2 + \frac{25}{x}$

1) أوجد كمية عدد القطع المنتجة خلال الفترة لتحقيق أقل كلفة ممكنة

الحل: المتغير x يمثل عدد القطع بالتالي هو عدد صحيح موجب

$$C'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2} \quad , C'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 25 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+5) = 0 \Rightarrow x = -5 \ \text{(مرفوض)} \quad , x = 5$$

	0	5	∞
إشارة C'	−		+
سلوك C	↘		↗

من الجدول نجد أن إنتاج 5 آلاف قطعة يحقق أقل كلفة

2) تباع كل ألف قطعة بـ 10 دنانير

a. عبر عن الربح بمعلومية x

b. أوجد قيمة x التي تحقق أكبر ربح، وما قيمته؟

الربح = سعر المبيع - سعر التكلفة

سعر الكمية المباعة: $10x$

كلفة الكمية المباعة:

$$= \left(x - 2 + \frac{25}{x}\right)x = x^2 - 2x + 25$$

الربح:

$$P(x) = 10x - (x^2 - 2x + 25) = -x^2 + 12x - 25$$

$$p'(x) = -2x + 12$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 12 = 0 \Rightarrow x = -\frac{12}{-2} = 6$$

	0	6	∞
إشارة P'	+		−
سلوك P	↗		↘

من الجدول نجد أن مبيع 6 آلاف قطعة يحقق أكبر ربح للشركة ويساوي

$$P(6) = -(6)^2 + 12(6) - 25 = 11$$

أكبر قيمة للربح 11 ألف دينار

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. أصغر محيط ممكن لمستطيل مساحته $16\ cm^2$ هو $16\ cm$ ⓐ ⓑ

2. أكبر مساحة لمستطيل قاعدته على محور السينات ورأساه العلويان على القطع المكافئ الذي معادلته $y = 12 - x^2$ هي $24\ units^2$ ⓐ ⓑ

معلق

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

3. مستطيل مساحته $36\ cm^2$ فإن أبعاده التي تعطي أصغر محيط هي:

ⓐ $9\ cm , 4\ cm$
ⓑ $12\ cm , 3\ cm$
ⓒ $6\ cm , 6\ cm$
ⓓ $18\ cm , 2\ cm$

4. أبعاد أكبر مساحة لمستطيل قاعدته على محور السينات ورأساه العلويان على القطع المكافئ $y = 4 - x^2$ هي:

ⓐ $8 , \frac{4\sqrt{3}}{3}$
ⓑ $\frac{8}{3} , \sqrt{3}$
ⓒ $4 , 4$
ⓓ $\frac{4\sqrt{3}}{3} , \frac{8}{3}$

5. أردت التخطيط لصنع صندوق على هيئة شبه مكعب بدون غطاء من قطعة ورق مقوّى مستطيلة أبعادها $10\ cm , 16\ cm$، وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة عند الرؤوس، ثم طي الأجزاء البارزة. أبعاد الصندوق الذي له أكبر حجم يمكن صنعه على أساسها هي:

معلق

ⓐ $2\ cm , 6\ cm , 12\ cm$
ⓑ $\dots , 4\ cm , 12\ cm$
ⓒ $2\ cm , 8\ cm , 12\ cm$
ⓓ $3\ cm , 6\ cm , 8\ cm$

6. تعطى المساحة الكلية لوعاء أسطواني الشكل بالمعادلة $s = \pi x^2 + \frac{2v}{x}$، حيث x طول نصف قطر قاعدته و V حجمه (تذكر: $V = \pi x^2 h$)
إذا كان حجم الوعاء ثابتا فإن القيمة الدنيا لمساحته هي عندما:

ⓐ $x > h$
ⓑ $x = h$
ⓒ $x < h$
ⓓ ليس أي مما سبق

🎯 **تدرب و تفوق**

اختبارات الكترونية ذكية

التقدير

درسنا سابقاً المجتمع الإحصائي والعينة

المتوسط الحسابي: للمجتمع هو μ ، للعينة هو $\bar{x}$
التباين: للمجتمع هو σ^2 ، للعينة هو s^2
الانحراف المعياري: للمجتمع هو σ ، للعينة هو s

المعلمة: هي ثابت يصف **المجتمع** أو يصف توزيع المجتمع كالمتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ

الإحصاءة: هو اقتران تتعين قيمته من **العينة** كالمتوسط الحسابي $\bar{x}$ أو الانحراف المعياري s

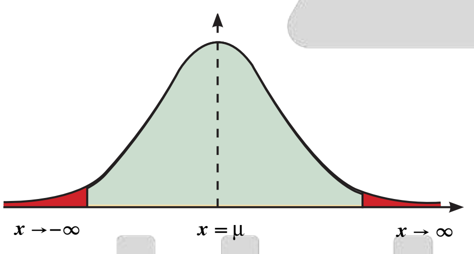
تقدير المعلمة : هو إحصاءة تعتمد على قيم العينة وتعكس قيمة قريبة لمعلمة المجتمع
سنتعلم طريقتين للتقدير (التقدير بنقطة - التقدير بفترة ثقة)

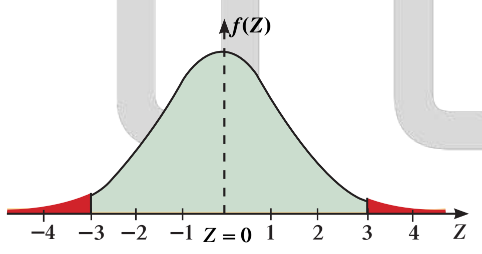
التقدير بنقطة: هي قيمة وحيدة محسوبة من العينة تُستخدم لتقدير معلمة مجهولة من المجتمع

فترة الثقة: هي فترة طرفاها متغيران عشوائيان تحوي إحدى معالم المجتمع بنسبة معينة نسميها درجة الثقة (مستوى الثقة)
التقدير بفترة الثقة: هو إيجاد فترة معينة يتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة

خواص التوزيع الطبيعي:

- المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال
- المنحنى على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول محوره $x = \mu$
- يمتد المنحنى من طرفيه إلى $\infty, -\infty$
- المساحة تحت المنحنى تساوي 1 وحدة مساحة
- عندما يكون $\mu = 0, \sigma = 1$ فإن التوزيع الطبيعي يصبح اسمه "**التوزيع الطبيعي المعياري**"





إيجاد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لكل من درجات الثقة التالية، وذلك باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

97%

$$1-\propto=0.97 \Rightarrow \frac{1-\propto}{2}=\frac{0.97}{2}=0.485 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=2.1+0.07=2.17$$

99.2%

$$1-\propto=\frac{99.2}{100}=0.992 \Rightarrow \frac{1-\propto}{2}=\frac{0.992}{2}=0.496 \Rightarrow$$
$$z_{\frac{\alpha}{2}}=2.6+0.05=2.65$$

95%

$$1-\propto=0.95 \Rightarrow \frac{1-\propto}{2}=\frac{0.95}{2}=0.475 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=1.9+0.06=1.96$$

التقدير بفترة الثقة للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي

أولا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع معلوما

أجريت الدراسة على عينة من الأثاث حجمها (25) والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 3.6$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 18.4$ ، باستخدام مستوى ثقة 95%

- أوجد هامش الخطأ
- أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ
- فسر فترة الثقة

مستوى الثقة 95% $\quad \bar{x} = 18.4 \quad \sigma = 3.6 \quad n = 25$

① $\because$ مستوى الثقة 95% $\therefore Z_{\frac{\propto}{2}} = 1.96$

$\because$ σ معلومة يكون هامش الخطأ:

$$E = Z_{\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{3.6}{\sqrt{25}} = 1.4112$$

② فترة الثقة

$$(\bar{x} - E, \bar{x} + E) = (18.4 - 1.4112, 18.4 + 1.4112) = (16.99, 19.81)$$

③ التفسير :

عند اختيار 100 عينة حجم كل منها $n = 25$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحتوي على القيمة الحقيقية لـ μ

ثانيا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع غير معلوم وحجم العينة $n > 30$

أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 81$ ومتوسطها الحسابي $\bar{x} = 50$ وانحرافها المعياري $S = 9$ ، مستوى ثقة 95%

- أوجد هامش الخطأ
- أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ
- فسر فترة الثقة

مستوى الثقة 95% $\quad s = 9 \quad \bar{x} = 50 \quad n = 81$

① ∵ مستوى الثقة 95% $\quad \therefore Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

∵ σ غير معلومة , $n > 30$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{9}{\sqrt{81}} = 1.96$$

② فترة الثقة:

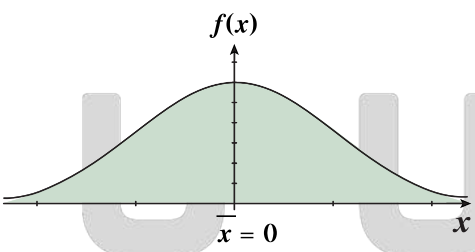
$$(\bar{x} - E , \bar{x} + E) = (50 - 1.96 , 50 + 1.96) = (48.04 , 51.96)$$

③ التفسير :

عند اختيار 100عينة حجم كل منها $n = 81$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحتوي على μ

ثالثا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع غير معلوم وحجم العينة $n \leq 30$

خواص التوزيع t:



- متماثل حول متوسطه الحسابي
- يمتد المنحنى من طرفيه إلى $\infty, -\infty$
- المتوسط الحسابي = صفر
- انحرافه المعياري أكبر من 1
- يعتمد على درجات الحرية $(n - 1)$

أوجد فترة ثقة 95% للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ علما أن العينة أخذت من مجتمع طبيعي. إذا كان لدينا $\bar{x} = 8.4$,$S = 0.3$,$n = 13$

① σ غير معلومة , $n \leq 30$ نستخدم توزيع t

درجات الحرية $n - 1 = 12$

∵ مستوى الثقة 95%

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

من جدول التوزيع t نجد: $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.179$

هامش الخطأ: $E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.179 \times \frac{0.3}{\sqrt{13}} \approx 0.1813$

② فترة الثقة

$$(\bar{x} - E , \bar{x} + E) = (8.4 - 0.1813 , 8.4 + 0.1813) = (8.2187 , 8.5813)$$

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. إن القيمة الحرجة $Z_{\frac{a}{2}}$ لدرجة الثقة 96% هي 2.05 معلق

ⓐ ⓑ

2. إذا أخذنا عينة من 225 هاتفاً، ووجدنا أن متوسط صلاحية استخدامها $\bar{x}$ هو 1.7 سنة، والانحراف المعياري s=0.5 ، ودرجة الثقة 95% فنجد أن فترة الثقة هي: $2.63 < \mu < 2.76$

ⓐ ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

3. إن القيمة الحرجة $Z_{\frac{a}{2}}$ لدرجة الثقة 96.6% هي:

ⓐ 2.12 ⓑ 2.17 ⓒ 21.2 ⓓ 21%

4. المتوسط الحسابي لدرجات 9 طلاب هو $\bar{x} = 2.76$ حيث النهاية العظمى 4 درجات والانحراف المعياري s=0.87 إن فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي عند درجة ثقة 95% هي:

ⓐ (2.1916 , 3.3284)
ⓑ (1.6232 , 3.8968)
ⓒ (2.1916 , 3.8968)
ⓓ (2.0913 , 3.4287)

5. لنفترض أن متوسط مجتمع إحصائي يقع ضمن الفترة $62.84 < \mu < 69.46$ فمتوسط هذه العينة يساوي:

ⓐ 56.34 ⓑ 62.96 ⓒ 6.62 ⓓ 66.15

6. إن حجم العينة المطلوبة لتقدير المتوسط الحسابي للمجتمع مع هامش خطأ وحدتين، ومستوى ثقة 95% وانحراف معياري للمجتمع $\sigma = 8$ يساوي:

ⓐ 65 ⓑ 62 ⓒ 8 ⓓ 26

7. أنجز 16 طالباً في كلية الطب قياس ضغط الدم لدي الشخص نفسه فحصلوا على النتائج التالية: 130 , 134 , 138 , 130 , 135 , 120 , 125 , 120 , 130 , 135 , 144 , 143 , 140 , 130 , 150 , 140 على افتراض أن الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي $\sigma = 10\text{mm Hg}$ فإن فترة الثقة عند درجة ثقة 95% للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي معلق

ⓐ (129.1 , 131.55)
ⓑ (129.1 , 138.9)
ⓒ (131.55 , 136.45)
ⓓ (136.45 , 138.9)

8. تتقارب قيمتي Z , t المتناظرة في جدول التوزيع الطبيعي المعياري إذا زادت درجات الحرية عن:

ⓐ 29 ⓑ 28 ⓒ 27 ⓓ 26

اختبارات الفروض الإحصائية

الفرض الإحصائي:

هو ادعاء مبني على حيثيات معقولة حول معلمة من معالم المجتمع مثل μ , σ

المقياس الإحصائي:

هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة تحت شروط معينة

اختبارات الفروض الإحصائية:

هي طريقة معيارية لاختبار ادعاء ما حول معلمة من معالم المجتمع

أولا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع معلوما

بينت الدراسة أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل أسلاك معدنية هو $\mu = 1800$ kg مع انحراف معياري $\sigma = 150kg$ ويؤكد الأخصائيون في المصنع المنتج لهذه الأسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة تحمل هذه الأسلاك وتأكيدا على ذلك تم اختبار عينة من 40 سلكا فتبين أن متوسط قوة تحمل هذه الأسلاك يساوي 1840 kg والمطلوب :
هل يمكن قبول مثل هذا الفرض بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$

① صياغة الفروض

$H_0 \quad \mu = 1800$

$H_1 \quad \mu \neq 1800$

② σ معلومة نستخدم المقياس

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1840 - 1800}{\frac{150}{\sqrt{40}}} \approx 1.686$$

③ $\because$ مستوى الثقة 95%

④ منطقة القبول $(-1.96 , 1.96)$

⑤ اتخاذ القرار الإحصائي

$\because 1.686 \in (-1.96, 1.96)$

نقبل $H_0 \quad \mu = 1800$ نرفض $H_1 \quad \mu \neq 1800$

ثانيا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع غير معلوم وحجم العينة $n > 30$

متوسط العمر بالساعات لعينة من 100 مصباح كهربائي مصنعة في أحد المصانع $\bar{x} = 1570$ بانحراف معياري: $S = 120$ يقول صاحب المصنع إن متوسط العمر بالساعات $\mu = 1600$ للمصابيح المصنعة في المصنع ،اختبر صحة الفرض $\mu = 1600$ مقابل الفرض $\mu \neq 1600$ باختيار مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

① صياغة الفروض

$H_0 \quad \mu = 1600$

$H_1 \quad \mu \neq 1600$

② σ غير معلومة , $n > 30$ نستخدم المقياس

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{1570 - 1600}{\frac{120}{\sqrt{100}}} \approx -2.5$$

③ ∵ مستوى الثقة 95%

$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

④ منظمة القبول

$(-1.96\,, 1.96)$

⑤ اتخاذ القرار الإحصائي

$\therefore -2.5 \notin (-1.96, 1.96)$

نرفض $H_0 \quad \mu = 1600$ نقبل $H_1 \quad \mu \neq 1600$

ثالثا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع غير معلوم وحجم العينة $n \leq 30$

يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الانفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة يساوي 290دينارا كويتيا إذا أجريت دراسة إحصائية وتبين من خلالها أن $S = 5$ ، $\bar{x} = 296$ لعينة من 10 منازل مع استخدام مستوى ثقة 95% فهل يبقى افتراض المدير عند الشركة صحيحا أم لا ؟ وضح إجابتك .

① صياغة الفروض

$H_0 \quad \mu = 290$

$H_1 \quad \mu \neq 290$

② σ غير معلومة , $n \leq 30$ نستخدم المقياس

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{296 - 290}{\frac{5}{\sqrt{10}}} \approx 3.795$$

③ ∵ مستوى الثقة 95%

درجات الحرية $= n - 1 = 9$

$t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.262$

④ منطقة القبول

$(-2.262\,, 2.262)$

⑤ اتخاذ القرار الإحصائي

$\therefore 3.795 \notin (-2.262\,, 2.262)$

نرفض $H_0 \quad \mu = 290$ نقبل $H_1 \quad \mu \neq 290$

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. في مجتمع إحصائي إذا كان المتوسط الحسابي $\mu = 860$ وعينة من هذا المجتمع حجمها $n = 25$ والمتوسط الحسابي $\bar{x} = 900$ والانحراف المعياري s=125 فإن المقياس الإحصائي هو t=1.6 — **(a)** (b)

2. متوسط العمر لعينة من 100 مصباح كهربائي بالساعات في أحد المصانع هو $\bar{x} = 1600$ بانحراف معياري s=125 . يقول صاحب المصنع أن متوسط عمر المصابيح بالساعات هو $\mu = 1640$ إن المقياس الإحصائي هو Z=3.2 . — (a) **(b)**

3. متوسط عمر الإطارات في أحد المصانع $\mu = 25000$ ، في دراسة لعينة عشوائية تبين أن المتوسط الحسابي هو $\bar{x} = 27000$ مع انحراف معياري s=5000 . إذا كان المقياس الإحصائي t=2 فإن حجم العينة $n = 25$ — **(a)** (b)

4. أخذت عينة عشوائية من مجتمع إحصائي حجمها $n = 81$ مع متوسط حسابي $\bar{x} = 3.6$ وانحراف معياري s=1.8 . إذا كان المقياس الإحصائي Z=-1.5 فإن المتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي $\mu = 3.3$ — (a) **(b)**

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

5. إذا كان القرار رفض فرض العدم، وفترة الثقة (1.96 , 1.96-) فإن قيمة الاختبار Z ممكن أن تكون:

(a) 1.5 **(b)** -2.5 (c) 1.87 (d) -1.5

6. إذا كانت قيمة الاختبار الإحصائي $Z = -1.5$ وفترة القبول (1.96 , 1.96-) فإن القرار يكون:

(a) رفض فرض العدم (b) فرض العدم

(c) قبول الفرض البديل (d) Z لا تنتمي للفترة

⚠ معلق

7. في دراسة حول متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة هو $\mu = 320$ (دينار) وقد تبين أن المتوسط الحسابي لعينة حجمها $n = 25$ منزلاً من هذه المدينة هو $\bar{x} = 310$ (دينار) مع انحراف معياري $s = 40$. إن المقياس الإحصائي هو:

(a) 1.25 **(b)** -1.25 (c) 0.8 (d) -0.8

8. في دراسة على عينة أسلاك معدنية حجمها $n = 64$ تبين أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل السلك $\bar{x} = 360$ kg مع انحراف معياري s=50 kg إذا كان المقياس الإحصائي لقوة تحمل كافة الأسلاك المعدنية $Z = 2.4$ فإن المتوسط الحسابي μ هو:

(a) 346 (b) 396 **(c)** 376 (d) 326

9. هدف إحدى الشركات الكبرى هو ربح صاف متوسطه الحسابي $\mu = 200000$ (دينار) في كل فرع من فروعها المنتشرة في عدد من الدول. في دراسة لعينة من عدد من لهذه الفروع أعطت متوسطاً حسابياً $\bar{x} = 195000$ (دينار) مع انحراف معياري s=80000 (دينار) إذا كان المقياس الإحصائي $Z = -0.625$ فإن حجم العينة π هو:

(a) 100 (b) 125 (c) 90 (d) 110

10.في دراسة لمجتمع إحصائي تبين أن متوسطه الحسابي $\mu = 125$ أخذت عينة من هذا المجتمع حجمها $n = 36$ فتبين أن متوسطها الحسابي $\bar{x} = 130$. إذا كان المقياس الإحصائي Z=3.125
فإن الانحراف المعياري σ هو:

ⓐ -9.6 ⓑ 6.9 ⓒ 9.6 ⓓ -6.9

تدرب و تفوق

اختبارات الكترونية ذكية