Senior
2020
المستقبل
لك
ان شاء
الله

(1 - 1) النهايات

1 الفترة (2 , 12) تمثل جوارا للعدد .... وفق للمعيار ....

الفترة (1 , 5-) تمثل جوارا للعدد .... وفق للمعيار ....

الفترة (2- , 9-) تمثل جوارا للعدد .... وفق للمعيار ....

الفترة التي تمثل جوارا للعدد 5 وفقاً للمعيار 3 هي ....

الفترة التي تمثل جوارا للعدد 7- وفقاً للمعيار 5 هي ....

نظرية (1)

يفرض أن L ، c عددين حقيقيين

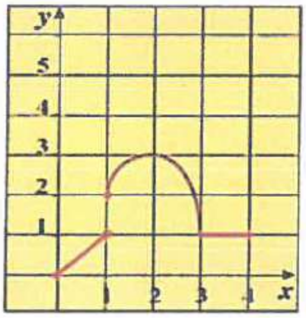
يكون للدالة f نهاية عندما تقترب x من c إذا وفقط إذا كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة اليسار

ويعبر عن ذلك: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L \iff \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L = \lim\limits_{x\to c^-} f(x)$

تدريب (1)

الشكل المقابل يمثل بيان الدالة: $f:[0,4]\to \mathbb{R}$

أكمل ما يلي:



1 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$...

2 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$...

3 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$...

4 $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$...

5 $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$...

6 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$...

7 $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$...

8 $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$...

9 $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$...

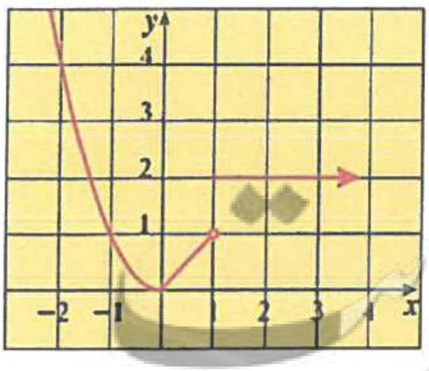
10 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$...

11 $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$...

مثال (1)

الشكل المقابل يمثل بيان الدالة f.

أوجد إن أمكن:



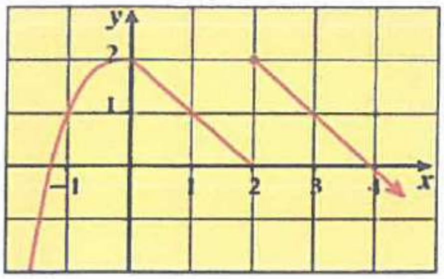
1 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

2 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

3 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

4 $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

حاول أن تحل



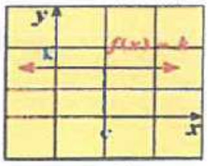
1 يمثل الشكل المقابل بيان الدالة f.

أوجد إن أمكن:

a $\lim_{x \to -1} f(x)$ b $\lim_{x \to 0} f(x)$

c $\lim_{x \to 2} f(x)$ d $\lim_{x \to 3} f(x)$

****

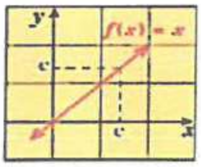


شكل (2)

نظرية (2)

إذا كانت f دالة: $f(x) = k$ وكانا k ، c عددان حقيقيان فإن:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$$



شكل (3)

نظرية (3)

إذا كانت f دالة: $f(x) = x$ وكان c عددًا حقيقيًا فإن:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c$$

نظرية (4)

إذا كانت L ، M ، c ، k أعدادًا حقيقية، $\lim_{x \to c} g(x) = M$ ، $\lim_{x \to c} f(x) = L$ فإن:

a قاعدة الجمع: $\lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) = L + M$

b قاعدة الطرح: $\lim_{x \to c}(f(x) - g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x) = L - M$

c قاعدة الضرب: $\lim_{x \to c}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x) = L \cdot M$

d قاعدة الضرب في ثابت: $\lim_{x \to c}(k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \to c} f(x) = k \cdot L$

e قاعدة القسمة: $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} = \frac{L}{M}$ ، $M \neq 0$

كن طموحا لكي تصل الي اهدافك

مثال (2)

بفرض أنّ: $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 5$ ، $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -2$

أوجد:

ⓐ $\lim\limits_{x\to 1}(f(x) - g(x))$　　ⓑ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2f(x)}{g(x)}$　　ⓒ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)+4}{f(x)\cdot g(x)}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل (2)

كن ايجابيا ولا تنظر خلفك

2 بفرض أنّ: $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = -3$ ، $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 7$

أوجد:

ⓐ $\lim\limits_{x\to 2}(f(x) + g(x))$　　ⓑ $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)\cdot g(x))$　　ⓒ $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{8f(x)\cdot g(x)}{f(x)+g(x)}\right)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

نظرية (5): دوال كثيرات الحدود ودوال الحدوديات النسبية

Polynomial and Rational Functions

a) إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ دالّة كثيرة الحدود، c عددًا حقيقيًا، فإنّ:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0$$

b) إذا كانت $f(x), g(x)$ كثيرتي حدود، c عددًا حقيقيًا، فإنّ:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} \quad , \quad g(c) \neq 0$$

مثال (3) اوجد ان امكن:

$$\lim_{x \to -1}(x^4 - 2x^3 + 5)$$

....

....

....

....

....

....

$$\lim_{x \to 1}(x^3 + 3x^2 - 2x - 17)$$

....

....

....

....

....

....

$$\lim_{x \to 3}(x^2(2 - x))$$

....

....

....

....

....

هل تريد النجاح والتفوق ؟؟

حاول أن تحل (3)

اوجد ان امكن:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+3}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x+6}{x+2}$$

احد اسرار النجاح في الصبر والمثابره

حاول أن تحل (4)

4 إذا كانت الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & : x < 2 \\ x - 1 & : x > 2 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim_{x \to 2} f(x)$

....

مثال (5)

إذا كانت الدالة g:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \leqslant 0 \\ 1 - 2x & x > 0 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim_{x \to 0} g(x)$

....

هل اديت فروضك ؟؟

مثال (4)

إذا كانت الدالة f:

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & x<1\\ 5 & x=1\\ \dfrac{5}{x} & x>1\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

حاول أن تحل (5)

إذا كانت الدالة g:

$$g(x)=\begin{cases}x^3+x & x>1\\ \dfrac{x}{x^2+1} & x\leqslant 1\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

اذهب وقبل يدي والديك واشكرهم
او ادعى لهما بالمغفرة والرحمة

نظرية (6)

بفرض أن $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة وكانت n عددًا صحيحًا موجبًا فإن:

a) $\lim\limits_{x\to c}(f(x))^n = \left(\lim\limits_{x\to c} f(x)\right)^n$

b) $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$ (في حالة n عددًا زوجيًا يشترط أن يكون $c > 0$)

c) $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$ (في حالة n عددًا زوجيًا يشترط أن تكون $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$)

مثال / حاول أن تحل (7)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -1}(x^2-3x-1)^5$$

....

....

....

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 2}(x^2-3)^7$$

....

....

....

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x-3}$$

....

....

....

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -1}\sqrt[3]{x^3-4x+5}$$

....

....

....

الفرق بين الاغبياء والاذكياء،الاغبياء يملكون حلما ، الاذكياء يملكون هدفا

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 5}\sqrt{x^2-9}=$$

لا تفكر بالاهداف التي تناسب قدراتك

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{3x^2-2}=$$

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2-7}=$$

فكر بالقدرات التي تناسب اهدافك مثل التركيز في الدراسة

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 4}(x+\sqrt{x})^4$$

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x^3-4x+5}}{x-2}$$

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x^2-2}}{x-2}$$

حلل ما يلي :

كل اغنياء العالم كانوا فقراء ولكن لديهم طموح

$x^2 + x - 2 =$

$x^2 + 3x + 2 =$

$x^2 + 7x =$

$x^2 + x =$

$x^2 - 1 =$

$x^2 - 4 =$

$x^3 - 8 =$

$x^3 + 27 =$

$(\cdots\cdots)^2 - 9 = [(\cdots\cdots) - 3]\,[(\cdots\cdots) + 3]$

$(x+4)^2 - 9 =$

$(\cdots\cdots)^3 + 8 = [(\cdots\cdots) + 2]\,[(\cdots\cdots)^2 - 2(\cdots\cdots) + 4]$

$(\cdots\cdots)^3 - 27 = [(\cdots\cdots) - 3]\,[(\cdots\cdots)^2 + 3(\cdots\cdots) + 9]$

$(2+x)^3 + 8 =$

$x - 1 = (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)$

$x - 1 = [\sqrt[3]{x} - 1][(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1]$

كن طموح وحقق اهدافك

مثال (8) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=$$

حاول أن تحل (8) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}=$$

كراسة التمارين

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 0}\frac{(4+x)^2-16}{x}=$$

النجاح
ملك من
يدفع
ثمنه

حاول أن تحل (8)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -7}\frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x}=$$

كراسة التمارين

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+x)^3-27}{x}=$$

مثال (8)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x}=$$

لا تحقق الاعمال بالامنيات وانما بالارادة نصنع المعجزات

مثال (10)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}=$$

مثال (10)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^5+32}{x+2}=$$

قد تتعثر احيانا
وتسقط احيانا اخري
انهض وواصل الطريق

حاول أن تحل (10)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x - 3} =$$

حاول أن تحل (10)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to 2} \frac{-x^5 + x^3 + x + 22}{x - 2} =$$

بدل ان تلعن الظلام اوقد شمعة

حاول أن تحل (8)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to 5} \frac{|x+2|-7}{x^2-25} =$$

يقول اينشتاين : ليس الامر اني عبقري ،كل ماهنالك اني اجاهد مع المشاكل لفترة اطول

مثال (8)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x^2-1}=$$

قيل لنابليون بونابرت يوما ان جبال الالب شاهقة تمنع تقدمك ، فقال يجب ان تزول من الارض

مثال (9)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2} =$$

ان الاجابة الوحيدة علي الهزيمة علي الانتصار

حاول أن تحل (9)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}=$$

Senior
2020
المستقبل
لك
ان شاء
الله

حاول أن تحل (9)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to9}\frac{x-9}{3-\sqrt{x}}=$$

كراسة التمارين

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=$$

من لا يشكر الناس لا يشكر الله

اشكر ثلاث أشخاص غدا

(2 - 1) نهايات تشتمل على ∞ ، $-\infty$

نظرية (9)

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty \iff \left(\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = \infty\right)$$

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty \iff \left(\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty\right)$$

نظرية (10)

إذا كان n عدد صحيح زوجي موجب فإن:

$$\lim_{x\to c} \frac{1}{(x-c)^n} = \infty$$

إذا كان n عدد صحيح فردي موجب فإن:

1 $\lim_{x\to c^+} \frac{1}{(x-c)^n} = \infty$

2 $\lim_{x\to c^-} \frac{1}{(x-c)^n} = -\infty$

حيث $c \in R$

مثال (2) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{|x-2|} =$$

حاول أن تحل (2)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to -1} \frac{3}{|x+1|} =$$

كراسة التمارين

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to -2} \frac{-7}{|x+2|} =$$

تعود على العادات الحسنة وهي سوف تصنعك

(2 - 1) نهايات تشتمل على ∞ـــ ، ∞

نظرية (7)

لتكن f: $f(x)=\frac{1}{x}$ فإن:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \ , \ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

نظرية (8)

لتكن f : $k\in\mathbb{R}$ ، $n\in\mathbb{Z}^+$ ، $f(x)=\frac{k}{x^n}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{k}{x^n}=0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{k}{x^n}=0$$

فمثلاً: $\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{x^3}=0$ ، $\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x^4}=0$ ، ...

تبقى النظريات (c ، a 6)، (4)، (2) صحيحة عند إيجاد $\lim_{x\to\infty}f(x)$ وكذلك عند إيجاد $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.

مثال (1) أوجد إن أمكن

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+4}=$$

....

....

....

....

....

....

مثال (1)

$$b)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x+5}{x^2+25}=$$

....

....

....

....

....

نتعلم من الفشل اكثر من النجاح

مثال (1) أوجد إن أمكن

$$c)\ \lim_{x\to\infty}\frac{6x^3}{5-7x^3}=$$

حاول أن تحل (1) أوجد إن أمكن

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+4}=$$

ثق بنفسك ، فانت تعرف اكثر مما تعتقد

$$b)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{x^2+9}=$$

$$c)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+1}{x^3+5}=$$

(3 – 1) صيغ غير معينة

ملاحظة: إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 \quad , \quad a_n \in \mathbb{R}^*$

فإن: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} a_n x^n$

أحيانًا نحتاج لحساب نهاية دالة على الصورة: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

حيث: $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \pm\infty \quad , \quad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$

في هذه الحالة نحصل على إحدى الصور التالية: $\frac{-\infty}{-\infty}$ أو $\frac{\infty}{-\infty}$ أو $\frac{-\infty}{\infty}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

ونسميها **صيغ غير معينة.**

كذلك إذا حسبنا $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - g(x))$ وحصلنا على الصورة $(\infty - \infty)$

فهي تسمى أيضًا **صيغة غير معينة.**

مثال (1) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to \infty}(2x^2 - 3x + 1) =$$

....

....

....

....

حاول أن تحل (1) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to \infty}(-3x^2 + 2x - 4) =$$

....

....

....

....

....

....

الفوز هو ان تتقدم لا ان يتراجع منافسوك

نظرية (11)

إذا كانت كل من g ، f دالة حدودية حيث:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_0$$ فإن:

ⓐ $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m} \; : \; n = m$

ⓑ $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \; : \; n < m$

ملاحظة: تبقى النظرية صحيحة عندما $x \to -\infty$

مثال (2) أوجد إن أمكن

$$(a) \lim_{x \to \infty} \frac{4 - 3x^3}{2x^3 + 5} =$$

....

....

$$(b) \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 + x - 1}{3x^4 - x} =$$

....

....

$$(c) \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 1}{7 - 2x^4} =$$

....

....

حاول أن تحل (1) أوجد إن أمكن

$$(a) \lim_{x \to \infty} \frac{-3x^3 + 5x + 1}{6x^2 - x + 1} =$$

....

....

$$(b) \lim_{x \to -\infty} \frac{2x + 1}{4x^3 - 2x + 3} =$$

....

....

مثال (3)

اذا كان

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+3}{2x+5}=3$$

فاوجد قيمة كل من الثابيتين a ، b

حاول أن تحل (3)

اذا كان

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{ax^2+bx-3}=-1$$

فاوجد قيمة كل من الثابيتين a ، b

ساصير يوما ما اريد

مثال (4)

أوجد إن أمكن

$$a)\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}=$$

الجميع يفكر في تغيير العالم ولكن لا احد يفكر في تغيير نفسه

حاول أن تحل (4)

أوجد إن أمكن

$$b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}=$$

حاول أن تحل (4)

أوجد إن أمكن

$$c)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}=$$

ابدا بنفسك

(1 - 4) نهايات بعض الدوال المثلثية

نظرية (12)

حيث x بالراديان . $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

نتيجة (1)

إذا كان b ، a عددين حقيقيين، $b\neq 0$ ، $a\neq 0$ فإن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b} \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{bx}{\sin ax}=\frac{b}{a}$$

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\cos x=1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\tan x=0$$

يمكننا تطبيق نظريات النهايات من البنود السابقة في إيجاد نهايات الدوال المثلثية.

نتيجة (2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

نتيجة (3)

إذا كان $a , b\in R^*$ فإن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx}=\frac{a}{b}$$

Senior 2020
إن شاء الله

مثال (1)

أوجد:

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x}=$$

حاول أن تحل (1)

أوجد:

$$b)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x^2-x}=$$

حاول أن تحل (1)

أوجد:

$$c)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x\cos x}=$$

نحن من نصنع مصانرنا

مثال (2)

أوجد : -

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{5\tan x-3\cos x}{4x}=$$

حاول أن تحل (2)

أوجد : -

$$b)\lim_{x\to 0}\frac{3\tan x+x^2\cos x}{5x}=$$

مثال (3)

أوجد : -

$$c)\lim_{x\to 0}\frac{5x+\sin x}{x}=$$

ابتسم للحياة

حاول أن تحل (3)

أوجد : -

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x - x^2}{3x^2} =$$

مثال (3)

أوجد : -

$$b)\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\tan x - 2x\cos x}{3x} =$$

حاول أن تحل (3)

أوجد : -

$$c)\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x + 3x\cos 4x}{5x} =$$

لا يأس مع الحياة ولا حياة مع اليأس

مثال (1)

أوجد : -

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=$$

حاول أن تحل (1)

أوجد : -

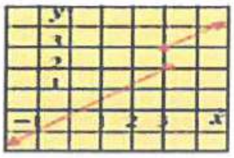
$$b)\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\cos x-1}=$$

هل أديت فروضك ؟؟

(5 - 1) الاتصال

تدريب

1

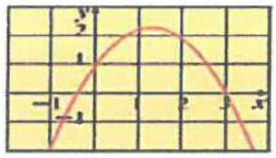


$\lim_{x \to 3} f(x)$ ....

$f(3)$ ....

ماذا تلاحظ؟

2

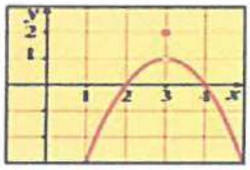


$\lim_{x \to 3} f(x)$ ....

$f(3)$ ....

ماذا تلاحظ؟

3

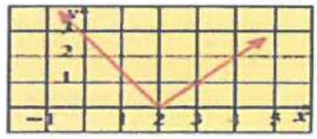


$\lim_{x \to 3} f(x)$ ....

$f(3)$ ....

ماذا تلاحظ؟

4



$\lim_{x \to 3} f(x)$ ....

$f(3)$ ....

ماذا تلاحظ؟

تعريف (8): الاتصال عند نقطة

تكون الدالة f متصلة عند $x = c$ في مجالها إذا كانت $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

من التعريف السابق نجد أنه لتكون f متصلة عند c يجب أن تتوافر الشروط الثلاثة التالية:

1. الدالة f معرّفة عند $x = c$ أي $f(c)$ موجودة.
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

وإذا لم يتحقق أيّ شرط من الشروط السابقة فنقول إن f منفصلة (ليست متصلة) عند $x = c$.

مثال (1)

لتكن f :
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & : x \geq 1 \\ 5x - 1 & : x < 1 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 1$..

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل (1)

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x & : x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & : x>0 \end{cases}$$

ابحث اتصال f عند $x=0$

مثال (2)

لتكن f :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & : x>3 \\ 7 & : x\le 3 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x=3$.

حاول أن تحل (2)

2 ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & : \ x < 2 \\ 1 & : \ x = 2 \\ x^2+1 & : \ x > 2 \end{cases}$$

مثال (3)

ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$ حيث

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{|x-2|} & : x\neq 2\\ 1 & : x=2\end{cases}$$

كل عسير اذااستعنت بالله فهو يسير

حاول أن تحل (2)

ابحث اتصال الدالة f عند $x=-1$ حيث

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+1|}{x+1}-2x & : x\neq -1\\ 2 & : x=-1\end{cases}$$

وفقك الله دائما

(6 - 1) نظريات الاتصال

نظرية (14): خواصّ الدوالّ المتّصلة

Properties of Continuous Functions

إذا كانت f ، g دالتين متصلتين عند $x = c$، فإنّ الدوال التالية هي دوالّ متصلة عند $x = c$

الجمع:	$f + g$	1
الطرح:	$f - g$	2
الضرب في ثابت: $k \in \mathbb{R}$	$k \cdot f$.	3
الضرب:	$f \cdot g$	4
القسمة: $g(c) \neq 0$	$\frac{f}{g}$.	5

دوال متصلة — Continuous Functions

1. الدالة f : $f(x) = k$ حيث k ثابت متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
2. الدالة كثيرة الحدود متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
3. الدالة الحدودية النسبية $\frac{f}{g}$ متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.
4. الدالة f : $f(x) = |x|$ متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
5. الدوال المثلثية متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.

ابحث اتصال الدالة f عند العدد المبين

1) $f(x) = 5 \quad , x = -1$

....

....

2) $f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad , x = 2$

....

....

3) $f(x) = |x| \quad , x = -3$

....

....

اول النخلة نواة

$4)\ f(x)=\sin x \qquad , x=\frac{\pi}{2}$

....

....

$5)\ f(x)=\frac{3x-2}{x+3} \qquad , x=2$

....

....

اتصال الدوال الجذرية عند نقطة

نظرية (15)

(a) الدالة الجذرية $y=\sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x=c : c\in\mathbb{R}^+$ ، n عدد صحيح زوجي موجب،
ومتصلة عند كل $x=c : c\in\mathbb{R}$ ، n عدد صحيح فردي اكبر من 1.

(b) إذا كانت f دالة متصلة عند $x=c$ وكانت $f(c)>0$
فإن الدالة: $g(x)=\sqrt{f(x)}$ متصلة عند $x=c$

$6)\ f(x)=\sqrt{x} \qquad , x=3$

....

....

$7)\ f(x)=\sqrt[3]{x} \qquad , x=-2$

....

....

$8)\ f(x)=\sqrt{x+3} \qquad , x=-1$

....

....

....

....

....

اننا نصنع مصائرنا،اننا نصبح مانفعله

مثال / حاول أن تحل (1)

ابحث اتصال الدالة f عند x = 3

$$f(x)=x^2+4x+3+|x|$$

ابحث اتصال الدالة f عند x=-3

$$f(x)=x^2+4x+3-\sqrt[5]{x}$$

مالم تبداه اليوم لن يكتمل الغد

مثال / حاول أن تحل (3)

ابحث اتصال الدالة f عند x=1

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+9}$$

ابحث اتصال الدالة f عند x=-2

$$f(x)=\frac{\tan x}{x+1}$$

ابحث اتصال الدالة f عند x=-2

$$f(x)=\sqrt{x^2-3}+|x|$$

الفشل ليس عند الخسارة الفشل عند الانسحاب

مثال (4)

الدالتان g ، f معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^2 - 1$ ، $f(x) = 1 + x$ أوجد:

a $(g \circ f)(x)$ b $(g \circ f)(2)$ c $(f \circ g)(x)$ d $(f \circ g)(2)$

حاول أن تحل

4 إذا كانت g ، f معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 3$ ، $f(x) = 2x + 3$ أوجد:

a $(g \circ f)(x)$ b $(g \circ f)(-1)$ c $(f \circ g)(x)$ d $(f \circ g)(-1)$

الطموح هو الوقود للوصول الى النجاح

مثال (5)

لتكن: $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^4+2$

أوجد:

(a) $(f\circ g)(x)$ (b) $(f\circ g)(0)$ (c) $(g\circ f)(x)$ (d) $(g\circ f)(0)$

حاول أن تحل

5 لتكن: $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, $g(x)=\dfrac{3}{x^2+4}$ أوجد:

(a) $(f\circ g)(x)$ (b) $(g\circ f)(\sqrt{3})$

اذا لم تجد طريق اصنع واحدا

نظرية (16): اتصال الدوال المركّبة

إذا كانت f متصلة عند c ، و g متصلة عند $f(c)$ فإن الدالّة المركّبة $g \circ f$ متصلة عند c.

مثال (6) لتكن: $f(x)=x^2+5$, $g(x)=\sqrt{x}$. ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x=-2$.

كراسة التمارين (9) لتكن: $f(x)=2x^2-3$ ، $g(x)=\sqrt{x+4}$. ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x=-2$.

اليأس ليس من شيم الأبطال

حاول أن تحل (6)

لتكن: $g(x)=2x+3$, $f(x)=\frac{|x|}{x+2}$. ابحث اتصال الدالة $f\circ g$ عند $x=1$

ثق في نفسك

مثال (6)

لتكن: $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

حاول أن تحل (6)

لتكن: $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

انت قادر ان تفعلها

(7 - 1) الاتصال على فترة

الاتّصال على فترة　Continuity on an Interval

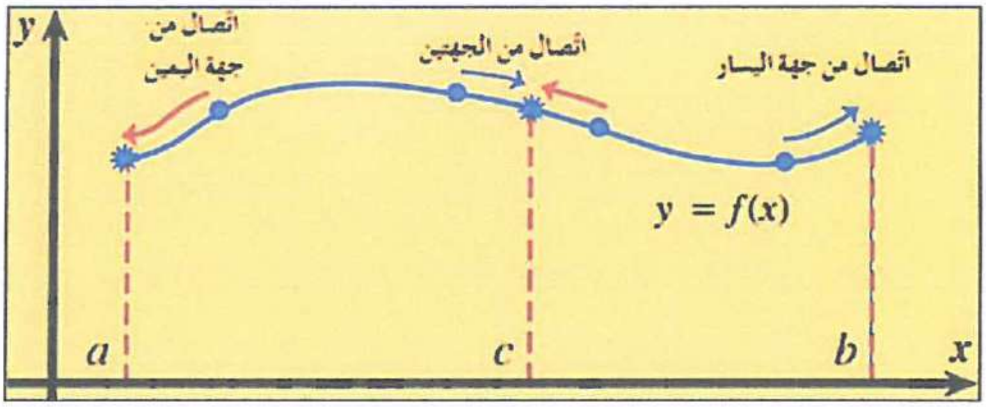
تعريف (9) الاتّصال على فترة مفتوحة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة (a , b) فإننا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة (a , b) إذا كانت f متصلة عند كل x تنتمي إلى الفترة (a , b)

تعريف (10) الاتّصال على فترة مغلقة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة $[a , b]$ فإننا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a , b]$ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

1. الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة (a , b)
2. الدالة f متصلة عند $x = a$ من جهة اليمين أي أن: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$
3. الدالة f متصلة عند $x = b$ من جهة اليسار أي أن: $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$



الاتصال عند النقاط a , b , c للدالة $y = f(x)$ والمتصلة على الفترة $[a , b]$.

ملاحظات:

أوّلًا: إذا تحقق الشرطان 2 ، 1 من التعريف (10) نقول إن **الدالة f متصلة على $[a , b)$.**

ثانيًا: إذا تحقق الشرطان 3 ، 1 من التعريف (10) نقول إن **الدالة f متصلة على $(a , b]$.**

ثالثًا: تبقى النظرية (14) صحيحة إذا استبدلنا النقطة بفترة بحيث تكون هذه الفترة مجموعة جزئية من مجال الدالة.

رابعًا: إذا كانت الدالة متصلة على فترة ما فإنها متصلة على أي فترة جزئية منها.

خامسًا: إذا كانت الدالة متصلة على كل من الفترتين $[a , c]$ ، $[c , b]$ فإن الدالة متصلة على $[a , b]$.

سادسًا: يبقى التعريف (10) صحيحًا في حالة الفترات على الصورة $[a , \infty)$ ، $(-\infty , b]$.

مثال (1) ادرس اتصال كل من الدوال التالية على الفترة المبينة :

$a) f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}, \quad [-1,5]$

....

....

....

....

$b) f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}, \quad [0,5]$

....

....

....

....

حاول أن تحل (1)

$a) f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+2}, \quad [0,3]$

....

....

....

....

$b) f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}, \quad [0,2]$

....

....

....

....

مثال (2)

ادرس اتصال الدالة f على $[1,3]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}-2 & : x=1\\ x^2-3 & : 1<x<3\\ 6 & : x=3\end{cases}$$

الخطأ يسبق الصواب والفشل يسبق النجاح

حاول أن تحل (2)

ادرس اتصال الدالة f على $[1,5]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & : \ x=1 \\ \dfrac{x^2+1}{x} & : \ 1<x<5 \\ \dfrac{26}{5} & : \ x=5 \end{cases}$$

ان الله لا يغير مابقوم حتي يغيروا ما بانفسهم

مثال (3)

ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x\le -1 \\ \dfrac{4}{x+3} & : \quad x>-1 \end{cases}$$

لكل نجاح بداية ولكل فشل نهاية

حاول أن تحل (3)

لتكن f :

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & , \quad x<1 \\ -x+2 & , \quad 1\le x<3 \\ 1 & , \quad x\ge 3 \end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة f على مجالها.

مثال (4)

لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} x^2-a & : \quad x<0 \\ 2 & : \quad x=0 \\ ax+b & : \quad x>0 \end{cases}$$

متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

أوجد قيمة الثابتين a ، b

احسن استغلال وقتك

حاول أن تحل

4 لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases}5 & : \quad x=1\\ ax+b & : \quad 1<x<4\\ b+8 & : \quad x=4\end{cases}$$

متصلة على $[1,4]$. أوجد قيم الثابتين a , b

الصعب ليس في الوصول الي القمة الصعب في الحفاظ عليها

تعميم:

إذا كانت الدالة g متصلة على فترة ما، $g(x) \geqslant 0$ في هذه الفترة فإن الدالة $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة على هذه الفترة.

مثال (5)

لتكن f: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-5, 0]$.

حاول أن تحل (5)

لتكن f: $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[6, 10]$.

من لم يتعلم في صغره لم يتقدم في كبره

مثال (6)

لتكن f: $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.
ادرس اتصال الدالة f على $[-3, 3]$.

....

حاول أن تحل (6)

لتكن f : $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$.
ادرس اتصال الدالة f على $[1, 3]$.

....

العلم هو الخير والجهل هو الشر

ملاحظة:

ناتج تركيب دالتين كل منهما متصلة على $\mathbb{R}$ هو دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

مثال (7)

لتكن: $f(x)=\sqrt[3]{x^2-5x+4}$. ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

حاول أن تحل (7)

لتكن: $f(x)=\sqrt[3]{-x^2+2x+5}$.

ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

نطمح
نحلم
نتامل
نحاول
نجتهد
ننجح
ننال
المستحيل

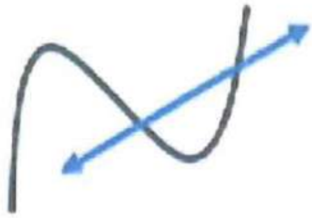
الاشتقاق

السرعة المتوسطة =

متوسط معدل التغير=

ميل القاطع=

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



السرعة اللحظية =

معدل التغير=

ميل المماس=

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

تعريف المشتقة

التعريف الأساسي =

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(ان وجدت النهاية)

لا يستخدم إلا إذا طلب $f'(x)$
أو مشتقة الدالة دون تحديد النقطة

التعريف البديل =

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(ان وجدت النهاية)

يجب تحديد نقطة

Senior
2020
المستقبل
لك
ان شاء
الله

(1 - 2) معدلات التغير وخطوط المماس

مثال (1)

أوجد ميل المماس للقطع المكافئ $y = x^2$ عند النقطة $P(2,4)$.

حاول أن تحل (1)

1 أوجد ميل المماس للقطع المكافئ $y = (x-2)^2 + 2$ عند النقطة $A(1,3)$

كن ايجابيا ولا تنظر خلفك

(2 - 2) المشتقة

حاول أن تحل (5)

5 لتكن $f(x) = x^2 + 2$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة.

مثال (5)

لتكن $f(x) = x^3$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة إن وجدت.

كن طموحا لكي تصل الي اهدافك

مثال (1)

باستخدام التعريف، أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = 2x^2 + 1$ عند $x = 1$

حاول أن تحل (1)

1 باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f: $f(x) = 3x^2$ عند $x = -2$

احد اسرار النجاح في الصبر والمثابرة

مثال (2)

باستخدام التعريف البديل. أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = \sqrt{x}$ عند $x = a$ حيث $a > 0$

هل اديت فروضك ؟؟

حاول أن تحل (2)

2 أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = \frac{1}{x}$ عند $b \neq 0$ ، $x = b$

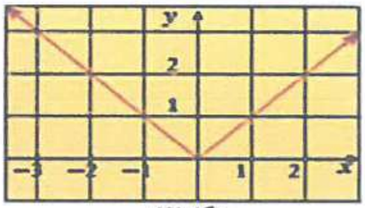
بالسؤال يتعلم الانسان

متى تكون $f'(a)$ غير موجودة؟

الدالة f لن يكون لها مشتقة عند نقطة $P(a, f(a))$ إذا كانت $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ غير موجودة.

وتوضح الأشكال التالية أربع حالات تكون فيها هذه النهاية غير موجودة.

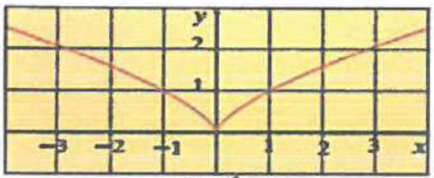
a ركنًا (Corner): تكون المشتقتان من جهة اليمين ومن جهة اليسار عند التقاء الشعاعين غير متساويتين.
مثال، $f(x) = |x|$



شكل (3)

يوجد ركن عند $x = 0$ ، $f'(0)$ غير موجودة

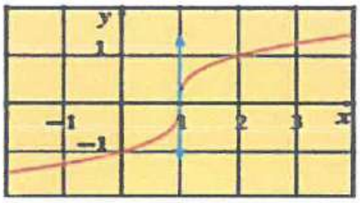
b نابًا (Cusp): يكون ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطع محددة يقترب من ∞ في إحدى الجهات ويقترب من $-\infty$ في الجهة الثانية ويوجد مماس رأسي عندها. مثال، $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$



شكل (4)

يوجد ناب عند $x = 0$ ، $f'(0)$ غير موجودة ويوجد مماس رأسي عندها

c مماسًا رأسيًا: يكون المماس للمنحنى عند نقطة محددة رأسيًا.

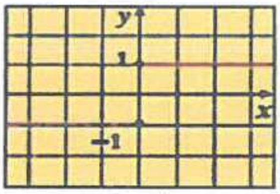


شكل (5)

يوجد مماس رأسي عند $x = 1$ ، $f'(1)$ غير موجودة

d عدم اتصال: تكون المشتقة من جهة واحدة أو كلّ من الجهتين غير موجودة. مثال،

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$



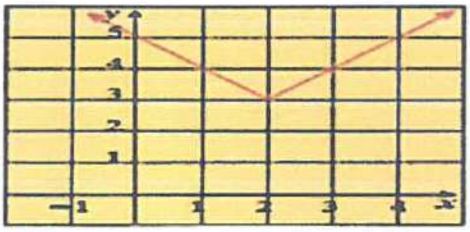
شكل (6)

يوجد عدم اتصال عند $x = 0$ ، $f'(0)$ غير موجودة

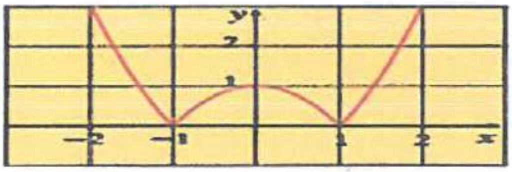
تدريب

أوجد كل النقاط في مجال الدالة حيث تكون الدالة غير قابلة للاشتقاق في كل مما يلي:

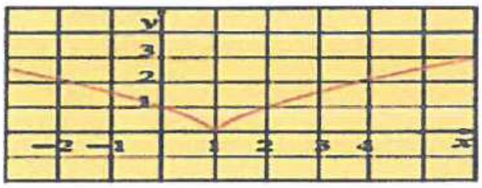
a $f(x) = |x-2| + 3$



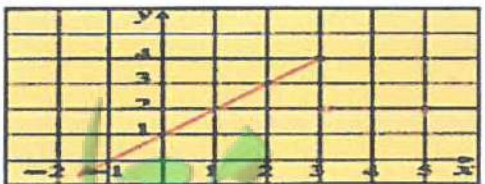
b $f(x) = |x^2 - 1|$



c $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}$



d $f(x) = \begin{cases} 2 & : x > 3 \\ x+1 & : x \leq 3 \end{cases}$



الاشتقاق والاتصال

إذا كانت الدالة f ليست متصلة عند نقطة $(a , f(a))$ فإنها غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

نظرية الاشتقاق والاتصال

إذا كانت الدالة f لها مشتقة عند نقطة، فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة.

مثال (6)

لتكن f : $f(x)=\begin{cases} x^2 & : x<2 \\ 2x-1 & : x\geq 2 \end{cases}$ ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x=2$.

حاول أن تحل

6 لتكن f : $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & , x\leq 2 \\ 3x-2 & , x>2 \end{cases}$ ، ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x=2$.

اذهب وقبل يدي والديك واشكرهم
او ادعى لهما بالمغفرة والرحمة

مثال (7)

لتكن f : $f(x) = \begin{cases} 6x-1 & , \quad x > \frac{1}{2} \\ 2x+1 & , \quad x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$ بيّن أن الدالة f متصلة عند $x = \frac{1}{2}$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عندها.

لايوجد مستحيل

حاول أن تحل

3 لتكن f : $f(x) = |x - 2|$ ، ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x = 2$.

الفرق بين الاغبياء والاذكياء،الاغبياء يملكون حلما ، الاذكياء يملكون هدفا

مثال (9)

لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x+5 & : x\leqslant 3 \\ x^2-1 & : x>3 \end{cases}$ اوجد إن أمكن $f'(3)$

وفقك الله دائما

حاول أن تحل

9 لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases}x^2+x & : x\leqslant -1\\ x^2-x-2 & : x>-1\end{cases}$ أوجد إن أمكن $f'(-1)$.

كل عسير اذااستعنت بالله فهو يسير

قواعد الاشتقاق

قاعدة (1): مشتقة دالة ثابتة **Derivative of a Constant Function**

إذا كانت $f(x) = k$ حيث k عدد ثابت فإن $f'(x) = 0$ لجميع قيم x الحقيقية.

قاعدة (2): مشتقة الدالة $f(x) = x$
Derivative of the Function $f(x) = x$

إذا كانت $f(x) = x$ فإن $f'(x) = 1$
لجميع قيم x الحقيقية

قاعدة (3): قاعدة القوى للأسس الصحيحة الموجبة للمتغير x
Power Rule for Positive Integer Powers of x

إذا كان $f(x) = x^n$ حيث n عدد صحيح موجب $n \neq 1$ فإن:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}$$

أي أن: $f'(x) = nx^{n-1}$

قاعدة (4): قاعدة الضرب بعدد ثابت **The Constant Multiple Rule**

إذا كانت f دالة في x قابلة للاشتقاق وكان k عددًا ثابتًا فإن:

$$\frac{d}{dx}(kf(x)) = k\frac{d}{dx}f(x)$$

أي أن: $(kf(x))' = kf'(x)$

قاعدة (5): قاعدة الجمع والطرح **The Sum and Difference Rule**

إذا كانت f ، g دالّتين في x قابلتين للاشتقاق، فإنّ مجموعهما والفرق بينهما يكونان قابلين للاشتقاق عند كلّ نقطة تكون عندها كلّ من f ، g قابلة للاشتقاق.

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) \pm \frac{d}{dx}(g(x))$$

أي أن: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

قاعدة (6): اشتقاق ضرب دالتين **The Product Rule**

ضرب دالّتين f ، g في x قابلتين للاشتقاق يكون قابلًا للاشتقاق بحيث:

$$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = f(x)\cdot\frac{d}{dx}(g(x)) + g(x)\cdot\frac{d}{dx}(f(x))$$

أي أن: $(f(x)\cdot g(x))' = f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x)$

قاعدة (7): قاعدة القسمة **The Quotient Rule**

لتكن f ، g دالتين في x قابلتين للاشتقاق حيث $g(x) \neq 0$ فإن:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$$

أي أن:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

قاعدة (8): قاعدة القوى للأسس الصحيحة السالبة للمتغير x
Power Rule for Negative Integer Powers of x

إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا، $x \neq 0$ فإن:

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -n\,x^{-n-1}$$

أي أن $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$

قاعدة (9)

إذا كان $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ حيث n ، m عددان صحيحان، $n \neq 0$ فإن: $\frac{d}{dx}(x^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$

لجميع قيم x التي تكون المشتقة عندها موجودة.

أي أن $(x^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n}(x)^{\frac{m}{n}-1}$

مثال (1)

أوجد $\frac{dy}{dt}$ حيث $y = t^3 + 6t^2 - \frac{5}{3}t + 16$

....

....

....

حاول أن تحل

1 أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y = 5x^3 - 4x^2 + 6$ عند $x = -1$

....

....

....

مثال

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة: $f(x) = x - \frac{4}{x}$. عند $x = 1$

....

....

....

مثال (7)

أوجد مشتقة الدالة f: $x > 0$ ، $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$

....

....

....

حاول أن تحل

7 أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$

....

....

....

يمكن استنتاج أن: إذا كانت $f(x) = \sqrt{x}$ تكون $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

مثال (8)

لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & : x\leqslant 1\\ 2x+1 & : x>1\end{cases}$ دالة متصلة على مجالها.

أوجد $f'(x)$ إن أمكن

حاول أن تحل

8 أوجد المشتقة إن أمكن لكل من الدوال المتصلة التالية:

a $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & : \quad x \leqslant 2 \\ 4x-3 & : \quad x > 2 \end{cases}$

لا احد يبدأ من القمة ، عليك ان تشق طريقك اليها

حاول أن تحل

8 أوجد المشتقة إن أمكن لكل من الدوال المتصلة التالية:

b $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : \quad x < 1 \\ 2\sqrt{x} & : \quad x \geq 1 \end{cases}$

قيل لنابليون بونابرت يوما ان جبال الاب شاهقة تمنع تقدمك ، فقال يجب ان تزول من الارض

مثال (3)

أوجد مشتقة $f(x) = \frac{x^3 - 1}{5x^2 + 1}$

حاول أن تحل

3 أوجد مشتقة $f(x) = \frac{4x^2 + 2x}{2x^3 + 5}$

النجاح ملك من يدفع ثمنه

مثال (4)

أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم عند النقطة $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ لمنحنى الدالة f حيث $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+2}$

لا نحقق الاعمال بالامنيات وانما بالارادة نصنع المعجزات

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة f حيث $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ عند النقطة $(1, 0)$

قد تتعثر احيانا
وتسقط احيانا اخري
انهض وواصل الطريق

(4 - 2) مشتقات الدوال المثلثية

قوانين الاشتقاق

$f(x)=\sin x \rightarrow f'(x)=\cos x$

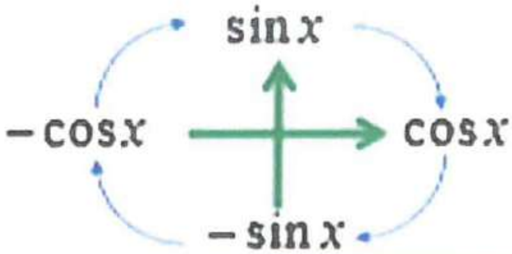
$f(x)=\cos x \rightarrow f'(x)=-\sin x$

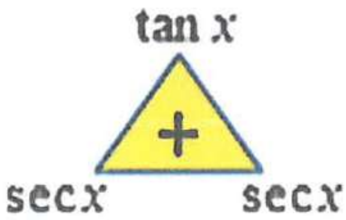
$f(x)=\tan x \rightarrow f'(x)=\sec^2 x$

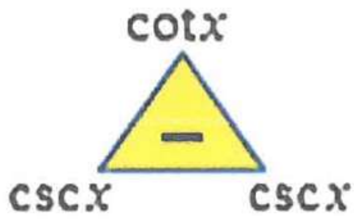
$f(x)=\cot x \rightarrow f'(x)=-\csc^2 x$

$f(x)=\sec x \rightarrow f'(x)=\sec x \tan x$

$f(x)=\csc x \rightarrow f'(x)=-\csc x \cot x$







تبسيط الدوال المثلثية

$\frac{1}{\sin x}=\csc x$ $\quad$ $\frac{1}{\cos x}=\sec x$ $\quad$ $\frac{1}{\tan x}=\cot x$

$\frac{1}{\csc x}=\sin x$ $\quad$ $\frac{1}{\sec x}=\cos x$ $\quad$ $\frac{1}{\cot x}=\tan x$

أوجد مشتقات الدوال التالية:

$f(x) = \tan x + \cot x$

من لا يشكر الناس لا يشكر الله

$g(x) = \sec + \csc x$

$f(x) = \dfrac{1 + \tan x}{\tan x}$

اشكر ثلاث اشخاص غدا

$h(x) = \dfrac{\sec x}{\csc x}$

$g(x) = \sec x \cdot (1 + \sin x)$

أوجد مشتقات الدوال التالية:

$y = x^2 \sin x$

$h(x) = \csc x + \sin x \cdot \tan x$

$g(x) = \dfrac{x}{\cos x}$

قد تكون افضل الطرق اصعبها لكن عليك دائما اتباعها

أوجد مشتقات الدوال التالية:

$$y=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$$

$$u=\frac{\cos x}{1-\sin x}$$

الحكمة هي ان تعرف ما الذي يجب ان تفعله

مثال (3)

أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \tan x$ عند النقطة $P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

يقول اينشتاين : ليس الامر اني عبقري ،كل
ماهنالك اني اجاهد مع المشاكل لفترة اطول

حاول أن تحل

3 أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \sec x$ عند النقطة $F\left(\frac{\pi}{3} , 2\right)$

احد اسرار النجاح في الصبر والمثابره

(5 - 2) قاعدة السلسلة

قاعدة السلسلة (التسلسل) **Chain Rule**

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند $g(x)$، الدالة g قابلة للاشتقاق عند x، فإن الدالة المركبة

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

تكون قابلة للاشتقاق عند x ، ويكون:

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

مثال (1)

إذا كان $g(x)=x^{10}$ ، $f(x)=3x^2+1$. فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة

a) $(f\circ g)'(x)$

b) $(g\circ f)'(-1)$

النجاح ان تفعله

حاول أن تحل

b لتكن: $g(x) = x^{13}$, $f(x) = -2x^3 + 4$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$ ، $(g \circ f)'(0)$

في لفظ القمة شيء يقول لك قم

مثال (2)

لتكن: $g(x) = x^2 + 1$ ، $(x \neq 0)$ $f(x) = \frac{2x+1}{x}$

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$

تعود على العادات الحسنة وهي سوف تصنعك

حاول أن تحل

2 لتكن: $g(x) = \sqrt{x}$ ، $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة (1) $(f \circ g)'$

الفاشلون ينحنون للعقبات ، الابطال يجعلون العقبات تنحني لهم

صورة أخرى لقاعدة السلسلة

إذا كانت $u = g(x)$ ، $y = f(u)$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

يتم حسابها عند $u = g(x)$

مثال (3)

إذا كانت: $u = 5x^2 + 2$ ، $y = u^3 - 3u + 1$ فأوجد: $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة السلسل

حاول أن تحل

3 لتكن: $u = 2x^3 + x$ ، $y = u^2 + 4u - 3$ أوجد: $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة السلسل.

تتعلم من الفشل اكثر من النجاح

قاعدة سلسلة القوى

إذا كانت $f(x)$ قابلة للاشتقاق على مجالها وكان n عددًا نسبيًا فإن:

$$\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

مثال (6)

لنأخذ: $y = \sqrt[5]{(x^2+3x+5)^3}$ ، أوجد: y'

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل

6 لتكن: $y = \sqrt[4]{(2x^4-3x^2+4)^3}$ ، أوجد: y'

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ثق بنفسك ، فانت تعرف اكثر مما تعتقد

حاول أن تحل

4 أوجد مشتقة $y = \sin(x^2 + x)$ بالنسبة إلى المتغيّر x.

مثال (5)

أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \sin^3 x$ باستخدام قاعدة السلسلة.

حاول أن تحل

5 أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \cos^5 x$ باستخدام قاعدة السلسلة.

مثال (7)

أوجد ميل مماس المنحنى $y = \sin^5 x$ عند $x = \frac{\pi}{3}$

حاول أن تحل

7 بيّن أن ميل أي مماس للمنحنى $y = \frac{1}{(-2x-1)^3}$ دائمًا يكون موجبًا حيث $x \neq -\frac{1}{2}$

الفوز هو ان تتقدم لا ان يتراجع منافسوك

(6 - 2) المشتقات ذات الرتب العليا

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}\left(y^{(n-1)}\right) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

مثال (1)

أوجد المشتقات حتى الرتبة الرابعة للدالة $y = 2x^7 - 4x^2 + 3x - 5$ بدلالة المتغير x.

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل

1 إذا كانت: $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$ فأوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة.

....

....

....

....

....

....

مثال (2)

إذا كانت $y = \sin x$ ، بيّن أن $y^{(4)} = y$.

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل

2 لتكن الدالة: $y = \cos x$. بيّن أن $y^{(4)} + y'' = 0$.

مثال (3)

أوجد y'' حيث $y = \frac{1}{\cos x}$

حاول أن تحل

3 أوجد y'' حيث $y = \frac{1}{\sin x}$

كن طموحا لكي تصل الي اهدافك

(6 - 2) الاشتقاق الضمني

وعمومًا، تتمّ عمليّة الاشتقاق الضمني وفق الخطوات التالية على الترتيب:

1 اشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير x.

2 تجميع الحدود التي تحتوي $\frac{dy}{dx}$ أو y' في أحد أطراف المعادلة.

3 إخراج $\frac{dy}{dx}$ أو y' كعامل مشترك.

4 كتابة المعادلة على الصورة $\frac{dy}{dx}$ أو y' بدلالة x , y.

مثال (4)

أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ في الحالات التالية:

a $y^2 + xy = 7x$

....

....

....

....

....

....

b $y = x + x^2y^5$

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل

4 لتكن: $y^2 = x^2 - 2x$ ، أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$.

....

....

....

....

....

من لم يتعلم في صغره لم يتقدم في كبره

مثال (5)

أوجد ميل المماس للمنحنى (الدائرة) الذي معادلته $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(3 , -4)$.

حاول أن تحل

5 أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1 , 1)$

لا ياس مع الحياة ولا حياة مع الياس

مثال (6)

أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $2y = x^2 + \sin y$ عند النقطة $(2\sqrt{\pi}\ ,\ 2\pi)$

حاول أن تحل

6 أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $x^2 + y^2 - 2xy = 0$ حيث $x \neq y$ عند النقطة $(2, 2)$

تستطيع ان تفعلها

مثال (7)

للمنحنى الذي معادلته $x = y + 2\sqrt{y}$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(3\ ,\ 1)$

حاول أن تحل

7 للمنحنى الذي معادلته: $y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1\ ,\ 1)$

هل اديت فروضك ؟؟

براهين وإثباتات

مثال (8)

إذا كانت $y = \sqrt{1 - 2x}$ فأثبت أن: $yy'' + (y')^2 = 0$

ثق في نفسك

حاول أن تحل

8 إذا كانت $y = x\sin x$ فأثبت أن $y''' + y' + 2\sin x = 0$

احسن استغلال وقتك

تطبيقات

(1 - 3) النقاط الحرجة

Senior
2020
المستقبل
لك
ان شاء
الله

تعريف (3): النقطة الحرجة **Critical Point**

النقطة الداخلية للدالّة f $(c , f(c))$ تسمى نقطة حرجة عندما $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.

ملاحظة: يسمى العدد c العدد الحرج.

حاول أن تحل

2 أوجد النقاط الحرجة لكل من الدوال المتصلة التالية:

a $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 10$

كن ايجابيا ولا تنظر خلفك

(1 - 3) القيم القصوى المطلقة

نظرية (1): نظرية القيمة القصوى

إذا كانت f دالّة متصلة على فترة مغلقة $[a , b]$ فإن f تكون لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة.

مثال (3)

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالّة المتصلة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[0, 3]$.

هل اديت فروضك ؟؟

حاول أن تحل

3 أوجد القيم القصوى المطلقة للدالّة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[-2, 1]$.

مثال (4)

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ في الفترة $[-2, 3]$

اذهب وقبل يدي والديك واشكرهم
او ادعى لهما بالمغفرة والرحمة

حاول أن تحل

4 أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ في الفترة $[1, 3]$

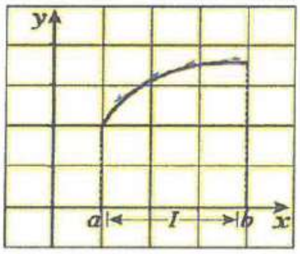
تستطيع ان تفعلها مهما كانت

* **التقعر – نقطة الانعطاف**

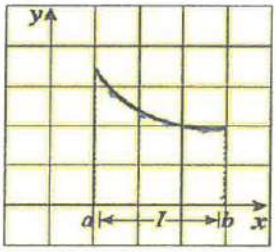
تعريف : (5) التقعّر :-

إذا وقع منحنى الدالة أعلى جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعرًا لأعلى على I.

وإذا وقع منحنى الدالة أسفل جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعرًا لأسفل على I.



المنحنى مقعر لأسفل

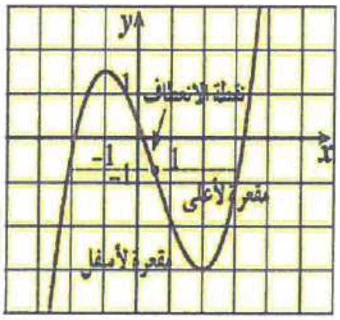


المنحنى مقعر لأعلى

اختبار التقعّر :

إذا كانت $\forall x \in I \;,\; f''(x) > 0$ فإن منحنى الدالة f مقعرًا لأعلى على I

إذا كانت $\forall x \in I \;,\; f''(x) < 0$ فإن منحنى الدالة f مقعرًا لأسفل على I.



نقطة الانعطاف : تعريف :(6) نقطة الانعطاف

تسمّى النقطة $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f إذا كانت f دالة متصلة عند c،

ومنحنى الدالة f يغيّر تقعّره عند هذه النقطة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى.

إذا كانت $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لبيان الدالة f فإن $f''(c) = 0$ أو $f''(c)$ غير موجودة.

حاول أن تحل رقم (3) ص 144

أوجد فترات التقعّر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة f: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

التاريخ: / /٢٠١٩

* اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية

نظرية :(6) اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحليّة

إذا كانت $f'(c)=0$ ، $f''(c)<0$ ، فإن f تكون لها قيمة عظمى محليّة عند $x=c$

إذا كانت $f'(c)=0$ ، $f''(c)>0$ ، فإن f تكون لها قيمة صغرى محليّة عند $x=c$

ملاحظة : الاختبار لا يصلح (يفشل) إذا كانت $f''=0$ أو لا يكون لها وجود.
عندما يحدث ذلك نعود إلى اختبار المشتقة الاولى للبحث عن القيم القصوى المحليّة

حاول أن تحل رقم (4) ص 146

استخدم اختبار المشتقة الثانية لتجد القيم القصوى المحلية للدالة f: $f(x)=4x^3-12x^2$

كراسة التمارين : ص 56 :

رقم (15) استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للدالة:

$f(x)=x^2-6x+11$

$f(x)=x^4-18x^2$

التاريخ: / /٢٠١٩

* رسم بيان دوال كثيرات الحدود

<u>الخطوات اللازم اتباعها في دراسة تغير الدالة كثيرة الحدود ورسم بيانها</u>

1- عيّن مجال الدالة f .
2- أوجد النهايات عند الحدود المفتوحة لمجال الدالة f .
3- عيّن النقاط الحرجة للدالة f .
4- كوّن جدولًا لدراسة إشارة f' وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية
5- كوّن جدولًا لدراسة إشارة f'' وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت
6- أوجد نقاطًا إضافية.
7- ارسم بيان الدالة f .

<u>حاول أن تحل رقم (1) ص 149</u>

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها

التاريخ: / /٢٠١٩

صفحة بيانية

التاريخ: / /٢٠١٩

كتاب الطالب رقم (2) ص 149

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها

التاريخ: / /٢٠١٩

صفحة بيانية

(5 – 3) تطبيقات على القيم القصوى

مثال (1)

عددان موجبان مجموعهما 100 ومجموع مربعيهما أصغر ما يمكن، ما العددان؟

لا نحقق الآمال بالامنيات وانما بالإرادة نصنع المعجزات

التاريخ: /   /٢٠١٩

حاول أن تحل رقم (1) ص 156

أوجد عددين مجموعهما 14 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن.